Klügel

Math.u. 90 m 6,2

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

<36605294460014

<36605294460014

Bayer. Staatsbibliothek

Supplemente

zu

Georg Simon Klügel's

Wörterbuche

der

reinen Mathematik.

Herausgegeben

von

Johann Auguſt Grunert,

Doctor der Philoſophie und ordentlichem Profeſſor der Mathematik an der Univerſität zu Greifswald, Ehrenmitgliede der Königl. Preuß. Akademie der Wiſſenſchaften zu Erfurt.

Zweite Abtheilung

E bis Z.

Mit vier Kupfertafeln.

Leipzig, 1836.

Bei E. B. Schwickert.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

E.

Ebene. Einige Geſetze über die Theilung der Ebene und des Raumes von Steiner in Crelles Journal. B. I. S. 349. Wegen der analytiſchen Behandlung der Ebene ſ. m. den Artikel Linie, gerade.

Ecke. Wenn mehrere, wenigſtens drei, Ebenen in einem Punkte zuſammenſtoßen, ſo ſagt man, daß ſie in demſelben eine Ecke bilden. Man ſieht alſo, daß dieſer Begriff der Stereometrie angehört, und daß die in der Geometrie der Ebene vorkommenden Benennungen: Dreieck, Viereck, Fünfeck, Vieleck ſtreng genommen falſch ſind, indem es eigentlich Dreiſeit, Vierſeit, Fünfſeit, Vielſeit heißen müßte. Jeder bloß von Ebenen umſchloſſene Körper hat eine gewiſſe Anzahl Ecken, weshalb Körper dieſer Art auch gewöhnlich eckige Körper genannt werden. Eine merkwürdige Relation zwiſchen der Anzahl der Ecken, Seitenflächen und Kanten eines eckigen Körpers giebt der Euler'ſche Satz an, worüber der Art. Vieleckiger Körper (1.) nachzuſehen iſt.

Eckige Körper, ſ. Ecke.

Einhüllende Curven und Flächen (enveloppes).

1. Sey $V = \varphi(x, y, a) = 0$ die Gleichung einer beliebigen Curve von einfacher Krümmung und a eine Größe, die zwar in Bezug auf x und y in derſelben Curve als conſtant betrachtet wird, welcher man aber doch jeden beliebigen Werth beilegen kann, wodurch man, wenn man dieſe Größe ſich ſtetig verändern läßt, eine ſtetige Folge zwar unter einander verſchiedener, aber doch einander ähnlicher oder einem gemeinſchaftlichen durch die obige Gleichung ausgedrückten Geſetze unterworfener Curven erhalten wird, deren auf einander folgende Durchſchnittspunkte offenbar eine gewiſſe Curve bilden werden, welche alle dieſe Curven berührt und daher die einhüllende Curve (enveloppe), auch wohl die Gränzcurve derſelben genannt wird. Zu den Gleichungen dieſer einhüllenden oder Umhüllungscurven gelangt man auf folgende Art.

Iſt nämlich die obige Gleichung

$$V = \varphi(x, y, a) = 0$$

die Gleichung einer beliebigen der gegebenen Curven, ſo geht man zu der Gleichung der nächſtfolgenden Curve über, wenn man a ſich um das unendlich kleine ∂a verändern läßt, ſo daß alſo die Gleichung der nächſtfolgenden Curve

$$\varphi(x, y, a + \partial a) = 0$$

iſt. Nach Principien der Differentialrechnung iſt aber

$$\varphi(x, y, a + \partial a) = V + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) \partial a,$$

und folglich

$$V + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) \partial a = 0$$

die Gleichung der nächſtfolgenden Curve. Für den Durchſchnittspunkt, oder, da es in gewiſſen Fällen offenbar mehrere geben kann, für die Durchſchnittspunkte der beiden ſtetig auf einander folgenden Curven müſſen x, y den beiden Gleichungen

$$V = 0, \; V + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) \partial a = 0,$$

oder

$$V = 0, \; \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) \partial a = 0$$

oder

$$V = 0, \; \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0$$

genügen, und man wird alſo eine allgemeine Relation zwiſchen den beiden Coordinaten x, y dieſer Durchſchnittspunkte, d. i. die geſuchte Gleichung der ſämmtliche in der Gleichung

$$V = \varphi(x, y, a) = 0$$

enthaltene Curven einhüllenden Curven erhalten, wenn man aus den beiden Gleichungen

$$V = 0, \; \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0$$

den ſogenannten in jeder einzelnen Curve conſtanten, von einer Curve zu der nächſt folgenden aber variabeln Parameter a eliminirt. Einige Beiſpiele werden dieſes allgemeine Verfahren erläutern.

2. Für die aus allen Punkten einer gegebenen geraden Linie mit demſelben Radius beſchriebenen Kreiſe die einhüllende Curve zu finden.

Der gemeinſchaftliche Halbmeſſer aller Kreiſe ſey ϱ, und

$$y = Ax + B$$

ſey die Gleichung des geometriſchen Orts der Mittelpunkte. Sind a, b die Coordinaten des Mittelpunkts eines beliebigen Kreiſes, ſo iſt deſſen Gleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \varrho^2,$$

und nach der Bedingung der Aufgabe hat man

$$b = Aa + B\,,$$

alſo

$$(x-a)^2 + (y-Aa-B)^2 = \varrho^2\,,$$

oder

$$V = (x-a)^2 + (y-Aa-B)^2 - \varrho^2 = 0\,.$$

Differentiirt man nun nach a, ſo erhält man

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = -2(x-a) - 2A(y-Aa-B) = 0\,,$$

und man muß alſo nach (1.), um die Gleichung der einhüllenden Curve zu finden, a aus den beiden Gleichungen

$$(x-a)^2 + (y-Aa-B)^2 = \varrho^2\,,$$
$$(x-a) + A(y-Aa-B) = 0$$

eliminiren. Aus der zweiten Gleichung erhält man

$$a = \frac{x + A(y-B)}{1+A^2}\,,$$

welches, in die erſte Gleichung geſetzt, giebt:

$$(y-Ax)^2 + A^2B^2 = (1+A^2)\varrho^2\,,$$
$$(y-Ax)^2 = \varrho^2 + A^2(\varrho^2-B^2)\,,$$
$$y = Ax \pm \sqrt{\varrho^2 + A^2(\varrho^2-B^2)}\,.$$

Dies ſind die Gleichungen zweier der geraden Linie, in welcher die Mittelpunkte ſämmtlicher Kreiſe liegen, paralleler gerader Linien, von denen alſo, wie es in der That auch ſeyn muß, dieſe Kreiſe eingehüllt werden. Nähme man den geometriſchen Ort der Mittelpunkte als Axe der x an, ſo wäre $A = B = 0$, folglich die Gleichung der beiden einhüllenden geraden Linien nach dem Obigen $y = \pm\varrho$, woraus man zugleich ſieht, daß, wie es in der That auch ſeyn muß, die Entfernungen der beiden einhüllenden Geraden von dem geometriſchen Orte der Mittelpunkte $= \pm\varrho$ ſind.

3. Die einhüllende Curve der aus allen Punkten der Peripherie eines gegebenen Kreiſes als Mittelpunkten mit einerlei Radius beſchriebenen Kreiſe zu finden.

Der Mittelpunkt des gegebenen Kreiſes ſey der Anfang der Coordinaten, ϱ ſein Radius und folglich

$$x^2 + y^2 = \varrho^2$$

die Gleichung desſelben. Die Coordinaten des Mittelpunkts irgend eines der mit dem Radius r aus den Punkten der Peripherie des gegebenen Kreiſes beſchriebenen Kreiſe ſeyen a, b; ſo iſt

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

die Gleichung dieſes Kreiſes, und nach der Bedingung der Aufgabe

$$a^2 + b^2 = \varrho^2,\ b = \sqrt{\varrho^2 - a^2}\,,$$

folglich

$$V = (x-a)^2 + (y-\sqrt{\varrho^2-a^2})^2 - r^2 = 0\,,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = -2(x-a) + \frac{2a\,(y-\sqrt{\varrho^2-a^2})}{\sqrt{\varrho^2-a^2}} = 0\,,$$

oder die zweite Gleichung nach einigen leichten Reductionen:

$$ay - x\sqrt{\varrho^2-a^2} = 0\,;$$

folglich

$$a = \frac{\varrho x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sqrt{\varrho^2-a^2} = b = \frac{ay}{x} = \frac{\varrho y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

und demnach die Gleichung der geſuchten einhüllenden Curve:

$$\frac{x^2(\sqrt{x^2+y^2}-\varrho)^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2(\sqrt{x^2+y^2}-\varrho)^2}{x^2+y^2} = r^2\,,$$

$$(\sqrt{x^2+y^2}-\varrho)^2 = r^2\,,$$

$$\sqrt{x^2+y^2} - \varrho = \pm r,\ x^2+y^2 = (\varrho \pm r)^2\,.$$

Folglich werden, wie auch ſogleich aus einer ganz einfachen geometriſchen Betrachtung erhellet, alle gegebene Kreiſe von zwei Kreiſen eingehüllt, deren Halbmeſſer $\varrho \pm r$ ſind.

4. Die vorhergehende Aufgabe läßt ſich allgemeiner ſo ausdrücken: Der Mittelpunkt eines Kreiſes, deſſen Halbmeſſer $= r$ iſt, bewege ſich auf einer durch die Gleichung $y = \varphi x$ gegebenen Curve; man ſucht die Curve, welche alle dieſe Kreiſe einhüllt.

Sind a, b die Coordinaten des Mittelpunkts des ſich bewegenden Kreiſes in irgend einer Lage deſſelben, ſo iſt

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

ſeine Gleichung in dieſer Lage. Aber nach der Bedingung der Aufgabe $b = \varphi a$; folglich

$$(x-a)^2 + (y-\varphi a)^2 - r^2 = 0\,,$$

und, wenn man nach a differentiirt:

$$-(x-a) - (y-\varphi a)\,\varphi' a = 0\,.$$

Daher wird die Gleichung der einhüllenden Curve erhalten, wenn man a aus den beiden Gleichungen

$$(x-a)^2 + (y-\varphi a)^2 = r^2\,,$$
$$(x-a) + (y-\varphi a)\,\varphi' a = 0$$

eliminirt.

Aus dieſen beiden Gleichungen erhält man ohne Schwierigkeit:

$$x = a \pm \frac{r\varphi' a}{\sqrt{1+(\varphi' a)^2}},\ y = \varphi a \mp \frac{r}{\sqrt{1+(\varphi' a)^2}}\,,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\lambda = \pm\{1 + (\varphi' a)^2\}^{-\frac{1}{2}}$$

ſetzen:

$$x = a + \lambda r\varphi' a,\ y = \varphi a - \lambda r.$$

Durch Differentation ergiebt ſich

$$\frac{\partial x}{\partial a} = 1 + \lambda r\varphi'' a + r\varphi' a\frac{\partial \lambda}{\partial a},$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \varphi' a - r\frac{\partial \lambda}{\partial a},$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial a} = \mp \tfrac{1}{2}\{1 + (\varphi' a)^2\}^{-\frac{3}{2}}.2\varphi' a . \varphi'' a$$
$$= -\lambda^3 \varphi' a \varphi'' a;$$

alſo

$$\frac{\partial x}{\partial a} = 1 + \lambda r\varphi'' a\{1 - \lambda^2(\varphi' a)^2\}$$
$$= 1 + \lambda^3 r\varphi'' a,$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \varphi' a\{1 + \lambda^3 r\varphi'' a\},$$

und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial x} = \varphi' a = \frac{\partial b}{\partial a}.$$

Hieraus ſchließt man nach dem Artikel Berührung (5.) i. d. Z., daß die gegebene und die einhüllende Curve in den zuſammengehörenden Punkten (a, b) und (x, y) einander parallel ſind.

Die Gleichung der Normale der gegebenen Curve in dem Punkte (a, b) iſt nach dem angeführten Artikel (6.)

$$y' - b = -\frac{x' - a}{\varphi' a}.$$

Setzt man

$$x' = x = a + \lambda r\varphi' a,\ y' = y = \varphi a - \lambda r;$$

ſo erhält man, da b = φa iſt, die Gleichung λr = λr, woraus, da dieſe Gleichung identiſch iſt, folgt, daß der Punkt (x, y) der einhüllenden Curve auf der durch den Punkt (a, b) der gegebenen Curve gezogenen Normale liegt, ſo daß es alſo, wenn der Punkt (a, b) gegeben iſt, immer leicht iſt, den Punkt (x, y) zu finden, indem die Entfernung dieſer beiden Punkte von einander offenbar = r iſt. Da man r auf beiden Seiten von (a, b) nehmen kann, ſo giebt es, wie ſich von ſelbſt verſteht, und auch durch das doppelte Zeichen von λ angedeutet wird, jederzeit zwei Enveloppen. Man denke ſich jetzt zwei beliebige auf den beiden Curven normale gerade Linien, deren eine als auf die andere folgend betrachtet werden, und den zuſammengehörenden Punkten (a, b) und (x, y) der beiden Curven entſprechen ſoll. Sind nun σ und s reſpective die zwiſchen dieſen Normalen liegenden Bogen der beiden Curven, ſo iſt bekanntlich

$$\partial s = \partial x\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},\ \partial\sigma = \partial a\sqrt{1 + (\varphi' a)^2}.$$

Aber nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial a} = \varphi' a ;$$

folglich

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial a},$$

und demnach

$$\partial s = \frac{\partial x}{\partial a}\,\partial\sigma = (1 + \lambda^3 r\varphi'' a)\partial\sigma$$

$$= \partial\sigma \pm \{1 + (\varphi' a)^2\}^{-\frac{3}{2}} \{1 + (\varphi' a)^2\}^{\frac{1}{2}} r\varphi'' a\partial a$$

$$= \partial\sigma \pm \frac{r\varphi'' a\partial a}{1 + (\varphi' a)^2} = \partial\sigma \pm \frac{r\varphi'' a}{\left(\frac{\partial\sigma}{\partial a}\right)^2} \cdot \partial a ,$$

$$s = \sigma \pm r\int \frac{\varphi'' a}{1 + (\varphi' a)^2}\,\partial a = \sigma \pm r\,\mathrm{Arc\,tang}\,\varphi' a + C ,$$

da bekanntlich

$$\partial\,\mathrm{Arc\,tang}\,\varphi' a = \frac{\partial\varphi' a}{1 + (\varphi' a)^2} = \frac{\varphi'' a}{1 + (\varphi' a)^2}\,\partial a$$

iſt. Iſt α die trigonometriſche Tangente des Winkels, welchen am Anfangspunkte des Bogens σ die Berührende der gegebenen Curve mit der Axe der x bildet, ſo iſt bekanntlich (Berührung 5.) in dieſem Punkte $\alpha = \varphi' a$. Für dieſen Punkt iſt aber $\sigma = s = 0$, alſo

$$0 = \pm r\,\mathrm{Arc\,tang}\,\alpha + C ,$$

$$C = \mp r\,\mathrm{Arc\,tang}\,\alpha ,$$

und folglich

$$s = \sigma \mp r\{\mathrm{Arc\,tang}\,\alpha - \mathrm{Arc\,tang}\,\varphi' a\} ,$$

d. i. nach einer ſehr bekannten goniometriſchen Formel

$$s = \sigma \mp r\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{\alpha - \varphi' a}{1 + \alpha\varphi' a} .$$

Iſt alſo ω der in Theilen des Radius $= 1$ ausgedrückte Bogen oder Winkel, unter welchem die den Endpunkten der Bogen σ und s entſprechenden Normalen ſich ſchneiden, ſo iſt offenbar

$$s = \sigma \mp r\omega .$$

Das obere und untere Zeichen entſpricht der einen und der andern einhüllenden Curve aller Kreiſe, da es, wie wir aus dem Obigen wiſſen, immer zwei ſolche Curven giebt. Setzen wir

$$s = \sigma - r\omega,\ s' = \sigma + r\omega ;$$

ſo iſt immer

$$\sigma = \frac{s + s'}{2} ,$$

welches ebenfalls eine merkwürdige Relation iſt. Aehnliche Ausdrücke würden ſich auch für die zwiſchen den beiden Normalen und den Bogen σ, s, s' enthaltenen Flächenräume auf ähnliche Art finden laſſen. Am leichteſten ſcheint man indeß zu dieſen Ausdrücken

auf folgende Art zu gelangen. Iſt F überhaupt die Fläche zwiſchen σ, dem allgemeinen Bogen s und den beiden Normalen, ſo erhellet leicht, daß man

$$\partial F = \tfrac{1}{2} r(\partial\sigma + \partial s)$$

ſetzen kann, indem ſich ∂F als ein geradliniges Trapezium betrachten läßt, deſſen parallele Seiten $\partial\sigma$, ∂s ſind, und die Höhe $= r$ iſt. Nach dem Obigen iſt alſo

$$\partial F = \tfrac{1}{2} r \left\{ 2\partial\sigma \pm \frac{r\varphi'' a \partial a}{1+(\varphi' a)^2} \right\},$$

$$F = r\sigma \pm \tfrac{1}{2} r^2 \int \frac{\varphi'' a \partial a}{1+(\varphi' a)^2}$$

$$= r\sigma \pm \tfrac{1}{2} r^2 \operatorname{Arc tang} \varphi' a + C,$$

und auf ähnliche Art wie oben:

$$0 = \pm \tfrac{1}{2} r^2 \operatorname{Arc tang} \alpha + C,\ C = \mp \tfrac{1}{2} r^2 \operatorname{Arc tang} \alpha.$$

Alſo

$$F = r\sigma \mp \tfrac{1}{2} r^2 \{\operatorname{Arc tang} \alpha - \operatorname{Arc tang} \varphi' a\}$$

$$= r\sigma \mp \tfrac{1}{2} r^2 \operatorname{Arc tang} \frac{\alpha - \varphi' a}{1 + \alpha\varphi' a},$$

oder nach dem Obigen

$$F = r\{\sigma \mp \tfrac{1}{2} r\omega\}.$$

Setzt man jetzt

$$F = r\{\sigma - \tfrac{1}{2} r\omega\},\ F' = r\{\sigma + \tfrac{1}{2} r\omega\};$$

ſo iſt $F + F' = 2r\sigma$, d. i. der zwiſchen s, s' und den Normalen enthaltene Raum $= 2r\sigma$.

5. Der Mittelpunkt eines Kreiſes mit veränderlichem Radius bewege ſich auf der Axe der x ſo, daß das Quadrat ſeines Halbmeſſers immer dem Product der Abſciſſe ſeines Mittelpunkts in eine gegebene conſtante Größe α gleich iſt; man ſucht die Gleichung der alle dieſe Kreiſe einhüllenden Curve.

Die Gleichung des ſich bewegenden Kreiſes in irgend einer ſeiner verſchiedenen Lagen iſt nach den Bedingungen der Aufgabe:

$$(x-a)^2 + y^2 = a\alpha.$$

Alſo

$$V = (x-a)^2 + y^2 - a\alpha = 0,$$

und, wenn man nach a differentiirt:

$$2(x-a) + \alpha = 0,\ a = \tfrac{1}{2}\alpha + x.$$

Folglich

$$\tfrac{1}{4}\alpha^2 + y^2 = \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \alpha x,\ y^2 = \alpha x + \tfrac{1}{4}\alpha^2 = \alpha(x + \tfrac{1}{4}\alpha),$$

oder, für $x + \frac{1}{4}\alpha = x'$:

$$y^2 = \alpha x',$$

ſo daß alſo die einhüllende Curve in dieſem Falle eine apolloniſche Parabel iſt.

6. Eine gerade Linie bewege ſich ſo, daß die Summe der Entfernungen ihrer Durchſchnittspunkte mit den Coordinatenaxen von dem Anfange der Coordinaten ſtets eine gegebene conſtante Größe α iſt; man ſoll die einhüllende Curve dieſer geraden Linien finden.

Für eine beliebige Lage der ſich bewegenden Linie ſeyen die Entfernungen ihrer Durchſchnittspunkte mit der Axe der x und der Axe der y vom Anfange der Coordination reſpective a, b, und $y = Ax + B$ ſey die allgemeine Gleichung der ſich bewegenden Linie; ſo iſt

$$0 = Aa + B,\ b = B,\ A = -\frac{b}{a};$$

folglich

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

die Gleichung der ſich bewegenden Linie. Aber $a + b = \alpha$, $b = \alpha - a$; alſo

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\alpha - a} = 1,\ (\alpha - a)x + ay = a(\alpha - a);$$

$$V = (\alpha - a)x + ay - a(\alpha - a) = 0;$$

und folglich, wenn man nach a differentiirt:

$$-x + y - (\alpha - a) + a = 0,\ a = \tfrac{1}{2}(\alpha + x - y).$$

Setzt man dieſen Werth in die Gleichung $V = 0$, ſo erhält man nach leichter Rechnung folgende Gleichung der einhüllenden Curve:

$$(x - y)^2 - 2\alpha(x + y) + \alpha^2 = 0.$$

Für

$$x - y = z,\ 2(x + y) - \alpha = u$$

wird dieſe Gleichung

$$z^2 = \alpha u,$$

woraus man ſieht, daß dieſelbe einer apolloniſchen Parabel entſpricht.

Dieſe Aufgaben werden zur Erläuterung der allgemeinen Methode hinreichend ſeyn. Ihre Auflöſung iſt nie Schwierigkeiten unterworfen, die Elimination von a ausgenommen, welche in einzelnen Fällen beſchwerlich werden kann, und von den bekannten Schwierigkeiten der Elimination überhaupt unzertrennlich iſt.

Die einhüllende Curve aller von einem gegebenen Kreiſe gleiche Segmente abſchneidenden Sehnen iſt offenbar ein dem gegebenen Kreiſe concentriſcher Kreis, welcher alle Sehnen in ihren Mittelpunkten berührt. Dieſen und ähnliche Sätze hat Magnus in der Abhandlung Démonstration de quelques théorèmes sur les enveloppes (Annales de Mathém. T. XVI. p. 80.) auf Curven überhaupt erweitert.

7. Wir haben nur noch kurz zu zeigen, in welchem Zuſammenhange die Theorie der einhüllenden Curven mit der ſo wichtigen Lehre von den partikulären oder beſondern Auflöſungen der Differentialgleichungen in der Integralrechnung ſteht. Dazu müſſen wir die folgenden allgemeinen Begriffe vorausſchicken. Wenn $V = 0$ eine Gleichung zwiſchen x, y und $\frac{\partial y}{\partial x}$ iſt, ſo iſt die primitive Gleichung $U = 0$ dieſer derivirten Gleichung im Allgemeinen eine Gleichung zwiſchen x, y und einer willkührlichen Conſtante, die wir a nennen wollen. Obgleich nun allerdings eigentlich das ganze Syſtem aller primitiven Gleichungen der derivirten Gleichung $V = 0$ erhalten werden ſollte, wenn man in der Gleichung $U = 0$ der willkührlichen Conſtante a alle möglichen Werthe beilegt; ſo giebt es doch zuweilen Gleichungen, die nicht zu dieſem Syſteme gehören, und doch als primitive Gleichungen der derivirten Gleichung $V = 0$ genugthun. Solche Gleichungen nennt man beſondere oder partikuläre Auflöſungen, auch wohl bloß particuläre Integrale der Differentialgleichung $V = 0$, ſo wie im Gegentheil $U = 0$ die vollſtändige Auflöſung oder das vollſtändige Integral dieſer Differentialgleichung genannt wird. Um dies durch ein Beiſpiel zu erläutern, ſo habe man die Gleichung

$$V = x + y\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2 - b^2} = 0.$$

Da

$$\frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 - b^2}}{\partial x} = \frac{x + y\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}},$$

$$x + y\frac{\partial y}{\partial x} = \sqrt{x^2 + y^2 - b^2} \cdot \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 - b^2}}{\partial x}$$

iſt; ſo läßt ſich dieſe Gleichung auch auf folgende Art ausdrücken:

$$\frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 - b^2}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \ \partial y = \partial \sqrt{x^2 + y^2 - b^2},$$

und das vollſtändige Integral iſt alſo

$$y + a = \sqrt{x^2 + y^2 - b^2}, \ x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = 0,$$

wo a eine willkührliche Conſtante iſt. Der gegebenen Differentialgleichung entſpricht aber auch noch die partikuläre Auflöſung oder das partikuläre Integral

$$x^2 + y^2 - b^2 = 0.$$

Differentiirt man nämlich, ſo erhält man

$$x + y\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

und es iſt daher offenbar auch für obige Gleichung

$$x + y\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2 - b^2} = 0.$$

8. Sey nun wieder überhaupt $V = 0$ die gegebene Differentialgleichung des erſten Grades und $U = 0$ deren vollſtändiges Integral, welches alſo eine willkührliche Conſtante a implicirt. Offenbar kann man ſich $U = 0$ als die allgemeine Gleichung einer ſtetigen Folge von Curven denken, welche durch Variation der in dieſer Gleichung enthaltenen willkührlichen Conſtante erhalten werden, und ſämmtlich eine allgemeine, durch die Differentialgleichung $V = 0$ analytiſch ausgedrückte Eigenſchaft haben. Denkt man ſich nun die alle dieſe Curven einhüllende Curve, ſo hat dieſelbe mit jeder dieſer Curven einen ihrer Punkte gemein, und muß folglich dieſelbe allgemeine durch die Differentialgleichung $V = 0$ analytiſch ausgedrückte Eigenſchaft haben, wie dieſe Curven ſelbſt, woraus ſich alſo ergiebt, daß die Gleichung der einhüllenden Curve zugleich das partikuläre Integral der Differentialgleichung $V = 0$ ſeyn muß. Daraus ergiebt ſich mittelſt des Obigen folgende Regel zur Auffindung der partikulären Integrale der Differentialgleichungen erſten Grades. Man ſuche das vollſtändige Integral $U = 0$ der Gleichung $V = 0$, wodurch die willkührliche Conſtante a eingeführt wird. Hierauf differentiire man U nach a, ſetze

$$\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right) = 0,$$

und eliminire a aus den Gleichungen

$$U = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial a}\right) = 0;$$

ſo erhält man das geſuchte partikuläre Integral. So war z. B. in (7.) der Differentialgleichung

$$V = x + y\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2 - b^2} = 0$$

vollſtändiges Integral:

$$x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = 0,$$

wo a die willkührliche Conſtante, und

$$U = x^2 - 2ay - a^2 - b^2$$

iſt. Differentiirt man nach a, ſo kommt

$$\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right) = -2y - 2a,$$

und man muß nun a aus den Gleichungen

$$x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = 0, \quad y + a = 0$$

eliminiren. Dies giebt

$$x^2 + y^2 - b^2 = 0$$

als partikuläres Integral, wie wir ſchon in (7.) gefunden haben.

9. Einige hierher gehörende Aufgaben knüpfen wir zugleich an geometriſche Bedingungen. Sey z. B. die einhüllende Curve derjenigen Curven zu finden, bei denen die Normale zu der Summe der Abſciſſe und Subnormale ein gegebenes conſtantes Verhältniß hat.

Nach dem Artikel Berührung (6.) i. d. Z. hat man

$$\text{Normale} = y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},\ \text{Subnormale} = \frac{y\partial y}{\partial x};$$

folglich nach der Bedingung der Aufgabe, wenn α den Exponenten des gegebenen conſtanten Verhältniſſes bezeichnet,

$$y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \alpha\left\{x+\frac{y\partial y}{\partial x}\right\},$$

woraus leicht, wenn man dieſe Gleichung rational macht, und die dadurch ſich ergebende quadratiſche Gleichung nach $\frac{\partial y}{\partial x}$ als unbekannte Größe auflöſt:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\alpha^2 x}{(1-\alpha^2)y} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 x^2-(1-\alpha^2)y^2}}{(1-\alpha^2)y},$$

$$0 = \alpha^2 x-(1-\alpha^2)y\frac{\partial y}{\partial x} \pm \sqrt{\alpha^2 x^2-(1-\alpha^2)y^2},$$

oder

$$\mp 1 = \frac{\alpha^2 x-(1-\alpha^2)y\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{\alpha^2 x^2-(1-\alpha^2)y^2}},$$

d. i., wie auf der Stelle in die Augen fällt:

$$\mp 1 = \frac{\partial\sqrt{\alpha^2 x^2-(1-\alpha^2)y^2}}{\partial x};$$

$$\partial x = \mp\partial\sqrt{\alpha^2 x^2-(1-\alpha^2)y^2};$$

folglich das vollſtändige Integral unſerer obigen Differentialgleichung

$$x-a = \mp\sqrt{\alpha^2 x^2-(1-\alpha^2)y^2},$$

oder

$$(1-\alpha^2)(x^2+y^2)-2ax+a^2 = 0,$$

wo a eine willkührliche Conſtante iſt. Zugleich iſt dies die allgemeine Gleichung der Curven, welchen die in der Aufgabe ausgeſprochene Eigenſchaft zukommt. Um die einhüllende Curve derſelben und zugleich das partikuläre Integral unſerer obigen Differentialgleichung zu finden, differentire man vorſtehende Gleichung nach a; ſo kommt

$$-2x+2a = 0,\ x = a.$$

Dies in obige Gleichung geſetzt giebt als Gleichung der einhüllenden Curve oder als particuläres Integral unſerer Differentialgleichung:

$$y^2 - \alpha^2(x^2+y^2) = 0,\ (1-\alpha^2)y^2 = \alpha^2 x^2,\ y = \pm \frac{\alpha x}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Die einhüllende Curve iſt alſo das Syſtem zweier durch dieſe Gleichung dargeſtellter gerader Linien. Da aus dieſer Gleichung durch Differentiation

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

folgt, und

$$\frac{\alpha^2 x}{(1-\alpha^2)y} = \pm \frac{\alpha^2 x}{1-\alpha^2} \cdot \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha x} = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}},\ \alpha^2x^2-(1-\alpha^2)y^2=0$$

iſt, ſo ſieht man, daß in der That durch dieſelbe unſerer obigen Differentialgleichung ebenfalls genügt wird.

Setzt man in der Gleichung

$$(1-\alpha^2)(x^2+y^2) - 2ax + a^2 = 0$$

$$x - \frac{a}{1-\alpha^2} = u,$$

ſo wird dieſelbe

$$u^2 + y^2 = \left\{\frac{a\alpha}{1-\alpha^2}\right\}^2$$

und entſpricht alſo einer Reihe von Kreiſen mit dem veränderlichen Radius $\frac{a\alpha}{1-\alpha^2}$. Der Mittelpunkt jedes dieſer Kreiſe wird durch die Coordinaten $\frac{\alpha}{1-\alpha^2}$, 0 beſtimmt.

10. Die einhüllende Curve aller der Curven zu finden, deren Normale die mittlere Proportionale zwiſchen einer gegebenen Linie b und der Summe der Abſciſſe und Subnormale iſt.

Aus (9.) und den Bedingungen der Aufgabe ergiebt ſich auf der Stelle folgende Gleichung:

$$b\left\{x + \frac{y\partial y}{\partial x}\right\} = y^2\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\},$$

oder

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \frac{b}{y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{bx-y^2}{y^2};$$

folglich durch Auflöſung dieſer quadratiſchen Gleichung:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{b}{2y} \pm \frac{\sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 + bx - y^2}}{y},$$

$$0 = b - 2y\frac{\partial y}{\partial x} \pm 2\sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 + bx - y^2},$$

$$\mp 1 = \frac{b - 2y\frac{\partial y}{\partial x}}{2\sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 + bx - y^2}},$$

d. i., wie man ſogleich überſieht:

$$\mp 1 = \frac{\partial \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 + bx - y^2}}{\partial x},$$

$$\partial x = \mp \partial \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 + bx - y^2},$$

$$x - a = \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 + bx - y^2}.$$

oder, wenn man dieſe Gleichung rational macht:

$$x^2 - 2ax + a^2 = \tfrac{1}{4}b^2 + bx - y^2,$$

$$x^2 - 2(a + \tfrac{1}{2}b)x + (a + \tfrac{1}{2}b)^2 = ab + \tfrac{1}{2}b^2 - y^2,$$

$$\{x - (a + \tfrac{1}{2}b)\}^2 + y^2 = b(a + \tfrac{1}{2}b),$$

woraus man ſieht, daß die Curven, welche den Bedingungen der Aufgabe Genüge leiſten, Kreiſe ſind, deren Halbmeſſer $= \sqrt{b(a + \tfrac{1}{2}b)}$ iſt. a iſt auch hier, wie früher, die willkührliche Conſtante.

Um nun die einhüllende Curve zu finden, differentiire man die Gleichung

$$x^2 - 2ax + a^2 = \tfrac{1}{4}b^2 + bx - y^2$$

nach a, ſo erhält man

$$-2x + 2a = 0, \quad x = a,$$

und folglich die Gleichung der einhüllenden Curve

$$y^2 = \tfrac{1}{4}b^2 + bx = b(\tfrac{1}{4}b + x),$$

oder, für $\tfrac{1}{4}b + x = x'$:

$$y^2 = bx',$$

ſo daß alſo die einhüllende Curve eine apolloniſche Parabel iſt. Zugleich iſt

$$y^2 = \tfrac{1}{4}b^2 + bx$$

das partikuläre Integral der Differentialgleichung

$$0 = b - 2y\frac{\partial y}{\partial x} \pm 2\sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 + bx - y^2}.$$

Man erhält nämlich leicht

$$2y\frac{\partial y}{\partial x} = b, \quad b - 2y\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \tfrac{1}{4}b^2 + bx - y^2 = 0,$$

und ſieht hieraus, daß durch die Gleichung

$$y^2 = \tfrac{1}{4}b^2 + bx$$

der in Rede ſtehenden Differentialgleichung genügt wird.

Dieſe Aufgabe iſt für die gegenwärtige Theorie von hiſtoriſcher Bedeutung, weil ſie, von Leibnitz in den Act. erud. 1694. aufgelöſt, die erſte ſeyn mag, welche auf eine einhüllende Curve oder ein particuläres Integral geführt hat.

11. Sey nun ferner

$$V = \varphi(x, y, z, a) = 0$$

die Gleichung einer krummen Fläche mit dem Parameter a, wel-

cher für dieſelbe Fläche als conſtant betrachtet wird, durch deſſen ſtetige Veränderung man aber eine ſtetige Folge gleichartiger krummer Flächen bilden kann, die ſich in einer ſtetigen Folge krummer Linien ſchneiden werden, welche zuſammen eine neue krumme Fläche bilden, von der die erſtern Flächen ſämmtlich berührt werden, und die man daher die einhüllende Fläche, auch wohl die Gränzfläche, dieſer Flächen nennt. Um die Gleichung der einhüllenden Fläche zu finden, laſſe man a ſich um das unendlich kleine ∂a verändern, ſo ſind die Gleichungen zweier unmittelbar auf einander folgenden Flächen in der ſtetigen Folge aller der Flächen, deren Umhüllungsfläche geſucht wird,

$$V = \varphi(x, y, z, a) = 0\,,$$

$$V' = \varphi(x, y, z, a + \partial a) = 0\,.$$

Für die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie der beiden Flächen haben x, y, z dieſelben Werthe, und die beiden obigen Gleichungen, wenn man in denſelben den x, y, z ſich gleiche Werthe beigelegt denkt, ſind alſo die Gleichungen dieſer Durchſchnittslinie. Weil aber nach Principien der Differentialrechnung

$$V' = V + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)\partial a$$

iſt; ſo ſind auch

$$V = 0,\ V + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)\partial a = 0\,,$$

oder

$$V = 0,\ \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0$$

die Gleichungen dieſer Durchſchnittslinie, für jede zwei unmittelbar auf einander folgende Flächen. Man nennt dieſe Durchſchnittslinie nach Monge die Charakteriſtik der eingehüllten Flächen. Da man ſich nach dem Vorhergehenden die einhüllende Fläche als die ſtetige Folge aller Charakteriſtiken zu denken hat, ſo liegt jede Charakteriſtik ganz in der einhüllenden Fläche, und in den vorhergehenden beiden Gleichungen kann man ſich alſo x, y, z auch als allgemeine Coordinaten der einhüllenden Fläche denken. Will man nun alſo eine allgemeine Relation zwiſchen den Coordinaten irgend eines Punktes der einhüllenden Fläche, d. i. eben die Gleichung dieſer Fläche finden, ſo muß man den Parameter a aus den beiden Gleichungen

$$V = 0,\ \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0$$

eliminiren, wodurch dieſe Gleichung erhalten wird.

Die ſtetige Folge der Durchſchnittspunkte aller Charakteriſtiken bildet auf der einhüllenden Fläche eine Curve, welche nach Monge die Wendungscurve (arête de rebroussement),

welches man auch durch Knotenkante oder Knotenfurche überſetzt hat, genannt wird. Sind

$$V = 0, \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0,$$

die Gleichungen irgend einer Charakteriſtik, ſo ſind, wenn a ſich um das unendlich kleine ∂a ändert, auf ganz ähnliche Art, wie oben,

$$V + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)\partial a = 0, \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}\right)\partial a = 0,$$

oder, der beiden erſten Gleichungen wegen,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0, \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}\right) = 0$$

die Gleichungen der nächſt folgenden Charakteriſtik. Für den Durchſchnittspunkt, oder, wenn es mehrere giebt, für die Durchſchnittspunkte beider Charakteriſtiken, müſſen x, y, z in den beiden obigen Syſtemen als gleich gedacht werden, und man hat folglich für die Durchſchnittspunkte jeder zwei unmittelbar auf einander folgenden Charakteriſtiken die drei Gleichungen

$$V = 0, \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0, \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}\right) = 0.$$

Will man nun bloß eine allgemeine Relation zwiſchen den Coordinaten der Durchſchnittspunkte jeder zwei unmittelbar auf einander folgenden Charakteriſtiken haben, ſo muß man a aus den vorhergehenden drei Gleichungen eliminiren, wodurch man zwei ſolche allgemeine Relationen erhält, welche, wie auf den erſten Blick in die Augen fällt, die Gleichungen der Wendungscurve der einhüllenden Fläche ſeyn werden.

12. Bewegte ſich z. B. eine Kugel mit dem conſtanten Radius ϱ im Raume auf eine ſolche Weiſe, daß ihr Mittelpunkt ſtets auf einer in der Ebene der xy liegenden und durch die Gleichung $y = fx$ charakteriſirten Curve hingleitet, ſo würde ſich die einhüllende Fläche aller dieſer Kugeln nach dem Vorhergehenden auf folgende Art beſtimmen laſſen.

Iſt a der Werth von x für eine beliebige Lage der ſich bewegenden Kugel, ſo iſt

$$(x-a)^2 + (y-fa)^2 + z^2 = \varrho^2$$

die Gleichung derſelben, und folglich in dieſem Falle

$$V = (x-a)^2 + (y-fa)^2 + z^2 - \varrho^2,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = -2(x-a) - 2(y-fa)f'a,$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}\right) = 2 - 2(y-fa)f''a + 2(f'a)^2,$$

Alſo ſind

$$(x-a)^2 + (y-fa)^2 + z^2 = \varrho^2,$$
$$(x-a) + (y-fa)f'a = 0$$

die Gleichungen der Charakteriſtik der einhüllenden Fläche. Die Gleichung dieſer Fläche ſelbſt wird gefunden, wenn man a aus den vorſtehenden zwei Gleichungen eliminirt. Die beiden Gleichungen der Wendungscurve endlich ergeben ſich, wenn man a aus den drei Gleichungen

$$(x-a)^2 + (y-fa)^2 + z^2 = \varrho^2,$$
$$(x-a) + (y-fa)f'a = 0,$$
$$1 + (f'a)^2 - (y-fa)f''a = 0$$

eliminirt.

Wäre die in der Ebene der xy gegebene Curve eine gerade Linie, und, wenn wir uns dieſelbe zugleich der Einfachheit wegen durch den Anfang der Coordinaten gehend denken, $y = Ax$ ihre Gleichung, ſo ſind die Gleichungen der Charakteriſtik

$$(x-a)^2 + (y-Aa)^2 + z^2 = \varrho^2,$$
$$(x-a) + A(y-Aa) = 0.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$a = \frac{x+Ay}{1+A^2},$$

und dies, in die erſte Gleichung geſetzt, giebt als Gleichung der einhüllenden Fläche

$$z^2 = \varrho^2 - \left\{\frac{A^2x - Ay}{1+A^2}\right\}^2 - \left\{\frac{y-Ax}{1+A^2}\right\}^2, \ldots\ldots$$

oder

$$z^2 = \varrho^2 - \frac{(Ax-y)^2}{1+A^2},\quad z = \sqrt{\varrho^2 - \frac{(Ax-y)^2}{1+A^2}},$$

ſo daß alſo $z = f(Ax-y)$ iſt, und daher dieſe Gleichung offenbar einer Cylinderfläche entſpricht (ſ. Cylindriſche Flächen i. d. Z.). Die Gleichung

$$(x-a) + A(y-Aa) = 0$$

iſt die Gleichung der Projection der Charakteriſtik auf der Ebene der xy, und dieſe Projection folglich eine gerade Linie, ſo daß alſo die Charakteriſtik eine Curve von einfacher Krümmung iſt. Da ferner

$$x - a = -A(y-Aa)$$

iſt, ſo iſt die Gleichung der Projection der Charakteriſtik auf der Ebene der yz:

$$(1+A^2)(y-Aa)^2 + z^2 = \varrho^2,$$

oder

$$\varrho^2(y-Aa)^2 + \frac{\varrho^2}{1+A^2}z^2 = \varrho^2 \cdot \frac{\varrho^2}{1+A^2},$$

woraus alſo erhellet, daß dieſe Projection eine Ellipſe iſt, deren beide Halbaxen

$$\varrho \text{ und } \frac{\varrho}{\sqrt{1+A^2}}$$

ſind. Da ferner

$$y - Aa = -\frac{x-a}{A}$$

iſt, ſo iſt die Gleichung der Projection der Charakteriſtik auf der Ebene der xz:

$$\frac{1+A^2}{A^2}(x-a)^2 + z^2 = \varrho^2,$$

oder

$$\varrho^2(x-a)^2 + \frac{\varrho^2 A^2}{1+A^2}z^2 = \varrho^2\frac{\varrho^2 A^2}{1+A^2},$$

und dieſe Projection alſo auch eine Ellipſe, deren Halbaxen

$$\varrho \text{ und } \frac{\varrho A}{\sqrt{1+A^2}}$$

ſind. Daß die Charakteriſtik ſelbſt ein Kreis iſt, erhellet leicht auf folgende Art. Man nehme nämlich, wie es offenbar verſtattet iſt, die Axe der x ſo an, daß ſie mit der Geraden, auf welcher ſich der Mittelpunkt der Kugel bewegt, parallel iſt; ſo iſt die Gleichung dieſer Gerade $y = A$; folglich die Gleichungen der Charakteriſtik nach dem Obigen

$$(x-a)^2 + (y-A)^2 + z^2 = \varrho^2,$$
$$x - a = 0,$$

da hier $f'a = 0$ zu ſetzen iſt. Die Gleichung $x = a$ iſt die Gleichung der Projection der Charakteriſtik auf der Ebene der xy, ſo daß alſo die Charakteriſtik offenbar immer in einer Ebene liegt, welche der Ebene der yz parallel iſt. Die Gleichung der Projection der Charakteriſtik auf dieſer Ebene iſt

$$(y-A)^2 + z^2 = \varrho^2,$$

die Gleichung eines Kreiſes, ſo daß alſo die Charakteriſtik ſelbſt ein Kreis iſt. Zugleich erhellet hieraus, daß die Ebenen aller Charakteriſtiken unter einander parallel ſind, und folglich an eine Wendungscurve in dieſem Fall nicht zu denken iſt, wie ſich auch ergeben würde, wenn man die Wendungscurve nach der oben angegebenen allgemeinen Regel zu beſtimmen ſuchte.

Wäre die in der Ebene der xy gegebene Curve ein Kreis und

$$x^2 + y^2 = r^2$$

die Gleichung deſſelben, wenn man den Anfang der Coordinaten der Einfachheit wegen im Mittelpunkte dieſes Kreiſes annimmt; ſo wären unſere drei obigen Gleichungen:

$$(x-a)^2 + (y-\sqrt{r^2-a^2})^2 + z^2 = \varrho^2,$$

$$x = \frac{ay}{\sqrt{r^2-a^2}}, \quad \frac{r^2 y}{(r^2-a^2)\sqrt{r^2-a^2}} = 0.$$

Die beiden erſten Gleichungen ſind die Gleichungen der Charakteriſtik, welche eine Curve von einfacher Krümmung iſt, da, wegen der zweiten Gleichung, die Projektion auf der Ebene der xy eine gerade Linie iſt. Aus der zweiten Gleichung folgt

$$a = \frac{x}{y}\sqrt{r^2-a^2}, \quad a = \frac{rx}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sqrt{r^2-a^2} = \frac{ry}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Alſo iſt

$$\sqrt{x^2+y^2} = r + \sqrt{\varrho^2 - z^2}$$

die Gleichung der einhüllenden Fläche.

Iſt ψ der Winkel, unter welchem die Projection der Charakteriſtik auf der Ebene der xy die Axe der x ſchneidet, ſo iſt, weil

$$y = \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a} x$$

iſt:

$$\tang \psi = \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a}, \quad \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\tang\psi^2}} = \frac{a}{r}.$$

Für die Gleichung der Projection der Charakteriſtik in der Ebene der xz erhält man leicht:

$$(x-a)^2 \cdot \frac{r^2}{a^2} + z^2 = \varrho^2.$$

Nimmt man aber die Ebene der Charakteriſtik, welche wegen der Gleichung

$$y = \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a} x$$

offenbar durch den Anfang der Coordinaten geht, ſelbſt als Ebene der x′z an, ſo iſt offenbar

$$x = x' \cos\psi = \frac{ax'}{r},$$

$$x - a = \frac{a(x'-r)}{r},$$

und folglich nach dem Obigen die Gleichung der Charakteriſtik

$$(x'-r)^2 + z^2 = \varrho^2,$$

ſo daß alſo die Charakteriſtik ein Kreis iſt.

Bewegte ſich auf der durch die Gleichung y = fx gegebenen Curve mit ſeinem Mittelpunkte ein durch die Umdrehung einer Ellipſe um die Axe der z entſtandenes Ellipſoid, ſo wäre deſſen Gleichung in einer beliebigen Lage, wenn die beiden Halbaxen

der erzeugenden Ellipſe durch α, β bezeichnet werden, wie leicht erhellet:

$$\alpha^2\{(x-a)^2+(y-fa)^2\}+\beta^2 z^2=\alpha^2\beta^2;$$

folglich in dieſem Falle

$$V=\alpha^2\{(x-a)^2+(y-fa)^2\}+\beta^2 z^2-\alpha^2\beta^2,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)=-2\alpha^2\{(x-a)+(y-fa)f'a\},$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}\right)=2\alpha^2\{1-(y-fa)f''a+(f'a)^2\},$$

und man hat folglich in dieſem Falle zur Beſtimmung der Charakteriſtik, der einhüllenden Fläche und der Wendungscurve nachſtehende drei Gleichungen:

$$\alpha^2\{(x-a)^2+(y-fa)^2\}+\beta^2 z^2=\alpha^2\beta^2,$$
$$(x-a)+(y-fa)f'a=0,$$
$$1-(y-fa)f''a+(f'a)^2=0.$$

Iſt die gegebene Curve ein Kreis, ſo ſind die beiden erſten Gleichungen:

$$\alpha^2\{(x-a)^2+(y-\sqrt{r^2-a^2})^2\}+\beta^2 z^2=\alpha^2\beta^2,$$

$$x-a-(y-\sqrt{r^2-a^2}).\frac{a}{\sqrt{r^2-a^2}}=0,$$

oder die zweite Gleichung kürzer

$$x\sqrt{r^2-a^2}-ay=0.$$

Beſtimmt man hieraus a und ſetzt den Werth in die erſte Gleichung, ſo ergiebt ſich als Gleichung der einhüllenden Fläche:

$$\alpha(\sqrt{x^2+y^2}-r)=\beta\sqrt{\alpha^2-z^2}.$$

Für $\alpha=\beta=\varrho$ geht das Ellipſoid in eine Kugel über, und man erhält die bei der vorigen Aufgabe gefundene Gleichung.

13. Es könnte auch der Fall vorkommen, daß die Gleichung der einzuhüllenden Flächen

$$V=\varphi(x,y,z,a,b)=0$$

die beiden Parameter a, b enthielte, und hier könnte wieder b von a abhängig, oder a und b könnten beide von einander ganz unabhängig ſeyn. Im erſten Fall finde zwiſchen a und b die Gleichung

$$v=f(a,b)=0$$

Statt. Der Differentialquotient von V in Bezug auf a iſt nach Principien der Differentialrechnung

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)+\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)\frac{\partial b}{\partial a},$$

und aus der zweiten Gleichung v = 0 ergiebt ſich

$$\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)\frac{\partial b}{\partial a}=0.$$

Alſo wird man nach (11.) die Gleichung der einhüllenden Fläche erhalten, wenn man aus den vier Gleichungen:

$$V = 0,\ \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)\frac{\partial b}{\partial a} = 0;$$

$$v = 0,\ \left(\frac{\partial v}{\partial a}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)\frac{\partial b}{\partial a} = 0$$

die drei Größen a, b, $\frac{\partial b}{\partial a}$ eliminirt.

Sind ferner a, b unabhängig von einander, ſo betrachte man zuerſt b als conſtant. Unter dieſer Bedingung iſt die Gleichung der alle durch Variation von a aus der Gleichung $V=0$ hervorgehende Flächen einhüllenden Fläche das Reſultat der Elimination von a aus den Gleichungen

$$V = 0,\ \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0.$$

Die Gleichung, welche man auf dieſe Art erhält, iſt von a unabhängig, enthält aber b. Läßt man nun b variiren, ſo erhält man eine ſtetige Folge einhüllender Flächen, die alle ſelbſt wieder eine einhüllende Fläche haben, deren Gleichung ſich aus der für die erſte einhüllende Fläche gefundene, b noch enthaltende, Gleichung nach denſelben Principien wie vorher ergiebt. Dieſe Fläche iſt nun offenbar die Fläche, von welcher alle aus der Gleichung $V = 0$ durch Variation von a und b ſich ergebende Flächen eingehüllt werden. Man kann ſich aber die durch Variation von b hervorgehende ſtetige Folge einhüllender Flächen durch die Gleichung

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0$$

gegeben vorſtellen, unter der Vorausſetzung, daß a in einer durch die Gleichung

$$V = 0$$

ausgedrückten Abhängigkeit von b ſich befindet, wodurch man auf den vorher behandelten Fall zurückgeführt wird, und folglich die einhüllende Fläche aller erſten einhüllenden Flächen erhält, wenn man a, b, $\frac{\partial a}{\partial b}$ aus den vier Gleichungen

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0,\ \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial b} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}\right)\frac{\partial a}{\partial b} = 0;$$

$$V = 0,\ \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)\frac{\partial a}{\partial b} = 0$$

eliminirt. Wegen der erſten Gleichung geht aber die vierte in

$$\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right) = 0$$

über, und man erhält alſo die Gleichung der alle durch Variation von a und b aus der Gleichung $V = 0$ hervorgehende Flä-

chen einhüllenden Fläche, wenn man a und b aus den drei Gleichungen

$$V = 0, \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0, \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right) = 0$$

eliminirt. Nur hat man hierbei zu bemerken, daß die gegebenen Flächen von der erſten Reihe einhüllender Flächen in zuſammenhängenden Linien berührt werden, und daß dies auch von dieſer erſten Reihe einhüllender Flächen und der Fläche, von welcher ſie eingehüllt werden, gilt, daß aber eben deshalb dieſe letzte einhüllende Fläche die gegebenen Flächen im Allgemeinen offenbar nur in Punkten berühren kann.

14. Nach ganz ähnlichen Betrachtungen wie in (7.) und (8.) läßt ſich hiervon nun wieder folgende Anwendung auf die partikulären Integrale der Differentialgleichung $V = 0$ zwiſchen den veränderlichen Größen x, y, z und den partiellen Differentialquotienten $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ machen. Iſt nämlich $U = 0$ das vollſtändige Integral der Differentialgleichung $V = 0$, welches alſo zwei willkührliche Conſtanten a, b enthält, ſo erhält man das partikuläre Integral von $V = 0$, wenn man a und b aus den Gleichungen

$$U = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial a}\right) = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial b}\right) = 0$$

eliminirt. Die zu dieſem Schluß führende Betrachtung iſt der in (7.) angeſtellten ganz ähnlich und ſoll daher hier nicht wiederholt werden.

Für

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q$$

iſt das vollſtändige Integral der Differentialgleichung

$$\varkappa\sqrt{1+p^2+q^2} = z - px - qy ,$$

wie man ſich leicht durch Differentiation überzeugen kann:

$$z = ax + by + \varkappa\sqrt{1 + a^2 + b^2} ,$$

und a, b ſind zwei willkührliche Conſtanten. Setzt man alſo

$$U = ax + by - z + \varkappa\sqrt{1 + a^2 + b^2} ;$$

ſo iſt

$$\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right) = x + \frac{a\varkappa}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \left(\frac{\partial U}{\partial b}\right) = y + \frac{b\varkappa}{\sqrt{1+a^2+b^2}} .$$

Um alſo das partikuläre Integral unſerer Differentialgleichung zu finden, muß man a, b aus den Gleichungen

$$ax + by - z + \varkappa\sqrt{1 + a^2 + b^2} = 0 ,$$

$$a\varkappa + x\sqrt{1+a^2+b^2} = 0, \ b\varkappa + y\sqrt{1+a^2+b^2} = 0$$

eliminiren. Aus den beiden letzten Gleichungen erhält man

$$a^2\varkappa^2 = x^2(1+a^2+b^2),\quad b^2\varkappa^2 = y^2(1+a^2+b^2);$$

$$\varkappa^2(a^2+b^2) = (x^2+y^2)(1+a^2+b^2),$$

$$\varkappa^2(1+a^2+b^2) = \varkappa^2 + (x^2+y^2)(1+a^2+b^2);$$

$$1+a^2+b^2 = \frac{\varkappa^2}{\varkappa^2-x^2-y^2}.$$

Ferner hat man

$$ax = -\frac{x^2}{\varkappa}\sqrt{1+a^2+b^2},\quad by = -\frac{y^2}{\varkappa}\sqrt{1+a^2+b^2};$$

$$ax+by = -\frac{x^2+y^2}{\varkappa}\sqrt{1+a^2+b^2};$$

folglich mittelſt der erſten Gleichung:

$$\frac{\varkappa^2-x^2-y^2}{\varkappa}\sqrt{1+a^2+b^2} - z = 0,$$

und daher

$$\sqrt{\varkappa^2-x^2-y^2} - z = 0,$$

oder

$$z = \sqrt{\varkappa^2-x^2-y^2}$$

das geſuchte partikuläre Integral. Differentiirt man, um die Richtigkeit zu prufen, nach x und y, ſo erhält man

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p = -\frac{x}{\sqrt{\varkappa^2-x^2-y^2}},\quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q = -\frac{y}{\sqrt{\varkappa^2-x^2-y^2}};$$

$$1+p^2+q^2 = \frac{\varkappa^2}{\varkappa^2-x^2-y^2},\quad \varkappa\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{\varkappa^2}{\sqrt{\varkappa^2-x^2-y^2}}.$$

Ferner iſt

$$z - px - py = \sqrt{\varkappa^2-x^2-y^2} + \frac{x^2+y^2}{\sqrt{\varkappa^2-x^2-y^2}} = \frac{\varkappa^2}{\sqrt{\varkappa^2-x^2-y^2}},$$

und man ſieht alſo, daß durch die Gleichung

$$z = \sqrt{\varkappa^2-x^2-y^2}$$

wirklich der Differentialgleichnng

$$\varkappa\sqrt{1+p^2+q^2} = z - px - qy$$

genügt wird, wie verlangt wurde.

15. In dem vollſtändigen Integrale $U = 0$ der Differentialgleichung $V = 0$ kann man ſich offenbar auch die eine der beiden willkührlichen Conſtanten, z. B. b, als Function der andern a denken, und die Gleichung $U = 0$ kann man ſich immer auf ähnliche Art, wie in (8.), als die allgemeine Gleichung einer ſtetigen Folge durch Variation von a entſtandener krummer Flächen vorſtellen, welche ſämmtlich eine durch die Differentialgleichung $V = 0$ analytiſch ausgedrückte gemeinſchaftliche Eigenſchaft haben. Jeder Punkt der einhüllenden Fläche dieſer Flächen

iſt ein Punkt dieſer Flächen ſelbſt, ſo daß alſo die einhüllende Fläche offenbar dieſelbe Eigenſchaft haben, ihre Gleichung folglich auch eine der Differentialgleichung $V = 0$ genügende Gleichung ſeyn wird, welches immer Statt finden muß, was auch b für eine Function von a ſeyn mag. Iſt nun $b = fa$, ſo wird nach (13.) die Gleichung der einhüllenden Fläche erhalten, wenn man a aus den beiden Gleichungen

$$U = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial a}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial fa}\right) f'a = 0$$

eliminirt, und man erhält alſo, da fa ganz willkührlich iſt, jederzeit ein Integral von $V = 0$, wenn man für fa eine beliebige Function von a ſetzt, und dann a aus den beiden vorſtehenden Gleichungen eliminirt. Lagrange nennt daher das Syſtem dieſer beiden Gleichungen das allgemeine Integral (intégrale générale) der Differentialgleichung $V = 0$. Nehmen wir dies nun mit (14.) zuſammen, ſo iſt, wenn $V = 0$ eine beliebige Gleichung zwiſchen x, y, z, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q$, und $U = 0$ deren vollſtändiges Integral (intégrale complète) mit den zwei willkührlichen Conſtanten a, b iſt, das allgemeine Integral (intégrale générale) dieſer Differentialgleichung das Syſtem der zwei Gleichungen

$$U = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial a}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial fa}\right) f'a = 0$$

für $b = fa$, ſo wie das particuläre Integral (intégrale singulière ou particulière) dieſer Differentialgleichung das Reſultat der Elimination von a, b aus den drei Gleichungen

$$U = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial a}\right) = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial b}\right) = 0$$

iſt.

Hat man z. B. die Differentialgleichung

$$z = px + qy$$

oder

$$z - px - qy = 0,$$

ſo daß

$$V = z - px - qy$$

iſt, ſo iſt das vollſtändige Integral

$$z = ax + by ,$$

weil aus dieſer Gleichung

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p = a, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q = b ,$$

alſo

$$px + qy = ax + by = z$$

folgt, wie erfordert wird. Da nun

$$U = z - ax - by, \left(\frac{\partial U}{\partial a}\right) = -x, \left(\frac{\partial U}{\partial b}\right) = -y$$

iſt; ſo iſt das allgemeine Integral unſerer Differentialgleichung das Syſtem der zwei Gleichungen

$$z = ax + yfa, \ x + yf'a = 0 .$$

Setzt man z. B. mit Lagrange (Leçons sur le calcul des fonctions, nouv. éd. p. 372.)

$$fa = A - \frac{a^2}{4B},$$

ſo iſt

$$f'a = -\frac{a}{2B},$$

und folglich das allgemeine Integral für dieſe ſpecielle Form von fa das Syſtem der Gleichungen

$$z = ax + y\left\{A - \frac{a^2}{4B}\right\}, \ x - \frac{ay}{2B} = 0 .$$

Aus der zweiten folgt

$$a = \frac{2Bx}{y},$$

und dieſer Werth, in die erſte Gleichung geſetzt, giebt:

$$z = Ay + \frac{Bx^2}{y}.$$

Wir wollen prüfen, ob durch dieſe Gleichung auch der gegebenen Differentialgleichung genügt wird. Durch partielle Differentiation erhält man:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p = \frac{2Bx}{y}, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q = A - \frac{Bx^2}{y^2};$$

alſo

$$px + qy = \frac{2Bx^2}{y} + Ay - \frac{Bx^2}{y} = Ay + \frac{Bx^2}{y} = z,$$

wie erfordert wird.

Setzte man $fa = Aa^2$, ſo wäre $f'a = 2Aa$, und man müßte alſo a aus den beiden Gleichungen

$$z = ax + Aa^2y, \ x + 2Aay = 0$$

eliminiren. Aus der zweiten folgt

$$a = -\frac{x}{2Ay},$$

und dies, in die erſte Gleichung geſetzt, giebt:

$$z = -\frac{x^2}{2Ay} + \frac{x^2}{4Ay} = -\frac{x^2}{4Ay}.$$

Um zu zeigen, daß durch dieſe Gleichung wirklich der gegebenen Differentialgleichung genügt wird, differentiire man nach x und y; ſo erhält man

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p = -\frac{x}{2Ay},\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q = \frac{x^2}{4Ay^2};$$

folglich

$$px + qy = -\frac{x^2}{2Ay} + \frac{x^2}{4Ay} = -\frac{x^2}{4Ay} = z,$$

wie erfordert wird.

Größerer Ausführlichkeit über die Theorie der einhüllenden Curven und Flächen wegen verweiſen wir vorzüglich auf Littrow analytiſche Geometrie. Wien. 1823. Cap. VI. VII. und Brandes höhere Geometrie. Thl. II. Lpzg. 1824. §. 184—218. §. 487—501. §. 544—554. Ueber die Theorie der allgemeinen und partikulären Integrale, welche wir in ihren erſten Elementen an die geometriſche Theorie der einhüllenden Curven und Flächen zu knüpfen hier für zweckmäßig gehalten haben, ſ. m. aber vorzüglich Lagrange Leçons sur le calcul des fonctions. Paris 1806. Leçon XIV—XVII. p. 371. ff. und außerdem Lacroix Traité du calcul diff. et du calcul int. T. II. Chap. V. Mémoires de Paris. 1784. Mémoires de Berlin 1774.

Einſchalten oder Interpoliren iſt eine in jeder Beziehung, beſonders aber für alle Anwendungen der Mathematik auf die Naturwiſſenſchaften überaus wichtige Methode, welche im Allgemeinen den Zweck hat: wenn mehrere, beſtimmten Werthen der unabhängigen veränderlichen Größe entſprechende, Werthe einer ihrer Form nach unbekannten Function gegeben ſind, eine Function zu finden, deren Werthe für dieſelben Werthe der unabhängigen veränderlichen Größe den gegebenen Werthen der unbekannten Function gleich ſind. Daß dieſe Methode für alle Naturwiſſenſchaften, beſonders auch für die Auffindung allgemeiner Naturgeſetze ſehr wichtig iſt, läßt ſich leicht erläutern. Seyen nämlich überhaupt x und z zwei in der Natur vorkommende Größen, die in einer gegenſeitigen Abhängigkeit von einander ſtehen. Das allgemeine Geſetz dieſer Abhängigkeit ſey unbekannt, man kenne aber eine gewiſſe Anzahl ſpecieller durch Beobachtung gefundener zuſammen ſtimmender Werthe von x und y, die wir durch

$$x_1, y_1, x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4; \ldots x_n, y_n$$

bezeichnen wollen. Läßt ſich nun die Form einer Function fx von x ſo beſtimmen, daß

$$fx_1 = y_1, fx_2 = y_2, fx_3 = y_3, fx_4 = y_4, \ldots fx_n = y_n$$

iſt; ſo wird offenbar durch die Function $fx = y$ das allgemeine Geſetz der Abhängigkeit der Größen x und y von einander mit deſto größerer Wahrſcheinlichkeit ausgedrückt werden, je größer die Anzahl der gegebenen einander entſprechenden Werthe von x und y iſt. Zugleich wird dieſe Wahrſcheinlichkeit augenſcheinlich erhöhet, wenigſtens für den zwiſchen den Gränzen $x = x_1$

und $x = x_n$ liegenden Theil der unbekannten Function, wenn dieſelbe zwiſchen den angegebenen Gränzen continuirlich iſt, und die einzelnen gegebenen Werthe recht nahe bei einander, in einer möglichſt ſtetigen Folge liegen. Daß mehr als Wahrſcheinlichkeit auf dieſem Wege nie zu erreichen iſt, verſteht ſich von ſelbſt; es iſt aber auch bloß von einer empiriſchen Auffindung von Naturgeſetzen die Rede, und es kommt hauptſächlich darauf an, die Wahrſcheinlichkeit durch Vervielfältigung der Beobachtungen möglichſt zu erhöhen. Das Einſchalten iſt von der ſogenannten Methode der kleinſten Quadrate (ſ. Wahrſcheinlichkeitsrechnung. 77.) weſentlich verſchieden, indem bei letzterer ein Naturgeſetz ſchon als bekannt und durch eine allgemeine Formel dargeſtellt angenommen wird, wo nun in dieſer Formel jederzeit neben der unabhängigen veränderlichen Größe x noch gewiſſe conſtante Größen, die alſo für alle Werthe von x ungeändert bleiben, vorkommen werden; und eben dieſe conſtanten Größen aus gegebenen numeriſchen Reſultaten guter Beobachtungen mit der größten Wahrſcheinlichkeit völliger Richtigkeit zu beſtimmen, iſt der Zweck der Methode der kleinſten Quadrate, worüber man in dem angeführten Artikel weitere Belehrung ſuchen muß.

Die obigen allgemeinen Bemerkungen über das Einſchalten gewinnen an Anſchaulichkeit, wenn man ſie an eine einfache geometriſche Betrachtung knüpft. Man kann ſich nämlich die Werthe von x als Abſciſſen, die entſprechenden Werthe von y als Ordinaten einer ebenen Curve denken, und das allgemeine Problem der Interpolation fällt dann mit der geometriſchen Aufgabe zuſammen: durch eine gewiſſe Anzahl, z. B. n, gegebene Punkte eine Curve zu ziehen, oder die Gleichung einer Curve zu finden, welche durch n gegebene Punkte geht. Hieraus geht auch, wie es uns ſcheint, am deutlichſten hervor, daß das Einſchalten im Allgemeinen eine unbeſtimmte Aufgabe iſt, indem durch n gegebene Punkte offenbar unendlich viele eben ſo vielen beſtimmten Geſetzen unterworfene Curven gezogen werden können. Nur wenn man die Aufgabe noch gewiſſen beſondern Bedingungen unterwirft, kann dieſelbe, wie wir nachher ſehen werden, eine beſtimmte werden. Für jetzt wollen wir das Problem in ſeinem obigen allgemeinſten Sinne nehmen.

Noch iſt zu bemerken, daß der Name Einſchalten oder Interpoliren einer eingeſchränktern Anſicht der Sache ſeine Entſtehung verdankt. Denkt man ſich nämlich die unbekannte Function $y = fx$ als das allgemeine Glied einer Reihe, ſo ſind die gegebenen Werthe y_1, y_2, y_3, y_4, ... y_n Glieder dieſer Reihe, welche den Stellenzahlen x_1, x_2, x_3, x_4, ... x_n, die freilich bei dieſer Anſicht der Sache ſtreng genommen nur als poſitive ganze Zahlen gedacht werden können, entſprechen, und die Interpolation verlangt nun, die Glieder der in Rede ſtehenden Reihe zu finden oder in dieſe Reihe e i n z u ſ c h a l t e n, welche den in der Reihe x_1, x_2, x_3, x_4, ... x_n noch fehlenden Stellen-

zahlen entſprechen, wenigſtens mit ſo großer Wahrſcheinlichkeit oder annähernder Richtigkeit, als möglich. Man ſieht aber leicht, daß dieſes Problem nur auf die Weiſe zur Löſung gebracht werden kann, daß man die Form der unbekannten Function $y = fx$ ſo beſtimmt, daß dieſelbe, indem man dem x nach und nach die Werthe $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$ beilegt, reſpective die Werthe $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$ erhält, wodurch wir von ſelbſt wieder auf die gleich im Eingange ausgeſprochene allgemeinere Anſicht zurückgeführt werden. Auch ſollte hier bloß die Entſtehung der Benennung Einſchalten erläutert werden.

Daß übrigens die geſuchte Function, wie nachher mit Mehrerem gezeigt werden wird, auch von mehr als einer unabhängigen veränderlichen Größe abhängen kann, daß aber auch in dieſem Falle die obigen Bemerkungen im Allgemeinen keine Aenderung erleiden, erhellet leicht. Nur mag noch bemerkt werden, daß bei zwei unabhängigen veränderlichen Größen, für $y = f(x, z)$, dieſe Function, wenn man die Aufgabe mit einer geometriſchen Betrachtung in Verbindung bringt, nun nicht mehr einer krummen Linie, ſondern einer krummen Fläche entſpricht.

1. Durch die oft in Anwendung kommende Annahme, daß die gegebenen Werthe

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

von x, welchen die ebenfalls gegebenen Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

von y entſprechen, in gleichen Abſtänden von einander liegen, oder, was daſſelbe ſagt, daß die in Rede ſtehenden Werthe von x eine arithmetiſche Reihe der erſten Ordnung bilden, iſt uns der einfachſte Fall der Interpolation gegeben.

Zu der Formel, welche zu der Auflöſung dieſes Falls gewöhnlich gebraucht wird, gelangt man am einfachſten durch ein ganz elementares Verfahren auf folgende Art. Man laſſe in der ihrer Form nach unbekannten Function fx die unabhängige veränderliche Größe x ſich um die willkührliche Größe $\varkappa$ verändern, ſo erhellet augenblicklich die Richtigkeit der folgenden identiſchen Gleichung:

$$f(x+\varkappa) = fx + \varkappa . \frac{f(x+\varkappa) - fx}{\varkappa},$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$\frac{f(x+\varkappa) - fx}{\varkappa} = \varphi x$$

ſetzt, der Gleichung:

$$1.\ f(x+\varkappa) = fx + \varkappa\varphi x .$$

In dieſer Gleichung ſetze man $x + \alpha$ für x und zugleich $\varkappa - \alpha$ für $\varkappa$, ſo daß $x + \varkappa$ ſeinen Werth nicht ändert; ſo erhält man

$$f(x + \varkappa) = f(x + \alpha) + (\varkappa - \alpha)\varphi(x + \alpha),$$

und, wenn man hiervon die Gleichung (1.) abzieht:

$$0 = f(x + \alpha) - fx + (\varkappa - \alpha)\varphi(x + \alpha) - \varkappa\varphi x,$$

oder

$$0 = f(x + \alpha) - fx + (\varkappa - \alpha)\{\varphi(x + \alpha) - \varphi x\} - \alpha\varphi x,$$

oder in bekannter Bezeichnung, indem wir immer $\Delta x = \alpha$ ſetzen:

$$2.\quad 0 = \Delta fx + (\varkappa - \alpha)\Delta\varphi x - \alpha\varphi x.$$

In dieſer Gleichung ſetze man wieder $x + \alpha$ für x, $\varkappa - \alpha$ für $\varkappa$; ſo wird

$$0 = \Delta f(x + \alpha) + (\varkappa - 2\alpha)\Delta\varphi(x + \alpha) - \alpha\varphi(x + \alpha),$$

und, wenn man hiervon die Gleichung (2.) abzieht:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta f(x + \alpha) - \Delta fx \\ &\quad + (\varkappa - 2\alpha)\Delta\varphi(x + \alpha) - (\varkappa - \alpha)\Delta\varphi x \\ &\quad - \alpha\{\varphi(x + \alpha) - \varphi x\} \\ &= \Delta f(x + \alpha) - \Delta fx \\ &\quad + (\varkappa - 2\alpha)\{\Delta\varphi(x + \alpha) - \Delta\varphi x\} - \alpha\Delta\varphi x \\ &\quad - \alpha\{\varphi(x + \alpha) - \varphi x\}, \end{aligned}$$

d. i.

$$3.\quad 0 = \Delta^2 fx + (\varkappa - 2\alpha)\Delta^2\varphi x - 2\alpha\Delta\varphi x.$$

Setzt man hierin wieder $x + \alpha$ für x, $\varkappa - \alpha$ für $\varkappa$; ſo wird

$$0 = \Delta^2 f(x + \alpha) + (\varkappa - 3\alpha)\Delta^2\varphi(x + \alpha) - 2\alpha\Delta\varphi(x + \alpha),$$

und wenn man die Gleichung (3.) abzieht:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta^2 f(x + \alpha) - \Delta^2 fx \\ &\quad + (\varkappa - 3\alpha)\Delta^2\varphi(x + \alpha) - (\varkappa - 2\alpha)\Delta^2\varphi x \\ &\quad - 2\alpha\{\Delta\varphi(x + \alpha) - \Delta\varphi x\} \\ &= \Delta^2 f(x + \alpha) - \Delta^2 fx \\ &\quad + (\varkappa - 3\alpha)\{\Delta^2\varphi(x + \alpha) - \Delta^2\varphi x\} - \alpha\Delta^2\varphi x \\ &\quad - 2\alpha\{\Delta\varphi(x + \alpha) - \Delta\varphi x\}, \end{aligned}$$

d. i.

$$4.\quad 0 = \Delta^3 fx + (\varkappa - 3\alpha)\Delta^3\varphi x - 3\alpha\Delta^2\varphi x.$$

Auf dieſe Gleichung daſſelbe Verfahren angewandt, erhält man nach und nach:

$$0 = \Delta^3 f(x + \alpha) + (\varkappa - 4\alpha)\Delta^3\varphi(x + \alpha) - 3\alpha\Delta^2\varphi(x + \alpha)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta^3 f(x + \alpha) - \Delta^3 fx \\ &\quad + (\varkappa - 4\alpha)\Delta^3\varphi(x + \alpha) - (\varkappa - 3\alpha)\Delta^3\varphi x \\ &\quad - 3\alpha\{\Delta^2\varphi(x + \alpha) - \Delta^2\varphi x\} \\ &= \Delta^3 f(x + \alpha) - \Delta^3 fx \\ &\quad + (\varkappa - 4\alpha)\{\Delta^3\varphi(x + \alpha) - \Delta^3\varphi x\} - \alpha\Delta^3\varphi x \\ &\quad - 3\alpha\{\Delta^2\varphi(x + \alpha) - \Delta^2\varphi x\}, \end{aligned}$$

d. i.

$$5.\quad 0 = \Delta^4 fx + (\varkappa - 4\alpha)\Delta^4\varphi x - 4\alpha\Delta^3\varphi x.$$

Wie man ſo weiter gehen kann, unterliegt keinem Zweifel, und man hat folglich aus dieſen Gleichungen nach und nach:

$$f(x+\varkappa) = fx + \varkappa\varphi x,$$

$$\varphi x = \frac{\Delta fx}{\alpha} + \frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}\Delta\varphi x,$$

$$\Delta\varphi x = \frac{\Delta^2 fx}{2\alpha} + \frac{\varkappa-2\alpha}{2\alpha}\Delta^2\varphi x,$$

$$\Delta^2\varphi x = \frac{\Delta^3 fx}{3\alpha} + \frac{\varkappa-3\alpha}{3\alpha}\Delta^3\varphi x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^{n-2}\varphi x = \frac{\Delta^{n-1} fx}{(n-1)\alpha} + \frac{\varkappa-(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\Delta^{n-1}\varphi x,$$

$$\Delta^{n-1}\varphi x = \frac{\Delta^n fx}{n\alpha} + \frac{\varkappa-n\alpha}{n\alpha}\Delta^n\varphi x;$$

folglich durch ſucceſſive Subſtitution:

$$f(x+\varkappa) = fx + \frac{\varkappa}{\alpha}\Delta fx + \frac{\varkappa(\varkappa-\alpha)}{2\alpha^2}\Delta^2 fx + \frac{\varkappa(\varkappa-\alpha)(\varkappa-2\alpha)}{2.3\alpha^3}\Delta^3 fx + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\varkappa(\varkappa-\alpha)\ldots(\varkappa-(n-1)\alpha)}{2.3.4\ldots n\alpha^n}\Delta^n fx + \frac{\varkappa(\varkappa-\alpha)\ldots(\varkappa-n\alpha)}{2.3.4\ldots n\alpha^n}\Delta^n\varphi x.$$

Für $\varkappa = n\alpha$ wird

$$f(x+\varkappa) = fx + \frac{\varkappa}{\alpha}\Delta fx + \frac{\varkappa(\varkappa-\alpha)}{2\alpha^2}\Delta^2 fx + \frac{\varkappa(\varkappa-\alpha)(\varkappa-2\alpha)}{2.3\alpha^3}\Delta^3 fx + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\varkappa(\varkappa-\alpha)\ldots(\varkappa-(n-1)\alpha)}{2.3.4\ldots n\alpha^n}\Delta^n fx.$$

Das obige einfache Verfahren, durch welches wir zu dieſer Formel gelangt ſind, haben wir von Crelle (Journal der Math. B. VII. S. 277.), und dieſer wieder dem Weſentlichen nach von Servois entlehnt.

Dieſe Formel wollen wir nun auf das Interpolations-Problem anwenden. Bezeichnet man die conſtante Differenz der gegebenen arithmetiſchen Reihe erſter Ordnung

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

durch α, und ſetzt $x = x_1$, ſo iſt für $\varkappa = (n-1)\alpha$:

$$f(x_1+\varkappa) = fx_1 + \frac{\varkappa}{\alpha}\Delta fx_1 + \frac{\varkappa(\varkappa-\alpha)}{2\alpha^2}\Delta^2 fx_1 + \frac{\varkappa(\varkappa-\alpha)(\varkappa-2\alpha)}{2.3\alpha^3}\Delta^3 fx_1 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\varkappa(\varkappa-\alpha)\ldots(\varkappa-(n-2)\alpha)}{2.3.4\ldots(n-1)\alpha^{n-1}}\Delta^{n-1} fx_1,$$

oder, weil nach bekannten Formeln des Differenzen-Calculs aus der gegebenen Reihe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

ſogleich

$$fx_1 = y_1$$

$$\Delta fx_1 = y_2 - y_1$$

$$\Delta^2 fx_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$$

$$\Delta^3 fx_1 = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1$$

. . . .

$$\Delta^{n-1} fx_1 = y_n - \frac{n-1}{1} y_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} y_{n-2} - \ldots \mp \frac{n-1}{1} y_2 \pm y_1$$

folgt:

$$f(x_1 + \varkappa) = y_1$$

$$+ \frac{\varkappa}{\alpha}\{y_2 - y_1\}$$

$$+ \frac{\varkappa(\varkappa-\alpha)}{2\alpha^2}\{y_3 - 2y_2 + y_1\}$$

$$+ \frac{\varkappa(\varkappa-\alpha)(\varkappa-2\alpha)}{2.3\alpha^3}\{y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1\}$$

. . . .

$$+ \frac{\varkappa(\varkappa-\alpha)\ldots(\varkappa-(n-2)\alpha)}{2.3.4\ldots(n-1)\alpha^{n-1}}\left\{y_n - \frac{n-1}{1} y_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} y_{n-2} \ldots \pm y_1\right\}$$

für $\varkappa = (n-1)\alpha$. Da für

$$\varkappa = 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots (n-1)\alpha$$

offenbar

$$x_1 + \varkappa = x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots x_n,$$

alſo

$$f(x_1 + \varkappa) = fx_1, fx_2, fx_3, fx_4, \ldots\ldots fx_n$$

$$= y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots\ldots y_n$$

iſt, ſo ſieht man, daß aus dem Ausdruck auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in obiger Gleichung die Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots\ldots y_n$$

erhalten werden, wenn man in demſelben reſpective

$$\varkappa = 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots\ldots (n-1)\alpha$$

ſetzt. Setzt man aber überhaupt $x_1 + \varkappa = x$, $\varkappa = x - x_1$; ſo wird

$$fx = y_1$$

$$+ \frac{x-x_1}{\alpha}\{y_2 - y_1\}$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_1-\alpha)}{2\alpha^2}\{y_3 - 2y_2 + y_1\}$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_1-\alpha)(x-x_1-2\alpha)}{2.3\alpha^3}\{y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1\}$$

. . . .

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_1-\alpha)\ldots(x-x_1-(n-2)\alpha)}{2.3.4\ldots(n-1)\alpha^{n-1}}\left\{y_n - \frac{n-1}{1} y_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} y_{n-2} - \ldots \pm y_1\right\}$$

Für

$$x = 0,\ \alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha,\ \ldots\ (n-1)\,\alpha$$

iſt

$$x - x_1 = 0,\ \alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha,\ \ldots\ (n-1)\,\alpha\ ,$$

$$x = x_1,\ x_1 + \alpha,\ x_1 + 2\alpha,\ x_1 + 3\alpha,\ \ldots\ x_1 + (n-1)\,\alpha\ ,$$

d. i.

$$x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ x_n\ ,$$

woraus nun, in Verbindung mit dem Vorhergehenden auf der Stelle folgt, daß die Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in obiger Gleichung eine Function von x iſt, deren Werthe für

$$x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ x_n$$

die gegebenen Größen

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots\ y_n$$

ſind, und daß folglich durch dieſe Function wirklich den Bedingungen der Interpolations-Aufgabe in dem vorliegenden Falle genügt wird.

Für beſondere Anwendungen bedarf die obige allgemeine Formel, wenn ſich nach ihr mit Bequemlichkeit rechnen laſſen ſoll, gewöhnlich auch einer beſondern Einrichtung. Obgleich eigentlich Anwendungen hier nicht zu unſerm Zweck gehören, ſo mag doch das folgende aus der Aſtronomie entlehnte Beiſpiel zur Erläuterung dienen. Kennt man nämlich die gerade Aufſteigung (Declination, Länge, Breite) des Monds von 12 zu 12 Stunden, ſo kann verlangt werden, die gerade Aufſteigung deſſelben für einen mittlern Zeitpunkt, den wir durch t bezeichnen wollen, zu finden. Der Einfachheit wegen wollen wir bloß bis zu den dritten Differenzen gehen, und die geſuchte der Zeit t entſprechende Rectaſcenſion ſelbſt jetzt durch x bezeichnen. Man erhält alſo aus der allgemeinen Formel in dieſem Falle, wenn wir der Kürze wegen, indem y_1, y_2, y_3, y_4 die gegebenen Rectaſcenſionen des Monds bezeichnen,

$$y_2 - y_1 = \Delta_1,\ y_3 - 2y_2 + y_1 = \Delta_2,\ y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1 = \Delta_3$$

ſetzen:

$$x = y_1 + \frac{t}{12}\Delta_1 + \frac{t(t-12)}{2.12^2}\Delta_2 + \frac{t(t-12)(t-24)}{2.3.12^3}\Delta_3\ ,$$

wo man nur zu bemerken hat, daß die Zeit t von dem Zeitpunkte an gerechnet wird, welchem die gegebene Rectaſcenſion y_1 entſpricht. Iſt Δ die Correction, welche an der bekannten Rectaſcenſion y_1 angebracht werden muß, um x zu erhalten, ſo iſt $x = y_1 + \Delta$, $x - y_1 = \Delta$, alſo

$$\Delta = \frac{t}{12}\Delta_1 + \frac{t(t-12)}{2.12^2}\Delta_2 + \frac{t(t-12)(t-24)}{2.3.12^3}\Delta_3\ ,$$

oder, wenn man nach Potenzen von $\frac{t}{12}$ entwickelt:

ſogleich

$$fx_1 = y_1$$
$$\Delta fx_1 = y_2 - y_1$$
$$\Delta^2 fx_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$$
$$\Delta^3 fx_1 = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta^{n-1} fx_1 = y_n - \frac{n-1}{1} y_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} y_{n-2} - \ldots \mp \frac{n-1}{1} y_2 \pm y_1$$

folgt:

$$f(x_1 + \varkappa) = y_1$$
$$+ \frac{\varkappa}{\alpha}\{y_2 - y_1\}$$
$$+ \frac{\varkappa(\varkappa-\alpha)}{2\alpha^2}\{y_3 - 2y_2 + y_1\}$$
$$+ \frac{\varkappa(\varkappa-\alpha)(\varkappa-2\alpha)}{2.3\alpha^3}\{y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{\varkappa(\varkappa-\alpha)\ldots(\varkappa-(n-2)\alpha)}{2.3.4\ldots(n-1)\alpha^{n-1}}\left\{y_n - \frac{n-1}{1} y_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} y_{n-2} \ldots \pm y_1\right\}$$

für $\varkappa = (n-1)\alpha$. Da für

$$\varkappa = 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots (n-1)\alpha$$

offenbar

$$x_1 + \varkappa = x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n,$$

alſo

$$f(x_1 + \varkappa) = fx_1, fx_2, fx_3, fx_4, \ldots fx_n$$
$$= y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

iſt, ſo ſieht man, daß aus dem Ausdruck auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in obiger Gleichung die Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

erhalten werden, wenn man in demſelben reſpective

$$\varkappa = 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots (n-1)\alpha$$

ſetzt. Setzt man aber überhaupt $x_1 + \varkappa = x$, $\varkappa = x - x_1$; ſo wird

$$fx = y_1$$
$$+ \frac{x - x_1}{\alpha}\{y_2 - y_1\}$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_1-\alpha)}{2\alpha^2}\{y_3 - 2y_2 + y_1\}$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_1-\alpha)(x-x_1-2\alpha)}{2.3\alpha^3}\{y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_1-\alpha)\ldots(x-x_1-(n-2)\alpha)}{2.3.4\ldots(n-1)\alpha^{n-1}}\left\{y_n - \frac{n-1}{1} y_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} y_{n-2} - \ldots \pm y_1\right\}.$$

Für

$$x = 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots (n-1)\alpha$$

iſt

$$x - x_1 = 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots (n-1)\alpha ,$$

$$x = x_1, x_1 + \alpha, x_1 + 2\alpha, x_1 + 3\alpha, \dots x_1 + (n-1)\alpha ,$$

d. i.

$$x = x_1, x_2, x_3, x_4, \dots x_n ,$$

woraus nun, in Verbindung mit dem Vorhergehenden auf der Stelle folgt, daß die Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in obiger Gleichung eine Function von x iſt, deren Werthe für

$$x = x_1, x_2, x_3, x_4, \dots x_n$$

die gegebenen Größen

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \dots y_n$$

ſind, und daß folglich durch dieſe Function wirklich den Bedingungen der Interpolations-Aufgabe in dem vorliegenden Falle genügt wird.

Für beſondere Anwendungen bedarf die obige allgemeine Formel, wenn ſich nach ihr mit Bequemlichkeit rechnen laſſen ſoll, gewöhnlich auch einer beſondern Einrichtung. Obgleich eigentlich Anwendungen hier nicht zu unſerm Zweck gehören, ſo mag doch das folgende aus der Aſtronomie entlehnte Beiſpiel zur Erläuterung dienen. Kennt man nämlich die gerade Aufſteigung (Declination, Länge, Breite) des Monds von 12 zu 12 Stunden, ſo kann verlangt werden, die gerade Aufſteigung deſſelben für einen mittlern Zeitpunkt, den wir durch t bezeichnen wollen, zu finden. Der Einfachheit wegen wollen wir bloß bis zu den dritten Differenzen gehen, und die geſuchte der Zeit t entſprechende Rectaſcenſion ſelbſt jetzt durch x bezeichnen. Man erhält alſo aus der allgemeinen Formel in dieſem Falle, wenn wir der Kürze wegen, indem y_1, y_2, y_3, y_4 die gegebenen Rectaſcenſionen des Monds bezeichnen,

$$y_2 - y_1 = \Delta_1, \; y_3 - 2y_2 + y_1 = \Delta_2, \; y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1 = \Delta_3$$

ſetzen:

$$x = y_1 + \frac{t}{12}\Delta_1 + \frac{t(t-12)}{2.12^2}\Delta_2 + \frac{t(t-12)(t-24)}{2.3.12^3}\Delta_3 ,$$

wo man nur zu bemerken hat, daß die Zeit t von dem Zeitpunkte an gerechnet wird, welchem die gegebene Rectaſcenſion y_1 entſpricht. Iſt Δ die Correction, welche an der bekannten Rectaſcenſion y_1 angebracht werden muß, um x zu erhalten, ſo iſt $x = y_1 + \Delta$, $x - y_1 = \Delta$, alſo

$$\Delta = \frac{t}{12}\Delta_1 + \frac{t(t-12)}{2.12^2}\Delta_2 + \frac{t(t-12)(t-24)}{2.3.12^3}\Delta_3 ,$$

oder, wenn man nach Po[illegible]on $\frac{t}{12}$ entwickelt:

$$\Delta = A\frac{t}{12} + B\left(\frac{t}{12}\right)^2 + C\left(\frac{t}{12}\right)^3,$$

wo

$$A = \Delta_1 - \tfrac{1}{2}\Delta_2 + \tfrac{1}{3}\Delta_3,$$
$$B = \tfrac{1}{2}\Delta_2 - \tfrac{1}{2}\Delta_3,$$
$$C = \tfrac{1}{6}\Delta_3$$

iſt.

Liegt die Rectaſcenſion x, wie dies bei wirklichen Anwendungen gewöhnlich der Fall iſt, zwiſchen y_2 und y_3, und rechnet man die Zeit von dem Zeitpunkte an, dem die Rectaſcenſion y_2 entſpricht, ſo muß man in unſerer obigen Formel $t + 12$ ſtatt t ſetzen. Dies giebt

$$\Delta = \frac{t+12}{12}\Delta_1 + \frac{(t+12)t}{2.12^2}\Delta_2 + \frac{(t+12)t(t-12)}{2.3.12^3}\Delta_3.$$

Iſt nun $x = y_2 + \delta$, ſo daß δ die an der Rectaſcenſion y_2 anzubringende Correction iſt, um x zu finden; ſo iſt $y_2 + \delta = y_1 + \Delta$, $y_2 - y_1 = \Delta - \delta$, d. i. $\Delta_1 = \Delta - \delta$, und folglich

$$\Delta = \Delta - \delta + \frac{t}{12}\Delta_1 + \frac{(t+12)t}{2.12^2}\Delta_2 + \frac{(t+12)t(t-12)}{2.3.12^3}\Delta_3,$$

oder

$$\delta = \frac{t}{12}\Delta_1 + \frac{(t+12)t}{2.12^2}\Delta_2 + \frac{(t+12)t(t-12)}{2.3.12^3}\Delta_3,$$

oder, wenn man wieder nach Potenzen von $\frac{t}{12}$ entwickelt:

$$\delta = a\frac{t}{12} + b\left(\frac{t}{12}\right)^2 + c\left(\frac{t}{12}\right)^3,$$

wo

$$a = \Delta_1 + \tfrac{1}{2}\Delta_2 - \tfrac{1}{6}\Delta_3,$$
$$b = \tfrac{1}{2}\Delta_2,$$
$$c = \tfrac{1}{6}\Delta_3.$$

Francoeur drückt in ſeiner Astronomie pratique. Paris. 1830. p. 100. die Formel für δ anders aus, jedoch, wie es uns ſcheint, ohne beſondern Vortheil für die Rechnung. Aus den gegebenen Rectaſcenſionen erhält man nämlich leicht folgende Differenzen:

y_1	$y_2 - y_1$		
y_2	$y_3 - y_2$	$y_3 - 2y_2 + y_1$	$y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1$
y_3	$y_4 - y_3$	$y_4 - 2y_3 + y_2$	
y_4			

Hieraus ergiebt ſich

$$a = -\tfrac{1}{3}y_1 - \tfrac{1}{2}y_2 + y_3 - \tfrac{1}{6}y_4,$$
$$b = \tfrac{1}{2}y_1 - y_2 + \tfrac{1}{2}y_3,$$

Bezeichnet man nun die zweite der drei erſten Differenzen durch Δ und den vierten Theil der Summe der beiden zweiten Differenzen durch φ; ſo findet man

$$\Delta - \varphi + \tfrac{1}{12}\Delta_3 = -\tfrac{1}{3}y_1 - \tfrac{1}{2}y_2 + y_3 - \tfrac{1}{6}y_4,$$
$$\varphi - \tfrac{1}{4}\Delta_3 = \tfrac{1}{2}y_1 - y_2 + \tfrac{1}{2}y_3,$$

und es iſt folglich auch

$$a = \Delta - \varphi + \tfrac{1}{12}\Delta_3,$$
$$b = \varphi - \tfrac{1}{4}\Delta_3,$$
$$c = \tfrac{1}{6}\Delta_3,$$

welches die von Francoeur a. a. O. gegebenen Ausdrücke ſind, die uns aber, wie ſchon erinnert, vor unſern obigen Formeln keine weſentlichen Vorzüge zu haben ſcheinen.

Um z. B. wie bei Francoeur a. a. O. die Rectaſcenſion des Monds den 13. Mai 1831 um $9^h\,17'\,18''$ zu finden, nimmt man aus der Conn. des Tems die Rectaſcenſionen des Monds

y_1 für den 12. Mai Mitternacht,
y_2 für den 13. Mai Mittag,
y_3 für den 13. Mai Mitternacht,
y_4 für den 14. Mai Mittag,

und ſucht die Differenzen; ſo hat man folgende Rechnung:

64° 41′ 4″	+ 7° 50′ 4″		
72. 31. 8	+ 7. 52. 46	+ 2′ 42″	− 2′ 39″
80. 23. 54	+ 7. 52. 49	+ 0. 3	
88. 16. 43			

$a = +7^\circ\,50'\,4''$ $b = 1'\,21''$ $c = -26'',5$

+ 1. 21
+ 26,5
―――――
7. 51. 51,5

Denkt man ſich nun die Zeit $t = 9^h\,17'\,18''$ in Secunden ausgedrückt, ſo muß man ſich natürlich auch $\alpha = 12^h$ in Secunden ausgedrückt denken. In unſerer Formel ſind

$$\text{cd log. } \alpha = 5{,}3645163$$
$$\text{cd log. } \alpha^2 = 0{,}72903$$
$$\text{cd log. } \alpha^3 = 6{,}09355 - 10$$

conſtante Größen, und können bei jeder Rechnung dieſer Art gebraucht werden. Bemerkt man nun, daß alle folgende Zahlen Logarithmen oder dekadiſche Complemente ſind, ſo erhält die Rechnung am beſten folgende Form:

Const. . . . 5,3645163	0,72903	6,09355 — 10
t. 4,5242403	t^2. . . 9,04848	t^3. . . 13,57272
a. 4,4519629	b. . . 1,90849	c. . . 1,42325
4,3407195	1,68600	1,08952

$$\delta = \begin{cases} +\ 6^\circ\, 5'\, 13'',89 & +48'',53 \qquad -12'',29 \\ \qquad +\ 48,53 & \\ \qquad -12,29 & \end{cases}$$

72. 31. 8,00

78° 36′ 58″,13 = AR☾ 13. Mai 1831 um 9^h 17′ 18″

In Bezug auf die oben für $f(x+\varkappa)$ entwickelte allgemeine Reihe bemerken wir nur noch, daß dieſelbe für jedes $\varkappa$, α und n gilt, aber nur dann in's Unendliche fortgeſetzt, oder als eine ſogenannte unendliche Reihe betrachtet werden kann, wenn die Größe

$$\frac{\varkappa(\varkappa-\alpha)\,..\,(\varkappa-n\alpha)}{2.\ 3.\ 4\ldots n\alpha^n}\,\Delta^n\varphi x\,,$$

wo

$$\varphi x = \frac{f(x+\varkappa)-fx}{\varkappa}$$

iſt, für $n = \infty$ verſchwindet. Weitere Unterſuchungen über dieſen Gegenſtand, die mit der Lehre von der Convergenz der Reihen genau zuſammenhängen, gehören aber jetzt nicht hierher, indem es uns hier bloß auf die Entwickelung der obigen Interpolations-Formel ankam.

2. Daß das Interpolations-Problem im Allgemeinen eine unbeſtimmte Aufgabe iſt, iſt ſchon oben bemerkt worden. Nur durch Hinzufügung beſonderer Bedingungen wird dieſelbe beſtimmt, und wir wollen uns daher jetzt einmal folgende Aufgabe vorlegen:

Man ſoll eine ganze algebraiſche Function $y = fx$ des $(n-1)$ten Grades von ſolcher Beſchaffenheit finden, daß dieſelbe, wenn man ihrer unabhängigen veränderlichen Größe x nach und nach die beliebigen, aber gegebenen Werthe x_1, x_2, x_3, x_4, ... x_n beilegt, reſpective die ebenfalls gegebenen Werthe y_1, y_2, y_3, y_4, ... y_n liefert.

Wir nehmen jetzt nicht mehr, wie vorher, an, daß die Werthe x_1, x_2, x_3, x_4, ... x_n der beſondern Bedingung, eine arithmetiſche Reihe erſter Ordnung zu bilden, unterworfen ſind; ſondern dieſe Größen können ganz beliebige ſeyn, und die Aufgabe wird vielmehr dadurch zu einer beſtimmten Aufgabe gemacht, wie wir nachher ſehen werden, daß man annimmt, daß die geſuchte Function eine ganze algebraiſche Function vom $(n-1)$ten Grade, oder eine aus gerade ſo vielen Gliedern, als zuſammenſtimmende Werthe von x und y gegeben ſind, beſtehende ganze algebraiſche Function ſeyn ſoll. Daß x_1, x_2, x_3, x_4, ... x_n als ſämmtlich unter einander ungleich zu betrachten ſind, verſteht ſich von ſelbſt. Bevor wir zu der Auflöſung der Aufgabe ſelbſt übergehen,

beweiſen wir, um den Zuſammenhang nicht durch Verweiſung auf andere Artikel dieſes Wörterbuchs zu unterbrechen, folgende Sätze.

3. Wenn eine ganze algebraiſche Function von x für $x=x_0$ verſchwindet, ſo iſt ſie durch $x-x_0$ algebraiſch ohne Reſt theilbar.

Die gegebene Function ſey

$$X = a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + a_2 x^{m-3} + \ldots + a_{m-2} x + a_{m-1},$$

ſo iſt nach der Vorausſetzung

$$0 = a_0 x_0^{m-1} + a_1 x_0^{m-2} + a_2 x_0^{m-3} + \ldots + a_{m-2} x_0 + a_{m-1},$$

und folglich, wenn man ſubtrahirt

$$X = a_0 (x^{m-1} - x_0^{m-1}) + a_1 (x^{m-2} - x_0^{m-2}) + \ldots + a_{m-2}(x - x_0).$$

Weil nun, wie ſehr leicht gezeigt werden kann, die Differenzen

$$x^{m-1} - x_0^{m-1},\ x^{m-2} - x_0^{m-2},\ x^{m-3} - x_0^{m-3},\ \ldots,\ x - x_0$$

ſämmtlich durch $x-x_0$ algebraiſch theilbar ſind, ſo iſt auch X durch $x-x_0$ algebraiſch theilbar, und der Quotient iſt, wie ebenfalls auf der Stelle erhellet, eine ganze algebraiſche Function des $(m-2)$ten Grades.

4. Wenn eine ganze algebraiſche Function von x verſchwindet, wenn man für x irgend einen der ſämmtlich unter einander ungleichen Werthe

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ x_n$$

ſetzt, ſo iſt dieſe Function durch das Product

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)$$

algebraiſch theilbar.

Die gegebene Function ſey X, ſo iſt, da X für $x=x_1$ verſchwindet, nach (3.)

$$X = (x-x_1)X_1,$$

wo X_1 eine ganze algebraiſche Function von x iſt. X verſchwindet aber nach der Vorausſetzung auch für $x=x_2$. Alſo verſchwindet auch das Product $(x-x_1)X_1$ für $x=x_2$. Da aber nach der Vorausſetzung x_1 und x_2 ungleich ſind, ſo verſchwindet der Factor $x-x_1$ nicht für $x=x_2$, und es muß folglich der andere Factor X_1 für $x=x_2$ verſchwinden, ſo daß alſo nach (3.)

$$X_1 = (x-x_2)X_2$$

iſt, wo wieder X_2 eine ganze algebraiſche Function bezeichnet. Daher iſt nun

$$X = (x-x_1)(x-x_2)X_2.$$

X verſchwindet aber nach der Vorausſetzung auch für $x=x_3$, und, weil x_1, x_2, x_3 unter einander ungleich ſind, ſo verſchwindet keiner der beiden Factoren $x-x_1$, $x-x_2$ für $x=x_3$; alſo muß X_2 für $x=x_3$ verſchwinden, und folglich nach (3.)

$$X_2 = (x - x_3) X_3$$

ſeyn, wo wieder X_3 eine ganze algebraiſche Function von x iſt. Alſo iſt

$$X = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) X_3 .$$

Wie man auf dieſe Art weiter gehen kann, iſt klar, und die Richtigkeit unſeres Satzes wird hier ſchon in völliger Allgemeinheit erhellen.

5. Wenn zwei ganze algebraiſche Functionen ein und derſelben unabhängigen veränderlichen Größe für mehrere Werthe dieſer veränderlichen Größe, deren Anzahl größer iſt als der Grad jeder der beiden Functionen, gleiche Werthe erhalten; ſo ſind dieſe beiden Functionen identiſch, d. h. für jeden Werth der unabhängigen veränderlichen Größe einander gleich.

Die beiden Functionen ſeyen φx, ψx, und erhalten für

$$x = x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

gleiche Werthe. n iſt größer als der Grad jeder der beiden Functionen. Wäre nun nicht identiſch, d. h. für jeden Werth von x, $\varphi x = \psi x$; ſo wäre

$$\varphi x - \psi x$$

eine ganze algebraiſche Function von x, die nicht identiſch $=0$ iſt, und der Grad dieſer Function wäre offenbar nach dem Obigen kleiner als n. Nach der Vorausſetzung erhalten aber φx und ψx für $x = x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$ gleiche Werthe, d. h. die Function

$$\varphi x - \psi x$$

verſchwindet für $x = x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$, und iſt folglich durch

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n) ,$$

d. h. durch eine ganze algebraiſche Function des nten Grades theilbar (4.), welches ungereimt iſt, da der Grad der Function $\varphi x - \psi x$, wie wir wiſſen, kleiner als n iſt. Daher iſt unſere obige Annahme falſch, und folglich identiſch $\varphi x = \psi x$, w. z. b. w.

6. Aus dieſem Lehrſatze folgt unmittelbar, daß jede ganze Function y des (n—1)ten Grades von x vollſtändig beſtimmt iſt, wenn man die den Werthen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

von x entſprechenden Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

kennt, weil alle ganze algebraiſche Functionen des (n—1)ten Grades, welche für die obigen Werthe von x die Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

erhalten, da die Anzahl dieſer Werthe größer als n—1 iſt, nach (5.) mit der Function y identiſch ſind. Kann man alſo

nur eine ganze algebraiſche Function des $(n-1)$ten Grades von x finden, welche für

$$x = x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

die Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

erhält; ſo iſt dadurch die geſuchte Function y überhaupt gefunden, und unſere Aufgabe alſo im Allgemeinen aufgelöſt.

Um nun eine Function von der angegebenen Beſchaffenheit zu finden, verfährt man ſehr einfach auf folgende Art. Wir ſuchen zunächſt eine Function, welche für

$$x = x_1, x_2, \ldots x_{\varkappa-1}, x_{\varkappa+1}, \ldots x_n$$

verſchwindet, und für $x = x_\varkappa$ den Werth $y_\varkappa$ erhält, immer, wie ſich nach dem Obigen von ſelbſt verſteht, unter der Bedingung, daß dieſe Function eine ganze algebraiſche Function des $(n-1)$ten Grades ſeyn ſoll. Die geſuchte Function ſey $u_\varkappa$, ſo iſt nach (4.) dieſe Function durch das Product

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{\varkappa-1})(x-x_{\varkappa+1})\ldots(x-x_n)$$

theilbar, alſo

$$u_\varkappa = K(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{\varkappa-1})(x-x_{\varkappa+1})\ldots(x-x_n).$$

Da $u_\varkappa$ vom $(n-1)$ten Grade, und das Product

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{\varkappa-1})(x-x_{\varkappa+1})\ldots(x-x_n)$$

offenbar von demſelben Grade iſt, ſo kann K nur eine conſtante Größe ſeyn, die ſich auch auf folgende Art ſehr leicht beſtimmen läßt. Nach der Annahme ſoll nämlich $u_\varkappa$ für $x = x_\varkappa$ den Werth $y_\varkappa$ erhalten. Daher iſt

$$y_\varkappa = K(x_\varkappa-x_1)(x_\varkappa-x_2)\ldots(x_\varkappa-x_{\varkappa-1})(x_\varkappa-x_{\varkappa+1})\ldots(x_\varkappa-x_n),$$

$$K = \frac{y_\varkappa}{(x_\varkappa-x_1)(x_\varkappa-x_2)\ldots(x_\varkappa-x_{\varkappa-1})(x_\varkappa-x_{\varkappa+1})\ldots(x_\varkappa-x_n)},$$

und folglich

$$u_\varkappa = y_\varkappa \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{\varkappa-1})(x-x_{\varkappa+1})\ldots(x-x_n)}{(x_\varkappa-x_1)(x_\varkappa-x_2)\ldots(x_\varkappa-x_{\varkappa-1})(x_\varkappa-x_{\varkappa+1})\ldots(x_\varkappa-x_n)},$$

wodurch alſo $u_\varkappa$ gefunden iſt. Bezeichnen nun

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots u_n$$

ſämmtlich ganze algebraiſche Functionen des $(n-1)$ten Grades welche reſpective

für $x = x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$ verſchwinden, für $x = x_1$ aber $= y_1$;
für $x = x_1, x_3, x_4, \ldots x_n$ verſchwinden, für $x = x_2$ aber $= y_2$;
für $x = x_1, x_2, x_4, \ldots x_n$ verſchwinden, für $x = x_3$ aber $= y_3$;
. . . .
für $x = x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}$ verſchwinden, für $x = x_n$ aber $= y_n$

werden; ſo iſt

$$u_1 = y_1 \cdot \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)\ldots(x_1-x_n)},$$

$$u_2 = y_2 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)\ldots(x_2-x_n)},$$

$$u_3 = y_3 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)\ldots(x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)\ldots(x_3-x_n)},$$

$$u_4 = y_4 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)\ldots(x-x_n)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_4-x_5)\ldots(x_4-x_n)},$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

$$u_n = y_n \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)(x_n-x_4)\ldots(x_n-x_{n-1})}.$$

Eine ganze algebraiſche Function des $(n-1)$ten Grades, welche den Bedingungen, für

$$x = x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

die Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

zu erhalten, ſämmtlich genügt, iſt offenbar

$$= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n$$

Daher iſt

$$y = y_1 \cdot \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)\ldots(x_1-x_n)}$$

$$+ y_2 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)\ldots(x_2-x_n)}$$

$$+ y_3 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)\ldots(x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)\ldots(x_3-x_n)}$$

$$+ y_4 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)\ldots(x-x_n)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_4-x_5)\ldots(x_4-x_n)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ y_n \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)(x_n-x_4)\ldots(x_n-x_{n-1})},$$

und alſo durch dieſe höchſt allgemeine und merkwürdige, von Lagrange zuerſt gefundene, Interpolationsformel unſer Problem vollſtändig aufgelöſt. Auch iſt nach der vorhergehenden Theorie dieſe an ſich, ſelbſt empiriſch, ſehr leicht zu conſtruirende Formel die einzige, durch welche das Problem zur Löſung gebracht wird.

M. ſ. über dieſe Formel auch einen Aufſatz von Dirkſen in Crelles Journal Bd. I. S. 122. Cauchy Cours d'Analyse de l'école royale polytechnique. T. I. Paris 1821. p. 85. und p. 525.

7. Seyen jetzt $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ zwei beliebige ganze algebraiſche Functionen von x und y, welche beide ſowohl in Bezug auf x, als auch in Bezug auf y vom $(n-1)$ten Grade ſind. Ferner ſeyen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

und

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

zwei Reihen bekannter Werthe von x und y. Erhalten nun die

beiden Functionen gleiche Werthe, wenn man für ihre veränderlichen Größen zwei beliebige Glieder dieſer Reihen ſetzt, ſo iſt identiſch $\varphi(x, y) = \psi(x, y)$, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann.

$\varphi(x_1, y)$ und $\psi(x_1, y)$ ſind nach der Vorausſetzung zwei ganze algebraiſche Functionen des $(n-1)$ten Grades von y, welche gleiche Werthe erhalten, wenn man

$$y = y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

ſetzt. Daher iſt nach (5.) identiſch

$$\varphi(x_1, y) = \psi(x_2, y)$$

und ganz eben ſo iſt identiſch

$$\varphi(x_2, y) = \psi(x_2, y,$$
$$\varphi(x_3, y) = \psi(x_3, y),$$
$$\varphi(x_4, y) = \psi(x_4, y),$$
$$\cdots\cdots$$
$$\varphi(x_n, y) = \psi(x_n, y).$$

Betrachtet man nun y als conſtant, ſo folgt hieraus, daß für jeden beliebigen conſtanten Werth von y die beiden ganzen algebraiſchen Functionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ in Bezug auf x als veränderliche Größe für

$$x = x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

gleiche Werthe erhalten, und alſo für jeden beliebigen conſtanten Werth von y in Bezug auf x identiſch, d. h. für jeden beliebigen Werth von x, nach (5).

$$\varphi(x, y) = \psi(x, y)$$

iſt. Daher iſt alſo für jeden beliebigen conſtanten Werth von y und für jeden beliebigen conſtanten Werth von x, d. h. in Bezug auf x und y als veränderliche Größen identiſch,

$$\varphi(x, y) = \psi(x, y),$$

wie behauptet wurde. Auch würde ſich dieſes Theorem auf ähnliche Art, wie das in (5.) bewieſene Theorem für Functionen **einer** veränderlichen Größe, leicht verallgemeinern laſſen.

Unmittelbar ergiebt ſich nun aber wieder hieraus, daß, wenn $\varphi(x, y)$ eine ganze algebraiſche Function bezeichnet, welche in Bezug auf jede der beiden veränderlichen Größen vom $(n-1)$ten Grade iſt, dieſe Function jederzeit völlig beſtimmt ſeyn wird, wenn man die beſondern Werthe kennt, welche dieſe Function erhält, indem man für x und y zwei beliebige Glieder der beiden Reihen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

und

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

ſetzt.

Wir wollen jetzt alſo wieder annehmen, daß die Werthe einer ganzen algebraiſchen Function des $(n-1)$ten Grades zweier ver-

änderlicher Größen, welche dieſe Function erhält, indem man für ihre veränderlichen Größen irgend zwei Glieder der beiden obigen Reihen ſetzt, gegeben ſeyen, und wollen nun dieſe Function ſelbſt zu beſtimmen ſuchen, da wir durch die vorhergehende Theorie belehrt worden ſind, daß dieſe Beſtimmung nur auf eine Art möglich ſeyn kann, und folglich unſere Aufgabe eine beſtimmte iſt. Bezeichnen wir nun wieder die geſuchte Function, welche alſo eine ganz beſtimmte Form hat, durch $\varphi(x, y)$; ſo iſt, da dieſelbe für

$$x = x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

reſpective die Werthe

$$\varphi(x_1, y), \varphi(x_2, y), \varphi(x_3, y), \varphi(x_4, y), \ldots \varphi(x_n, y)$$

erhält, nach (6.)

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) = {} & \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\ldots(x_1-x_n)}\cdot\varphi(x_1, y)\\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\ldots(x_2-x_n)}\cdot\varphi(x_2, y)\\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\ldots(x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\ldots(x_3-x_n)}\cdot\varphi(x_3, y)\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)\ldots(x_n-x_{n-1})}\cdot\varphi(x_n, y)\end{aligned}$$

Weil aber allgemein $\varphi(x_\varkappa, y)$ für

$$y = y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

reſpective die Werthe

$$\varphi(x_\varkappa, y_1), \varphi(x_\varkappa, y_2), \varphi(x_\varkappa, y_3), \varphi(x_\varkappa, y_4), \ldots \varphi(x_\varkappa, y_n)$$

erhält; ſo iſt nach (6.)

$$\begin{aligned}\varphi(x_\varkappa, y) = {} & \frac{(y-y_2)(y-y_3)(y-y_4)\ldots(y-y_n)}{(y_1-y_2)(y_1-y_3)(y_1-y_4)\ldots(y_1-y_n)}\cdot\varphi(x_\varkappa, y_1)\\ & + \frac{(y-y_1)(y-y_3)(y-y_4)\ldots(y-y_n)}{(y_2-y_1)(y_2-y_3)(y_2-y_4)\ldots(y_2-y_n)}\cdot\varphi(x_\varkappa, y_2)\\ & + \frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_4)\ldots(y-y_n)}{(y_3-y_1)(y_3-y_2)(y_3-y_4)\ldots(y_3-y_n)}\cdot\varphi(x_\varkappa, y_3)\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ & + \frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)\ldots(y-y_{n-1})}{(y_n-y_1)(y_n-y_2)(y_n-y_3)\ldots(y_n-y_{n-1})}\cdot\varphi(x_\varkappa, y_n)\end{aligned}$$

Da man hierdurch allgemein $\varphi(x_\varkappa, y)$ durch die gegebenen Größen

$$\varphi(x_\varkappa, y_1), \varphi(x_\varkappa, y_2), \varphi(x_\varkappa, y_3) \ldots \varphi(x_\varkappa, y_n)$$

ausdrücken kann; ſo laſſen ſich alſo überhaupt

$$\varphi(x_1, y), \varphi(x_2, y), \varphi(x_3, y), \ldots \varphi(x_n, y),$$

und folglich, wenn man nur die nöthigen, übrigens keiner Schwierigkeit unterworfenen Subſtitutionen gehörig vornimmt, auch die geſuchte Function $\varphi(x, y)$, jederzeit durch die gegebenen Größen ausdrücken.

Hat man z. B. bloß die beiden Reihen

$$x_1,\ x_2 \text{ und } y_1,\ y_2\ ;$$

ſo iſt zuerſt:

$$\varphi(x, y) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \varphi(x_1, y)\ ,$$
$$+ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \varphi(x_2, y)\ ,$$

und ferner:

$$\varphi(x_1, y) = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} \cdot \varphi(x_1, y_1),\quad \varphi(x_2, y) = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} \cdot \varphi(x_2, y_1)$$
$$+ \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \cdot \varphi(x_1, y_2)\qquad\qquad + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \cdot \varphi(x_2, y_2).$$

Alſo iſt

$$\varphi(x, y) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} \cdot \varphi(x_1, y_1)$$
$$+ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} \cdot \varphi(x_2, y_1)$$
$$+ \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \cdot \varphi(x_1, y_2)$$
$$+ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \cdot \varphi(x_2, y_2).$$

Für die beiden Reihen

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \text{ und } y_1,\ y_2,\ y_3$$

hat man zuerſt:

$$\varphi(x, y) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \cdot \varphi(x_1, y)$$
$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \cdot \varphi(x_2, y)$$
$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \cdot \varphi(x_3, y)$$

und ferner:

$$\varphi(x_1, y) = \frac{(y - y_2)(y - y_3)}{(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)} \cdot \varphi(x_1, y_1)$$
$$+ \frac{(y - y_1)(y - y_3)}{(y_2 - y_1)(y_2 - y_3)} \cdot \varphi(x_1, y_2)$$
$$+ \frac{(y - y_1)(y - y_2)}{(y_3 - y_1)(y_3 - y_2)} \cdot \varphi(x_1, y_3)$$

$$\varphi(x_2, y) = \frac{(y - y_2)(y - y_3)}{(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)} \cdot \varphi(x_2, y_1)$$
$$+ \frac{(y - y_1)(y - y_3)}{(y_2 - y_1)(y_2 - y_3)} \cdot \varphi(x_2, y_2)$$
$$+ \frac{(y - y_1)(y - y_2)}{(y_3 - y_1)(y_3 - y_2)} \cdot \varphi(x_2, y_3)$$

$$\varphi(x_3, y) = \frac{(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_2)(y_1-y_3)}.\varphi(x_3, y_1)$$
$$+ \frac{(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_1)(y_2-y_3)}.\varphi(x_3, y_2)$$
$$+ \frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_1)(y_3-y_2)}.\varphi(x_3, y_3)$$

$$\varphi(x, y) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}.\frac{(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_2)(y_1-y_3)}.\varphi(x_1, y_1)$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}.\frac{(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_2)(y_1-y_3)}.\varphi(x_2, y_1)$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.\frac{(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_2)(y_1-y_3)}.\varphi(x_3, y_1)$$
$$+ \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}.\frac{(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_1)(y_2-y_3)}.\varphi(x_1, y_2)$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}.\frac{(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_1)(y_2-y_3)}.\varphi(x_2, y_2)$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.\frac{(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_1)(y_2-y_3)}.\varphi(x_3, y_2)$$
$$+ \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}.\frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_1)(y_3-y_2)}.\varphi(x_1, y_3)$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}.\frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_1)(y_3-y_2)}.\varphi(x_2, y_3)$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.\frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_1)(y_3-y_2)}.\varphi(x_3, y_3)$$

Man wird aus dieſen Beiſpielen ſehen, wie man ſich in allen Fällen zu verhalten hat. Die Ausdehnung der obigen Betrachtungen auf Functionen mit mehr als zwei veränderlichen Größen würde keine Schwierigkeit haben.

8. Wir kehren jetzt wieder zu der wichtigen Formel in (6.) zurück, wollen aber der Kürze und beſſern Ueberſicht wegen im Folgenden immer annehmen, daß fünf zuſammenſtimmende Werthe der veränderlichen Größe und der Function gegeben ſind. Auch ſollen dieſe Werthe jetzt nicht mehr wie oben durch x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, und y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, ſondern durch p, q, r, s, t und P, Q, R, S, T bezeichnet werden. Endlich ſoll auch der dem Werthe x der veränderlichen Größe entſprechende Werth der Function jetzt nicht mehr, wie oben, durch y, ſondern durch X bezeichnet werden, ſo daß alſo nach (6.)

$$X = P\frac{(x-q)(x-r)(x-s)(x-t)}{(p-q)(p-r)(p-s)(p-t)}$$
$$+ Q\frac{(x-p)(x-r)(x-s)(x-t)}{(q-p)(q-r)(q-s)(q-t)}$$
$$+ R\frac{(x-p)(x-q)(x-s)(x-t)}{(r-p)(r-q)(r-s)(r-t)}$$
$$+ S\frac{(x-p)(x-q)(x-r)(x-t)}{(s-p)(s-q)(s-r)(s-t)}$$
$$+ T\frac{(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)}{(t-p)(t-q)(t-r)(t-s)}$$

iſt.

Die Allgemeinheit der folgenden Betrachtungen wird, wenn dieſelben auch der Kürze wegen auf fünf gegebene zuſammenſtimmende Werthe der veränderlichen Größe und der Function eingeſchränkt worden ſind, doch mit völliger Deutlichkeit erhellen.

9. Zunächſt wollen wir den vorigen Ausdruck von X auf eine andere Art entwickeln, indem wir dabei überhaupt den aus n gegebenen zuſammenſtimmenden Werthen der veränderlichen Größe und der Function hergeleiteten Werth von X durch X_n bezeichnen. Es iſt nämlich offenbar

$$X_5 - X_4 = P\left\{\frac{(x-q)(x-r)(x-s)(x-t)}{(p-q)(p-r)(p-s)(p-t)} - \frac{(x-q)(x-r)(x-s)}{(p-q)(p-r)(p-s)}\right\}$$
$$+ Q\left\{\frac{(x-p)(x-r)(x-s)(x-t)}{(q-p)(q-r)(q-s)(q-t)} - \frac{(x-p)(x-r)(x-s)}{(q-p)(q-r)(q-s)}\right\}$$
$$+ R\left\{\frac{(x-p)(x-q)(x-s)(x-t)}{(r-p)(r-q)(r-s)(r-t)} - \frac{(x-p)(x-q)(x-s)}{(r-p)(r-q)(r-s)}\right\}$$
$$+ S\left\{\frac{(x-p)(x-q)(x-r)(x-t)}{(s-p)(s-q)(s-r)(s-t)} - \frac{(x-p)(x-q)(x-r)}{(s-p)(s-q)(s-r)}\right\}$$
$$+ T\frac{(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)}{(t-p)(t-q)(t-r)(t-s)}.$$

Aber

$$\frac{x-t}{p-t} - 1 = \frac{x-p}{p-t},$$
$$\frac{x-t}{q-t} - 1 = \frac{x-q}{q-t},$$
$$\frac{x-t}{r-t} - 1 = \frac{x-r}{r-t},$$
$$\frac{x-t}{s-t} - 1 = \frac{x-s}{s-t}.$$

Alſo nach einer leichten Reduction:

$$X_5 - X_4 = (x-p)(x-q)(x-r)(x-s)\left\{\begin{array}{l}\frac{P}{(p-q)(p-r)(p-s)(p-t)}\\+\frac{Q}{(q-p)(q-r)(q-s)(q-t)}\\+\frac{R}{(r-p)(r-q)(r-s)(r-t)}\\+\frac{S}{(s-p)(s-q)(s-r)(s-t)}\\+\frac{T}{(t-p)(t-q)(t-r)(t-s)}\end{array}\right\}.$$

Ganz eben ſo iſt

$$X_4 - X_3 = (x-p)(x-q)(x-r)\left\{\begin{array}{l}\frac{P}{(p-q)(p-r)(p-s)}\\+\frac{Q}{(q-p)(q-r)(q-s)}\\+\frac{R}{(r-p)(r-q)(r-s)}\\+\frac{S}{(s-p)(s-q)(s-r)}\end{array}\right\}$$

$$X_3 - X_2 = (x-p)(x-q)\left\{\begin{array}{l}\frac{P}{(p-q)(p-r)}\\+\frac{Q}{(q-p)(q-r)}\\+\frac{R}{(r-p)(r-q)}\end{array}\right\}.$$

Endlich iſt auch

$$X_2 = P\frac{x-q}{p-q} + Q\frac{x-p}{q-p},$$

und folglich, wenn man

$$X_1 = P$$

ſetzt:

$$X_2 - X_1 = (x-p)\left\{\frac{P}{p-q} + \frac{Q}{q-p}\right\}.$$

Durch Addition dieſer Gleichungen erhält man, wenn man die in { } eingeſchloſſenen Größen nach der Reihe durch

$$[pqrst],\ [pqrs],\ [pqr],\ [pq]$$

bezeichnet und in der Folge der Kürze wegen Differenzgrößen nennt, ſehr leicht:

$$\begin{aligned}X_5 = P + (x-p)[pq] &+ (x-p)(x-q)[pqr]\\ &+ (x-p)(x-q)(x-r)[pqrs]\\ &+ (x-p)(x-q)(x-r)(x-s)[pqrst],\end{aligned}$$

eine Formel, welche zum Gebrauch offenbar bequemer iſt, wie die Formel in (6.)

Wie eine ähnliche Formel überhaupt für X_n conſtruirt werden könnte, bedarf keiner weitern Erläuterung.

10. Um die Bildung der Differenzgrößen recht deutlich zu überſehen, wollen wir zwei von denſelben Dimenſionen, in denen alle Elemente bis auf eines dieſelben ſind, von einander abziehen. Es iſt nämlich

$$[qrst] - [pqrs] = \frac{Q}{(q-r)(q-s)(q-t)} - \frac{P}{(p-q)(p-r)(p-s)}$$
$$+ \frac{R}{(r-q)(r-s)(r-t)} - \frac{Q}{(q-p)(q-r)(q-s)}$$
$$+ \frac{S}{(s-q)(s-r)(s-t)} - \frac{R}{(r-p)(r-q)(r-s)}$$
$$+ \frac{T}{(t-q)(t-r)(t-s)} - \frac{S}{(s-p)(s-q)(s-r)}$$
$$= \frac{(t-p)P}{(p-q)(p-r)(p-s)(p-t)}$$
$$+ \frac{(t-p)Q}{(q-p)(q-r)(q-s)(q-t)}$$
$$+ \frac{(t-p)R}{(r-p)(r-q)(r-s)(r-t)}$$
$$+ \frac{(t-p)S}{(s-p)(s-q)(s-r)(s-t)}$$
$$+ \frac{(t-p)T}{(t-p)(t-q)(t-r)(t-s)};$$

alſo

$$[qrst] - [pqrs] = (t-p)[pqrst],$$

und auf dieſe Weiſe allgemein für jede Anzahl von Elementen:

$$[qrs\ldots yz] - [pqrs\ldots y] = (z-p)[pqrs\ldots yz].$$

Auch iſt, wie aus der Gleichung

$$[pq] = \frac{P}{p-q} + \frac{Q}{q-p}$$

auf der Stelle folgt, immer:

$$[pq] = \frac{Q-P}{q-p}.$$

Die einfachſte Bildung der Differenzgrößen ergiebt ſich nun aus folgendem Schema:

p	P					
		[pq]				
q	Q		[pqr]			
		[qr]		[pqrs]		
r	R		[qrs]		[pqrst]	
		[rs]		[qrst]		[pqrstu]
s	S		[rst]		[qrstu]	
		[st]		[rstu]		
t	T		[stu]			
		[tu]				
u	U					

Da nun nach dem Obigen

$$[pq] = \frac{Q-P}{q-p},$$

$$[pqr] = \frac{[qr]-[pq]}{r-p},$$

$$[pqrs] = \frac{[qrs]-[pqr]}{s-p},$$

$$[pqrst] = \frac{[qrst]-[pqrs]}{t-p},$$

$$[pqrstu] = \frac{[qrstu]-[pqrst]}{u-p}$$

iſt; ſo entſteht offenbar jede folgende Vertikalreihe, wenn man ein Glied der vorhergehenden von dem darunterſtehenden Gliede abzieht, und die Differenz durch die Differenz der beiden Glieder der erſten Vertikalreihe, auf welche die beiden durch die nächſt höhere und nächſt tiefere Differenzgröße in der vorhergehenden Verticalreihe gezogenen Diagonalen hinweiſen, dividirt.

11. Interpolirt man auf die vorher beſchriebene Weiſe, ſo nennt man dies aus einem leicht begreiflichen Grunde von oben herunter interpoliren. Man kann aber auch, wie man es nennt, aus der Mitte interpoliren. Dann muß man nur den Größen pqrst oder den entſprechenden **PQRST** eine andere Anordnung geben. Für die Anordnung

RQSPT

erhält man aus (9.) die Formel:

$$\begin{aligned} X_5 = R + (x-r)[rq] &+ (x-r)(x-q)[rqs] \\ &+ (x-r)(x-q)(x-s)[rqsp] \\ &+ (x-r)(x-q)(x-s)(x-p)[rqspt]. \end{aligned}$$

Nun überzeugt man ſich aber ſehr leicht, daß

$$[rq] = [qr],$$

$$[rqs] = [qrs],$$

$$[rqsp] = [pqrs],$$

$$[rqspt] = [pqrst]$$

iſt. Alſo iſt

$$X_5 = R + (x-r)[qr] + (x-r)(x-q)[qrs]$$
$$+ (x-r)(x-q)(x-s)[pqrs]$$
$$+ (x-r)(x-q)(x-s)(x-p)[pqrst] .$$

Die Differenzgrößen

$$[qr], [qrs], [pqrs], [pqrst]$$

erhält man, wenn man in dem Schema in (10.) zwiſchen R und [qr] eine Horizontallinie mitten durch zieht, und die wechſelsweiſe über und unter dieſer Horizontallinie liegenden Differenzgrößen nimmt.

Für die Anordnung

RSQTP

erhält man aus (9.) die Formel

$$X_5 = R + (x-r)[rs] + (x-r)(x-s)[rsq]$$
$$+ (x-r)(x-s)(x-q)[rsqt]$$
$$+ (x-r)(x-s)(x-q)(x-t)[rsqtp]$$

oder

$$X_5 = R + (x-r)[rs] + (x-r)(x-s)[qrs]$$
$$+ (x-r)(x-s)(x-q)[qrst]$$
$$+ (x-r)(x-s)(x-q)(x-t)[pqrst] ,$$

wo nun die Differenzgrößen

$$[rs], [qrs], [qrst], [pqrst]$$

in dem Schema in (10.) wieder wechſelsweiſe unter und über einer Horizontallinie liegen, die man zwiſchen R und [r s] mitten durch ziehen kann.

12. Man kann die drei in (9.) und (11.) bewieſenen Formeln auch auf folgende Art ſchreiben.

Für die Anordnung **P Q R S T** hat man

$$\text{I. } X_5 =$$
$$P + (x-p)\left\{[pq] + (x-q)\left\{[pqr] + (x-r)\left\{[pqrs] + (x-s)\{[pqrst]\}\right\}\right\}\right\} .$$

Für die Anordnung **R Q S P T** hat man

$$\text{II. } X_5 =$$
$$R + (x-r)\left\{[qr] + (x-q)\left\{[qrs] + (x-s)\left\{[pqrs] + (x-p)\{[pqrst]\}\right\}\right\}\right\} .$$

Für die Anordnung **R S Q T P** hat man

$$\text{III. } X_5 =$$
$$R + (x-r)\left\{[rs] + (x-s)\left\{[qrs] + (x-q)\left\{[qrst] + (x-t)\{[pqrst]\}\right\}\right\}\right\} .$$

Unter dieſer Form ſcheinen dieſe Ausdrücke die bequemſte Rech-

nung zu gewähren. Die Differenzgrößen werden, wenn man die Formeln ſo ſchreibt, ſucceſſive durch die folgenden corrigirt.

Als eine Hauptregel beim Interpoliren hat man ſich zu merken, daß man, wenn es angeht, die Größen p q r s t ſo wählt, daß die eine derſelben dem x ſo nahe wie möglich liegt, und die andern auf beiden Seiten des x möglichſt gleichförmig vertheilt ſind. Dies vorausgeſetzt, ſo wird man am beſten die Formel (II) oder (III) gebrauchen, jenachdem x zwiſchen r und q oder zwiſchen r und s liegt.

13. Wir wollen die vorigen allgemeinen Formeln noch auf den häufig vorkommenden Fall anwenden, wenn p q r s t eine arithmetiſche Reihe bilden. In dieſem Falle iſt

$$q - p = r - q = s - r = t - s.$$

Setzt man nun $q - p = \delta$ und bezeichnet in dieſem Falle die auf einander folgenden Vertikalreihen in dem Schema in (10.) nach der Ordnung durch

$$\begin{array}{l} P, Q, R, S, T, U, \ldots\ldots ; \\ P', Q', R', S', T', U', \ldots\ldots ; \\ P'', Q'', R'', S'', T'', U'', \ldots\ldots ; \\ P''', Q''', R''', S''', T''', U''', \ldots\ldots ; \\ \text{u. ſ. w.} \qquad\qquad \text{u. ſ. w.} \end{array}$$

ſo ergiebt ſich aus der in (10.) angegebenen Bildungsweiſe der Differenzgrößen auf der Stelle, daß allgemein

$$P^{(n)} = \frac{Q^{(n-1)} - P^{(n-1)}}{n\delta},\; Q^{(n)} = \frac{R^{(n-1)} - Q^{(n-1)}}{n\delta},\; R^{(n)} = \frac{S^{(n-1)} - R^{(n-1)}}{n\delta}, \ldots\ldots,$$

und folglich

$$\begin{array}{llll} P' = \frac{Q-P}{\delta}; & P'' = \frac{R-2Q+P}{1.2\delta^2}; & P''' = \frac{S-3R+3Q-P}{1.2.3\delta^3}; & \ldots\ldots \\ Q' = \frac{R-Q}{\delta}; & Q'' = \frac{S-2R+Q}{1.2\delta^2}; & Q''' = \frac{T-3S+3R-Q}{1.2.3\delta^3}; & \ldots\ldots \\ R' = \frac{S-R}{\delta}; & R'' = \frac{T-2S+R}{1.2\delta^2}; & R''' = \frac{U-3T+3S-R}{1.2.3\delta^3}; & \ldots\ldots \\ S' = \frac{T-S}{\delta}; & S'' = \frac{U-2T+S}{1.2\delta^2}; & S''' = \frac{V-3U+3T-S}{1.2.3\delta^3}; & \ldots\ldots \\ \text{u. ſ. w.} & \text{u. ſ. w.} & \text{u. ſ. w.} & \end{array}$$

Hieraus ſieht man, daß im vorliegenden Falle nach einer aus der Differenzenrechnung bekannten Bezeichnung

$$[pq] = \frac{\Delta P}{\delta},$$

$$[pqr] = \frac{\Delta^2 P}{1.2.\delta^2},$$

$$[pqrs] = \frac{\Delta^3 P}{1.2.3.\delta^3},$$

$$[pqrst] = \frac{\Delta^4 P}{1.2.3.4\delta^4}$$

iſt, und folglich, wenn man

$$x - p = t_1 ,$$
$$x - q = x - p - (q - p) = t_1 - \delta ,$$
$$x - r = x - p - (r - p) = t_1 - 2\delta ,$$
$$x - s = x - p - (s - p) = t_1 - 3\delta$$

ſetzt, die in (9.) entwickelte Formel in folgende übergeht:

$$X_5 = P + \frac{t_1}{\delta}\Delta P + \frac{t_1(t_1 - \delta)}{1.2\delta^2}\Delta^2 P + \frac{t_1(t_1 - \delta)(t_1 - 2\delta)}{1.2.3\delta^3}\Delta^3 P$$
$$+ \frac{t_1(t_1 - \delta)(t_1 - 2\delta)(t_1 - 3\delta)}{1.2.3.4\delta^4}\Delta_4 P .$$

Setzt man $\frac{t_1}{\delta} = t'$, ſo wird

$$\text{I*. } X_5 = P + t'\Delta P + \frac{t'(t' - 1)}{1.2}\Delta^2 P + \frac{t'(t' - 1)(t' - 2)}{1.2.3}\Delta^3 P$$
$$+ \frac{t'(t' - 1)(t' - 2)(t' - 3)}{1.2.3.4}\Delta^4 P .$$

Die beiden in (11.) bewieſenen Formeln laſſen ſich eben ſo leicht für den in Rede ſtehenden Fall einrichten. Es iſt nämlich

$$[qr] = \frac{\Delta Q}{\delta} ,$$
$$[qrs] = \frac{\Delta^2 Q}{1.2\delta^2} ,$$
$$[pqrs] = \frac{\Delta^3 P}{1.2.3\delta^3} ,$$
$$[pqrst] = \frac{\Delta^4 P}{1.2.3.4\delta^4} ;$$

und folglich, wenn man

$$x - r = - t_1 ,$$
$$x - q = x - r + (r - q) = - t_1 + \delta ,$$
$$x - s = x - r - (s - r) = - t_1 - \delta ,$$
$$x - p = x - r + (r - p) = - t_1 + 2\delta$$

ſetzt:

$$X_5 = R - \frac{t_1}{\delta}\Delta Q + \frac{t_1(t_1 - \delta)}{1.2\delta^2}\Delta^2 Q - \frac{t_1(t_1 - \delta)(t_1 + \delta)}{1.2.3\delta^3}\Delta^3 P$$
$$+ \frac{t_1(t_1 - \delta)(t_1 + \delta)(t_1 - 2\delta)}{1.2.3.4\delta^4}\Delta^4 P ,$$

oder, für $\frac{t_1}{\delta} = t'$:

$$\text{II*. } X_5 = R - t'\Delta Q + \frac{t'(t' - 1)}{1.2}\Delta^2 Q - \frac{t'(t' - 1)(t' + 1)}{1.2.3}\Delta^3 P$$
$$+ \frac{t'(t' - 1)(t' + 1)(t' - 2)}{1.2.3.4}\Delta^4 P .$$

Ferner iſt

$$[rs] = \frac{\Delta R}{\delta},$$

$$[qrs] = \frac{\Delta^2 Q}{1.2\delta^2};$$

$$[qrst] = \frac{\Delta^3 Q}{1.2.3\delta^3},$$

$$[pqrst] = \frac{\Delta^4 P}{1.2.3.4\delta^4};$$

folglich, wenn man

$$x - r = t_1,$$
$$x - s = x - r - (s - r) = t_1 - \delta,$$
$$x - q = x - r + (r - q) = t_1 + \delta,$$
$$x - t = x - r - (t - r) = t_1 - 2\delta$$

ſetzt:

$$X_5 = R + \frac{t_1}{\delta}\Delta R + \frac{t_1(t_1-\delta)}{1.2\delta^2}\Delta^2 Q + \frac{t_1(t_1-\delta)(t_1+\delta)}{1.2.3\delta^3}\Delta^3 Q + \frac{t_1(t_1-\delta)(t_1+\delta)(t_1-2\delta)}{1.2.3.4\delta^4}\Delta^4 P,$$

oder, für $\frac{t_1}{\delta} = t'$:

$$\text{III*.}\quad X_5 = R + t'\Delta R + \frac{t'(t'-1)}{1.2}\Delta^2 Q + \frac{t'(t'-1)(t'+1)}{1.2.3}\Delta^3 Q + \frac{t'(t'-1)(t'+1)(t'-2)}{1.2.3.4}\Delta^4 P.$$

Bildet man ſich das Schema

$$\begin{array}{lllll} P & & & & \\ & \Delta P & & & \\ Q & & \Delta^2 P & & \\ & \Delta Q & & \Delta^3 P & \\ R & & \Delta^2 Q & & \Delta^4 P \\ & \Delta R & & \Delta^3 Q & \\ S & & \Delta^2 R & & \\ & \Delta S & & & \\ T & & & & \end{array}$$

ſo liegen in der Formel (II*)

$$R,\ \Delta Q,\ \Delta^2 Q,\ \Delta^3 P,\ \Delta^4 P$$

abwechſelnd unter und über der Horizontallinie, welche man zwiſchen R und ΔQ mitten durch ziehen kann. Eben ſo liegen in der Formel (III*)

$$R,\ \Delta R,\ \Delta^2 Q,\ \Delta^3 Q,\ \Delta^4 P$$

abwechſelnd über und unter einer Horizontallinie, welche man zwiſchen R und ΔR mitten durch ziehen kann. Die Formel (II*)

entſpricht dem Falle, wenn x zwiſchen r und q, die Formel (III*) dem Falle, wenn x zwiſchen r und s liegt. Man kann die Formeln (I*), (II*), (III*) auch auf folgende Art ſchreiben:

$$\text{I}^{**}.\quad X_5 = P + t'\left\{\Delta P + \frac{t'-1}{2}\left\{\Delta^2 P + \frac{t'-2}{3}\left\{\Delta^3 P + \frac{t'-3}{4}\Delta^4 P\right\}\right\}\right\},$$

$$\text{II}^{**}.\quad X_5 = R - t'\left\{\Delta Q - \frac{t'-1}{2}\left\{\Delta^2 Q - \frac{t'+1}{3}\left\{\Delta^3 P - \frac{t'-2}{4}\Delta^4 P\right\}\right\}\right\},$$

$$\text{III}^{**}.\quad X_5 = R + t'\left\{\Delta R + \frac{t'-1}{2}\left\{\Delta^2 Q + \frac{t'+1}{3}\left\{\Delta^3 Q + \frac{t'-2}{4}\Delta^4 P\right\}\right\}\right\}.$$

Die vorhergehenden Betrachtungen würden ſich leicht verallgemeinern laſſen. Wer mehr Ausführlichkeit über dieſen wichtigen Gegenſtand verlangt, den verweiſen wir auf eine ſchöne Abhandlung von Encke im aſtronomiſchen Jahrbuche für 1830. S. 265., deren Inhalt jedoch Encke, nach ſeiner eignen Angabe, vorzüglich aus den Vorleſungen entlehnt hat, welche er im Jahre 1812 bei Gauß zu hören das Glück hatte.

14. Außer den bisher angeführten Schriften ſ. m. noch:

La Grange, recherches sur la manière de former les tables des planètes d'après les seules observations. Mém. de Paris 1772. I. p. 513.

Winsheim, de interpolatione simplici meditationes. Comm. Petrop. T. XIII. p. 312.

Eytelweins Grundlehren der höhern Analyſis. Berlin 1824. Thl. II. Kap. 24.

L. Olivier, über Interpolationsformeln, und über deren Anwendung auf die Auflöſung der Gleichungen von beliebigen Graden. Crelles Journal II. S. 197.

Clauſen, über Interpolation. Ebend. T. V. S. 305.

Lacroix, Traité du calcul diff. et du calcul int. T. III. p. 21. p. 326. p. 360.

Prasse, Institutiones Analyticae. Lips. 1813. p. 81. p. 205.

Laplace Théorie analytique des probabilités. Trois. éd. Paris. 1820. p. 13. p. 52.

Elimination. Zur Vervollſtändigung des gleichnamigen Artikels im zweiten Theile dieſes Wörterbuchs mögen die folgenden Bemerkungen dienen.

I. Gleichungen des erſten Grades.

1. Es ſeyen überhaupt n Gleichungen des erſten Grades mit n unbekannten Größen gegeben, die wir im Allgemeinen durch

$$(1)_1 x_1 + (2)_1 x_2 + (3)_1 x_3 + \dots + (n)_1 x_n = [1]_1$$
$$(1)_2 x_1 + (2)_2 x_2 + (3)_2 x_3 + \dots + (n)_2 x_n = [1]_2$$
$$(1)_3 x_1 + (2)_3 x_2 + (3)_3 x_3 + \dots + (n)_3 x_n = [1]_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(1)_n x_1 + (2)_n x_2 + (3)_n x_3 + \dots + (n)_n x_n = [1]_n ,$$

wo die Bedeutung der einzelnen Symbole leicht erhellen wird, bezeichnen wollen.

Soll nun aus dieſen Gleichungen z. B. x_1 beſtimmt werden, ſo ſeyen einmal $p_1, p_2, p_3, \dots p_n$ gewiſſe Functionen der Coefficienten der unbekannten Größen, die Coefficienten von x_1 ausgenommen. Dann iſt

$$(1)_1 p_1 x_1 + (2)_1 p_1 x_2 + (3)_1 p_1 x_3 + \dots + (n)_1 p_1 x_n = [1]_1 p_1$$
$$(1)_2 p_2 x_1 + (2)_2 p_2 x_2 + (3)_2 p_2 x_3 + \dots + (n)_2 p_2 x_n = [1]_2 p_2$$
$$(1)_3 p_3 x_1 + (2)_3 p_3 x_2 + (3)_3 p_3 x_3 + \dots + (n)_3 p_3 x_n = [1]_3 p_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(1)_n p_n x_1 + (2)_n p_n x_2 + (3)_n p_n x_3 + \dots + (n)_n p_n x_n = [1]_n p_n .$$

Wären nun die Functionen $p_1, p_2, p_3, \dots p_n$ ſo beſchaffen, daß

$$(2)_1 p_1 + (2)_2 p_2 + (2)_3 p_3 + \dots + (2)_n p_n = 0$$
$$(3)_1 p_1 + (3)_2 p_2 + (3)_3 p_3 + \dots + (3)_n p_n = 0$$
$$(4)_1 p_1 + (4)_2 p_2 + (4)_3 p_3 + \dots + (4)_n p_n = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(n)_1 p_1 + (n)_2 p_2 + (n)_3 p_3 + \dots + (n)_n p_n = 0$$

wäre, ſo würde ſich aus den obigen Gleichungen auf der Stelle

$$x_1 = \frac{[1]_1 p_1 + [1]_2 p_2 + [1]_3 p_3 + \dots + [1]_n p_n}{(1)_1 p_1 + (1)_2 p_2 + (1)_3 p_3 + \dots + (1)_n p_n}$$

ergeben, alſo die geſuchte Größe x_1 gefunden ſeyn.

Aus dieſen einfachen Betrachtungen ergiebt ſich, daß unſere Aufgabe aufgelöſt ſeyn würde, wenn ſich eine Function

$$(1)_1 p_1 + (1)_2 p_2 + (1)_3 p_3 + \dots + (1)_n p_n$$

von ſolcher Beſchaffenheit angeben ließe, daß dieſelbe $= 0$ wird, wenn man ſtatt der erſten Coefficienten irgend eine andere Coefficientenreihe:

$$(2)_1, (2)_2, (2)_3, \ldots (2)_n$$
$$(3)_1, (3)_2, (3)_3, \ldots (3)_n$$
$$(4)_1, (4)_2, (4)_3, \ldots (4)_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n)_1, (n)_2, (n)_3, \ldots (n)_n$$

ſetzt. Dieſe Function wäre der Nenner des geſuchten Werths von x_1, und aus demſelben würde man den Zähler erhalten, wenn man ſtatt

$$(1)_1, (1)_2, (1)_3, \ldots (1)_n$$

überall nur reſpective

$$[1]_1, [1]_2, [1]_3, \ldots [1]_n$$

ſetzte, oder, was daſſelbe iſt, bei allen erſten Coefficienten die Parentheſen ( ) mit den Klammern [ ] vertauſchte, eine für das Folgende ſehr wichtige Bemerkung, weil durch dieſelbe die Auflöſung bedeutend abgekürzt wird, indem es, wie man jetzt ſieht, bloß auf die Entwickelung des Nenners ankommt. Auch iſt klar, daß dieſe Bemerkungen nicht auf die unbekannte Größe x_1 eingeſchränkt ſind, ſondern für alle übrigen gelten, weil man eine jede als die erſte betrachten kann, weshalb es uns alſo verſtattet iſt, der Kürze wegen alles Folgende auf die unbekannte Größe x_1 zu beziehen. Alles kommt demnach auf die Entwickelung einer Function von der angegebenen Beſchaffenheit an.

2. Dieſe Entwickelung im Allgemeinen und mit Leichtigkeit auszuführen, ſind vorzüglich zwei Regeln bekannt geworden, deren eine von Cramer (Introduction à l'analyse des courbes algébriques. Génève 1750. p. 657.), die andere von Bezout (Théorie générale des équations algébriques. Paris. 1779. p. 171.) herrührt. Beide Regeln ſind durch Induction gefunden, von keinem der Erfinder aber allgemein bewieſen worden. Indem wir hier die Induction, welche zu den Regeln geführt hat, übergehen, wenden wir uns ſogleich zu der Cramerſchen Regel ſelbſt, und zu ihrem Beweiſe.

Zuerſt entwickele man nach einer ſehr bekannten Regel der combinatoriſchen Analyſis ſämmtliche Permutationen der Elemente

$$(1), (2), (3), \ldots (n)$$

und füge ſodann den einzelnen Elementen jeder Complexion unten zur Rechten die Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots n$$

in natürlicher Folge bei.

Nun nennt es Cramer eine Variation, wenn in einer Complexion bloß in Bezug auf

$$(1), (2), (3), \ldots (n),$$

nicht in Bezug auf die unten zur Rechten beigefügten Indices, die hier völlig unberückſichtigt bleiben, ein höheres Element vor einem niedrigern vorausgeht, und giebt wegen der Vorzeichen der einzelnen Complexionen die Regel, daß jede Complexion das Zeichen + oder — 1 erhält, jenachdem bei ihr die Anzahl der Variationen der Elemente gerade oder ungerade iſt.

Es wird nöthig ſeyn, dieſe Regel, bevor wir weitere Schritte vorwärts thun, durch die vollſtändige Entwickelung eines Beiſpiels zu erläutern. Für n = 4 hat man:

Permutationen:	Anzahl der Variationen:
(1) (2) (3) (4)	0
(1) (2) (4) (3)	1
(1) (3) (2) (4)	1
(1) (3) (4) (2)	2
(1) (4) (2) (3)	2
(1) (4) (3) (2)	3
(2) (1) (3) (4)	1
(2) (1) (4) (3)	2
(2) (3) (1) (4)	2
(2) (3) (4) (1)	3
(2) (4) (1) (3)	3
(2) (4) (3) (1)	4
(3) (1) (2) (4)	2
(3) (1) (4) (2)	3
(3) (2) (1) (4)	3
(3) (2) (4) (1)	4
(3) (4) (1) (2)	4
(3) (4) (2) (1)	5
(4) (1) (2) (3)	3
(4) (1) (3) (2)	4
(4) (2) (1) (3)	4
(4) (2) (3) (1)	5
(4) (3) (1) (2)	5
(4) (3) (2) (1)	6

Daher iſt die geſuchte Function:

$$+ (1)_1 (2)_2 (3)_3 (4)_4$$
$$- (1)_1 (2)_2 (4)_3 (3)_4$$
$$- (1)_1 (3)_2 (2)_3 (4)_4$$
$$+ (1)_1 (3)_2 (4)_3 (2)_4$$
$$+ (1)_1 (4)_2 (2)_3 (3)_4$$
$$- (1)_1 (4)_2 (3)_3 (2)_4$$

$$
\begin{aligned}
&- (2)_1 (1)_2 (3)_3 (4)_4 \\
&+ (2)_1 (1)_2 (4)_3 (3)_4 \\
&+ (2)_1 (3)_2 (1)_3 (4)_4 \\
&- (2)_1 (3)_2 (4)_3 (1)_4 \\
&- (2)_1 (4)_2 (1)_3 (3)_4 \\
&+ (2)_1 (4)_2 (3)_3 (1)_4 \\
&+ (3)_1 (1)_2 (2)_3 (4)_4 \\
&- (3)_1 (1)_2 (4)_3 (2)_4 \\
&- (3)_1 (2)_2 (1)_3 (4)_4 \\
&+ (3)_1 (2)_2 (4)_3 (1)_4 \\
&+ (3)_1 (4)_2 (1)_3 (2)_4 \\
&- (3)_1 (4)_2 (2)_3 (1)_4 \\
&- (4)_1 (1)_2 (2)_3 (3)_4 \\
&+ (4)_1 (1)_2 (3)_3 (2)_4 \\
&+ (4)_1 (2)_2 (1)_3 (3)_4 \\
&- (4)_1 (2)_2 (3)_3 (1)_4 \\
&- (4)_1 (3)_2 (1)_3 (2)_4 \\
&+ (4)_1 (3)_2 (2)_3 (1)_4 \,.
\end{aligned}
$$

3. Der Beweis dieſer Regel kommt vorzüglich auf folgenden Lehrſatz zurück:

Zwei Complexionen wie

$$\ldots\ldots(\varkappa)_\alpha\ldots\ldots(1)_{\alpha+\beta}\ldots\ldots \text{ (A)}$$

und

$$\ldots\ldots(1)_\alpha\ldots\ldots(\varkappa)_{\alpha+\beta}\ldots\ldots \text{ (B)},$$

in denen bloß (1) und ($\varkappa$) mit einander vertauſcht ſind, ſonſt alle übrigen Elemente völlig gleiche Stellen einnehmen, erhalten nach der Cramerſchen Regel jederzeit entgegengeſetzte Vorzeichen.

Jede der beiden Complexionen (A), (B) wird durch ($\varkappa$) und (1), wenn man dieſe Elemente ſelbſt nicht mit rechnet, in drei aus völlig gleichen Elementen in gleicher Stellung beſtehende Abtheilungen getheilt, die wir der Kürze wegen von der linken nach der rechten Hand hin durch I, II, III bezeichnen wollen.

Alle Elemente, die beiden verſetzten ausgenommen, ſollen in jeder der beiden Complexionen nach Cramers Regel γ Variationen geben.

In (A) und (B) gebe ferner ($\varkappa$) in Bezug auf die Elemente, welche die Abtheilung III bilden, λ Variationen.

In der Complexion (A) geben die Elemente in I und II in Bezug auf (1) offenbar $\alpha + \beta - 2$, und, wenn man das Element ($\varkappa$) mit nimmt, da ſich dies natürlich auch mit (1) vergleichen läßt, $\alpha + \beta - 1$ Variationen.

In (A) gebe ($\varkappa$) in Bezug auf die Elemente in II λ' Variationen, ſo geben offenbar in (B) die Elemente in demſelben In-

tervall in Bezug auf (x) eine Anzahl von Variationen, welche $= \beta - 1 - \lambda'$ iſt.

Die Elemente in dem Intervall I mögen in Bezug auf (x) in (A) und (B) λ'' Variationen geben. In Bezug auf (1) ſind endlich in (B) in dieſem Intervall offenbar $\alpha - 1$ Variationen.

Bezeichnen wir nun die Anzahl der Variationen in (A) und (B) reſpective durch Δ und Δ', ſo iſt nach dem Vorhergehenden:

$$\Delta = \gamma + \lambda + \lambda' + \lambda'' + \alpha + \beta - 1,$$
$$\Delta' = \gamma + \lambda + \beta - 1 - \lambda' + \lambda'' + \alpha - 1;$$

d. i.

$$\Delta' = \gamma + \lambda + \lambda' + \lambda'' + \alpha + \beta - 1 - (2\lambda' + 1),$$

oder

$$\Delta' = \Delta - (2\lambda' + 1), \quad \Delta - \Delta' = 2\lambda' + 1,$$

ſo daß alſo Δ' gerade oder ungerade iſt, jenachdem Δ ungerade oder gerade iſt, und folglich die beiden Complexionen nach der Cramerſchen Regel jederzeit entgegengeſetzte Vorzeichen erhalten, wie behauptet wurde.

4. Iſt nun

$$\ldots\ldots (1)_\alpha \ldots\ldots (x)_{\alpha+\beta} \ldots\ldots,$$

oder

$$\ldots\ldots (x)_\alpha \ldots\ldots (1)_{\alpha+\beta} \ldots\ldots$$

irgend ein Glied der nach der Cramerſchen Regel gebildeten Function, ſo kommen in derſelben, da man nach dieſer Regel die Permutationen von

$$(1)\,(2)\,(3)\,(4) \ldots (n)$$

bildet, offenbar reſpective auch die Glieder

$$\ldots\ldots (x)_\alpha \ldots\ldots (1)_{\alpha+\beta} \ldots\ldots,$$

oder

$$\ldots\ldots (1)_\alpha \ldots\ldots (x)_{\alpha+\beta} \ldots\ldots$$

vor, und je zwei zuſammengehörende dieſer Glieder (das erſte und dritte oder das zweite und vierte) erhalten bei der Beſtimmung der Vorzeichen nach dieſer Regel entgegengeſetzte Vorzeichen (3.). Setzt man nun in der gebildeten Function überall (x) für (1), ſo werden die ſich entſprechenden Glieder (das erſte und dritte oder zweite und vierte) gleich

$$\ldots\ldots (x)_\alpha \ldots\ldots (x)_{\alpha+\beta} \ldots\ldots,$$

und heben ſich alſo, da ſie nach dem Vorhergehenden entgegengeſetzte Vorzeichen haben, gegenſeitig auf. Hieraus ſieht man alſo, daß die nach der Cramerſchen Regel gebildete Function ſich auf Null reducirt, wenn man in derſelben überall (x), d. i., da (x) jedes der Symbole

$$(2),\ (3),\ (4),\ \ldots\ (n)$$

ſeyn kann, überhaupt eins dieſer Symbole für (1) ſetzt, und daß daher dieſe Function die oben verlangte Eigenſchaft hat, alſo der geſuchte Nenner von x_1 iſt, aus dem man denn nach dem Obigen auch unmittelbar den Zähler erhält.

5. Will man $x_\varkappa$ bilden, ſo muß man in den gegebenen Gleichungen die Glieder mit $x_\varkappa$ als die erſten, die mit x_1 als die $\varkappa$ten betrachten. Iſt nun

$$\ldots\ldots(1)_\alpha\ldots\ldots(\varkappa)_{\alpha+\beta}\ldots\ldots$$

eine beliebige Complexion in dem Nenner von $x_\varkappa$, ſo hat dieſelbe, weil (1) das $\varkappa$te, ($\varkappa$) das 1ſte Element iſt, offenbar einerlei Zeichen mit

$$\ldots\ldots(\varkappa)_\alpha\ldots\ldots(1)_{\alpha+\beta}\ldots\ldots$$

in dem Nenner von x_1, weil jetzt ($\varkappa$) das $\varkappa$te, (1) das 1ſte Element iſt. Letztere Complexion hat aber nach (3.) entgegengeſetztes Zeichen mit

$$\ldots\ldots(1)_\alpha\ldots\ldots(\varkappa)_{\alpha+\beta}\ldots\ldots$$

in dem Nenner von x_1, ſo daß alſo auch

$$\ldots\ldots(1)_\alpha\ldots\ldots(\varkappa)_{\alpha+\beta}\ldots\ldots$$

in dem Nenner von $x_\varkappa$ entgegengeſetztes Zeichen hat mit

$$\ldots\ldots(1)_\alpha\ldots\ldots(\varkappa)_{\alpha+\beta}\ldots\ldots$$

in dem Nenner von x_1, und folglich überhaupt der Nenner von $x_\varkappa$ offenbar ganz aus denſelben Complexionen beſteht wie der Nenner von x_1, aber mit demſelben entgegengeſetztes Vorzeichen hat. Da man aber die Vorzeichen des Zählers und Nenners eines Bruchs, ohne deſſen Werth zu ändern, jederzeit mit den entgegengeſetzten vertauſchen kann, ſo erhält man offenbar auch den richtigen Werth von $x_\varkappa$, wenn man ihm denſelben Nenner wie x_1 giebt, und dann, wie gewöhnlich, [1] für ($\varkappa$) ſetzt. Man erhält alſo die Werthe aller unbekannten Größen, wenn man den Nenner von x_1 wie gewöhnlich entwickelt, dieſen Nenner als den gemeinſchaftlichen Nenner der Werthe aller unbekannten Größen betrachtet, und dann die Zähler bildet, indem man in dem erhaltenen Nenner nach und nach [1] für (1), (2), (3), (4), ... (n) ſetzt.

Für die drei Gleichungen

$$(1)_1 x_1 + (2)_1 x_2 + (3)_1 x_3 = [1]_1$$
$$(1)_2 x_1 + (2)_2 x_2 + (3)_2 x_3 = [1]_2$$
$$(1)_3 x_1 + (2)_3 x_3 + (3)_3 x_3 = [1]_3$$

erhält man z. B.

Permutationen:	Anzahl der Variationen:
(1) (2) (3)	0
(1) (3) (2)	1
(2) (1) (3)	1
(2) (3) (1)	2
(3) (1) (2)	2
(3) (2) (1)	3

ſo daß alſo der gemeinſchaftliche Nenner von x_1, x_2, x_3:

$$\begin{array}{l} (1)_1\,(2)_2\,(3)_3 \\ -(1)_1\,(3)_2\,(2)_3 \\ -(2)_1\,(1)_2\,(3)_3 \\ +(2)_1\,(3)_2\,(1)_3 \\ +(3)_1\,(1)_2\,(2)_3 \\ -(3)_1\,(2)_2\,(1)_3\,. \end{array}$$

Die Zähler ſind:

$$\begin{array}{lll} [1]_1\,(2)_2\,(3)_3 & (1)_1\,[1]_2\,(3)_3 & (1)_1\,(2)_2\,[1]_3 \\ -[1]_1\,(3)_2\,(2)_3 & -(1)_1\,(3)_2\,[1]_3 & -(1)_1\,[1]_2\,(2)_3 \\ -(2)_1\,[1]_2\,(3)_3 & -[1]_1\,(1)_2\,(3)_3 & -(2)_1\,(1)_2\,[1]_3 \\ +(2)_1\,(3)_2\,[1]_3 & +[1]_1\,(3)_2\,(1)_3 & +(2)_1\,[1]_2\,(1)_3 \\ +(3)_1\,[1]_2\,(2)_3 & +(3)_1\,(1)_2\,[1]_3 & +[1]_1\,(1)_2\,(2)_3 \\ -(3)_1\,(2)_2\,[1]_3 & -(3)_1\,[1]_2\,(1)_3 & -[1]_1\,(2)_2\,(1)_3\,. \end{array}$$

Man ſieht hieraus, wie leicht dieſe merkwürdige Regel in der Anwendung iſt.

6. Cramers ſo eben vollſtändig bewieſene Regel iſt völlig independent. Die von Bezout gegebene Regel iſt recurrirend. Für $n = 2$ iſt nämlich eine Function von der angegebenen Beſchaffenheit offenbar

$$(1)_1\,(2)_2 - (2)_1\,(1)_2\,.$$

Hieraus findet man nun eine ſolche Function für $n = 3$ nach Bezouts Regel, wenn man, auf die untergeſchriebenen Stellenzahlen keine Rückſicht nehmend, das neu hinzukommende Element (3) in den vorhergehenden Complexionen gegen die in denſelben enthaltenen Elemente alle möglichen Stellen einnehmen läßt, das Zeichen bei der letzten Stelle ungeändert läßt, bei jeder andern in das entgegengeſetzte verwandelt, und dann die Stellenzahlen in natürlicher Folge hinzufügt, ſo daß alſo für $n = 3$ die geſuchte Function:

$$\begin{array}{l} (1)_1\,(2)_2\,(3)_3 \\ -(1)_1\,(3)_2\,(2)_3 \\ +(3)_1\,(1)_2\,(2)_3 \\ -(2)_1\,(1)_2\,(3)_3 \\ +(2)_1\,(3)_2\,(1)_3 \\ -(3)_1\,(2)_2\,(1)_3 \end{array}$$

und folglich ferner für $n = 4$:

$$(1)_1\,(2)_2\,(3)_3\,(4)_4$$
$$-\,(1)_1\,(2)_2\,(4)_3\,(3)_4$$
$$+\,(1)_1\,(4)_2\,(2)_3\,(3)_4$$
$$-\,(4)_1\,(1)_2\,(2)_3\,(3)_4$$
$$-\,(1)_1\,(3)_2\,(2)_3\,(4)_4$$
$$+\,(1)_1\,(3)_2\,(4)_3\,(2)_4$$
$$-\,(1)_1\,(4)_2\,(3)_3\,(2)_4$$
$$+\,(4)_1\,(1)_2\,(3)_3\,(2)_4$$
$$+\,(3)_1\,(1)_2\,(2)_3\,(4)_4$$
$$-\,(3)_1\,(1)_2\,(4)_3\,(2)_4$$
$$+\,(3)_1\,(4)_2\,(1)_3\,(2)_4$$
$$-\,(4)_1\,(3)_2\,(1)_3\,(2)_4$$
$$-\,(2)_1\,(1)_2\,(3)_3\,(4)_4$$
$$+\,(2)_1\,(1)_2\,(4)_3\,(3)_4$$
$$-\,(2)_1\,(4)_2\,(1)_3\,(3)_4$$
$$+\,(4)_1\,(2)_2\,(1)_3\,(3)_4$$
$$+\,(2)_1\,(3)_2\,(1)_3\,(4)_4$$
$$-\,(2)_1\,(3)_2\,(4)_3\,(1)_4$$
$$+\,(2)_1\,(4)_2\,(3)_3\,(1)_4$$
$$-\,(4)_1\,(2)_2\,(3)_3\,(1)_4$$
$$-\,(3)_1\,(2)_2\,(1)_3\,(4)_4$$
$$+\,(3)_1\,(2)_2\,(4)_3\,(1)_4$$
$$-\,(3)_1\,(4)_2\,(2)_3\,(1)_4$$
$$+\,(4)_1\,(3)_2\,(2)_3\,(1)_4\,.$$

Daß man durch Anwendung dieſer Regel auch Permutationen erhält iſt klar, und es iſt folglich bei derſelben weiter nichts zu beweiſen, als die Richtigkeit der Vorſchrift wegen der Vorzeichen.

Man nehme an, daß dieſe Regel für n Elemente gilt, und denke ſich irgend eine Complexion mit n Elementen, für welche die Anzahl der Variationen $= x$ iſt, und die alſo nach der bewieſenen Cramerſchen Regel das Vorzeichen $\pm$ hat, jenachdem x gerade oder ungerade iſt. Tritt nun ein neues Element hinzu, ſo ergeben ſich aus der in Rede ſtehenden Complexion mit n Elementen nach Bezouts Regel $n + 1$ neue Complexionen mit $n + 1$ Elementen, und unter dieſen erhält die

1ſte Complexion das Zeichen $\pm$,
2te Complexion das Zeichen $\mp$,
3te Complexion das Zeichen $\pm$,
4te Complexion das Zeichen $\mp$,
u. ſ. w. u. ſ. w.

ſo daß alſo unter dieſen Complexionen das Vorzeichen der $a$ten

Complexion $\mp$ oder $\pm$, jenachdem α gerade oder ungerade iſt. Die αte Complexion mit $n+1$ Elementen hat aber offenbar $\alpha - 1$ Variationen mehr, als die gegebene Complexion mit n Elementen, da das hinzukommende Element höher iſt als alle in letzterer enthaltenen Elemente, d. i., die Anzahl dieſer Variationen iſt $= x + \alpha - 1$. Es können nun überhaupt folgende Fälle eintreten, in denen die Zeichen nach dem Vorhergehenden beſtimmt ſind:

x gerade, Zeichen $+$; α gerade, Zeichen $-$;
x ungerade, Zeichen $-$; α ungerade, Zeichen $-$;

oder

x gerade, Zeichen $+$; α ungerade, Zeichen $+$;
x ungerade, Zeichen $-$; α gerade, Zeichen $+$.

Im erſten Falle iſt $x + \alpha - 1$, d. i. die Anzahl der Variationen der Complexion mit $n+1$ Elementen, ungerade, und das Zeichen der Complexion $-$, wie es die Cramerſche Regel erfordert; im zweiten Falle iſt $x + \alpha - 1$ gerade, und das Zeichen der Complexion mit $n+1$ Elementen $+$, wie es ebenfalls die Cramerſche Regel, deren Richtigkeit ſchon bewieſen worden iſt, erfordert. Bezouts Regel gilt alſo für $n+1$, wenn ſie für n gilt, woraus leicht ihre allgemeine Gültigkeit folgt.

Zur Literatur dieſes Gegenſtandes gehört eine Abhandlung von G. A. Rothe in Hindenburgs Samml. comb. anal. Abhandlungen II. Leipzig 1800. Scherk mathem. Abhandlungen. Berlin 1825. S. 31. Bezout in den Mémoires de l'acad. des sc. 1774, ſo wie Laplace und Vandermonde in denſelben Memoiren für 1772. Auch ſ. m. Hindenburgs Vorrede zu Rüdigeri specimen analyticum de lineis secundi ordinis. Lips. 1784. Der oben von mir gegebene Beweis dürfte ſich durch ſeine Einfachheit und Strenge empfehlen.

II. Gleichungen höherer Grade.

7. Die Aufgabe, welche wir hier zuerſt aufzulöſen haben, iſt folgende. Es ſind zwei Gleichungen gegeben, welche in Bezug auf eine gewiſſe unbekannte Größe x beide vom $n$ten Grade ſind, indem wir bemerken, daß die beiden gegebenen Gleichungen, wenn ſie nicht von demſelben Grade wären, ſich leicht auf einerlei Grad bringen laſſen würden, wenn man die des niedrigern Grades mit einer ſchicklichen Potenz multiplicirte. Die Coefficienten dieſer beiden Gleichungen, welche wir im Allgemeinen durch

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0,$$
$$B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \ldots + B_{n-1} x + B_n = 0$$

bezeichnen wollen, können ſowohl beſtimmte Größen, als auch ganze rationale Functionen anderer unbekannten Größen in beliebiger Anzahl ſeyn. Aus dieſen beiden Gleichungen ſoll man nun x

eliminiren, d. h. eine Gleichung zwiſchen den Coefficienten finden, welche x nicht mehr enthält, und zugleich x ſelbſt als eine entwickelte Function der Coefficienten darſtellen. Sind die Coefficienten beſtimmte Größen, ſo iſt die aus der Elimination von x ſich ergebende Gleichung zwiſchen denſelben eine Bedingungsgleichung, welcher die Coefficienten genügen müſſen, wenn es möglich ſeyn ſoll, den beiden gegebenen Gleichungen durch einen Werth von x zu genügen. Sind dagegen die Coefficienten ganze rationale Functionen anderer unbekannten Größen, ſo iſt die in Rede ſtehende Gleichung eine x nicht mehr enthaltende Gleichung zwiſchen dieſen unbekannten Größen, welche nun ſo beſtimmt werden müſſen, daß der gefundenen Gleichung zwiſchen denſelben genügt wird, welches bekanntlich nach der Anzahl der überhaupt gegebenen Gleichungen auf eine beſtimmte oder eine unbeſtimmte Aufgabe führen kann. Dem Eliminationsverfahren, welches wir hier etwas näher erläutern wollen, liegt im Allgemeinen die Idee zum Grunde, daß man aus den beiden gegebenen Gleichungen zwei neue Gleichungen abzuleiten ſucht, welche in Bezug auf x vom $(n-1)$ten Grade ſind, aus dieſen wieder zwei neue Gleichungen vom $(n-2)$ten Grade, u. ſ. f., bis man endlich auf dieſe Weiſe zwei Gleichungen erhält, die in Bezug auf x beide vom erſten Grade ſind. Aus jeder dieſer beiden Gleichungen leitet man leicht einen Ausdruck von x durch die Coefficienten der gegebenen Gleichungen ab, und die Gleichſetzung dieſer beiden ein und derſelben Größe entſprechenden Ausdrücke führt auf die geſuchte Gleichung zwiſchen den Coefficienten der gegebenen Gleichungen. Man ſieht alſo, daß es bloß auf eine allgemeine Methode ankommt, aus den beiden gegebenen Gleichungen zwei neue Gleichungen abzuleiten, welche in Bezug auf x vom $(n-1)$ten Grade ſind. Dazu gelangt man aber ſehr leicht durch das folgende einfache Verfahren. Zuerſt multiplicire man die erſte Gleichung mit $-B_0$, die zweite mit A_0, und addire die ſo erhaltenen Gleichungen zu einander; ſo ergiebt ſich, indem man der Kürze wegen

$$A_0 B_1 - A_1 B_0 = C_1$$

$$A_0 B_2 - A_2 B_0 = C_2$$

$$A_0 B_3 - A_3 B_0 = C_3$$

$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

$$A_0 B_{n-1} - A_{n-1} B_0 = C_{n-1}$$

$$A_0 B_n - A_n B_0 = C_n$$

ſetzt, auf der Stelle die Gleichung des $(n-1)$ten Grades:

$$C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + C_3 x^{n-3} + \ldots + C_{n-1} x + C_n = 0 \, .$$

Multiplicirt man ferner die erſte Gleichung mit B_n, die zweite mit $-A_n$, und addirt wieder; ſo erhält man, wenn der Kürze wegen

$$A_1 B_n - A_n B_1 = C_{n+1}$$
$$A_2 B_n - A_n B_2 = C_{n+2}$$
$$A_3 B_n - A_n B_3 = C_{n+3}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{n-2} B_n - A_n B_{n-2} = C_{2n-2}$$
$$A_{n-1} B_n - A_n B_{n-1} = C_{2n-1}$$

geſetzt wird, die Gleichung

$$C_n x^n + C_{n+1} x^{n-1} + C_{n+2} x^{n-2} + \ldots + C_{2n-2} x^2 + C_{2n-1} x = 0,$$

welche zwar vom nten Grade iſt, durch Diviſion mit x aber ſogleich auf den (n—1)ten Grad gebracht wird, ſo daß man alſo jetzt, wie verlangt wurde, die beiden Gleichungen

$$C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + C_3 x^{n-3} + \ldots + C_{n-1} x + C_n = 0,$$
$$C_n x^{n-1} + C_{n+1} x^{n-2} + C_{n+2} x^{n-3} + \ldots + C_{2n-2} x + C_{2n-1} = 0$$

hat, welche beide in Bezug auf x bloß vom (n—1)ten Grade ſind. Daß hierdurch unſere Aufgabe im Allgemeinen als aufgelöſt zu betrachten iſt, iſt ſchon oben gezeigt worden. Dieſes allgemeine Verfahren wollen wir zunächſt auf einige ſpecielle Fälle anwenden.

Erſter Grad.

Die gegebenen Gleichungen ſeyen:

$$A_0 x + A_1 = 0,$$
$$B_0 x + B_1 = 0.$$

Man erhält augenblicklich:

$$x = -\frac{A_1}{A_0} = -\frac{B_1}{B_0},$$

und durch Gleichſetzung dieſer beiden Werthe von x:

$$A_0 B_1 - A_1 B_0 = 0.$$

Zweiter Grad.

Die gegebenen Gleichungen ſeyen:

$$A_0 x^2 + A_1 x + A_2 = 0,$$
$$B_0 x^2 + B_1 x + B_2 = 0.$$

Für

$$A_0 B_1 - A_1 B_0 = C_1, \quad A_1 B_2 - A_2 B_1 = C_3;$$
$$A_0 B_2 - A_2 B_0 = C_2$$

ergeben ſich aus den obigen allgemeinen Formeln die Gleichungen:

$$C_1 x + C_2 = 0,$$
$$C_2 x + C_3 = 0;$$

und aus dieſen beiden Gleichungen des erſten Grades nach dem Vorhergehenden:

$$x = -\frac{C_2}{C_1} = -\frac{C_3}{C_2},$$

$$C_2^2 - C_1 C_3 = 0,$$

oder nach gehöriger Subſtitution

$$x = -\frac{A_0 B_2 - A_2 B_0}{A_0 B_1 - A_1 B_0} = -\frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_0 B_2 - A_2 B_0},$$

$$(A_0 B_2 - A_2 B_0)^2 - (A_0 B_1 - A_1 B_0)(A_1 B_2 - A_2 B_1) = 0.$$

Dritter Grad.

Die gegebenen Gleichungen ſind:

$$A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0,$$
$$B_0 x^3 + B_1 x^2 + B_2 x + B_3 = 0.$$

Man ſetze

$$A_0 B_1 - A_1 B_0 = C_1,\quad A_1 B_3 - A_3 B_1 = C_4;$$
$$A_0 B_2 - A_2 B_0 = C_2,\quad A_2 B_3 - A_3 B_2 = C_5;$$
$$A_0 B_3 - A_3 B_0 = C_3;$$

ſo iſt nach dem Obigen die Aufgabe auf die beiden folgenden Gleichungen des zweiten Grades zurückgeführt:

$$C_1 x^2 + C_2 x + C_3 = 0,$$
$$C_3 x^2 + C_4 x + C_5 = 0.$$

Aus dieſen beiden Gleichungen erhält man nach dem Vorhergehenden:

$$x = -\frac{C_1 C_5 - C_3^2}{C_1 C_4 - C_2 C_3} = -\frac{C_2 C_5 - C_3 C_4}{C_1 C_5 - C_3^2},$$

$$(C_3^2 - C_1 C_5)^2 - (C_1 C_4 - C_2 C_3)(C_2 C_5 - C_3 C_4) = 0,$$

oder, wenn man die linke Seite der letzten Gleichung entwickelt und nach Potenzen von C_3 ordnet:

$$C_3^4 - (C_2 C_4 + 2 C_1 C_5) C_3^2 + (C_1 C_4^2 + C_2^2 C_5) C_3 + C_1 C_5 (C_1 C_5 - C_2 C_4) = 0.$$

Folglich nach gehöriger Subſtitution:

$$x = -\frac{(A_0B_1 - A_1B_0)(A_2B_3 - A_3B_2) - (A_0B_3 - A_3B_0)^2}{(A_0B_1 - A_1B_0)(A_1B_3 - A_3B_1) - (A_0B_2 - A_2B_0)(A_0B_3 - A_3B_0)}$$
$$= -\frac{(A_0B_2 - A_2B_0)(A_2B_3 - A_3B_2) - (A_0B_3 - A_3B_0)(A_1B_3 - A_3B_1)}{(A_0B_1 - A_1B_0)(A_2B_3 - A_3B_2) - (A_0B_3 - A_3B_0)^2}.$$

Da ferner, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$C_1C_5 - C_2C_4 = (A_0B_1 - A_1B_0)(A_2B_3 - A_3B_2) - (A_0B_2 - A_2B_0)(A_1B_3 - A_3B_1)$$
$$= -(A_0B_3 - A_3B_0)(A_1B_2 - A_2B_1)$$

iſt; ſo erhält man nach dem Obigen:

$$(A_0B_3 - A_3B_0)^3$$
$$-\{(A_0B_2 - A_2B_0)(A_1B_3 - A_3B_1) + 2(A_0B_1 - A_1B_0)(A_2B_3 - A_3B_2)\}(A_0B_3 - A_3B_0)$$
$$+ (A_0B_1 - A_1B_0)(A_1B_3 - A_3B_1)^2 + (A_2B_3 - A_3B_2)(A_0B_2 - A_2B_0)^2$$
$$- (A_0B_1 - A_1B_0)(A_1B_2 - A_2B_1)(A_2B_3 - A_3B_2) = 0.$$

Vierter Grad.

Die gegebenen Gleichungen ſind:

$$A_0 x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 = 0,$$
$$B_0 x^4 + B_1 x^3 + B_2 x^2 + B_3 x + B_4 = 0.$$

Man ſetze:

$$A_0 B_1 - A_1 B_0 = C_1,\ A_1 B_4 - A_4 B_1 = C_5;$$
$$A_0 B_2 - A_2 B_0 = C_2,\ A_2 B_4 - A_4 B_2 = C_6;$$
$$A_0 B_3 - A_3 B_0 = C_3,\ A_3 B_4 - A_4 B_3 = C_7;$$
$$A_0 B_4 - A_4 B_0 = C_4;$$

ſo hat man die beiden Gleichungen des dritten Grades:

$$C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 = 0,$$
$$C_4 x^3 + C_5 x^2 + C_6 x + C_7 = 0,$$

welche man nun wieder nach dem Vorhergehenden auflöſen kann. Die Ausdrücke fallen zwar etwas complicirt aus; ihre Entwickelung hat aber nicht die mindeſte Schwierigkeit. Die x nicht mehr enthaltende Gleichung muß man auf ähnliche Art wie vorher entwickeln, und ihre linke Seite nach Potenzen von C_4 ordnen, wobei ſich zeigen wird, daß dieſe Gleichung in Bezug auf C_4 vom ſechſten Grade iſt. Bemerkt man aber dann, daß

$$C_1 C_6 - C_2 C_5 = -(A_0 B_4 - A_4 B_0)(A_1 B_2 - A_2 B_1)$$
$$C_1 C_7 - C_3 C_5 = -(A_0 B_4 - A_4 B_0)(A_1 B_3 - A_3 B_1)$$
$$C_2 C_7 - C_3 C_6 = -(A_0 B_4 - A_4 B_0)(A_2 B_3 - A_3 B_2)$$

iſt, ſo wird ſich finden, daß die in Rede ſtehende Gleichung durch

$$C_4^2 = (A_0 B_4 - A_4 B_0)^2$$

dividirt, und folglich auf den vierten Grad gebracht werden kann, eine Bemerkung, die ſehr wichtig iſt, um die Gleichung unter ihrer einfachſten Geſtalt darzuſtellen. Die Reſultate ſelbſt hier mitzutheilen, möchte der Raum nicht verſtatten.

Hat man nun überhaupt m Gleichungen mit m unbekannten Größen, ſo kann man nach dem gezeigten allgemeinen Verfahren, wenn wir die gegebenen Gleichungen durch (1), (2), (3), (4), ... (m) bezeichnen, eine der unbekannten Größen aus (1) und (2), (2) und (3), (3) und (4), u. ſ. f., (m — 1) und (m) eliminiren, wodurch man offenbar m — 1 nur noch m — 1 unbekannte Größen enthaltende Gleichungen erhält, aus denen man dann eben ſo m — 2 nur noch m — 2 unbekannte Größen enthaltende Gleichungen erhält, u. ſ. f., bis man endlich auf eine Gleichung mit einer unbekannten Größe kommt, die man nun aus dieſer Gleichung beſtimmt, und den gefundenen Werth nach und nach in die Ausdrücke der übrigen unbekannten Größen einführt, wodurch auch dieſe beſtimmt werden.

Die vorhergehende Eliminationsmethode, welche vor andern weſentliche Vorzüge zu haben ſcheint, rührt von Euler her (In-

troductio in Anal. inf. T. II. Cap. XIX.), und iſt von **Gergonne** in einer Abhandlung in den Annales de Math. T. XX. 1830. p. 41, welcher wir bei obiger Darſtellung dem Weſentlichen nach gefolgt ſind, mit mehreren guten eignen Bemerkungen bereichert worden.

8. Daß ſich jede Elimination einer unbekannten Größe aus zwei Gleichungen höherer Grade auf das in I. vollſtändig aufgelöſte Eliminationsproblem für Gleichungen des erſten Grades zurückführen läßt, iſt ſchon im zweiten Theile dieſes Wörterbuchs im Artikel Elimination (24.) an einem Beiſpiele gezeigt worden. Wir wollen aber, da dieſe Methode uns ebenfalls beſonders wichtig zu ſeyn ſcheint, dieſelbe hier noch an einem Beiſpiele für zwei Gleichungen des dritten Grades und an zwei andern Fällen erläutern. Die beiden gegebenen Gleichungen ſeyen

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0\,,$$
$$x^3 + P'x^2 + Q'x + R' = 0\,.$$

Setzen wir den Werth von x, welcher dieſen **beiden** Gleichungen genügen muß, $= \alpha$; ſo iſt für jedes x:

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = (x-\alpha)(x^2 + px + q)\,,$$
$$x^3 + P'x^2 + Q'x + R' = (x-\alpha)(x^2 + p'x + q')\,.$$

Alſo iſt, wenn man $x - \alpha$ eliminirt, für jedes x:

$$(x^3 + Px^2 + Qx + R)(x^2 + p'x + q')$$
$$= (x^3 + P'x^2 + Q'x + R')(x^2 + px + q)\,,$$

d. i., wenn man die Producte entwickelt:

$$x^5 + \left.\begin{array}{l}P\\+p'\end{array}\right\} x^4 + \left.\begin{array}{l}Q\\+Pp'\\+q'\end{array}\right\} x^3 + \left.\begin{array}{l}R\\+Qp'\\+Pq'\end{array}\right\} x^2 + \left.\begin{array}{l}Rp'\\+Qq'\end{array}\right\} x + Rq'$$

$$= x^5 + \left.\begin{array}{l}P'\\+p\end{array}\right\} x^4 + \left.\begin{array}{l}Q'\\+P'p\\+q\end{array}\right\} x^3 + \left.\begin{array}{l}R'\\+Q'p\\+P'q\end{array}\right\} x^2 + \left.\begin{array}{l}R'p\\+Q'q\end{array}\right\} x + R'q\,.$$

Da nun dieſe Gleichung unabhängig von jedem beſondern Werthe von x Statt finden muß; ſo iſt

$$\begin{aligned} P + p' &= P' + p \\ Q + Pp' + q' &= Q' + P'p + q \\ R + Qp' + Pq' &= R' + Q'p + P'q \\ Rp' + Qq' &= R'p + Q'q \\ Rq' &= R'q \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} p - p' &= P - P' \\ P'p - Pp' + q - q' &= Q - Q' \\ Q'p - Qp' + P'q - Pq' &= R - R' \\ R'p - Rp' + Q'q - Qq' &= 0 \\ R'q - Rq' &= 0\,. \end{aligned}$$

Dies ſind fünf Gleichungen des erſten Grades mit den vier unbekannten Größen p, p', q, q'. Aus den vier erſten dieſer Gleichungen kann man alſo q, q' nach den allgemeinen Regeln in I. finden, und erhält dann, wenn man die gefundenen Ausdrücke für q und q' in die fünfte Gleichung ſetzt, die geſuchte, x nicht mehr enthaltende, Gleichung.

Wären

$$x^2 + Px + Q = 0,$$
$$x^2 + P'x + Q' = 0$$

die beiden gegebenen Gleichungen, ſo wäre auf ähnliche Art wie vorher:

$$x^2 + Px + Q = (x-\alpha)(x+p),$$
$$x^2 + P'x + Q' = (x-\alpha)(x+p');$$

folglich für jedes x:

$$(x^2 + Px + Q)(x+p') = (x^2 + P'x + Q')(x+p),$$

d. i.

$$x^3 + \left.\begin{matrix}P\\+p'\end{matrix}\right\}x^2 + \left.\begin{matrix}Q\\+Pp'\end{matrix}\right\}x + Qp' = x^3 + \left.\begin{matrix}P'\\+p\end{matrix}\right\}x^2 + \left.\begin{matrix}Q'\\+P'p\end{matrix}\right\}x + Q'p;$$

folglich

$$P + p' = P' + p \quad \text{oder} \quad p - p' = P - P',$$
$$Q + Pp' = Q' + P'p \qquad P'p - Pp' = Q - Q',$$
$$Qp' = Q'p \qquad Q'p - Qp' = 0.$$

Die beiden erſten Gleichungen geben:

$$p = \frac{P(P-P') - (Q-Q')}{P-P'},$$

$$p' = \frac{P'(P-P') - (Q-Q')}{P-P'},$$

und durch Einführung dieſer Werthe in die dritte Gleichung kommt die Gleichung:

$$(P-P')(PQ'-P'Q) + (Q-Q')^2 = 0,$$

welche nun x nicht mehr enthält.

Sind die beiden gegebenen Gleichungen von verſchiedenen Graden, z. B.

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$
$$x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S' = 0;$$

ſo iſt

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = (x-\alpha)(x^2 + px + q),$$
$$x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S' = (x-\alpha)(x^3 + p'x^2 + q'x + r');$$

folglich

$$(x^3 + Px^2 + Qx + R)(x^3 + p'x^2 + q'x + r')$$
$$= (x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S')(x^2 + px + q),$$

woraus auf ähnliche Art wie vorher die Gleichungen

$$p - p' = P - P',$$
$$P'p - Pp' + q - q' = Q - Q',$$
$$Q'p - Qp' + P'q - Pq' - r' = R - R',$$
$$R'p - Rp' + Q'q - Qq' - Pr' = - S',$$
$$S'p + R'q - Rq' - Qr' = 0,$$
$$S'q - Rr' = 0$$

ſich ergeben, nämlich ſechs Gleichungen des erſten Grades mit fünf unbekannten Größen. Beſtimmt man q, r' aus den fünf erſten Gleichungen, und ſetzt die gefundenen Werthe in die ſechſte Gleichung, ſo erhält man die geſuchte Final-Gleichung, welche x nicht mehr enthält.

Dieſe Eliminationsmethode, deren Allgemeinheit man leicht überſehen wird, mag die vorzüglich bei franzöſiſchen Schriftſtellern über die Algebra häufig ſich findende ſogenannte Methode des gemeinſchaftlichen Theilers erſetzen, da die letztere ſich uns keinesweges durch ihre Einfachheit und Leichtigkeit in der Anwendung zu empfehlen ſcheint, wie z. B. auch Gergonne a. a. O. (p. 45) urtheilt, indem er ſich zugleich gewiſſermaaßen darüber luſtig macht, daß es in Frankreich eine Zeit gegeben habe, ou cette méthode d'élimination était tellement en faveur, que les examens aux écoles des services publics ne roulaient, pour ainsi dire, que sur elle; on était admis ou rejeté suivant qu'on la possedait bien ou mal. Eine recht gute und ausführliche Auseinanderſetzung derſelben ſ. m. in Francoeur cours complet de Mathématiques pures. T. II. Paris. 1828. p. 63., ſo wie auch in den bekannten Elementar-Werken über die Algebra von Lacroix. Wer größere Ausführlichkeit über die verſchiedenen Eliminationsmethoden, auch allgemeine Darſtellungen, verlangt, findet volle Befriedigung in Meier Hirſch Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraiſchen Gleichungen. Theil I. Berlin 1809. S. 103—146. Neue Eliminirungs-Methode von Grüſon in den Abhandlungen der mathematiſchen Klaſſe der Berliner Akademie für 1816. 17. Berlin. 1819. S. 1—10. Auch ſ. m. den mit der Theorie der Elimination zuſammenhängenden Aufſatz des den mathematiſchen Wiſſenſchaften zu früh entriſſenen Abel: Recherche de la quantité, qui satisfait à la fois à deux équations algebriques données. Annales de Mathém. T. XVII. p. 204.

9. Der Beweis eines wichtigen Lehrſatzes mag dieſen ergänzenden Artikel beſchließen. Man habe nämlich zwiſchen den zwei unbekannten Größen x, y die beiden Gleichungen

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Kx + L = 0,$$
$$A'x^m + B'x^{m-1} + C'x^{m-2} + \ldots + M'x + N' = 0,$$

wo die Coefficienten der Potenzen von x ſämmtlich rationale

ganze Functionen von y ſind. Die erſte Gleichung ſey vom nten, die zweite vom mten Grade. Dann ſind A, B, C, ... K, L Functionen von y vom Grade 0, 1, 2, ..., n—1, n, ſo wie A′, B′, C′, ... M′, N′ Functionen von y vom Grade 0, 1, 2, ..., m—1, m, wie ſogleich erhellen wird. Wenigſtens überſteigen dieſe Functionen von y keinen der genannten Grade. Da alſo A und A′ conſtante Größen ſind, ſo kann man ſich die gegebenen Gleichungen auch auf die Form

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + \ldots + Sx + T = 0,$$
$$x^m + P'x^{m-1} + Q'x^{m-2} + \ldots + V'x + W' = 0$$

gebracht denken, wo nun P, Q, ..., S, T ganze rationale Functionen von y vom Grade 1, 2, 3, ... n—1, n, dagegen P′, Q′, ..., V′, W′ ganze rationale Functionen von y vom Grade 1, 2, 3, ... m—1, m ſind. Man denke ſich jetzt die beiden gegebenen Gleichungen nach x aufgelöſt, und bezeichne die Wurzeln der erſtern, welche ſämmtlich Functionen von y und an der Zahl n ſind, durch

$$p, q, \ldots s, t, u,$$

die Wurzeln der andern, welche ebenfalls Functionen von y und an der Zahl m ſind, durch

$$p', q', v', \ldots w', r'.$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} U = &(p-p')(p-q') \ldots (p-v')(p-w')(p-r') \\ \times &(q-p')(q-q') \ldots (q-v')(q-w')(q-r') \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \times &(s-p')(s-q') \ldots (s-v')(s-w')(s-r') \\ \times &(t-p')(t-q') \ldots (t-v')(t-w')(t-r') \\ \times &(u-p')(u-q') \ldots (u-v')(u-w')(u-r'), \end{aligned}$$

ſo iſt klar, daß, wenn die beiden gegebenen Gleichungen, wie erfordert wird, zuſammen exiſtiren ſollen,

$$U = 0$$

ſeyn muß, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, keine der Wurzeln

$$p, q, \ldots s, t, u$$

einer unter den Wurzeln

$$p', q', \ldots v', w', r'$$

gleich ſeyn könnte, welches doch nothwendig erfordert wird, wenn die beiden gegebenen Gleichungen zugleich Statt finden ſollen. Die Gleichung

$$U = 0$$

iſt alſo die Bedingungsgleichung, welche Statt finden muß, wenn die beiden gegebenen Gleichungen zuſammen exiſtiren ſollen, d. h. eben die Gleichung, welche aus der Elimination von x aus den beiden gegebenen Gleichungen hervorgeht, und es kommt uns nun hier vorzüglich darauf an, den Grad, bis zu welchem dieſe Gleichung ſteigen kann, zu beurtheilen, wozu wir, wie es uns

ſcheint, am leichteſten durch folgendes, zuerſt von Cauchy in ſeinen Exercices de Mathématiques. Livraison 40 et 41. Paris 1828. p. 128. angewandte, Raiſonnement gelangen, wobei wir nur bemerken, daß, um jetzt den Gang der Unterſuchung nicht zu unterbrechen, nachher in (10.) beſonders bewieſen werden ſoll, daß U jederzeit eine ganze rationale Function von y iſt. Nach dem Obigen ſind

$$P, Q, \ldots S, T; \; P', Q', \ldots V', W'$$

reſpective Functionen von y vom Grade

$$1, 2, \ldots n-1, n; \; 1, 2, \ldots m-1, m.$$

Daher bleiben

$$\frac{P}{y}, \frac{Q}{y^2}, \ldots \frac{S}{y^{n-1}}, \frac{T}{y^n}; \; \frac{P'}{y}, \frac{Q'}{y^2}, \ldots \frac{V'}{y^{m-1}}, \frac{W'}{y^m}$$

im Allgemeinen endlich für unendlich große Werthe von y. Daſſelbe läßt ſich alſo auch von den Werthen von z ſagen, durch welche den beiden Gleichungen

$$z^n + \frac{P}{y}z^{n-1} + \frac{Q}{y^2}z^{n-2} + \ldots + \frac{S}{y^{n-1}}z + \frac{T}{y^n} = 0,$$

$$z^m + \frac{P'}{y}z^{m-1} + \frac{Q'}{y^2}z^{m-2} + \ldots + \frac{V'}{y^{m-1}}z + \frac{W'}{y^m} = 0$$

genügt wird. Da aber dieſe Gleichungen ſich leicht auf die Form

$$(zy)^n + P(zy)^{n-1} + Q(zy)^{n-2} + \ldots + S(zy) + T = 0.$$

$$(zy)^m + P'(zy)^{m-1} + Q'(zy)^{m-2} + \ldots + V'(zy) + W' = 0$$

bringen laſſen, ſo erhellet aus Vergleichung dieſer Gleichungen mit den Gleichungen

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + \ldots + Sx + T = 0,$$

$$x^n + P'x^{m-1} + Q'x^{m-2} + \ldots + V'x + W' = 0$$

auf der Stelle, daß die Werthe von z, durch welche den beiden obigen Gleichungen genügt wird,

$$\frac{p}{y}, \frac{q}{y}, \ldots \frac{s}{y}, \frac{t}{y}, \frac{u}{y}; \; \frac{p'}{y}, \frac{q'}{y}, \ldots \frac{v'}{y}, \frac{w'}{y}, \frac{r'}{y}$$

ſind, ſo daß alſo auch dieſe Brüche für unendlich große y nicht unendlich werden. Daher wird auch das Product

$$\left(\frac{p}{y}-\frac{p'}{y}\right)\left(\frac{p}{y}-\frac{q'}{y}\right)\ldots\left(\frac{p}{y}-\frac{v'}{y}\right)\left(\frac{p}{y}-\frac{w'}{y}\right)\left(\frac{p}{y}-\frac{r'}{y}\right)$$

$$\times\left(\frac{q}{y}-\frac{p'}{y}\right)\left(\frac{q}{y}-\frac{q'}{y}\right)\ldots\left(\frac{q}{y}-\frac{v'}{y}\right)\left(\frac{q}{y}-\frac{w'}{y}\right)\left(\frac{q}{y}-\frac{r'}{y}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\times\left(\frac{s}{y}-\frac{p'}{y}\right)\left(\frac{s}{y}-\frac{q'}{y}\right)\ldots\left(\frac{s}{y}-\frac{v'}{y}\right)\left(\frac{s}{y}-\frac{w'}{y}\right)\left(\frac{s}{y}-\frac{r'}{y}\right)$$

$$\times\left(\frac{t}{y}-\frac{p'}{y}\right)\left(\frac{t}{y}-\frac{q'}{y}\right)\ldots\left(\frac{t}{y}-\frac{v'}{y}\right)\left(\frac{t}{y}-\frac{w'}{y}\right)\left(\frac{t}{y}-\frac{r'}{y}\right)$$

$$\times\left(\frac{u}{y}-\frac{p'}{y}\right)\left(\frac{u}{y}-\frac{q'}{y}\right)\ldots\left(\frac{u}{y}-\frac{v'}{y}\right)\left(\frac{u}{y}-\frac{w'}{y}\right)\left(\frac{u}{y}-\frac{r'}{y}\right),$$

welches offenbar $= \frac{U}{y^{mn}}$ iſt, für unendlich große y nicht unendlich, woraus man alſo auf der Stelle ſchließt, daß der Grad von U oder der aus der Elimination von x aus den beiden gegebenen Gleichungen hervorgehenden Gleichung

$$U = 0$$

das Product mn nicht überſteigen kann, welches ein für die Theorie der Elimination ſehr wichtiges Theorem iſt, da die verſchiedenen Eliminationsmethoden, wenn nicht beſondere Vorſicht angewendet wird, häufig auf dieſen Grad überſteigende Final-Gleichungen führen.

Auch Bezout hat dieſen wichtigen Lehrſatz, der auch in der höhern Geometrie bei Beſtimmung der Anzahl der Durchſchnittspunkte zweier Curven verſchiedener Grade von beſonderer Wichtigkeit iſt, in ſeiner Théorie génerale des équations bewieſen, und Lacroix einen dieſem ähnlichen Beweis im Traité du calcul diff. et du calcul int. T. III. p. 186. mitgetheilt. Einfacher und auf mehr elementarem Wege hat Poiſſon den Satz im Journal de l'école polytechnique. II. bewieſen, und dieſer Beweis iſt nachher in verſchiedene Elementarwerke, z. B. das Complement d'Algèbre von Lacroix §. 9., Meier Hirſch a. a. O. §. 78., Francoeur a. a. O. T. II. §. 561. übergegangen. Auch ſ. m. Démonstration sur le nombre des points d'intersection de deux lignes courbes par L. Euler in den Mém. de Berlin. 1748.

10. Es liegt uns nun noch der Beweis ob, daß das im Vorhergehenden durch U bezeichnete Product jederzeit eine ganze rationale Function von y iſt. Um dies beweiſen zu können, müſſen wir von einigen allgemeinen Betrachtungen über die ſymmetriſchen Functionen ausgehen, und bedienen uns dabei eines von Gauß bei einer andern Gelegenheit (Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. §. 4.) gebrauchten ſehr einfachen Raiſonnements. Seyen nämlich a, b, c, d, ... gewiſſe unbeſtimmte Größen, an der Zahl n. Die Summe dieſer Größen oder ihrer Unionen ſetze man $= \lambda'$, die Summe ihrer Binionen $= \lambda''$, die Summe ihrer Ternionen $= \lambda'''$, u. ſ. f. alle dieſe Verbindungen ohne Wiederholungen gedacht; ſo läßt ſich beweiſen, daß jede rationale ganze ſymmetriſche Function (ſ. dieſen Artikel) von a, b, c, d, ... als eine ganze Function von $\lambda', \lambda'', \lambda''', \lambda^{\text{IV}}, \dots$ dargeſtellt werden kann. Jede rationale ganze ſymmetriſche Function ϱ von a, b, c, d, ... beſteht nämlich aus einer gewiſſen Anzahl von Gliedern von der Form

$$Ma^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} \dots,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ poſitive ganze Zahlen ſind, und M einen

von a, b, c, d, ... nicht abhängenden Coefficienten bezeichnet. Die Größen a, b, c, d, ... wollen wir immer in dieſer Ordnung auf einander folgen laſſen, und von den zwei beliebigen Gliedern

$$Ma^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} \ldots \text{ und } M'a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} d^{\delta'} \ldots$$

der ſymmetriſchen Function ϱ ſoll das erſte höher als das zweite genannt werden, wenn $\alpha > \alpha'$, oder $\alpha = \alpha'$, $\beta > \beta'$, oder $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma > \gamma'$, oder $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\delta > \delta'$, u. ſ. f. überhaupt von den Differenzen

$$\alpha - \alpha', \; \beta - \beta', \; \gamma - \gamma', \; \delta - \delta', \ldots\ldots$$

die erſte, welche nicht verſchwindet, poſitiv iſt. Da alle Glieder derſelben Ordnung, wie ſich von ſelbſt verſteht, durch Addition ihrer Coefficienten ſich in ein Glied vereinigen laſſen, ſo kann man annehmen, daß alle Glieder der ſymmetriſchen Function ϱ zu verſchiedenen Ordnungen gehören.

Zuerſt iſt nun zu bemerken, daß, wenn $Ma^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} \ldots$ das höchſte Glied der Function ϱ iſt, α nicht kleiner als β ſeyn kann. Wäre nämlich $\beta > \alpha$, ſo wäre das Glied $M'a^{\beta} b^{\alpha} c^{\gamma} d^{\delta} \ldots$, welches die Function ϱ als eine ſymmetriſche Function von a, b, c, d, ... nothwendig auch enthalten muß, da $\beta - \alpha$ poſitiv und nicht $= 0$ iſt, höher als $Ma^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} \ldots$, dieſes Glied alſo nicht das höchſte, wie doch angenommen wurde. Ganz auf ähnliche Art zeigt man, daß unter der obigen Vorausſetzung β nicht kleiner als γ, γ nicht kleiner als δ, δ nicht kleiner als ε ſeyn kann, u. ſ. w. Wäre nämlich z. B. $\delta > \gamma$, ſo wäre das Glied $M'a^{\alpha} b^{\beta} c^{\delta} d^{\gamma} \ldots$, welches die ſymmetriſche Function ϱ nothwendig auch enthalten muß, da $\alpha = \alpha$, $\beta = \beta$, $\delta > \gamma$ iſt, höher als das Glied $Ma^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} \ldots$, welches doch das höchſte ſeyn ſollte. Iſt alſo $Ma^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} \ldots$ das höchſte Glied in ϱ, ſo iſt keine der Differenzen

$$\alpha - \beta, \; \beta - \gamma, \; \gamma - \delta, \; \delta - \varepsilon, \ldots$$

negativ.

Ferner iſt klar, daß, wenn aus mehrern ganzen Functionen von a, b, c, d, ... ein Product gebildet wird, das höchſte Glied dieſes Products das Product der höchſten Glieder der einzelnen Factoren iſt. Die höchſten Glieder von λ', λ'', λ''', λ^{IV}, ... ſind aber nach der obigen Erklärung offenbar a, ab, abc, abcd, und das höchſte Glied des Products

$$p = M\lambda'^{\alpha-\beta} \lambda''^{\beta-\gamma} \lambda'''^{\gamma-\delta} \lambda^{\text{IV}\,\delta-\varepsilon} \ldots\ldots,$$

wo nach dem Vorhergehenden kein Exponent negativ iſt, iſt alſo

$$Ma^{\alpha-\beta} (ab)^{\beta-\gamma} (abc)^{\gamma-\delta} (abcd)^{\delta-\varepsilon} \ldots = Ma^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} \ldots,$$

wobei man nur nicht zu vergeſſen hat, daß die Reihe der Differenzen

$$\alpha - \beta, \; \beta - \gamma, \; \gamma - \delta, \; \delta - \varepsilon, \ldots$$

ſo weit fortgeſetzt werden muß, bis dieſe Differenzen von ſelbſt verſchwinden. Da alſo die höchſten Glieder von ϱ und dem Producte p identiſch ſind, ſo iſt, wenn man $\varrho - p = \varrho'$ ſetzt, das höchſte Glied von ϱ' offenbar von einer niedrigern Ordnung, als das höchſte Glied der Function ϱ. Zugleich aber iſt klar, daß p, und folglich auch ϱ', ganze rationale ſymmetriſche Functionen von a, b, c, d, ... ſind. So wie man nun $\varrho - p = \varrho'$ oder $\varrho = p + \varrho'$ gefunden hat, ſo findet man nach und nach:

$$\varrho = p + \varrho',\ \varrho' = p' + \varrho'',\ \varrho'' = p'' + \varrho''',\ \varrho''' = p''' + \varrho^{IV}, \ldots.$$

und die höchſten Glieder in den ſymmetriſchen Functionen ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''', ϱ^{IV}, ... gehören einer deſto niedrigern Ordnung an, je weiter man ſich in dieſer Reihe vom Anfange entfernt, d. h. das höchſte Glied in ϱ' iſt von einer niedrigern Ordnung als das höchſte Glied in ϱ, das höchſte Glied in ϱ'' von einer niedrigern Ordnung als das höchſte Glied in ϱ', das höchſte Glied in ϱ''' von einer niedrigern Ordnung als das höchſte Glied in ϱ'', u. ſ. w. p, p', p'', p''', ... ſind ſämmtlich ganze rationale Functionen von λ', λ'', λ''', λ^{IV}, ... von einer ganz ähnlichen Form wie oben p. Da nun die Abnahme der Ordnungen der höchſten Glieder in ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''', ϱ^{IV},...... offenbar nicht ins Unendliche fortgehen kann; ſo iſt klar, daß man

$$\varrho = p + p' + p'' + p''' + \ldots..$$

ſetzen, d. h. jede ganze rationale ſymmetriſche Function von a, b, c, d,..... als eine ganze rationale Function von λ', λ'', λ''', λ^{IV}, ... darſtellen kann.

Iſt nun

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + M = 0$$

eine Gleichung des nten Grades, deren n Wurzeln a, b, c, d.... ſind, ſo iſt bekanntlich

$$\begin{aligned} & x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + M \\ = & (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \ldots.. \\ = & x^n - \lambda' x^{n-1} + \lambda'' x^{n-2} - \lambda''' x^{n-3} + \ldots., \end{aligned}$$

und folglich die Reihe der Coefficienten A, B, C,.. L, M mit der Reihe $-\lambda'$, λ'', $-\lambda'''$, λ^{IV},.... oder die Reihe $-$A, B, $-$C, D, ... mit der Reihe λ', λ'', λ''', λ^{IV},.... identiſch. Da ſich nun jede ganze rationale ſymmetriſche Function von a, b, c, d,.... als eine ganze rationale Function von λ', λ'', λ''', λ^{IV},.... darſtellen läßt, ſo läßt ſich alſo auch jede ganze rationale ſymmetriſche Function von a, b, c, d,.... als eine ganze rationale Function von A, B, C, D,... L, M darſtellen, woraus ſich das folgende überaus wichtige Theorem ergiebt:

Jede ganze rationale ſymmetriſche Function der Wurzeln einer Gleichung kann immer als eine ganze rationale Function der Coefficienten der Gleichung dargeſtellt werden.

Mit Hülfe dieſes Satzes kann nun auf folgende Art bewieſen werden, daß das oben durch U bezeichnete Product jederzeit eine ganze rationale Function von y iſt. Nach (9.) ſind p', q', ... v', w', r' die Wurzeln der Gleichung

$$x^m + P'x^{m-1} + Q'x^{m-2} + \ldots + V'x + W' = 0;$$

und folglich der erſte Theil dieſer Gleichung

$$= (x-p')(x-q') \ldots (x-v')(x-w')(x-r'),$$

für jedes x. Alſo iſt auch nach (9.)

$$\begin{aligned} U = & (p^m + P'p^{m-1} + Q'p^{m-2} + \ldots + V'p + W') \\ \times & (q^m + P'q^{m-1} + Q'q^{m-2} + \ldots + V'q + W') \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \times & (s^m + P's^{m-1} + Q's^{m-2} + \ldots + V's + W') \\ \times & (t^m + P't^{m-1} + Q't^{m-2} + \ldots + V't + W') \\ \times & (u^m + P'u^{m-1} + Q'u^{m-2} + \ldots + V'u + W'). \end{aligned}$$

Dieſes Product ändert aber offenbar ſeinen Werth nicht, wenn man zwei beliebige der Größen p, q, ... s, t, u mit einander vertauſcht, und wird alſo, wenn man es ſich entwickelt denkt, bloß ſymmetriſche Functionen dieſer Größen enthalten. Da aber p, q, ... s, t, u die Wurzeln der Gleichung

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + \ldots + Sx + T = 0$$

ſind, ſo können alle dieſe ſymmetriſchen Functionen von p, q, .. s, t, u als ganze rationale Functionen der Coefficienten P, Q, .. S, T dargeſtellt werden, wie vorher bewieſen worden iſt, und das Product U iſt alſo offenbar eine ganze rationale Function von P, Q, ... S, T; P', Q', ... V', W'. Alle dieſe Coefficienten ſind aber bekanntlich ganze rationale Functionen von y; alſo iſt auch U eine ganze rationale Function von y, wie behauptet wurde.

Nach dieſer nöthigen Ergänzung zu (9.), auf welche dort auch ſchon vorläufig hingewieſen wurde, iſt nun das wichtige Theorem in (9.) in völliger Strenge und Allgemeinheit erwieſen.

Ellipſe. Eine der ſchönſten Aufgaben über die Ellipſe iſt die Aufgabe von der Beſtimmung der größten Ellipſe, welche die vier Seiten eines gegebenen Vierecks berührt. Gauß hat im zwei und zwanzigſten Bande der monatlichen Correſpondenz S. 113. eine ſehr ſchöne und in vieler Rückſicht höchſt inſtructive Auflöſung dieſer Aufgabe gegeben, und auch Pfaff, Mollweide, Schumacher haben ſich mit derſelben beſchäftigt, a. a. O. S. 223. 227. 507. Mehrere merkwürdige Eigenſchaften der Ellipſe ſ. m. im Art. Elliptiſche Functionen XII. i. d. Z.

Elliptiſche Functionen. Die Theorie der elliptiſchen Functionen, welche in neueſter Zeit mehrere der ausgezeichnetſten

Mathematiker ſo ſehr beſchäftigt hat, und dieſe ihr gewidmete Aufmerkſamkeit ihrer großen Wichtigkeit wegen in der That auch mit dem vollſten Rechte verdient, ſteht mit der Integration der irrationalen algebraiſchen Functionen im genaueſten Zuſammenhange, weshalb wir zuerſt über dieſe letztere, um völlig deutlich zu werden und eben dieſen Zuſammenhang nachzuweiſen, einige allgemeine Betrachtungen vorausſchicken müſſen.

I. Integration von $X\partial x\sqrt{A + Bx + Cx^2}$ und $\dfrac{X\partial x}{\sqrt{A + Bx + Cx^2}}$, wenn X eine rationale Function von x iſt.

1. Jede dieſer beiden Functionen kann leicht auf die Form der andern gebracht werden. Will man nämlich z. B. die erſte auf die Form der zweiten bringen, ſo erhält man auf der Stelle

$$X\partial x\sqrt{A + Bx + Cx^2} =$$

$$X\partial x\frac{\sqrt{A+Bx+Cx^2}\,.\,\sqrt{A+Bx+Cx^2}}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}} = \frac{(A+Bx+Cx^2)X\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}},$$

welches offenbar die verlangte Form iſt.

Um nun die beiden gegebenen Formeln rational zu machen, ſind zwei Fälle zu unterſcheiden. Iſt zuerſt C poſitiv, ſo ſetze man

$$\frac{A}{C} = \alpha,\ \frac{B}{C} = \beta,\ C = \gamma^2.$$

Dann iſt

$$\sqrt{A+Bx+Cx^2} = \gamma\sqrt{\alpha + \beta x + x^2},$$

und folglich, wenn man

$$\sqrt{\alpha+\beta x+x^2} = x + z,\ \alpha + \beta x = 2xz + z^2,\ x = \frac{\alpha - z^2}{2z - \beta}$$

ſetzt:

$$\sqrt{A+Bx+Cx^2} = \gamma(x+z) = \gamma\left(\frac{\alpha - \beta z + z^2}{2z - \beta}\right).$$

Durch Differentiation ergiebt ſich

$$\partial x = -\frac{2(\alpha - \beta z + z^2)\partial z}{(2z-\beta)^2}.$$

Führt man nun die gefundenen rationalen Ausdrücke von

$$x,\ \sqrt{A+Bx+Cx^2},\ \partial x$$

in die eine oder die andere der beiden gegebenen Differentialformeln ein, ſo werden dieſelben offenbar auf die Form $Z\partial z$, wo

Z eine rationale Function von z iſt, gebracht, und laſſen ſich folglich, wie bekannt, immer integriren.

Iſt ferner C negativ, ſo ſtelle man die Radicalgröße unter der dieſem Falle entſprechenden Form $\sqrt{A+Bx-Cx^2}$ dar, und ſetze nun wieder

$$\frac{A}{C}=\alpha,\ \frac{B}{C}=\beta,\ C=\gamma^2;$$

alſo

$$\sqrt{A+Bx-Cx^2}=\gamma\sqrt{\alpha+\beta x-x^2}.$$

Ferner ſetze man

$$x^2-\beta x-\alpha=(x-a)(x-b),\ \alpha+\beta x-x^2=(x-a)(b-x),$$

wo die Factoren x — a, x — b durch Auflöſung der quadratiſchen Gleichung

$$x^2-\beta x-\alpha=0$$

gefunden werden, und mache

$$\sqrt{(x-a)(b-x)}=(x-a)z;$$

ſo iſt

$$x=\frac{az^2+b}{z^2+1},\ \sqrt{A+Bx-Cx^2}=\frac{\gamma(b-a)z}{z^2+1},\ \partial x=\frac{2(a-b)z\partial z}{(z^2+1)^2},$$

und durch Subſtitution dieſer rationalen Ausdrücke wird jede der gegebenen Differentialformeln wieder auf die Form $Z\partial z$ gebracht, wo Z eine rationale Function von z bezeichnet. Zu bemerken iſt hierbei noch, daß man immer annehmen kann, daß die Factoren x — a und x — b beide reell ſind. Wären nämlich dieſe Factoren imaginär, ſo wäre, da dieſelben durch Auflöſung der quadratiſchen Gleichung

$$x^2-\beta x-\alpha=0$$

gefunden werden,

$$x=\tfrac{1}{2}\beta\pm\sqrt{\alpha+\tfrac{1}{4}\beta^2}$$

eine imaginäre Größe, folglich $\alpha+\frac{1}{4}\beta^2$ negativ, alſo nothwendig α negativ und dem abſoluten Werthe nach größer als $\frac{1}{4}\beta^2$. In dieſem Falle iſt aber, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann, $\alpha+\beta x-x^2$ für jedes x eine negative Größe. Da α negativ iſt, ſo wollen wir dieſe Größe zweckmäßiger für den folgenden Beweis unter der Form $-\alpha+\beta x-x^2$ darſtellen, und zuerſt annehmen, daß β poſitiv ſey. Iſt nun x negativ, ſo iſt dieſe Größe offenbar immer negativ. Iſt aber x poſitiv, ſo folgt aus dem Obigen

$$\alpha>\tfrac{1}{4}\beta^2,\ \alpha+x^2>\tfrac{1}{4}\beta^2+x^2;$$

aber

$$(x-\tfrac{1}{2}\beta)^2=x^2+\tfrac{1}{4}\beta^2-\beta x;$$

und daher die Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ſtets poſitiv, d. i.

$$\tfrac{1}{4}\beta^2 + x^2 > \beta x\,;$$

alſo um ſo mehr

$$\alpha + x^2 > \beta x\,,$$

oder $-\alpha + \beta x - x^2$ auch für jedes poſitive x eine negative Größe. Der Beweis für den Fall, wenn β negativ iſt, iſt von dem vorhergehenden nicht weſentlich verſchieden. Man ſieht alſo, daß in dem Falle imaginärer Factoren $\alpha + \beta x - x^2$, und folglich auch

$$\gamma^2 (\alpha + \beta x - x^2) = A + Bx - Cx^2$$

für jedes x negativ, d. i.

$$\sqrt{A + Bx - Cx^2}\,,$$

ſo wie alſo offenbar auch

$$\int \frac{X\partial x}{\sqrt{A + Bx - Cx^2}}$$

oder

$$\int X\partial x \sqrt{A + Bx - Cx^2}$$

für jedes x imaginär iſt. In dieſem Falle wird man daher, wenn wir bloß bei dem erſten der beiden vorhergehenden Integrale ſtehen bleiben,

$$\int \frac{X\partial x}{\sqrt{A+Bx-Cx^2}} = \int \frac{X\partial x}{\sqrt{-1}\,.\sqrt{-A-Bx+Cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\int \frac{X\partial x}{\sqrt{-A-Bx+Cx^2}}$$

ſetzen, welches wieder auf den oben zuerſt betrachteten Fall führt.

Man ſieht alſo, daß die gegebenen Differentialformeln in allen Fällen integrirt werden können. Anwendungen der allgemeinen Regeln auf ſpecielle Fälle würden leicht ſeyn, gehören aber nicht zu unſerm Zweck, da es uns hier bloß auf die Rechtfertigung der ſo eben ausgeſprochenen allgemeinen Bemerkung ankam.

II. Allgemeine Bemerkungen über $\int \frac{P\partial x}{R}$.

2. Auf vorſtehendes Integral, in welchem P immer eine rationale Function von x bezeichnen, und

$$R = \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}$$

ſeyn ſoll, laſſen ſich ſehr viele andere Integrale irrationaler algebraiſcher Functionen zurückführen, weshalb daſſelbe der Gegenſtand ſehr ausgedehnter beſonderer Unterſuchungen von Euler, Lagrange und andern berühmten Mathematikern geworden iſt. Um in dieſer Beziehung nur ein Paar der einfachſten Fälle zu erwähnen, ſo überſieht man z. B. augenblicklich, daß das Integral

$$\int Q\partial x \frac{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}{\sqrt{A'+B'x+C'x^2}}$$

die Form des in Rede ſtehenden Integrals erhält, wenn man Zähler und Nenner des Bruchs mit dem Zähler multiplicirt, vorausgeſetzt, daß Q eine rationale Function von x iſt. Setzt man ferner in dem Integral

$$\int \frac{P\partial x}{\sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta x^6}},$$

wo P eine rationale Function von x bezeichnet, $x^2 = z$; ſo läßt ſich P offenbar immer auf die Form

$$\frac{M' + N'\sqrt{z}}{M'' + N''\sqrt{z}} = \frac{(M' + N'\sqrt{z})(M'' - N''\sqrt{z})}{M''^2 - N''^2 z} = M + N\sqrt{z},$$

wo M und N rationale Functionen von z ſind, bringen, und unſer Integral erhält alſo durch die in Rede ſtehende Subſtitution offenbar die Form

$$\int \frac{M\partial z}{2\sqrt{z}.\sqrt{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3}} + \int \frac{N\partial z}{2\sqrt{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3}},$$

d. i.

$$\tfrac{1}{2}\int \frac{M\partial z}{\sqrt{\alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4}} + \tfrac{1}{2}\int \frac{N\partial z}{\sqrt{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3}},$$

welches zwei Integrale von der Form unſers allgemeinen Integrals ſind.

Jedes Integral $\int X\partial x$, wo X eine rationale Function von x und R iſt, läßt ſich ebenfalls immer auf das Integral $\int \frac{P\partial x}{R}$ zurückführen. Da nämlich X eine rationale Function von x und R iſt, ſo hat X offenbar die Form

$$X = \frac{A + BR}{C + DR},$$

wo A, B, C, D rationale Functionen von x ſind. Nun iſt, wenn man Zähler und Nenner dieſes Bruchs mit C — DR multiplicirt,

$$X = \frac{AC - BDR^2}{C^2 - D^2R^2} - \frac{(AD - BC)R}{C^2 - D^2R^2}$$

$$= \frac{AC - BDR^2}{C^2 - D^2R^2} - \frac{(AD - BC)R^2}{C^2 - D^2R^2}\cdot\frac{1}{R} = N - \frac{P}{R},$$

wo N und P rationale Functionen von x ſind. Folglich iſt

$$\int X\partial x = \int N\partial x - \int \frac{P\partial x}{R},$$

und daher dieſes Integral, weil N rational iſt, $\int N\partial x$ ſich alſo immer finden läßt, wieder auf $\int \frac{P\partial x}{R}$ zurückgeführt.

Hat man das Integral

$$\int P\partial x(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)^{\pm\frac{1}{3}},$$

ſo ſetze man $x = k + \frac{1}{y}$. Dann wird

$$\begin{aligned}&(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)y^3\\ &= (\alpha+\beta k+\gamma k^2+\delta k^3)y^3 + (\beta+2\gamma k+3\delta k^2)y^2\\ &\quad + (\gamma+3\delta k)y+\delta\,.\end{aligned}$$

Nimmt man nun für k eine reelle Wurzel der Gleichung

$$\alpha+\beta k+\gamma k^2+\delta k^3 = 0,$$

ſo wird

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3 = \frac{\alpha'+\beta' y+\gamma' y^2}{y^3},$$

und man kann alſo, wenn P eine rationale Function von x bezeichnet, unſer Integral offenbar immer auf die Form

$$\int P\partial x(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\pm\frac{1}{3}}.$$

bringen. Setzt man nun

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2 = z^3,$$

ſo iſt

$$x = -\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma+4\gamma z^3}}{2\gamma},$$

und nach gehöriger Subſtitution erhält man ein Integral von der Form

$$\int\frac{Q\partial z}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma+4\gamma z^3}},$$

wo wieder Q eine rationale Function von z iſt. Man kann auch

$$\sqrt[3]{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3} = \sqrt[3]{\alpha}+xz,$$

oder

$$\sqrt[3]{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3} = x\sqrt[3]{\delta}+z$$

ſetzen, wodurch man, wenn man auf beiden Seiten auf die dritte Potenz erhebt, Gleichungen erhält, welche in Bezug auf x vom zweiten Grade ſind, und aus aus denen ſich alſo x durch z beſtimmen läßt. Nach gehöriger Subſtitution erhält man Integrale von der allgemeinen Form $\int\frac{P\partial x}{R}$.

Der Raum gebietet uns, dieſen ſpeciellen Bemerkungen ein Ziel zu ſetzen. Dieſelben ſollten bloß dazu dienen, um auf die große Wichtigkeit des Integrals $\int\frac{P\partial x}{R}$ hinzuweiſen, und wir gehen nun zu einigen Transformationen dieſes Integrals über, welche uns von ſelbſt zu den elliptiſchen Functionen, dem eigent-

lichen Gegenſtande dieſes Artikels, führen und zeigen werden, daß ſich das in Rede ſtehende Integral immer auf elliptiſche Functionen bringen läßt, wodurch dann von ſelbſt die große Wichtigkeit der letztern für die ganze Integralrechnung nachgewieſen iſt.

III. Erſte Transformation von $\int \frac{P\partial x}{R}$.

3. Zuerſt wollen wir zeigen, daß ſich dieſes Integral immer ſo umformen läßt, daß der Nenner unter dem Wurzelzeichen keine ungeraden Potenzen der veränderlichen Größe enthält. Zu dem Ende ſetze man

$$x = \frac{p + qy}{1 + y},$$

wo p und q zwei noch zu beſtimmende Größen bezeichnen, und zerlege

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4$$

in die beiden reellen Factoren des zweiten Grades

$$f + 2gx + hx^2, \; f' + 2g'x + h'x^2,$$

welches bekanntlich immer möglich iſt. Nach gehöriger Subſtitution des oben für x geſetzten Ausdrucks in das Product

$$(f + 2gx + hx^2)(f' + 2g'x + h'x^2)$$

erhält man für daſſelbe einen Ausdruck von der Form

$$\frac{R'}{(1 + y)^4},$$

wo R' eine ganze rationale Function des vierten Grades von y iſt, und findet nach gehöriger Entwickelung, daß in derſelben die Coefficienten von y und y^3 verſchwinden, wenn man p und q aus den Gleichungen

$$f + g(p + q) + hpq = 0,$$
$$f' + g'(p + q) + h'pq = 0$$

beſtimmt. Für p + q und pq ergeben ſich aus dieſen beiden Gleichungen rationale Werthe, welche wir durch m und n bezeichnen wollen, ſo daß alſo

$$p + q = m, \; pq = n$$

iſt. Erhebt man beide Theile der erſten Gleichung auf's Quadrat und zieht 4pq = 4n ab, ſo erhält man

$$(p - q)^2 = m^2 - 4n,$$

und hat folglich zur Beſtimmung von p und q die Gleichungen

$$p + q = m, \; p - q = \sqrt{m^2 - 4n},$$

aus denen ſich

$$p = \tfrac{1}{2}(m + \sqrt{m^2 - 4n}), \; q = \tfrac{1}{2}(m - \sqrt{m^2 - 4n})$$

ergiebt und zugleich erhellet, daß p und q nur dann reelle Größen ſind, wenn $m^2 - 4n$ poſitiv iſt. Merkwürdig iſt es aber, daß die Rechnung, wie wir nun zeigen wollen, immer ſo angeordnet werden kann, daß man für p und q reelle Werthe erhält. Wir unterſcheiden bei dem Beweiſe dieſer Behauptung zwei Fälle.

Hat zuerſt

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4$$

imaginäre Factoren des erſten Grades, ſo ſind dieſelben immer in gerader Anzahl vorhanden, und dieſe Größe kann folglich nur entweder zwei oder vier imaginäre Factoren haben. Man kann alſo in dieſem Falle immer vorausſetzen, daß die Factoren des erſten Grades von $f + 2gx + hx^2$ beide imaginär ſind. Durch Auflöſung der quadratiſchen Gleichung

$$x^2 + \frac{2g}{h}x + \frac{f}{h} = 0$$

erhält man

$$x = \frac{-g \pm \sqrt{g^2 - fh}}{h},$$

ſo daß alſo, weil beide Factoren von $f + 2gx + hx^2$, folglich auch von

$$x^2 + \frac{2g}{h}x + \frac{f}{h}$$

imaginär ſind, $g^2 - fh$ negativ, oder $fh - g^2$ poſitiv iſt. Aus der Gleichung

$$f + g(p + q) + hpq = 0$$

folgt aber

$$(p + q)^2 = \left(\frac{f + hpq}{g}\right)^2;$$

alſo

$$(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq = \left(\frac{f + hpq}{g}\right)^2 - 4pq$$

$$= \left(\frac{f + hpq}{g} - \frac{2g}{h}\right)^2 + \frac{4(fh - g^2)}{h^2},$$

ſo daß folglich, weil nach dem Obigen $fh - g^2$ poſitiv iſt, auch

$$(p-q)^2 = m^2 - 4n$$

poſitiv iſt, alſo p und q reell ſind.

Sind ferner alle Factoren des erſten Grades von

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4$$

reell, ſo ſeyen a, b, c, d die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} + \frac{\beta}{\varepsilon}x + \frac{\gamma}{\varepsilon}x^2 + \frac{\delta}{\varepsilon}x^3 + x^4 = 0,$$

welche alſo auch ſämmtlich reell ſind. Unter dieſer Vorausſetzung kann man offenbar

$$\frac{f}{h} + \frac{2g}{h}x + x^2 = (x-a)(x-b),$$

$$\frac{f'}{h'} + \frac{2g'}{h'}x + x^2 = (x-c)(x-d)$$

ſetzen, woraus

$$f = abh,\ g = -\tfrac{1}{2}(a+b)h;$$

$$f' = cdh',\ g' = -\tfrac{1}{2}(c+d)h';$$

alſo nach dem Obigen

$$abh - \tfrac{1}{2}(a+b)h(p+q) + hpq = 0,$$

$$cdh' - \tfrac{1}{2}(c+d)h'(p+q) + h'pq = 0,$$

oder

$$ab - \tfrac{1}{2}(a+b)(p+q) + pq = 0,$$

$$cd - \tfrac{1}{2}(c+d)(p+q) + pq = 0.$$

Aus dieſen Gleichungen erhält man

$$p + q = \frac{ab - cd}{a+b-c-d},\ pq = \frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{a+b-c-d},$$

und nach leichter Rechnung

$$\left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - pq = \frac{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}{(a+b-c-d)^2}.$$

Da man offenbar die vier reellen Wurzeln a, b, c, d in jeder beliebigen Ordnung nehmen kann, ſo wollen wir vorausſetzen, daß ſie in der Reihe a, b, c, d nach ihrer Größe abſteigend geordnet ſind. Dann ſind die Differenzen a — c, a — d, b — c, b — d poſitiv, und es iſt folglich auch der Zähler von $\left(\frac{p-q}{2}\right)^2$, ſo wie ſein Nenner, poſitiv, alſo p — q reell. Eben ſo wird p — q offenbar auch reell, wenn man a die größte, b die kleinſte Wurzel bezeichnen läßt, weil dann zwar b — c, b — d negativ ſind, das Product (b — c)(b — d) aber doch poſitiv iſt.

Man kann alſo durch Subſtitution von

$$x = \frac{p+qy}{1+y}$$

die Function

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4$$

in die Function

$$\frac{R'}{(1+y)^4}$$

jederzeit ſo transformiren, daß R' eine reelle ganze Function des vierten Grades von y iſt, welche keine ungeraden Potenzen von y enthält.

Drei ſpecielle Fälle verdienen jedoch noch eine beſondere Betrachtung. Sind nämlich zuerſt die Wurzeln c, d den Wurzeln a, b reſpective gleich, ſo wird ſowohl p + q, als auch $p - q = \frac{0}{0}$.

In dieſem Falle iſt aber

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 = \epsilon (x-a)^2 (x-b)^2,$$

folglich

$$\int \frac{P\partial x}{R} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int \frac{P\partial x}{(x-a)(x-b)},$$

welches das Integral einer rationalen Function iſt.

Iſt ferner eine der Wurzeln a, b einer der Wurzeln c, d gleich, ſo wird $p - q = 0$. In dieſem Falle läßt ſich das Integral leicht auf das in I. betrachtete Integral zurückführen. Verbindet man nämlich die beiden gleichen Wurzeln mit einander, ſo kann man

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 = \epsilon (x-a)^2 (x^2 + fx + g),$$

folglich

$$\int \frac{P\partial x}{R} = \int \frac{P\partial x}{(x-a)\sqrt{\epsilon (x^2 + fx + g)}}$$

oder, wenn man

$$\frac{P}{x-a} = P', \quad \epsilon (x^2 + fx + g) = A + Bx + Cx^2$$

ſetzt,

$$\int \frac{P\partial x}{R} = \int \frac{P'\partial x}{\sqrt{A + Bx + Cx^2}}$$

ſetzen, welches die in I. betrachtete Form iſt, da P′ eine rationale Function von x bezeichnet.

Iſt endlich $a + b = c + d$, ſo werden p + q und p − q beide unendlich. In dieſem Falle iſt nach dem Obigen

$$\frac{g}{h} = \frac{g'}{h'}.$$

Setzt man alſo

$$x = y - \frac{g}{h} = y - \frac{g'}{h'},$$

ſo verſchwinden in den Factoren

$$f + 2gx + hx^2, \quad f' + 2g'x + h'x^2$$

die Glieder, welche die erſte Potenz von y enthalten. Dieſe Factoren werden alſo durch die in Rede ſtehende Subſtitution auf die Form

$$m + ny^2, \quad m' + n'y^2$$

gebracht, und aus ihrem Producte, d. i. aus

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4$$

verſchwinden folglich ebenfalls die ungeraden Potenzen von y, ſo daß alſo auch in dieſem Falle in dem Integral $\int\frac{P\partial x}{R}$ aus dem Nenner die ungeraden Potenzen der veränderlichen Größe weggeſchafft werden können.

Abſtrahiren wir nun von dieſen ſpeciellen Fällen, ſo erhellet aus dem Obigen, daß $\int\frac{P\partial x}{R}$, wenn wir das obige

$$R' = \alpha' + \beta' y^2 + \gamma' y^4$$

ſetzen, durch die Subſtitution von

$$x = \frac{p + qy}{1 + y}$$

im Allgemeinen auf die Form

$$\int\frac{P\partial x}{R} = \int\frac{(1+y)^2 P'\partial x}{\sqrt{\alpha' + \beta' y^2 + \gamma' y^4}}$$

gebracht werden kann, wo P' das bezeichnet, was aus P durch die in Rede ſtehende Subſtitution wird.

Weil

$$\partial x = \frac{(1+y)q\partial y - (p+qy)\partial y}{(1+y)^2} = \frac{(q-p)\partial y}{(1+y)^2}$$

iſt; ſo wird

$$\int\frac{P\partial x}{R} = \int\frac{(q-p)P'\partial y}{\sqrt{\alpha' + \beta' y^2 + \gamma' y^4}} = \int\frac{Q\partial y}{\sqrt{\alpha' + \beta' y^2 + \gamma' y^4}},$$

wo Q eine rationale Function von y iſt.

IV. Zweite Transformation von $\int\frac{P\partial x}{R}$.

4. Nachdem wir im Vorhergehenden gezeigt haben, daß ſich dieſes Integral jederzeit ſo transformiren läßt, daß R keine ungeraden Potenzen der veränderlichen Größe enthält, ſind wir berechtigt, im Folgenden immer

$$R = \sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}$$

zu ſetzen. Es iſt aber auch verſtattet, anzunehmen, daß **P** keine ungeraden Potenzen von x enthält, wie auf folgende Art gezeigt werden kann. Welche Form auch die rationale Function **P** haben mag, ſo kann man doch immer

$$P = \frac{M + Nx}{M' + N'x}$$

ſetzen, wo M, N, M', N' gerade Functionen von x, d. i. Functionen von x^2 ſind. Multiplicirt man Zähler und Nenner mit $M' - N'x$, ſo wird

$$P = \frac{(M + Nx)(M' - N'x)}{M'^2 - N'^2x^2} = \frac{MM' - NN'x^2 + (M'N - MN')x}{M'^2 - N'^2x^2}$$

$$= \frac{MM' - NN'x^2}{M'^2 - N'^2x^2} - \frac{(MN' - M'N)x}{M'^2 - N'^2x^2} = K - Lx\,,$$

wo K und L offenbar gerade Functionen von x, d. i. Functionen von x^2 ſind. Man hat alſo

$$\int\frac{P\partial x}{R} = \int\frac{K\partial x}{\sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}} - \int\frac{Lx\partial x}{\sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}}.$$

Macht man in dem zweiten Integral auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens $x^2 = y$, $2x\partial x = \partial y$, und bezeichnet das, was aus L wird, wenn man $x^2 = y$ ſetzt, wobei wohl zu bemerken iſt, daß L eine Function von x^2 iſt, durch L'; ſo wird

$$\int\frac{Lx\partial x}{\sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}} = \tfrac{1}{2}\int\frac{L'\partial y}{\sqrt{\alpha + \beta y + \gamma y^2}}\,,$$

und läßt ſich folglich nach I. finden, ſo daß wir es alſo bloß noch mit dem Integral

$$\int\frac{K\partial x}{\sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}}\,,$$

wo K eine gerade Function von x iſt, zu thun haben. Daher ſind wir berechtigt, im Folgenden immer vorauszuſetzen, daß in $\int\frac{P\partial x}{R}$ ſowohl P, als auch R, bloß gerade Potenzen von x enthält, namentlich immer

$$R = \sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}$$

iſt.

V. Dritte Tranſformation von $\int\frac{P\partial x}{R}$.

5. Wir wollen zuerſt annehmen, daß die rationale Function P, welche nach dem Vorigen bloß gerade Potenzen von x enthält, eine ganze Function von x ſey, und ſetzen daher

$$P = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \ldots + Kx^{2k}.$$

Setzen wir nun ferner der Kürze wegen

$$\int\frac{x^n\partial x}{R} = \Pi^{(n)};$$

ſo iſt

$$\int\frac{P\partial x}{R} = A\Pi^{(0)} + B\Pi^{(2)} + C\Pi^{(4)} + \ldots + K\Pi^{(2k)}.$$

Differentiirt man jetzt die Größe Rx^{2n-3}, indem man immer

$$R = \sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}$$

ſetzt; ſo erhält man

$$\partial . Rx^{2n-3} =$$

$$(2n-3)x^{2n-4}\partial x\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}+\frac{x^{2n-3}(\beta x+2\gamma x^3)\partial x}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}$$

$$=\frac{(2n-3)x^{2n-4}(\alpha+\beta x^2+\gamma x^4)\partial x+x^{2n-3}(\beta x+2\gamma x^3)\partial x}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}$$

$$=\frac{(2n-3)\alpha x^{2n-4}\partial x}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}+\frac{(2n-2)\beta x^{2n-2}\partial x}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}+\frac{(2n-1)\gamma x^{2n}\partial x}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}};$$

folglich

$$Rx^{2n-3}=(2n-3)\alpha\int\frac{x^{2n-4}\partial x}{R}+(2n-2)\beta\int\frac{x^{2n-2}\partial x}{R}+(2n-1)\gamma\int\frac{x^{2n}\partial x}{R},$$

oder in der obigen Bezeichnung

$$Rx^{2n-3}=(2n-3)\alpha\Pi^{(2n-4)}+(2n-2)\beta\Pi^{(2n-2)}+(2n-1)\gamma\Pi^{(2n)}.$$

Setzt man in dieſer allgemeinen Relation $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$; ſo erhält man

$$Rx = \alpha\Pi^{(0)} + 2\beta\Pi^{(2)} + 3\gamma\Pi^{(4)},$$
$$Rx^3 = 3\alpha\Pi^{(2)} + 4\beta\Pi^{(4)} + 5\gamma\Pi^{(6)},$$
$$Rx^5 = 5\alpha\Pi^{(4)} + 6\beta\Pi^{(6)} + 7\gamma\Pi^{(8)},$$
$$Rx^7 = 7\alpha\Pi^{(6)} + 8\beta\Pi^{(8)} + 9\gamma\Pi^{(10)},$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

und ſieht hieraus, daß man

$$\Pi^{(0)}, \Pi^{(2)}, \Pi^{(4)}, \Pi^{(6)}, \ldots \Pi^{(2k)}$$

finden kann, wenn man $\Pi^{(0)}$ und $\Pi^{(2)}$ finden kann, ſo daß ſich alſo, wenn P eine ganze gerade Function von x iſt, die Entwickelung von $\int\frac{P\partial x}{R}$ auf die Entwickelung von

$$\Pi^{(0)} = \int\frac{\partial x}{R} \text{ und } \Pi^{(2)} = \int\frac{x^2\partial x}{R}$$

reducirt.

Iſt ferner P überhaupt eine rationale Function von x^2, ſo ſondere man zuerſt die darin vielleicht enthaltene ganze Function ab, und zerlege die übrig bleibende Function, indem man $x^2 = y$ ſetzt, in einfache Brüche von der allgemeinen Form

$$\frac{N}{(y+a)^n} \text{ oder } \frac{N}{(x^2+a)^n},$$

wo N eine conſtante Größe iſt. Dadurch reducirt ſich die Entwickelung unſers Integrals theils auf den vorher betrachteten Fall, wenn P eine ganze Function von x^2 iſt, theils auf die Entwickelung einer Reihe von Integralen von der Form

$$\int\frac{N\partial x}{(x^2+a)^n R} = N\int\frac{\partial x}{(x^2+a)^n R}.$$

Differentiirt man die Größe

$$\frac{Rx}{(x^2+a)^{n-1}} = Z\,;$$

ſo erhält man

$$\partial Z = \frac{(x^2+a)(R\partial x + x\partial R) - 2(n-1)Rx^2\partial x}{(x^2+a)^n}.$$

Aber

$$\partial R = \frac{(\beta x + 2\gamma x^3)\partial x}{R}.$$

Alſo

$$\partial Z = \frac{(x^2+a)(R^2+\beta x^2+2\gamma x^4) - 2(n-1)R^2x^2}{(x^2+a)^n}\cdot\frac{\partial x}{R}$$

$$= \frac{(x^2+a)(\alpha+2\beta x^2+3\gamma x^4) - 2(n-1)(\alpha+\beta x^2+\gamma x^4)x^2}{(x^2+a)^n}\cdot\frac{\partial x}{R}$$

$$= \frac{-(2n-5)\gamma x^6 - \{(2n-4)\beta - 3a\gamma\}x^4 - \{(2n-3)\alpha - 2a\beta\}x^2 + a\alpha}{(x^2+a)^n}\cdot\frac{\partial x}{R}.$$

Setzt man $x^2+a=z$, $x^2=z-a$, ſo kann man den in $\frac{\partial x}{R}$ multiplicirten Ausdruck offenbar auf die Form

$$\frac{Az^3+Bz^2+Cz+D}{z^n} = \frac{A}{z^{n-3}} + \frac{B}{z^{n-2}} + \frac{C}{z^{n-1}} + \frac{D}{z^n}$$

bringen. Thut man dies, führt zugleich $z=x^2+a$ wieder ein, und ſetzt der Kürze wegen

$$\alpha' = -\gamma,\ \beta' = -(\beta-3a\gamma),\ \gamma' = -(3a^2\gamma-2a\beta+\alpha),$$

$$\delta' = a^3\gamma - a^2\beta + a\alpha\,;$$

ſo wird

$$\partial Z = \left\{\frac{(2n-5)\alpha'}{(x^2+a)^{n-3}} + \frac{(2n-4)\beta'}{(x^2+a)^{n-2}} + \frac{(2n-3)\gamma'}{(x^2+a)^{n-1}} + \frac{(2n-2)\delta'}{(x^2+a)^n}\right\}\frac{\partial x}{R},$$

und folglich, wenn wir der Kürze wegen

$$\int\frac{\partial x}{(x^2+a)^n R} = \Gamma^{(n)}$$

ſetzen:

$$\frac{Rx}{(x^2+a)^{n-1}} = (2n-5)\alpha'\Gamma^{(n-3)} + (2n-4)\beta'\Gamma^{(n-2)} + (2n-3)\gamma'\Gamma^{(n-1)} + (2n-2)\delta'\Gamma^{(n)}.$$

Für $n = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ erhält man aus dieſer allgemeinen Relation:

$$\frac{Rx}{x^2+a} = -\alpha' \Gamma^{(-1)} \qquad + \gamma' \Gamma^{(1)} + 2\delta' \Gamma^{(2)},$$
$$\frac{Rx}{(x^2+a)^2} = \alpha' \Gamma^{(0)} + 2\beta' \Gamma^{(1)} + 3\gamma' \Gamma^{(2)} + 4\delta' \Gamma^{(3)},$$
$$\frac{Rx}{(x^2+a)^3} = 3\alpha' \Gamma^{(1)} + 4\beta' \Gamma^{(2)} + 5\gamma' \Gamma^{(3)} + 6\delta' \Gamma^{(4)},$$
$$\frac{Rx}{(x^2+a)^4} = 5\alpha' \Gamma^{(2)} + 6\beta' \Gamma^{(3)} + 7\gamma' \Gamma^{(4)} + 8\delta' \Gamma^{(5)},$$
u. ſ. f. u. ſ. f.

und ſieht alſo, daß

$$\Gamma^{(-1)}, \Gamma^{(0)}, \Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}, \ldots$$

gegeben ſind, wenn

$$\Gamma^{(-1)} = \int (x^2+a)\frac{\partial x}{R}, \quad \Gamma^{(0)} = \int \frac{\partial x}{R}, \quad \Gamma^{(1)} = \int \frac{\partial x}{(x^2+a)R}$$

gegeben ſind.

Da nun

$$\Gamma^{(-1)} = \int \frac{x^2 \partial x}{R} + a\int \frac{\partial x}{R} = \Pi^{(2)} + a\Gamma^{(0)}$$

iſt; ſo überſieht man, indem man dies mit dem Vorhergehenden zuſammennimmt, daß ſich die allgemeine Entwickelung von $\int \frac{P\partial x}{R}$ auf die Entwickelung der drei folgenden Integrale reducirt:

$$\Pi^{(0)} = \Gamma^{(0)} = \int \frac{\partial x}{R}, \quad \Pi^{(2)} = \int \frac{x^2\,\partial x}{R}, \quad \Gamma^{(1)} = \int \frac{\partial x}{(x^2+a)R},$$

und daß alſo durch die Entwickelung dieſer drei Integrale zugleich die allgemeine Entwickelung von $\int \frac{P\partial x}{R}$ gegeben ſein würde. Dieſe drei Integrale bilden daher eine beſondere ſehr wichtige Klaſſe tranſcendenter Größen und ſind ganz der Aufmerkſamkeit werth welche man ihnen vorzüglich in neueſter Zeit gewidmet hat.

VI. Vierte Transformation von $\int \frac{P\partial x}{R}$.

6. Wir beſchäftigen uns zunächſt bloß mit der Transformation von $\int \frac{\partial x}{R}$, wo immer

$$R = \sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}$$

iſt. Man denke ſich zu dem Ende die Function $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4$ der wie eine quadratiſche zu behandelnden Gleichung

$$\gamma x^4 + \beta x^2 + \alpha = 0$$

in zwei Factoren des zweiten Grades zerlegt; ſo ſind dieſe Factoren bekanntlich entweder beide reell oder beide imaginär. Der zweite Fall ſoll weiter unten einer beſondern Unterſuchung unter-

worfen, und mag daher für jetzt bei Seite geſetzt werden. Sind beide Factoren reell, ſo ſind die verſchiedenen Fälle, welche eintreten können, in den folgenden ſechs Formeln dargeſtellt:

$$\pm n^2(1+p^2x^2)(1+q^2x^2),$$
$$\pm n^2(1-p^2x^2)(1-q^2x^2),$$
$$\pm n^2(1+p^2x^2)(1-q^2x^2).$$

Hierüber ſind aber folgende Bemerkungen zu machen. Zuerſt erhellet, daß der Fall

$$-n^2(1+p^2x^2)(1+q^2x^2)$$

ganz auszuſchließen iſt, weil in demſelben $\alpha+\beta x^2+\gamma x^4$ für jedes x negativ, alſo R für jedes x imaginär ſeyn würde, weshalb man in dieſem Falle

$$\frac{\partial x}{R}=\frac{\partial x}{\sqrt{-1}.\sqrt{n^2(1+p^2x^2)(1+q^2x^2)}}$$

ſetzen müßte. Da ferner

$$-n^2(1-p^2x^2)(1-q^2x^2)=(npq)^2\left(\frac{1}{p^2}-x^2\right)\left(x^2-\frac{1}{q^2}\right),$$

$$-n^2(1+p^2x^2)(1-q^2x^2)=(nq)^2(1+p^2x^2)\left(x^2-\frac{1}{q^2}\right)$$

iſt; ſo kann man ſich die verſchiedenen Fälle in folgenden fünf Formeln dargeſtellt denken:

$$n^2(1+p^2x^2)(1+q^2x^2),$$
$$n^2(1-p^2x^2)(1-q^2x^2),$$
$$n^2(1+p^2x^2)(1-q^2x^2),$$
$$n^2(p^2-x^2)(x^2-q^2),$$
$$n^2(1+p^2x^2)(x^2-q^2).$$

Im erſten Falle kann man offenbar $p>q$ ſetzen. Macht man nun

$$x=\frac{\operatorname{tang}\varphi}{p},\ \frac{p^2-q^2}{p^2}=k^2;$$

ſo iſt $k<1$ und

$$1+p^2x^2=1+\operatorname{tang}\varphi^2=\sec\varphi^2=\frac{1}{\cos\varphi^2},$$

$$1+q^2x^2=\frac{p^2+q^2\operatorname{tang}\varphi^2}{p^2}=\frac{1-k^2\sin\varphi^2}{\cos\varphi^2},$$

$$(1+p^2x^2)(1+q^2x^2)=\frac{1-k^2\sin\varphi^2}{\cos\varphi^4},\ \partial x=\frac{\partial\varphi}{p\cos\varphi^2};$$

folglich

$$\frac{\partial x}{R}=\frac{1}{np}\cdot\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}.$$

Im zweiten Falle ſetze man wieder $p>q$. Macht man nun

$$px=\sin\varphi,\ \frac{q}{p}=k,$$

ſo iſt $k < 1$ und

$$1 - p^2x^2 = 1 - \sin\varphi^2 = \cos\varphi^2;$$

$$1 - q^2x^2 = 1 - k^2\sin\varphi^2, \; \partial x = \frac{\cos\varphi}{p}\partial\varphi;$$

alſo

$$\frac{\partial x}{R} = \frac{1}{np}\cdot\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}.$$

Dieſe Formel gilt aber, weil px die Einheit nicht überſteigen darf, nur für $x = 0$ bis $x = \frac{1}{p}$.

Von $x = \frac{1}{p}$ bis $x = \frac{1}{q}$ iſt R imaginär, da für $x > \frac{1}{p}$, $x < \frac{1}{q}$ das Produkt $px > 1$, $qx < 1$, alſo $1 - p^2x^2$ negativ, $1 - q^2x^2$ poſitiv iſt. Für $x = \frac{1}{q}$ bis $x = \infty$ iſt aber R wieder reell, und wir wollen alſo auch in dieſem Falle eine der obigen ähnliche Transformation ſuchen. Macht man nämlich, da qx nicht kleiner als die Einheit iſt,

$$qx = \frac{1}{\sin\varphi}, \; \frac{q}{p} = k;$$

ſo iſt

$$1 - p^2x^2 = -\frac{p^2 - q^2\sin\varphi^2}{q^2\sin\varphi^2} = -\frac{p^2(1-k^2\sin\varphi^2)}{q^2\sin\varphi^2},$$

$$1 - q^2x^2 = -\frac{\cos\varphi^2}{\sin\varphi^2}, \; \partial x = -\frac{\cos\varphi}{q\sin\varphi^2}\partial\varphi;$$

folglich

$$R = \frac{np\cos\varphi}{q\sin\varphi^2}\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2},$$

und demnach

$$\frac{\partial x}{R} = -\frac{1}{np}\cdot\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}.$$

Um das Minuszeichen zu vermeiden, ſetze man nun

$$\cot\varphi = \sqrt{1-k^2}.\tang\psi;$$

ſo iſt

$$\sin\varphi^2 = \frac{1}{1+(1-k^2)\tang\psi^2} = \frac{\cos\psi^2}{1-k^2\sin\psi^2},$$

$$x^2 = \frac{1}{q^2\sin\varphi^2} = \frac{1-k^2\sin\psi^2}{q^2\cos\psi^2}.$$

Ferner iſt

$$1 - k^2\sin\varphi^2 = \frac{1-k^2}{1-k^2\sin\psi^2}, \; -\frac{\partial\varphi}{\sin\varphi^2} = \sqrt{1-k^2}.\frac{\partial\psi}{\cos\psi^2},$$

$$-\partial\varphi = \frac{\sqrt{1-k^2}.\partial\psi}{1-k^2\sin\psi^2};$$

alſo, wenn man zugleich wieder φ für ψ ſetzt:

$$\frac{\partial x}{R} = \frac{1}{np} \cdot \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin \varphi^2}}.$$

Im dritten Falle darf, wenn R reell ſeyn ſoll, x nicht grö- ßer als $\frac{1}{q}$ werden, und man kann folglich

$$x = \frac{1}{q} \cos \psi, \quad \frac{p^2}{p^2+q^2} = k^2$$

ſetzen, wo wieder $k < 1$ iſt. Man hat nun

$$1 + p^2 x^2 = \frac{q^2 + p^2 \cos \psi^2}{q^2} = \frac{(p^2+q^2)(1-k^2 \sin \psi^2)}{q^2},$$

$$1 - q^2 x^2 = 1 - \cos \psi^2 = \sin \psi^2, \quad \partial x = -\frac{\sin \psi}{q} \partial \psi;$$

folglich

$$\frac{\partial x}{R} = -\frac{k}{np} \cdot \frac{\partial \psi}{\sqrt{1-k^2 \sin \psi^2}}.$$

Um das negative Zeichen zu vermeiden, ſetze man

$$\cot \psi = \sqrt{1-k^2} . \tang \varphi,$$

ſo iſt wie vorher

$$\sin \psi^2 = \frac{\cos \varphi^2}{1-k^2 \sin \varphi^2}, \quad \cos \psi^2 = \frac{(1-k^2) \sin \varphi^2}{1-k^2 \sin \varphi^2},$$

$$x^2 = \frac{(1-k^2) \sin \varphi^2}{q^2(1-k^2 \sin \varphi^2)} = \frac{\sin \varphi^2}{q^2 + p^2 \cos \varphi^2},$$

$$1 - k^2 \sin \psi^2 = \frac{1-k^2}{1-k^2 \sin \varphi^2}, \quad -\frac{\partial \psi}{\sin \psi^2} = \sqrt{1-k^2} . \frac{\partial \varphi}{\cos \varphi^2}.$$

$$-\partial \psi = \frac{\sqrt{1-k^2} . \partial \varphi}{1-k^2 \sin \varphi^2};$$

alſo

$$\frac{\partial x}{R} = \frac{k}{np} \cdot \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin \varphi^2}}.$$

Im vierten Falle muß, wenn R reell ſeyn ſoll, x zwiſchen p und q enthalten ſeyn, und es iſt offenbar verſtattet, $p > q$ an- zunehmen, da man das dieſem Falle entſprechende Product auch ſo ſchreiben könnte:

$$n^2 (q^2 - x^2)(x^2 - p^2).$$

Macht man nun

$$k^2 = \frac{p^2 - q^2}{p^2}, \quad x^2 = \frac{q^2}{1-k^2 \sin \varphi^2},$$

ſo iſt $k < 1$. Daß die Annahme für x^2 verſtattet iſt, kann leicht gezeigt werden. Zuerſt iſt nämlich klar, daß $x^2 > q^2$, $x > q$ iſt. Es muß aber auch

$$\frac{q^2}{1-k^2 \sin\varphi^2} < p^2,$$

d. i., wenn man mit dem Nenner auf beiden Seiten multiplicirt,

$$q^2 < p^2 - (p^2 - q^2)\sin\varphi^2$$
$$< p^2 \cos\varphi^2 + q^2 \sin\varphi^2,$$
$$q^2 \cos\varphi^2 < p^2 \cos\varphi^2,\ q^2 < p^2,\ q < p$$

ſeyn. Da nun das Letzte nach der Annahme wirklich der Fall iſt, ſo findet auch das Erſte Statt, und x iſt folglich, wie erfordert wird, zwiſchen p und q enthalten. Es iſt nun

$$p^2 - x^2 = \frac{(p^2-q^2)\cos\varphi^2}{1-k^2\sin\varphi^2},\ x^2 - q^2 = \frac{q^2 k^2 \sin\varphi^2}{1-k^2\sin\varphi^2};$$
$$x\,\partial x = \frac{q^2 k^2 \sin\varphi \cos\varphi \partial\varphi}{(1-k^2\sin\varphi^2)^2},\ \partial x = \frac{qk^2 \sin\varphi \cos\varphi \partial\varphi}{(1-k^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}};$$

folglich

$$\frac{\partial x}{R} = \frac{1}{np} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}.$$

Im fünften Falle muß $x > q$ ſeyn. Man mache alſo

$$x = \frac{q}{\cos\varphi},\ k^2 = \frac{1}{1+p^2q^2},$$

ſo iſt wieder $k < 1$. Ferner iſt

$$1 + p^2x^2 = \frac{1 + p^2q^2 - \sin\varphi^2}{\cos\varphi^2} = \frac{1-k^2\sin\varphi^2}{k^2\cos\varphi^2},$$
$$x^2 - q^2 = \frac{q^2\sin\varphi^2}{\cos\varphi^2},\ \partial x = \frac{q\sin\varphi}{\cos\varphi^2}\partial\varphi;$$

folglich

$$\frac{\partial x}{R} = \frac{k}{n} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}.$$

Aus dem Bisherigen ſieht man, daß, wenn C eine conſtante Größe bezeichnet, $\frac{\partial x}{R}$ immer auf die Form

$$\frac{\partial x}{R} = \frac{C\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}},$$

wo $k < 1$ iſt, gebracht werden kann. Auch überzeugt man ſich, wenn man die vorher behandelten fünf Fälle nochmals ſämmtlich überblickt, auf der Stelle, daß für x^2 immer ein Ausdruck von der Form

$$x^2 = \frac{A + B\sin\varphi^2}{A' + B'\sin\varphi^2},$$

oder wenigſtens ein Ausdruck, der jederzeit leicht auf dieſe Form gebracht werden kann, geſetzt wird.

Denkt man ſich nun dieſelben Subſtitutionen in den drei Integralen

$$\int \frac{\partial x}{R},\ \int \frac{x^2\,\partial x}{R},\ \int \frac{\partial x}{(x^2+a)R}$$

gemacht, ſo erhellet ſogleich, daß dieſelben immer auf die allgemeine Form

$$\int \frac{A + B\sin\varphi^2}{C + D\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}}$$

gebracht werden können, und daß alſo die Entwickelung des allgemeinen Integrals $\int \frac{P\partial x}{R}$ lediglich auf die Entwickelung des vorhergehenden Integrals, welches man auch etwas einfacher unter der Form

$$\int \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}},$$

oder, wenn man

$$\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2} = \Delta(k,\ \varphi)$$

ſetzt, unter der Form

$$\int \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\Delta(k,\ \varphi)}$$

darſtellen kann, zurückkommt. Iſt dies auch ſtreng genommen nicht mehr eine eigentliche Transformation von $\int \frac{P\partial x}{R}$, ſondern vielmehr eine Reduction dieſes Integrals auf ein einfacheres Integral, ſo ſind wir doch in der Ueberſchrift bei der erſten Benennung geblieben, und glauben nicht, daß nach dieſer Bemerkung daraus eine Undeutlichkeit hervorgehen wird.

VI. Erklärung der elliptiſchen Functionen und Eintheilung derſelben in drei Arten.

7. Die in der Formel

$$\int \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}}$$

enthaltenen Tranſcendenten werden im Allgemeinen elliptiſche Functionen oder elliptiſche Tranſcendenten genannt. φ heißt die Amplitudo, k, welches bekanntlich immer kleiner als die Einheit iſt, der Modulus. Setzt man $k = \sin\Theta$, ſo heißt Θ der Winkel des Modulus. Die Größe $\sqrt{1-k^2}$ ſoll im Folgenden immer $= k'$ geſetzt und das Complement des Modulus genannt werden, ſo daß alſo immer

$$k^2 + k'^2 = 1$$

iſt. Was die Gränzen betrifft, zwiſchen denen das obige Integral zu nehmen iſt, ſo ſoll daſſelbe, wenn nicht ausdrücklich eine andere Beſtimmung gegeben wird, jederzeit ſo beſtimmt werden, daß es für $\varphi = 0$ verſchwindet, oder wir wollen daſſelbe immer

zwiſchen den Gränzen $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi$ nehmen, weshalb man es eigentlich auch

$$\int_0^\varphi \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}}$$

ſchreiben müßte, welches aber der Kürze wegen, wenn nicht vielleicht die Gränzen andere als die oben ſtillſchweigend vorausgeſetzten ſind, meiſtens nicht geſchehen ſoll. Ferner wollen wir immer

$$\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2} = \Delta(\varphi)$$

ſetzen, und nur, wenn es die Deutlichkeit fordert, wie ſchon vorher geſchehen iſt, die nicht ſo einfache Bezeichnung

$$\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2} = \Delta(k, \varphi)$$

gebrauchen.

8. Die Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}$$

kommt auf die Entwickelung dreier ſpecieller Fälle zurück, welches ſich, wie es uns ſcheint, am leichteſten auf folgende Art zeigen läßt. Setzen wir

$$\frac{A + B\sin\varphi^2}{(1 + n\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)} = \frac{A'}{\Delta(\varphi)} + \frac{B'}{(1 + n\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)}$$

und ſuchen die conſtanten Größen A′, B′ dieſer Gleichung gemäß zu beſtimmen, ſo erhalten wir

$$A + B\sin\varphi^2 = A'(1 + n\sin\varphi^2) + B'$$
$$= A' + B' + nA'\sin\varphi^2;$$
$$A' + B' = A,\ nA' = B;$$
$$A' = \frac{B}{n},\ B' = A - A' = \frac{nA - B}{n},$$

wodurch alſo A′ und B′ beſtimmt ſind. Aus obiger Gleichung iſt nun

$$\int \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} = A'\int \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} + B'\int \frac{\partial\varphi}{(1 + n\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)},$$

ſo daß ſich alſo das erſte Integral jederzeit auf die beiden letzten, welche offenbar ſpecielle Fälle des erſten ſind, zurückführen läßt. Es ſcheint daher hiernach, daß man bloß die beiden in den Formeln

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} \text{ und } \int \frac{\partial\varphi}{(1 + n\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)}$$

enthaltenen Transcendenten zu unterſuchen brauche. Aus den Formeln

$$A' = \frac{B}{n},\ B' = \frac{nA - B}{n}$$

ſieht man aber, daß die Beſtimmung von A′ und B′ unmöglich wird, wenn $n = 0$ iſt, und dieſer Fall daher eine beſondere

Betrachtung erfordert. Man kann aber A_1 und B_1 immer ſo beſtimmen, daß der Gleichung

$$\int(A+B\sin\varphi^2)\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} = A_1\int\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} + B_1\int\Delta(\varphi)\,\partial\varphi$$

oder

$$\frac{A+B\sin\varphi^2}{\Delta(\varphi)} = \frac{A_1}{\Delta(\varphi)} + B_1\Delta(\varphi)$$

genügt wird, weil aus derſelben

$$A+B\sin\varphi^2 = A_1 + B_1(1-k^2\sin\varphi^2)$$
$$= A_1 + B_1 - k^2B_1\sin\varphi^2,$$
$$A_1 + B_1 = A,\ -k^2B_1 = B,$$
$$B_1 = -\frac{B}{k^2},\ A_1 = A - B_1 = \frac{B+k^2A}{k^2}$$

folgt, mittelſt welcher Ausdrücke die Beſtimmung von A_1 und B_1 immer möglich iſt. Dies führt alſo auf die neue transcendente Größe $\int\Delta(\varphi)\partial\varphi$, welche ebenfalls zu der Klaſſe der elliptiſchen Functionen gehört, da dieſelbe aus der allgemeinen Formel hervorgeht, wenn man $n = 0$, $A = 1$, $B = -k^2$ ſetzt, und man wird alſo jedes elliptiſche Integral zu entwickeln im Stande ſeyn, wenn die allgemeine Entwickelung der drei Integrale

$$\int\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)},\ \int\Delta(\varphi)\partial\varphi,\ \int\frac{\partial\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)}$$

möglich iſt. Alle drei ſind ſpecielle Fälle der elliptiſchen Functionen nach der obigen allgemeinen Definition derſelben. Man nennt daher nach einer wohl von Legendre zuerſt gemachten Unterſcheidung:

1) die in der Formel $\int\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}$ enthaltenen Transcendenten die elliptiſchen Functionen der erſten Art;

2) die in der Formel $\int\Delta(\varphi)\partial\varphi$ enthaltenen Transcendenten die elliptiſchen Functionen der zweiten Art, und

3) die in der Formel $\int\frac{\partial\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)}$ enthaltenen Transcendenten die elliptiſchen Functionen der dritten Art.

Nach Legendre ſetzt man

$$F(\varphi) = \int\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)},\ E(\varphi) = \int\Delta(\varphi)\partial\varphi,\ \Pi(\varphi) = \int\frac{\partial\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)}.$$

Die Parentheſen, in welche das hinter den Functionszeichen F, E, Π, Δ ſtehende φ eingeſchloſſen iſt, werden auch öfters der Kürze wegen weggelaſſen.

Zugleich bemerken wir, daß ſich die elliptiſchen Functionen der drei Arten auch noch auf andere Weiſe ausdrücken laſſen.

Setzen wir nämlich $\sin\varphi = x$, wo alſo $x = 0$ iſt, wenn $\varphi = 0$ iſt; ſo iſt

$$\cos\varphi\,\partial\varphi = \sqrt{1-x^2}\,.\,\partial\varphi = \partial x,\ \partial\varphi = \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}};$$

folglich

$$F(\varphi) = \int\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} = \int\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$E(\varphi) = \int\Delta(\varphi)\,\partial\varphi = \int\frac{\partial x\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \int\frac{(1-k^2x^2)\,\partial x}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}} = F(\varphi) - k^2\int\frac{x^2\,\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};$$

$$\Pi(\varphi) = \int\frac{\partial\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)\,\Delta(\varphi)} = \int\frac{\partial x}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$= \int\frac{\partial x}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

wenn man $n = -\frac{1}{a^2}$ ſetzt. Abel in ſeiner wichtigen Abhandlung über die elliptiſchen Functionen (Crelles Journ. B. IV. S. 236.) nennt daher die Integrale

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\ \int\frac{x^2\,\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\ \int\frac{\partial x}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

reſpective elliptiſche Functionen der erſten, zweiten und dritten Art, welches nicht ganz mit dem Vorhergehenden übereinſtimmt.

9. Die elliptiſchen Functionen der zweiten Art ſtehen in unmittelbarem Zuſammenhange mit der Rectification der Ellipſe. Iſt nämlich

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

die Gleichung der Ellipſe, ſo iſt, wenn wir $x = a\sin\varphi$ ſetzen, offenbar $y = b\cos\varphi$; folglich, wenn s den durch die Coordinaten x, y beſtimmten Bogen der Ellipſe bezeichnet,

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \partial\varphi\sqrt{a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2},$$

oder, wenn wir $a = 1$, $k^2 = 1 - b^2$ ſetzen:

$$\partial s = \partial\varphi\sqrt{1-(1-b^2)\sin\varphi^2} = \partial\varphi\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2};$$

alſo, wenn man das Integral nur zwiſchen den erforderlichen Gränzen nimmt,

$$s = \int\Delta(\varphi)\partial\varphi,$$

welches im Allgemeinen eine elliptiſche Function der zweiten Art iſt.

Die Rectification der Hyperbel kann auf elliptiſche Functionen der erſten und zweiten Art gebracht werden. Man ſetze nämlich

lich die halbe große Axe $= k$, die halbe kleine Axe $= b$, die Excentricität $= 1$; ſo iſt bekanntlich $k^2 = 1 - b^2$. Auch iſt immer

$$\left(\frac{x}{k}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 .$$

Macht man nun $y = b \tang \varphi$, ſo wird

$$\left(\frac{x}{k}\right)^2 = 1 + b^2 \tang \varphi^2 = \frac{1 - (1-b^2) \sin \varphi^2}{\cos \varphi^2},$$

$$x = \frac{k}{\cos \varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin \varphi^2} .$$

Alſo iſt

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \frac{b^2 \partial \varphi}{\Delta(\varphi) \cos \varphi^2}, \quad s = \int \frac{b^2 \partial \varphi}{\Delta(\varphi) \cos \varphi^2},$$

wenn nur das Integral zwiſchen den erforderlichen Gränzen genommen wird. Aber

$$\begin{aligned}
\partial . \Delta(\varphi) \tang \varphi &= \frac{\Delta(\varphi) \partial \varphi}{\cos \varphi^2} - \frac{k^2 \sin \varphi^2 \partial \varphi}{\Delta(\varphi)} \\
&= \frac{\{(\Delta(\varphi))^2 - k^2 \sin \varphi^2 \cos \varphi^2\} \partial \varphi}{\Delta(\varphi) \cos \varphi^2} \\
&= \frac{(1 - k^2 \sin \varphi^2 - k^2 \sin \varphi^2 \cos \varphi^2) \partial \varphi}{\Delta(\varphi) \cos \varphi^2} \\
&= \frac{(1 - k^2 + k^2 \cos \varphi^2 - k^2 \sin \varphi^2 \cos \varphi^2) \partial \varphi}{\Delta(\varphi) \cos \varphi^2} \\
&= \frac{\{1 - k^2 - (1-k^2) \cos \varphi^2 + (1 - k^2 \sin \varphi^2) \cos \varphi^2\} \partial \varphi}{\Delta(\varphi) \cos \varphi^2} \\
&= \frac{\{b^2 - b^2 \cos \varphi^2 + (\Delta(\varphi))^2 \cos \varphi^2\} \partial \varphi}{\Delta(\varphi) \cos \varphi^2} \\
&= \frac{b^2 \partial \varphi}{\Delta(\varphi) \cos \varphi^2} - \frac{b^2 \partial \varphi}{\Delta(\varphi)} + \Delta(\varphi) \partial \varphi ;
\end{aligned}$$

$$\Delta(\varphi) \tang \varphi = \int \frac{b^2 \partial \varphi}{\Delta(\varphi) \cos \varphi^2} - b^2 \int \frac{\partial \varphi}{\Delta(\varphi)} + \int \Delta(\varphi) \partial \varphi .$$

Folglich

$$s = \Delta(\varphi) \tang \varphi + b^2 \int \frac{\partial \varphi}{\Delta(\varphi)} - \int \Delta(\varphi) \partial \varphi ,$$

mittelſt welcher Formel alſo s im Allgemeinen auf elliptiſche Functionen der erſten und der zweiten Art gebracht iſt, wenn nur die Integrale zwiſchen den gehörigen Gränzen genommen werden.

10. Wir wollen jetzt einmal der Kürze wegen

$$\int_0^\alpha \frac{A + B \sin \varphi^2}{1 + n \sin \varphi^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin \varphi^2}} = f(\alpha)$$

ſetzen; ſo erhellet aus der Natur dieſer Functionen und der Theorie der beſtimmten Integrale auf der Stelle die Richtigkeit der beiden folgenden Relationen:

$$f(\alpha) = -f(-\alpha),\ f(\pi) = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Auch iſt, wenn i eine beliebige poſitive ganze Zahl bezeichnet, offenbar

$$f(i\pi) = i f(\pi) = 2 i f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

und folglich

$$f(-i\pi) = -f(i\pi) = -i f(\pi) = -2 i f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Alſo iſt für jedes poſitive oder negative i

$$f(i\pi) = i f(\pi) = 2 i f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Sey nun $\varphi = i\pi \pm \psi$, i eine beliebige poſitive ganze Zahl, ψ nicht größer als $\frac{1}{2}\pi$; ſo iſt $\partial\varphi = \pm\partial\psi$, $\sin\varphi^2 = \sin\psi^2$, und für $\varphi = 0$ und $\varphi = \varphi$ iſt reſpective $\psi = \mp i\pi$ und $\psi = \psi$. Alſo iſt

$$f(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}} = \pm\int_{\mp i\pi}^\psi \frac{A + B\sin\psi^2}{1 + n\sin\psi^2} \cdot \frac{\partial\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin\psi^4}},$$

oder, was daſſelbe iſt,

$$f(\varphi) = \pm\int_{\mp i\pi}^\psi \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}}.$$

Aber nach der Theorie der beſtimmten Integrale

$$\int_{-i\pi}^\psi \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}}$$

$$= \int_{-i\pi}^0 \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}} + \int_0^\psi \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}}$$

$$= -\int_0^{-i\pi} \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}} + \int_0^\psi \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}}$$

$$= -f(-i\pi) + f(\psi) = f(i\pi) + f(\psi),$$

und auf ganz ähnliche Art

$$\int_{i\pi}^\psi \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}} = -\int_\psi^{i\pi} \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}}$$

$$= -\int_0^{i\pi} \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}} + \int_0 \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}}$$

$$= -f(i\pi) + f(\psi).$$

Folglich iſt nach dem Obigen

$$f(\varphi) = f(i\pi) \pm f(\psi),$$

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

oder, weil $f(i\pi) = 2if\left(\frac{\pi}{2}\right)$ iſt:

$$f(\varphi) = 2if\left(\frac{\pi}{2}\right) \pm f(\psi).$$

Wäre i negativ, ſo wäre

$$\varphi = i\pi \pm \psi = -(-i\pi \mp \psi),$$

wo nun — i poſitiv iſt. Aber immer $f(-\alpha) = -f(\alpha)$. Alſo

$$f(\varphi) = -f(-i\pi \mp \psi) = -\left\{-2if\left(\frac{\pi}{2}\right) \mp f(\psi)\right\}$$

$$= 2if\left(\frac{\pi}{2}\right) \pm f(\psi),$$

ſo daß folglich, wenn

$$\varphi = i\pi \pm \psi$$

iſt, für jedes poſitive oder negative ganze i immer

$$f(\varphi) = 2if\left(\frac{\pi}{2}\right) \pm f(\psi)$$

iſt.

Hieraus folgt auch, jenachdem $i = 2n$ oder $= 2n-1$ iſt:

$$f\left(i\frac{\pi}{2}\right) = f(n\pi) = nf(\pi) = 2nf\left(\frac{\pi}{2}\right) = if\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

oder

$$f\left(i\frac{\pi}{2}\right) = f(n\pi - \tfrac{1}{2}\pi) = 2nf\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = (2n-1)f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

d. i. immer

$$f\left(i\frac{\pi}{2}\right) = if\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Aus vorſtehenden Gleichungen, die wir hier mit aller Strenge und Deutlichkeit zu beweiſen geſucht haben, ſieht man, daß man $f(\varphi)$ für jeden Werth von φ kennt, wenn man $f(\varphi)$ nur für alle die poſitiven Werthe von φ kennt, welche $\frac{1}{2}\pi$ nicht überſteigen. Die in der Formel

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}}$$

enthaltenen tranſcendenten Größen nennt Legendre im Allgemeinen vollſtändige elliptiſche Functionen. Für die drei verſchiedenen Arten der elliptiſchen Functionen bezeichnet er dieſelben durch F′, E′, Π′. In unſerer obigen Bezeichnung iſt

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)},\quad E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \Delta(\varphi)\,\partial\varphi,$$

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial\varphi}{(1 + n\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)}.$$

VIII. Beſondere Betrachtung des Falls, wenn in (6.) die beiden Factoren imaginär ſind.

11. Bevor wir in der Unterſuchung der Eigenſchaften der elliptiſchen Functionen weiter fortſchreiten, iſt es nöthig, noch ein Mal zu (6.) zurückzukehren, und den dort einſtweilen bei Seite geſetzten Fall, wenn die beiden Factoren, in welche wir uns die Größe $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4$ zerlegt dachten, imaginär ſind, einer beſondern Unterſuchung zu unterwerfen. Zu dem Ende zeigen wir zuerſt, daß in dieſem Falle $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4$ immer auf die Form

$$\lambda^2 + 2\lambda\mu x^2 \cos\Theta + \mu^2 x^4$$

gebracht werden kann. Setzen wir nämlich

$$\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 = \gamma\left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}x^2 + x^4\right)$$

und löſen die Gleichung

$$x^4 + \frac{\beta}{\gamma}x^2 + \frac{\alpha}{\gamma} = 0$$

wie eine quadratiſche auf, ſo erhalten wir

$$x^2 = -\frac{\beta}{2\gamma} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4\gamma^2} - \frac{\alpha}{\gamma}},$$

und die beiden in Rede ſtehenden Factoren ſind alſo imaginär, wenn $\frac{\alpha}{\gamma}$ poſitiv, und

$$\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta^2}{4\gamma^2},\ 4\alpha\gamma > \beta^2$$

iſt, wobei man zu bemerken hat, daß wegen der erſten Bedingung α und γ gleiche Vorzeichen haben, $\alpha\gamma$ alſo immer poſitiv iſt. Wir können annehmen, daß α und γ beide poſitiv ſind. Wären nämlich α und γ negativ, alſo die in Factoren zu zerlegende Größe, wenn wir jetzt $-\alpha$, $-\gamma$ für α, γ ſetzen,

$$-\alpha + \beta x^2 - \gamma x^4,$$

ſo iſt leicht zu zeigen, daß dieſe Größe für jedes x negativ, die Quadratwurzel aus derſelben alſo für jedes x imaginär iſt. Iſt zuerſt β negativ, ſo iſt dies klar. Iſt aber β poſitiv, ſo kann auf folgende Art leicht gezeigt werden, daß für jedes x

$$\alpha + \gamma x^4 > \beta x^2$$

iſt. Es iſt nämlich

$$(\sqrt{\alpha} - x^2\sqrt{\gamma})^2 = \alpha + \gamma x^4 - 2x^2\sqrt{\alpha\gamma},$$

folglich immer

$$\alpha + \gamma x^4 > 2x^2\sqrt{\alpha\gamma}.$$

Nach dem Obigen iſt aber

$$4\alpha\gamma > \beta^2,\ 2\sqrt{\alpha\gamma} > \beta;$$

folglich

$$2x^2\sqrt{\alpha\gamma} > \beta x^2,$$

und demnach um ſo mehr

$$\alpha + \gamma x^4 > \beta x^2,$$

wie behauptet wurde. Es iſt alſo

$$\sqrt{-\alpha + \beta x^2 - \gamma x^4}$$

für jedes x imaginär, und man wird folglich auch für $\int \frac{P\partial x}{R}$ (ſ. 6.) keinen reellen Werth finden können, weshalb es alſo verſtattet iſt,

$$\sqrt{-\alpha + \beta x^2 - \gamma x^4} = \sqrt{-1}.\sqrt{\alpha - \beta x^2 + \gamma x^4},$$

folglich

$$\int \frac{P\partial x}{R} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \int \frac{P\partial x}{\sqrt{\alpha - \beta x^2 + \gamma x^4}}$$

zu ſetzen, wodurch man wieder auf den Fall, wenn α und γ beide poſitiv ſind, geführt wird, und daher immer die letztere Vorausſetzung machen kann.

Unter der Vorausſetzung alſo, daß α und γ beide poſitiv ſind, ſey

$$\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 = \lambda^2 + 2\lambda\mu x^2 \cos\Theta + \mu^2 x^4,$$

ſo giebt die Vergleichung der einzelnen Glieder

$$\lambda^2 = \alpha,\ \mu^2 = \gamma,\ 2\lambda\mu\cos\Theta = \beta;$$

folglich

$$\lambda = \sqrt{\alpha},\ \mu = \sqrt{\gamma},\ \cos\Theta = \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}},$$

und es iſt, weil α und γ poſitiv ſind, und $4\alpha\gamma > \beta^2$ iſt, die Beſtimmung von λ, μ, $\cos\Theta$ oder Θ in reellen Größen mittelſt dieſer Ausdrücke ſtets möglich, weshalb ſich alſo, wenn die Factoren von $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4$ imaginär ſind, dieſe Größe immer auf die Form

$$\lambda^2 + 2\lambda\mu x^2 \cos\Theta + \mu^2 x^4,$$

wofür wir von nun an

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\Theta + \beta^2 x^4$$

ſetzen wollen, bringen läßt.

12. Beſchäftigen wir uns nun (vergl. V.) mit dem Integral

$$Z = \int \frac{(f + gx^2)\partial x}{\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 . \cos\Theta + \beta^2 x^4}},$$

unter welcher Form offenbar die beiden Integrale

$$\int \frac{\partial x}{R},\ \int \frac{x^2\,\partial x}{R}$$

in V. enthalten ſind. Man kann in dem Integral **Z** für x alle Werthe von 0 bis ∞ ſetzen. Da

$$\frac{f + gx^2}{\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\Theta + \beta^2 x^4}} = \frac{\frac{f}{\beta x^2} + \frac{g}{\beta}}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2 x^4} + \frac{2\alpha\cos\Theta}{\beta x^2} + 1}}$$

iſt; ſo iſt für $x = \infty$ offenbar

$$z = \int \frac{g}{\beta} \partial x$$

und wir betrachten daher mit Legendre, um uns des Gliedes zu entledigen, welches unendlich werden kann, bloß das Integral

$$X = \int \left\{ \frac{(f + gx^2)\partial x}{\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\Theta + \beta^2 x^4}} - \frac{g}{\beta}\partial x \right\}.$$

Es kommt nun darauf an, dieſes Integral ſo zu transformiren, daß die binomiſchen Factoren der Größe unter dem Wurzelzeichen reell werden, wozu man nach Legendre (Traité des fonctions elliptiques. T. I. p. 55. Exercices de calcul intégral. T. I. p. 54.) mittelſt jeder der folgenden Subſtitutionen gelangt:

$$\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\Theta + \beta^2 x^4} = 2xy\sqrt{\alpha\beta},$$

$$\alpha + \beta x^2 = 2xy\sqrt{\alpha\beta},$$

$$\beta x^2 + \alpha\cos\Theta + \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\Theta + \beta^2 x^4} = 2\alpha y^2,$$

$$x = \frac{1 - y}{1 + y}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Aus der dritten Gleichung folgt z. B.

$$x^2 = \frac{\alpha}{\beta}\left\{y^2 - \cos\Theta - \frac{\sin\Theta^2}{4y^2}\right\},$$

und es iſt alſo

$$\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\Theta + \beta^2 x^4} = 2\alpha y^2 - \beta x^2 - \alpha\cos\Theta$$
$$= \frac{\alpha(4y^4 + \sin\Theta^2)}{4y^2},$$

$$\partial x = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\left(y^2 - \cos\Theta - \frac{\sin\Theta^2}{4y^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(y + \frac{\sin\Theta^2}{4y^3}\right)\partial y$$
$$= \frac{(4y^4 + \sin\Theta^2)\sqrt{\alpha}}{4y^2\sqrt{y^4 - y^2\cos\Theta - \frac{1}{4}\sin\Theta^2}\cdot\sqrt{\beta}}\partial y,$$

$$f + gx^2 - \frac{g}{\beta}\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\Theta + \beta^2 x^4}$$
$$= f + 2gx^2 - \frac{2\alpha g}{\beta}y^2 + \frac{\alpha g}{\beta}\cos\Theta$$
$$= f - \frac{\alpha g}{\beta}\cos\Theta - \frac{\alpha g \sin\Theta^2}{2\beta y^2};$$

folglich

$$x = \int \frac{\frac{\partial y}{\sqrt{\alpha\beta}}\left\{f - \frac{\alpha g}{\beta}\cos\Theta - \frac{\alpha g \sin\Theta^2}{2\beta y^2}\right\}}{\sqrt{y^4 - y^2\cos\Theta - \frac{1}{4}\sin\Theta^2}}.$$

Aber die Größe unter dem Wurzelzeichen

$$= y^4 - y^2(\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2 - \sin\tfrac{1}{2}\Theta^2) - \sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2$$
$$= y^2(y^2 - \cos\tfrac{1}{2}\Theta^2) + \sin\tfrac{1}{2}\Theta^2(y^2 - \cos\tfrac{1}{2}\Theta^2)$$
$$= (y^2 - \cos\tfrac{1}{2}\Theta^2)(y^2 + \sin\tfrac{1}{2}\Theta^2).$$

Folglich

$$x = \int \frac{\frac{\partial y}{\sqrt{\alpha\beta}}\left\{f - \frac{\alpha g}{\beta}\cos\Theta - \frac{\alpha g \sin\Theta^2}{2\beta y^2}\right\}}{\sqrt{(y^2 - \cos\frac{1}{2}\Theta^2)(y^2 + \sin\frac{1}{2}\Theta^2)}},$$

wo alſo die Factoren des Products unter dem Wurzelzeichen, wie verlangt wurde, beide wirklich reell ſind.

Soll das Integral reell ſeyn, ſo iſt $\cos\frac{1}{2}\Theta$ der kleinſte Werth von y, oder y muß immer größer als $\cos\frac{1}{2}\Theta$ ſeyn. Daher kann man

$$y = \frac{\cos\frac{1}{2}\Theta}{\cos\varphi}$$

ſetzen. Dann iſt

$$\partial y = \frac{\cos\frac{1}{2}\Theta\sin\varphi\,\partial\varphi}{\cos\varphi^2},$$

$$(y^2 - \cos\tfrac{1}{2}\Theta^2)(y^2 + \sin\tfrac{1}{2}\Theta^2) = \frac{\cos\frac{1}{2}\Theta^2\sin\varphi^2(1 - \sin\frac{1}{2}\Theta^2\sin\varphi^2)}{\cos\varphi^4},$$

$$f - \frac{g\alpha}{\beta}\cos\Theta - \frac{g\alpha\sin\Theta^2}{2\beta y^2} = \frac{1}{\beta}\left(f\beta - g\alpha\cos\Theta - \frac{g\alpha\sin\Theta^2}{2y^2}\right)$$
$$= \frac{1}{\beta}(f\beta - g\alpha + 2g\alpha\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2 - 2g\alpha\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\cos\varphi^2)$$
$$= \frac{1}{\beta}(f\beta - g\alpha + 2g\alpha\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\sin\varphi^2).$$

Folglich, wenn wir $k = \sin\frac{1}{2}\Theta$ ſetzen, wo wieder $k < 1$ iſt:

$$x = \int \frac{f\beta - g\alpha + 2g\alpha k^2\sin\varphi^2}{\beta\sqrt{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}},$$

oder auch

$$x = \int \frac{f\beta + g\alpha - 2g\alpha(1 - k^2\sin\varphi^2)}{\beta\sqrt{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}},$$
$$= \int \frac{f\beta + g\alpha - 2g\alpha(\Delta(\varphi))^2}{\beta\sqrt{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}$$
$$= \frac{f\beta + g\alpha}{\beta\sqrt{\alpha\beta}}\int\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} - \frac{2g\alpha}{\beta\sqrt{\alpha\beta}}\int\Delta(\varphi)\partial\varphi.$$

Aus dem Obigen folgt

$$\cos\varphi^2 = \frac{\cos\frac{1}{2}\Theta^2}{y^2} = \frac{2\alpha\cos\frac{1}{2}\Theta^2}{\beta x^2 + \alpha\cos\Theta + \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta^2\cos\Theta + \beta^2 x^4}},$$

oder, wenn man im Zähler und Nenner mit

$$-\beta x^2 - \alpha\cos\Theta + \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2\cos\Theta + \beta^2 x^4}$$

multiplicirt,

$$\cos\varphi^2 = \frac{2\alpha\cos\frac{1}{2}\Theta^2(-\beta x^2 - \alpha\cos\Theta + \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2\cos\Theta + \beta^2 x^4})}{\alpha^2\sin\Theta^2},$$

d. i., weil

$$\sin\Theta^2 = 4\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2$$

iſt:

$$\cos\varphi^2 = \frac{-\beta x^2 - \alpha\cos\Theta + \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2\cos\Theta + \beta^2 x^4}}{2\alpha\sin\frac{1}{2}\Theta^2}.$$

Umgekehrt iſt

$$x^2 = \frac{\alpha}{\beta}\left\{y^2 - \cos\Theta - \frac{\sin\Theta^2}{4y^2}\right\}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\left\{\frac{\cos\frac{1}{2}\Theta^2}{\cos\varphi^2} - \cos\Theta - \frac{\sin\Theta^2\cos\varphi^2}{4\cos\frac{1}{2}\Theta^2}\right\}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}.\frac{\cos\frac{1}{2}\Theta^2 - \cos\Theta\cos\varphi^2 - \sin\frac{1}{2}\Theta^2\cos\varphi^4}{\cos\varphi^2}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}.\frac{\cos\frac{1}{2}\Theta^2\sin\varphi^2 + \sin\frac{1}{2}\Theta^2\cos\varphi^2\sin\varphi^2}{\cos\varphi^2}$$

$$= \frac{\alpha\sin\varphi^2}{\beta\cos\varphi^2}(\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2 + \sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\cos\varphi^2)$$

$$= \frac{\alpha\sin\varphi^2}{\beta\cos\varphi^2}(1 - \sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\sin\varphi^2);$$

folglich

$$x\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}.$$

Für $x = 0$ wird

$$\cos\varphi^2 = \frac{\alpha(1 - \cos\Theta)}{2\alpha\sin\frac{1}{2}\Theta^2} = \frac{2\alpha\sin\frac{1}{2}\Theta^2}{2\alpha\sin\frac{1}{2}\Theta^2} = 1,$$

d. i. $\varphi = 0$. Für $x = \infty$ iſt auch

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2} = \infty,$$

und daher offenbar $\cos\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Nimmt man nun das Integral X zwiſchen den Gränzen $x = 0$, $x = x$, ſo muß man $\int\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}$ und $\int\Delta(\varphi)\partial\varphi$ zwiſchen den Gränzen $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi$ nehmen, weshalb alſo nach dem Obigen

$$X = \frac{f\beta + g\alpha}{\beta\sqrt{\alpha\beta}}F(\varphi) - \frac{2g\alpha}{\beta\sqrt{\alpha\beta}}E(\varphi)$$

iſt. Nimmt man aber X zwiſchen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$, ſo iſt

$$X = \frac{f\beta + g\alpha}{\beta\sqrt{\alpha\beta}} F\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2g\alpha}{\beta\sqrt{\alpha\beta}} E\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Man ſieht alſo, daß ſich X immer auf eine elliptiſche Function der erſten und der zweiten Art zurückführen läßt.

Noch bemerken wir, daß in dem Vorhergehenden immer angenommen werden kann, daß $\alpha\beta$ poſitiv, alſo $\sqrt{\alpha\beta}$ reell iſt. Wäre nämlich $\alpha\beta$ negativ, ſo könnte man, für $180^\circ - \Theta = \Theta'$,

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\Theta + \beta^2 x^4 = \alpha^2 - 2\alpha\beta x^2 \cos\Theta' + \beta^2 x^4$$

ſetzen, wo nun die in $\cos\Theta'$ multiplicirte Größe poſitiv iſt, da $\alpha\beta$ nach der Vorausſetzung negativ iſt.

13. Nach (12.) iſt

$$\frac{\partial x}{\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\Theta + \beta^2 x^4}} = \frac{\partial y}{\sqrt{\alpha\beta}\,.\sqrt{y^4 - y^2\cos\Theta - \frac{1}{4}\sin\Theta^2}}$$

und

$$x^2 + a = \frac{\alpha}{\beta}\left\{y^2 - \cos\Theta - \frac{\sin\Theta^2}{4y^2}\right\} + a$$

$$= \frac{\alpha\left\{4y^4 + 4\left(\frac{a\beta}{\alpha} - \cos\Theta\right)y^2 - \sin\Theta^2\right\}}{4\beta y^2};$$

alſo

$$\int\frac{\partial x}{(x^2 + a)\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2\cos\Theta + \beta^2 x^4}}$$

$$= \frac{4\beta}{\alpha\sqrt{\alpha\beta}}\int\frac{y^2\,\partial y}{\left\{4y^4 + 4\left(\frac{a\beta}{\alpha} - \cos\Theta\right)y^2 - \sin\Theta^2\right\}\sqrt{y^4 - y^2\cos\Theta - \frac{1}{4}\sin\Theta^2}},$$

ein Integral von der in V. betrachteten Form, welches ſich alſo wie dort gezeigt worden iſt, wenn wir jetzt

$$R = \sqrt{y^4 - y^2\cos\Theta - \tfrac{1}{4}\sin\Theta^2}$$

ſetzen, auf Integrale von der Form

$$\int\frac{\partial y}{R},\ \int\frac{y^2\,\partial y}{R},\ \int\frac{\partial y}{(y^2 + a')R},$$

und folglich, da ſich nach (12.) R^2 in reelle Factoren zerlegen läßt, nach VI. auf elliptiſche Functionen bringen läßt. Man kann folglich auch

$$\int\frac{\partial x}{(x^2 + a)\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2\cos\Theta + \beta^2 x^4}},$$

d. i.

$$\int\frac{\partial x}{(x^2 + a)R} \text{ für } R = \sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4},$$

wenn die Factoren von R^2 imaginär ſind, immer auf elliptiſche Functionen zurückführen, wie aus den obigen Andeutungen, mit denen wir uns hier begnügen müſſen, völlig deutlich hervorgehen wird. Man hat hier überall (12.), und, um den Zuſammenhang dieſer Betrachtungen mit dem Vorhergehenden gehörig zu überſehen, auch (5.) und (6.) zu vergleichen.

IX. Vergleichung der elliptiſchen Functionen der erſten Art.

14. Wir nehmen bei der nun folgenden Unterſuchung, welche uns zu mehreren ſehr merkwürdigen Eigenſchaften der elliptiſchen Functionen der erſten Art führen wird, unſern Auslauf von der Integration der in vieler Beziehung wichtigen Differentialgleichung

$$\frac{\partial x}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}} + \frac{\partial y}{\sqrt{\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4}} = 0,$$

für welche man aber, wie wir aus dem Vorhergehenden ſchon wiſſen, mit dem größten Gewinn für Einfachheit und Kürze der Behandlung die Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin \varphi^2}} + \frac{\partial \psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin \psi^2}} = 0$$

ſetzen kann, und folgen dabei dem Wege, welchen Lagrange in der Théorie des fonctions analytiques. p. 113. vorgezeichnet hat. Obige Gleichung wird nämlich auf die Form

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = -\frac{\sqrt{1 - k^2 \sin \varphi^2}}{\sqrt{1 - k^2 \sin \psi^2}}$$

gebracht. Betrachtet man nun φ und ψ als Functionen einer neuen veränderlichen Größe t, ſo iſt nach Principien der Differentialrechnung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}{\frac{\partial \psi}{\partial t}},$$

und man kann alſo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sqrt{1 - k^2 \sin \varphi^2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\sqrt{1 - k^2 \sin \psi^2};$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 = 1 - k^2 \sin \varphi^2, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 = 1 - k^2 \sin \psi^2$$

ſetzen. Differentiirt man nach t, ſo ergiebt ſich

$$2\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -2k^2 \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

$$2\frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -2k^2 \sin \psi \cos \psi \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

d. i.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\tfrac{1}{2}k^2 \sin 2\varphi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\tfrac{1}{2}k^2 \sin 2\psi;$$

alſo

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\tfrac{1}{2}k^2(\sin 2\varphi + \sin 2\psi),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\tfrac{1}{2}k^2(\sin 2\varphi - \sin 2\psi),$$

d. i. nach einer ſehr bekannten goniometriſchen Zerlegung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -k^2 \sin(\varphi + \psi)\cos(\varphi - \psi),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -k^2 \cos(\varphi + \psi)\sin(\varphi - \psi);$$

folglich, wenn wir

$$\varphi + \psi = p, \quad \varphi - \psi = q$$

ſetzen:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -k^2 \sin p \cos q, \quad \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -k^2 \cos p \sin q.$$

Multiplicirt man nun dieſe beiden Gleichungen reſpective mit $\frac{\partial q}{\partial t}$, $\frac{\partial p}{\partial t}$ und addirt; ſo erhält man

$$\frac{\partial p}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{\partial q}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

$$= -k^2\left\{\sin p \cos q \frac{\partial q}{\partial t} + \sin q \cos p \frac{\partial p}{\partial t}\right\};$$

alſo, wie augenblicklich erhellet,

$$\partial\left\{\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial t}\right\} = -k^2 \partial(\sin p \sin q),$$

und folglich, wenn man integrirt,

$$\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial t} = -k^2 \sin p \sin q + a,$$

wo a eine willkührliche Conſtante iſt. Setzen wir nun, daß vermöge der geſuchten Gleichung zwiſchen φ und ψ die erſte dieſer beiden Größen $= \mu$ iſt, wenn $\psi = 0$ iſt, wo offenbar μ als eine willkührliche Conſtante zu betrachten iſt, da die in Rede ſtehende Gleichung natürlich ſelbſt eine willkührliche Conſtante implicirt, ſo hat man für den obigen Werth von ψ nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \sqrt{1 - k^2 \sin\mu^2},\ \frac{\partial\psi}{\partial t} = \mp 1,\ p = q = \mu;$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial t} = \sqrt{1 - k^2 \sin\mu^2} \mp 1,$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial t} = \sqrt{1 - k^2 \sin\mu^2} \pm 1$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial t} = \left\{\sqrt{1 - k^2 \sin\mu^2} \mp 1\right\}\left\{\sqrt{1 - k^2 \sin\mu^2} \pm 1\right\} = -k^2 \sin\mu^2,$$

$$\sin p \sin q = \sin\mu^2;$$

folglich, wenn man dieſe Werthe in die obige Gleichung ſetzt, für $\psi = 0$:

$$-k^2 \sin\mu^2 = -k^2 \sin\mu^2 + a;$$

alſo die willkührliche Conſtante $a = 0$, und daher

$$\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial t} = -k^2 \sin p \sin q.$$

Bezeichnet man der Kürze wegen die erſten und zweiten Differentialquotienten von p, q durch p', q'; p'', q''; ſo iſt alſo

$$p'q' = -k^2 \sin p \sin q,\ p'' = -k^2 \sin p \cos q,\ q'' = -k^2 \cos p \sin q;$$

folglich

$$\frac{p''}{p'q'} = \cot q,\ \frac{q''}{p'q'} = \cot p;$$

oder

$$\frac{p''}{p'} = q' \cot q,\ \frac{q''}{q'} = p' \cot p.$$

Nach Principien der Differentialrechnung iſt aber

$$\frac{\partial l p'}{\partial t} = \frac{\partial p'}{p'\partial t} = \frac{p''}{p'},\ \frac{\partial l q'}{\partial t} = \frac{\partial q'}{q'\partial t} = \frac{q''}{q'};$$

$$\frac{\partial l \sin p}{\partial t} = \frac{\partial \sin p}{\sin p\, \partial t} = \frac{\cos p\, \partial p}{\sin p\, \partial t} = p' \cot p,$$

$$\frac{\partial l \sin q}{\partial t} = \frac{\partial \sin q}{\sin q\, \partial t} = \frac{\cos q\, \partial q}{\sin q\, \partial t} = q' \cot q;$$

folglich

$$\frac{\partial l p'}{\partial t} = \frac{\partial l \sin q}{\partial t},\ \frac{\partial l q'}{\partial t} = \frac{\partial l \sin p}{\partial t},$$

und daher, wenn man die willkührlichen Conſtanten $= l\alpha$ und $= l\beta$ ſetzt:

$$l p' = l \sin q + l\alpha,\ l q' = l \sin p + l\beta,$$

oder

$$p' = \alpha \sin q,\ q' = \beta \sin p.$$

Setzt man nun für p, q, p′, q′ ihre Werthe aus dem Obigen, ſo erhält man die Gleichungen

$$\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}-\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}=\alpha\sin(\varphi-\psi),$$
$$\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}+\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}=\beta\sin(\varphi+\psi),$$

deren jede ein Integral der gegebenen Differentialgleichung iſt. Nehmen wir im Folgenden die Quadratwurzeln ſtets poſitiv, ſo iſt, weil $\varphi=\mu$ für $\psi=0$:

$$\alpha=\frac{\sqrt{1-k^2\sin\mu^2}-1}{\sin\mu},\quad \beta=\frac{\sqrt{1-k^2\sin\mu^2}+1}{\sin\mu}.$$

Sehr merkwürdig iſt es, daß man das Integral unſerer Differentialgleichung noch auf eine dritte Art ausdrücken kann, welche die Eigenthümlichkeit darbietet, daß φ und ψ nicht, wie in den beiden obigen Formen des Integrals, unter dem Wurzelzeichen vorkommen. Nach dem Obigen iſt nämlich

$$\frac{p'}{q'}=\frac{\alpha\sin q}{\beta\sin p},$$
$$\beta p'\sin p=\alpha q'\sin q.$$

Aber

$$\frac{\partial\cos p}{\partial t}=-\sin p\frac{\partial p}{\partial t}=-p'\sin p,$$
$$\frac{\partial\cos q}{\partial t}=-\sin q\frac{\partial q}{\partial t}=-q'\sin q.$$

Alſo

$$\beta\frac{\partial\cos p}{\partial t}=\alpha\frac{\partial\cos q}{\partial t},$$

und folglich, wenn man integrirt,

$$\beta\cos p=\alpha\cos q+\varepsilon,$$

wo ε eine neue willkührliche Conſtante bezeichnet. Für $\psi=0$ iſt aber $\varphi=\mu$ und alſo, wie wir auch ſchon vorher geſehen haben, $p=q=\mu$. Folglich

$$\beta\cos\mu=\alpha\cos\mu+\varepsilon,$$
$$\varepsilon=(\beta-\alpha)\cos\mu.$$

Aber nach dem Obigen

$$\beta-\alpha=\frac{2}{\sin\mu}.$$

Folglich

$$\varepsilon=\frac{2\cos\mu}{\sin\mu},$$

und daher, wenn man für α, β, p, q aus dem Obigen ihre Werthe ſetzt,

$$2\cos\mu=$$
$$\{\sqrt{1-k^2\sin\mu^2}+1\}\cos(\varphi+\psi)-\{\sqrt{1-k^2\sin\mu^2}-1\}\cos(\varphi-\psi)$$
$$=\cos(\varphi+\psi)+\cos(\varphi-\psi)+\{\cos(\varphi+\psi)-\cos(\varphi-\psi)\}\sqrt{1-k^2\sin\mu^2}$$
$$=2\cos\varphi\cos\psi-2\sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin\mu^2},$$

oder

$$\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin\mu^2} = \cos\mu\,,$$

wo μ die willkührliche Conſtante bezeichnet, das Integral unſerer Differentialgleichung.

15. Hiervon läßt ſich nun die folgende wichtige Anwendung auf die elliptiſchen Functionen machen. Weil

$$\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} + \frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}} = 0$$

iſt, ſo iſt, wie man auch die Integrale beſtimmen mag,

$$\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} + \int\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}} = \text{Const}\,.$$

Beſtimmen wir nun das zweite Integral auf der linken Seite ſo, daß es für $\psi = 0$ verſchwindet, und ſetzen

$$\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} = f(\varphi)\,;$$

ſo iſt auch

$$f(\varphi) + \int_0^\psi\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}} = \text{Const}\,.$$

Für $\psi = 0$ wird nach (14.) $\varphi = \mu$, und

$$\int_0^\psi\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}}$$

verſchwindet für dieſen Werth von ψ. Alſo iſt

$$\text{Const.} = f(\mu)\,,$$

und folglich

$$f(\varphi) + \int_0^\psi\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}} = f(\mu)\,,$$

wo $f(\mu)$ aus $f(\varphi)$ erhalten wird, wenn man in letzterer Function μ für φ ſetzt. Setzen wir nun, wenn c eine beliebige Conſtante bezeichnet, überhaupt

$$f(\varphi) = c + \int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}\,,$$

ſo iſt auch

$$f(\mu) = c + \int_0^\mu\frac{\partial\mu}{\sqrt{1-k^2\sin\mu^2}}\,;$$

folglich

$$c + \int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} + \int_0^\psi\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}} = c + \int_0^\mu\frac{\partial\mu}{\sqrt{1-k^2\sin\mu^2}}\,,$$

d. i.

$$\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}+\int_0^{\psi}\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}}=\int_0^{\mu}\frac{\partial\mu}{\sqrt{1-k^2\sin\mu^2}},$$

oder, was daſſelbe iſt,

$$\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}+\int_0^{\psi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}=\int_0^{\mu}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}},$$

d. i. in der im Obigen eingeführten Bezeichnung der elliptiſchen Functionen der erſten Art:

$$F(\varphi)+F(\psi)=F(\mu),$$

wo nun zwiſchen φ, ψ, μ die in (14.) bewieſene Gleichung Statt findet. Dies führt alſo auf folgenden überaus merkwürdigen Satz:

Wenn zwiſchen φ_1, φ_2, φ_3 die Gleichung

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sqrt{1-k^2\sin\varphi_3^2}=\cos\varphi_3$$

Statt findet; ſo iſt immer

$$F(\varphi_1)+F(\varphi_2)=F(\varphi_3).$$

Da ferner nach der Theorie der beſtimmten Integrale offenbar

$$F(-\varphi_2)=\int_0^{-\varphi_2}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}=-\int_{-\varphi_2}^{0}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}$$

$$=-\int_0^{\varphi_2}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}=-F(\varphi_2)$$

iſt (Beſtimmtes Integral. 2. 5.); ſo ergiebt ſich aus dem Obigen, wenn man $-\varphi_2$ für φ_2 ſetzt, folgender Satz:

Wenn zwiſchen φ_1, φ_2, φ_3 die Gleichung

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sqrt{1-k^2\sin\varphi_3^2}=\cos\varphi_3$$

Statt findet; ſo iſt immer

$$F(\varphi_1)-F(\varphi_2)=F(\varphi_3).$$

16. Macht man die Gleichung

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_3=\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sqrt{1-k^2\sin\varphi_3^2}$$

rational, ſo erhält man, wenn man, nachdem auf beiden Seiten quadrirt worden, das Glied

$$\sin\varphi_1^2\sin\varphi_2^2=1-\cos\varphi_1^2-\cos\varphi_2^2+\cos\varphi_1^2\cos\varphi_2^2$$

ſetzt, leicht die Gleichung

$$1=\cos\varphi_1^2+\cos\varphi_2^2+\cos\varphi_3^2-2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3+k^2\sin\varphi_1^2\sin\varphi_2^2\sin\varphi_3^2.$$

Aus dieſer Gleichung ergiebt ſich aber ferner leicht

$$1 - \cos\varphi_1{}^2 - \cos\varphi_3{}^2 + \cos\varphi_1{}^2 \cos\varphi_3{}^2$$
$$= \cos\varphi_2{}^2 - 2\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 + \cos\varphi_1{}^2 \cos\varphi_3{}^2$$
$$+ k^2 \sin\varphi_1{}^2 \sin\varphi_2{}^2 \sin\varphi_3{}^2 ,$$

d. i.

$$\sin\varphi_1{}^2 \sin\varphi_3{}^2 = (\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \cos\varphi_3)^2 + k^2 \sin\varphi_1{}^2 \sin\varphi_2{}^2 \sin\varphi_3{}^2 ,$$

oder

$$\sin\varphi_1{}^2 \sin\varphi_3{}^2 (1 - k^2 \sin\varphi_2{}^2) = (\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \cos\varphi_3)^2 ,$$
$$\sin\varphi_1 \sin\varphi_3 \sqrt{1 - k^2 \sin\varphi_2{}^2} = \pm \cos\varphi_2 \mp \cos\varphi_1 \cos\varphi_3 ,$$
$$\pm \cos\varphi_1 \cos\varphi_3 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_3 \sqrt{1 - k^2 \sin\varphi_2{}^2} = \pm \cos\varphi_2 ,$$

wo nun noch die Frage iſt, welche Vorzeichen zu nehmen ſind. Für $k = 0$ iſt aber offenbar

$$F(\varphi_1) = \varphi_1,\ F(\varphi_2) = \varphi_2,\ F(\varphi_3) = \varphi_3 ;$$

alſo

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3 .$$

Setzt man nun in der gefundenen Gleichung $k = 0$, ſo wird, da die Quadratwurzel nach der ſchon in (14.) gemachten Bemerkung ſtets poſitiv genommen werden ſoll,

$$\pm \cos\varphi_1 \cos\varphi_3 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_3 = \pm \cos\varphi_2 ,$$
$$\pm (\cos\varphi_1 \cos\varphi_3 \pm \sin\varphi_1 \sin\varphi_3) = \pm \cos\varphi_2 ,$$
$$\pm \cos(\varphi_1 \mp \varphi_3) = \pm \cos\varphi_2 ,$$

oder

$$\cos(\varphi_1 \mp \varphi_3) = \cos(-\varphi_2) .$$

Nach dem Obigen iſt aber

$$\varphi_1 - \varphi_3 = -\varphi_2,\ \cos(\varphi_1 - \varphi_3) = \cos(-\varphi_2) ,$$

und man muß folglich die obern Zeichen nehmen, d. i.

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_3 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_3 \sqrt{1 - k^2 \sin\varphi_2{}^2} = \cos\varphi_2$$

ſetzen. Ganz auf dieſelbe Art, oder durch bloße Verwechslung von φ_1 und φ_2 erhält man

$$\cos\varphi_2 \cos\varphi_3 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \sqrt{1 - k^2 \sin\varphi_1{}^2} = \cos\varphi_1 ,$$

ſo daß alſo der Gleichung

$$F(\varphi_1) + F(\varphi_2) = F(\varphi_3)$$

jederzeit die drei folgenden Gleichungen entſprechen:

$$\cos\varphi_2 \cos\varphi_3 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \Delta(\varphi_1) = \cos\varphi_1 ,$$
$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_3 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_3 \Delta(\varphi_2) = \cos\varphi_2 ,$$
$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \Delta(\varphi_3) = \cos\varphi_3 .$$

Eliminirt man aus den beiden erſten Gleichungen $\cos\varphi_3$, ſo erhält man

$$\sin\varphi_3 = \frac{\cos\varphi_1{}^2 - \cos\varphi_2{}^2}{\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \Delta(\varphi_1) - \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \Delta(\varphi_2)} .$$

Multiplicirt man aber Zähler und Nenner dieſes Bruchs mit

$$\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \varDelta(\varphi_1) + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \varDelta(\varphi_2),$$

ſo wird der Nenner

$$= \cos\varphi_1^2 \sin\varphi_2^2 (1-k^2 \sin\varphi_1^2) - \sin\varphi_1^2 \cos\varphi_2^2 (1-k^2 \sin\varphi_2^2)$$
$$= \cos\varphi_1^2 \sin\varphi_2^2 - \sin\varphi_1^2 \cos\varphi_2^2$$
$$- (\cos\varphi_1^2 - \cos\varphi_2^2) k^2 \sin\varphi_1^2 \sin\varphi_2^2$$
$$= (\cos\varphi_1^2 - \cos\varphi_2^2)(1-k^2 \sin\varphi_1^2 \sin\varphi_2^2);$$

folglich

$$\sin\varphi_3 = \frac{\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \varDelta(\varphi_1) + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \varDelta(\varphi_2)}{1-k^2 \sin\varphi_1^2 \sin\varphi_2^2}.$$

Setzt man dieſen Ausdruck von $\sin\varphi_3$ in die erſte oder zweite Gleichung, ſo erhält man nach leichter Rechnung

$$\cos\varphi_3 = \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \varDelta(\varphi_1) \varDelta(\varphi_2)}{1-k^2 \sin\varphi_1^2 \sin\varphi_2^2};$$

alſo auch

$$\tang\varphi_3 = \frac{\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \varDelta(\varphi_1) + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \varDelta(\varphi_2)}{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \varDelta(\varphi_1) \varDelta(\varphi_2)},$$

oder

$$\tang\varphi_3 = \frac{\tang\varphi_2 \varDelta(\varphi_1) + \tang\varphi_1 \varDelta(\varphi_2)}{1-\tang\varphi_1 \tang\varphi_2 \varDelta(\varphi_1) \varDelta(\varphi_2)}.$$

Alle dieſe Formeln dienen, φ_3 ſo zu beſtimmen, daß der Gleichung

$$F(\varphi_1) + F(\varphi_2) = F(\varphi_3)$$

genügt wird, vorausgeſetzt, daß φ_1 und φ_2 gegeben ſind.

Aus der dritten Gleichung folgt

$$\varDelta(\varphi_3) = \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_3}{\sin\varphi_1 \sin\varphi_2},$$

und hieraus, wenn man den vorher gefundenen Ausdruck von $\cos\varphi_3$ einführt:

$$\varDelta(\varphi_3) = \frac{\varDelta(\varphi_1) \varDelta(\varphi_2) - k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{1-k^2 \sin\varphi_1^2 \sin\varphi_2^2}.$$

Schafft man hier den Nenner weg, ſo kommt:

$$\varDelta(\varphi_1) \varDelta(\varphi_2) - \varDelta(\varphi_3)$$
$$= k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \varDelta(\varphi_3)),$$

d. i. nach der dritten Gleichung:

$$\varDelta(\varphi_1) \varDelta(\varphi_2) = \varDelta(\varphi_3) + k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3.$$

Multiplicirt man dieſe Gleichung mit $\varDelta(\varphi_3)$, die aus der dritten Hauptgleichung ſich ergebende Gleichung

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 = \cos\varphi_3 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \varDelta(\varphi_3)$$

dagegen mit $-k^2 \cos\varphi_3$; ſo erhält man:

$$\varDelta(\varphi_1) \varDelta(\varphi_2) \varDelta(\varphi_3) = (\varDelta(\varphi_3))^2 + k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \varDelta(\varphi_3),$$
$$-k^2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 = -k^2 \cos\varphi_3^2 - k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \varDelta(\varphi_3);$$

folglich, wenn man addirt:

$$\Delta(\varphi_1)\,\Delta(\varphi_2)\,\Delta(\varphi_3) - k^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3$$
$$= (\Delta(\varphi_3))^2 - k^2\cos\varphi_3{}^2 = 1 - k^2(\sin\varphi_3{}^2 + \cos\varphi_3{}^2) = 1 - k^2,$$

d. i., wenn wir hier und im Folgenden immer

$$1 - k^2 = k'^2,\ k^2 + k'^2 = 1$$

ſetzen:

$$\Delta(\varphi_1)\,\Delta(\varphi_2)\,\Delta(\varphi_3) - k^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3 = k'^2,$$

eine ſehr merkwürdige Relation.

Nimmt man φ_2 negativ, ſo erhält man aus dem Vorhergehenden unmittelbar die folgenden, der Gleichung

$$F(\varphi_1) - F(\varphi_2) = F(\varphi_3)$$

entſprechenden Formeln:

$$\sin\varphi_3 = \frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_2\,\Delta(\varphi_2) - \cos\varphi_1\sin\varphi_2\,\Delta(\varphi_1)}{1 - k^2\sin\varphi_1{}^2\sin\varphi_2{}^2},$$

$$\cos\varphi_3 = \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2\,\Delta(\varphi_1)\,\Delta(\varphi_2)}{1 - k^2\sin\varphi_1{}^2\sin\varphi_2{}^2},$$

$$\tang\varphi_3 = \frac{\tang\varphi_1\,\Delta(\varphi_2) - \tang\varphi_2\,\Delta(\varphi_1)}{1 + \tang\varphi_1\tang\varphi_2\,\Delta(\varphi_1)\,\Delta(\varphi_2)},$$

$$\Delta(\varphi_3) = \frac{\Delta(\varphi_1)\,\Delta(\varphi_2) + k^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{1 - k^2\sin\varphi_1{}^2\sin\varphi_2{}^2},$$

$$\Delta(\varphi_1)\,\Delta(\varphi_2) = \Delta(\varphi_3) - k^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,$$
$$\Delta(\varphi_1)\,\Delta(\varphi_2)\,\Delta(\varphi_3) - k^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3 = k'^2.$$

Die letzte Gleichung bleibt für

$$F(\varphi_1) \pm F(\varphi_2) = F(\varphi_3)$$

ungeändert. Dieſer letzten Gleichung mit doppelten Zeichen entſprechen alſo die folgenden Formeln, wo immer die obern und untern Zeichen ſich auf einander beziehen:

$$\sin\varphi_3 = \frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_2\,\Delta(\varphi_2) \pm \cos\varphi_1\sin\varphi_2\,\Delta(\varphi_1)}{1 - k^2\sin\varphi_1{}^2\sin\varphi_2{}^2},$$

$$\cos\varphi_3 = \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 \mp \sin\varphi_1\sin\varphi_2\,\Delta(\varphi_1)\,\Delta(\varphi_2)}{1 - k^2\sin\varphi_1{}^2\sin\varphi_2{}^2},$$

$$\tang\varphi_3 = \frac{\tang\varphi_1\,\Delta(\varphi_2) \pm \tang\varphi_2\,.\,\Delta(\varphi_1)}{1 \mp \tang\varphi_1\tang\varphi_2\,\Delta(\varphi_1)\,\Delta(\varphi_2)},$$

$$\Delta(\varphi_3) = \frac{\Delta(\varphi_1)\,\Delta(\varphi_2) \mp k^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{1 - k^2\sin\varphi_1{}^2\sin\varphi_2{}^2},$$

$$\Delta(\varphi_1)\,\Delta(\varphi_2) = \Delta(\varphi_3) \pm k^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3.$$

Berechnet man zwei Hülfswinkel aus den Formeln

$$\tang\varphi'_1 = \tang\varphi_1\,\Delta(\varphi_2),\ \tang\varphi'_2 = \tang\varphi_2\,\Delta(\varphi_3);$$

ſo wird

$$\tang\varphi_3 = \frac{\tang\varphi'_1 \pm \tang\varphi'_2}{1 \mp \tang\varphi'_1\tang\varphi'_2} = \tang(\varphi'_3 \pm \varphi'_2),$$

folglich $\varphi_3 = \varphi'_1 \pm \varphi'_2$, wodurch alſo φ_3 ſich leicht berechnen läßt.

Setzt man $k = 0$, ſo geht die Gleichung

$$F(\varphi_1) \pm F(\varphi_2) = F(\varphi_3)$$

in die Gleichung

$$\varphi_1 \pm \varphi_2 = \varphi_3$$

und die obigen Formeln in die bekannten goniometriſchen Ausdrücke für

$$\sin\varphi_3 = \sin(\varphi_1 \pm \varphi_2),\ \cos\varphi_3 = \cos(\varphi_1 \pm \varphi_2),\ \tang\varphi_3 = \tang(\varphi_1 \pm \varphi_2)$$

über.

Eine große Anzahl hierher gehörender merkwürdiger Relationen ſ. m. in C. G. J. Jacobi Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. Regiomonti. 1829. p. 32—34.

17. Setzen wir jetzt

$$F(\varphi_1) + F(\varphi_2) + F(\varphi_3) = F(\varphi_4);$$

ſo iſt

$$F(\varphi_1) + F(\varphi_2) = F(\varphi_4) - F(\varphi_3)$$

und folglich, für

$$F(\varphi_1) + F(\varphi_2) = F(\psi),$$

auch

$$F(\varphi_4) - F(\varphi_3) = F(\psi).$$

Nach (16.) haben wir nun

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2) &= \Delta(\psi) + k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\psi, \\ \Delta(\varphi_3)\Delta(\varphi_4) &= \Delta(\psi) - k^2 \sin\varphi_3 \sin\varphi_4 \cos\psi, \\ \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 &= \cos\psi + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \Delta(\psi), \\ \cos\varphi_3 \cos\varphi_4 &= \cos\psi - \sin\varphi_3 \sin\varphi_4 \Delta(\psi); \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} &\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)\Delta(\varphi_3)\Delta(\varphi_4) \\ &= (\Delta(\psi))^2 + k^2(\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 - \sin\varphi_3 \sin\varphi_4)\cos\psi\,\Delta(\psi) \\ &\quad - k^4 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \sin\varphi_4 \cos\psi^2 \\ &\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 \cos\varphi_4 \\ &= \cos\psi^2 + (\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 - \sin\varphi_3 \sin\varphi_4)\cos\psi\,\Delta(\psi) \\ &\quad - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \sin\varphi_4 (\Delta(\psi))^2; \end{aligned}$$

folglich, wenn man die zweite Gleichung mit k^2 multiplicirt und ſie dann von der erſten ſubtrahirt, weil

$$(\Delta(\psi))^2 - k^2 \cos\psi^2 = 1 - k^2 = k'^2$$

iſt:

$$\begin{aligned} &\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)\Delta(\varphi_3)\Delta(\varphi_4) - k^2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 \cos\varphi_4 \\ &\quad = k'^2 + k^2 k'^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \sin\varphi_4, \end{aligned}$$

eine ſehr merkwürdige der Gleichung

$$F(\varphi_1) + F(\varphi_2) + F(\varphi_3) = F(\varphi_4)$$

entſprechende Bedingungsgleichung.

18. Soll $F(\varphi_1) + F(\varphi_2) = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ſeyn, ſo folgt aus den in (16.) bewieſenen Gleichungen für $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$, da $\Delta(\varphi_3) = \sqrt{1-k^2} = k'$ iſt, leicht:

$$\sin\varphi_2\,\Delta(\varphi_1) = \cos\varphi_1\,,$$
$$\sin\varphi_1\,\Delta(\varphi_2) = \cos\varphi_2\,,$$
$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - k'\sin\varphi_1\sin\varphi_2 = 0\,,$$
$$\Delta(\varphi_1)\,\Delta(\varphi_2) = k'\,;$$

oder

$$\sin\varphi_2 = \frac{\cos\varphi_1}{\Delta(\varphi_1)},\quad \cos\varphi_2 = \frac{k'\sin\varphi_1}{\Delta(\varphi_1)},\quad \Delta(\varphi_2) = \frac{k'}{\Delta(\varphi_1)};$$
$$k'\operatorname{tang}\varphi_1\operatorname{tang}\varphi_2 = 1\,.$$

Dieſe Gleichungen müſſen alſo zwiſchen φ_1, φ_2 Statt finden, wenn der Gleichung

$$F(\varphi_1) + F(\varphi_2) = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

genügt werden ſoll. Zwei dieſer Gleichung genügende elliptiſche Functionen $F(\varphi_1)$ und $F(\varphi_2)$ kann man Complemente von einander nennen.

19. Wir wollen jetzt φ_n ſo zu beſtimmen ſuchen, daß, wenn φ_1 als gegeben betrachtet wird und n eine poſitive ganze Zahl bezeichnet, der Gleichung

$$F(\varphi_n) = n\,F(\varphi_1)$$

genügt wird.

Drei beliebige auf einander folgende Werthe von φ_n ſeyen φ_{n-1}, φ_n, φ_{n+1}, ſo iſt

$$F(\varphi_{n-1}) = (n-1)\,F(\varphi_1),\quad F(\varphi_n) = n\,F(\varphi_1),\quad F(\varphi_{n+1}) = (n+1)\,F(\varphi_1);$$

alſo

$$F(\varphi_{n+1}) = F(\varphi_n) + F(\varphi_1)$$
$$F(\varphi_{n-1}) = F(\varphi_n) - F(\varphi_1)\,;$$

folglich nach (16.)

$$\sin\varphi_{n\pm1} = \frac{\cos\varphi_1\sin\varphi_n\,\Delta(\varphi_1) \pm \sin\varphi_1\cos\varphi_n\,\Delta(\varphi_n)}{1 - k^2\sin\varphi_1^{\,2}\sin\varphi_n^{\,2}}\,,$$

$$\cos\varphi_{n\pm1} = \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_n \mp \sin\varphi_1\sin\varphi_n\,\Delta(\varphi_1)\,\Delta(\varphi_n)}{1 - k^2\sin\varphi_1^{\,2}\sin\varphi_n^{\,2}}\,;$$

alſo

$$\sin\varphi_{n+1} + \sin\varphi_{n-1} = \frac{2\cos\varphi_1\sin\varphi_n\,\Delta(\varphi_1)}{1 - k^2\sin\varphi_1^{\,2}\sin\varphi_n^{\,2}}\,,$$

$$\cos\varphi_{n+1} + \cos\varphi_{n-1} = \frac{2\cos\varphi_1\cos\varphi_n}{1 - k^2\sin\varphi_1^{\,2}\sin\varphi_n^{\,2}}\,;$$

$$\frac{\sin\varphi_{n+1} + \sin\varphi_{n-1}}{\cos\varphi_{n+1} + \cos\varphi_{n-1}} = \operatorname{tang}\varphi_n\,\Delta(\varphi_1)\,.$$

Aber allgemein

$$\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \frac{\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)}{\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)} = \tang\tfrac{1}{2}(x+y)\ ;$$

alſo

$$\tang(\tfrac{1}{2}\varphi_{n+1} + \tfrac{1}{2}\varphi_{n-1}) = \tang\varphi_n\Delta(\varphi_1)\ .$$

Für $n = 2$ iſt

$$F(\varphi_2) = 2F(\varphi_1) = F(\varphi_1) + F(\varphi_1)\ ;$$

folglich nach (16.)

$$\sin\varphi_2 = \frac{2\sin\varphi_1\cos\varphi_1\Delta(\varphi_1)}{1-k^2\sin\varphi_1{}^4},$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{1-2\sin\varphi_1{}^2 + k^2\sin\varphi_1{}^4}{1-k^2\sin\varphi_1{}^4}.$$

Aber

$$\sin\varphi_2 = 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi_2\cos\tfrac{1}{2}\varphi_2,\ 1+\cos\varphi_2 = 2\cos\tfrac{1}{2}\varphi_2{}^2\ ;$$

alſo

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi_2\cos\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1\Delta(\varphi_1)}{1-k^2\sin\varphi_1{}^4},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi_2\cos\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \frac{\cos\varphi_1{}^2}{1-k^2\sin\varphi_1{}^4}\ ;$$

folglich, wenn man dividirt:

$$\tang\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \tang\varphi_1\Delta(\varphi_1)\ .$$

Aus dieſer Formel und der obigen allgemeinen Relation erhält man

$$\tang\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \tang\varphi_1\Delta(\varphi_1)\ ,$$
$$\tang(\tfrac{1}{2}\varphi_3 + \tfrac{1}{2}\varphi_1) = \tang\varphi_2\Delta(\varphi_1)\ ,$$
$$\tang(\tfrac{1}{2}\varphi_4 + \tfrac{1}{2}\varphi_2 = \tang\varphi_3\Delta(\varphi_1)\ ,$$
$$\tang(\tfrac{1}{2}\varphi_5 + \tfrac{1}{2}\varphi_3) = \tang\varphi_4\Delta(\varphi_1)\ ,$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

durch welche Formeln $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \ldots$ aus φ_1 leicht ſucceſſive berechnet werden können.

Setzt man

$$2\cos\varphi_1\Delta(\varphi_1) = p,\ 1-k^2\sin\varphi_1{}^4 = q,\ k^2\sin\varphi_1{}^4 = 1-q = r\ ;$$

ſo erhält man aus den oben für $\sin\varphi_2$, $\cos\varphi_2$ und

$$\sin\varphi_{n+1} + \sin\varphi_{n-1},\ \cos\varphi_{n+1} + \cos\varphi_{n-1}$$

gefundenen Ausdrücken leicht nach und nach:

$$\sin\varphi_2 = \frac{p}{q}\sin\varphi_1\,,$$

$$\sin\varphi_3 = \frac{p^2-q^2}{q^2-rp^2}\sin\varphi_1\,,$$

$$\sin\varphi_4 = \frac{(1+r)p^2-2q^2}{q^4-rp^4}\,pq\sin\varphi_1\,,$$

$$\sin\varphi_5 = \frac{q^6-3p^2q^4+(1+2r)p^4q^2-r^2p^6}{q^6-3rp^2q^4+r(r+2)p^4q^2-rp^6}\sin\varphi_1\,,$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

$$\cos\varphi_2 = \frac{1-2\sin\varphi_1^2+r}{q} = \frac{s}{q}\,,$$

$$\cos\varphi_3 = \frac{2sq-q^2+p^2r}{q^2-rp^2}\cos\varphi_1\,,$$

$$\cos\varphi_4 = \frac{q^4-2q^2p^2\sin\varphi_1^2+rp^4}{q^4-rp^4}\,,$$

$$\cos\varphi_5 = \left\{\frac{2sq(q^2-rp^2)(2sq-q^2+rp^2)}{q^6-3rp^2q^2+(r^2+2r)p^4q^2-rp^6}-1\right\}\cos\varphi_1$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

Dieſe Ausdrücke, welche bald ſehr complicirt ausfallen, enthalten zugleich die Auflöſung des Problems der Diviſion der elliptiſchen Functionen. Der Gleichung

$$F(\varphi_3) = 3F(\varphi_1),\quad F(\varphi_1) = \tfrac{1}{3}F(\varphi_3)$$

entſpricht z. B. die Gleichung

$$\sin\varphi_3 = \frac{p^2-q^2}{q^2-rp^2}\sin\varphi_1\,,$$

in welcher man jetzt aber $\sin\varphi_3$ als die bekannte, $\sin\varphi_1$ als die unbekannte Größe betrachtet, und daher $\sin\varphi_3 = a$, $\sin\varphi_1 = x$ ſetzen kann. Führt man für p, q ihre Werthe aus dem Obigen wieder ein, ſo ergiebt ſich

$$a = \frac{4(1-x^2)(1-k^2x^2)-(1-k^2x^4)^2}{(1-k^2x^4)^2-4k^2x^4(1-x^2)(1-k^2x^2)}x$$

$$= \frac{3x-4(1+k^2)x^3+6k^2x^5-k^4x^9}{1-6k^2x^4+4k^2(1+k^2)x^6-3k^4x^8}\,,$$

eine Gleichung des neunten Grades, aus welcher x beſtimmt werden muß. Wie man ſich in allen ähnlichen Fällen zu verhalten hat, unterliegt keinem Zweifel. Eine beſondere Betrachtung verdient jedoch noch der Fall der Halbirung, welchem die Gleichungen

$$F(\varphi_2) = 2F(\varphi_1),\quad F(\varphi_1) = \tfrac{1}{2}F(\varphi_2)$$

entſprechen. Setzt man nämlich in der allgemeinen Gleichung

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\,\Delta(\varphi_3) = \cos\varphi_3$$

$\varphi_2 = \varphi_1$, und ſchreibt jetzt φ_2 für φ_3; ſo wird

$$\cos\varphi_2 = \cos\varphi_1{}^2 - \sin\varphi_1{}^2\,\Delta(\varphi_2) = 1 - \sin\varphi_1{}^2\{1 + \Delta(\varphi_2)\},$$

$$\sin\varphi_1{}^2 = \frac{1-\cos\varphi_2}{1+\Delta(\varphi_2)} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\varphi_2{}^2}{1+\Delta(\varphi_2)};$$

alſo

$$\sin\varphi_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi_2}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Delta(\varphi_2)}},$$

oder, wenn man φ_1 ſtatt φ_2, $\varphi_{\frac{1}{2}}$ ſtatt φ_1 ſetzt:

$$\sin\varphi_{\frac{1}{2}} = \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi_1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Delta(\varphi_1)}}.$$

Macht man $k\sin\varphi_1 = \sin\Theta$, ſo iſt

$$\Delta(\varphi_1) = \sqrt{1-\sin\Theta^2} = \cos\Theta,\quad \frac{1+\Delta(\varphi_1)}{2} = \cos\tfrac{1}{2}\Theta^2;$$

folglich

$$\sin\varphi_{\frac{1}{2}} = \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi_1}{\cos\frac{1}{2}\Theta}.$$

Wie man mittelſt dieſer Formeln ſucceſſive $\varphi_{\frac{1}{2}}$, $\varphi_{\frac{1}{4}}$, $\varphi_{\frac{1}{8}}$, $\varphi_{\frac{1}{16}}$, ..., welche den Gleichungen

$$F(\varphi_{\frac{1}{2}}) = \tfrac{1}{2}F(\varphi_1)$$
$$F(\varphi_{\frac{1}{4}}) = \tfrac{1}{4}F(\varphi_1) = \tfrac{1}{2}F(\varphi_{\frac{1}{2}})$$
$$F(\varphi_{\frac{1}{8}}) = \tfrac{1}{8}F(\varphi_1) = \tfrac{1}{2}F(\varphi_{\frac{1}{4}})$$
$$F(\varphi_{\frac{1}{16}}) = \tfrac{1}{16}F(\varphi_1) = \tfrac{1}{2}F(\varphi_{\frac{1}{8}})$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

entſprechen, berechnen kann, erhellet nun von ſelbſt.

Soll man φ_n ſo beſtimmen, daß

$$F(\varphi_n) = -nF(\varphi_1)$$

iſt, ſo beſtimme man φ_n zuerſt ſo, daß

$$F(\varphi_n) = nF(\varphi_1)$$

iſt, welches nach dem Obigen immer möglich iſt. Da nun offenbar (ſ. auch 10.)

$$F(-\varphi_n) = -F(\varphi_n)$$

iſt; ſo iſt

$$F(-\varphi_n) = -nF(\varphi_1).$$

Soll man überhaupt, wenn m und n ganze Zahlen ſind, ψ ſo beſtimmen, daß

$$F(\psi) = \frac{m}{n}F(\varphi)$$

iſt, ſo beſtimme man, da

$$nF(\psi) = mF(\varphi)$$

iſt, ω nach dem Obigen ſo, daß

$$nF(\psi) = F(\omega), \quad mF(\varphi) = F(\omega)$$

iſt. Die erſte Beſtimmung giebt eine algebraiſche Gleichung zwiſchen $\sin\psi$, $\sin\omega$, die zweite eine algebraiſche Gleichung zwiſchen $\sin\varphi$, $\sin\omega$, wie aus dem Obigen erhellet. Folglich giebt die Elimination von $\sin\omega$ aus dieſen beiden Gleichungen eine algebraiſche Gleichung zwiſchen $\sin\varphi$ und $\sin\psi$, mittelſt welcher alſo ſich $\sin\psi$ aus $\sin\varphi$ oder, wie verlangt wurde, ψ aus φ finden läßt.

20. Aus allem Vorhergehenden ergiebt ſich nun die folgende überaus wichtige Bemerkung, wobei wir der Kürze wegen eine Gleichung, die bloß durch algebraiſche Operationen von den Sinuſſen und Coſinuſſen, oder überhaupt von den trigonometriſchen Linien der Winkel φ, ψ, ω ... abhängt, eine algebraiſche Gleichung zwiſchen φ, ψ, ω, ... nennen wollen. Hat man die Differentialgleichung

$$\frac{m\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} + \frac{n\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}} + \frac{p\partial\omega}{\sqrt{1+k^2\sin\omega^2}} + \ldots = 0$$

mit einer endlichen Anzahl von Theilen auf der linken Seite des Gleichheitszeichens; ſo iſt deren Integral

$$mF(\varphi) + nF(\psi) + pF(\omega) + \ldots = \text{Const};$$

oder, wenn man, wie es nach dem Obigen verſtattet iſt,

$$mF(\varphi) = F(\varphi'),\ nF(\psi) = F(\psi'),\ pF(\omega) = F(\omega'),\ \ldots$$

ſetzt und bemerkt, daß φ', ψ', ω', ... nach dem Obigen reſpective aus φ, ψ, ω, ... durch algebraiſche Gleichungen gefunden werden,

$$F(\varphi') + F(\psi') + F(\omega') + \ldots = \text{Const};$$

oder, für

$$\text{Const} = F(\mu):$$

$$F(\varphi') + F(\psi') + F(\omega') + \ldots = F(\mu).$$

Dieſer Gleichung läßt ſich aber nach dem Obigen offenbar immer durch eine algebraiſche Gleichung zwiſchen μ, φ', ψ', ω', ..., alſo auch zwiſchen μ, φ, ψ, ω, ... genügen, und dieſe algebraiſche Gleichung, in welcher μ die willkührliche Conſtante iſt, wird alſo das vollſtändige Integral unſerer Differentialgleichung ſeyn, ſo daß ſich alſo dieſe immer durch eine algebraiſche Gleichung integriren läßt. Dies gilt nun nach dem Obigen, wenn wir

$$R(x) = \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}$$

ſetzen, auch von der Differentialgleichung.

$$\frac{m\partial x}{R(x)} + \frac{n\partial y}{R(y)} + \frac{p\partial z}{R(z)} + \ldots = 0.$$

21. C. G. J. Jacobi hat eine ſehr einfache und ſinnreiche Conſtruction erfunden, durch welche das oben analytiſch aufgelöſte ſchwierige Problem der Vervielfachung der elliptiſchen Functionen

geometriſch aufgelöſt wird. Dieſes Problem verlangt bekanntlich φ_n ſo zu beſtimmen, daß

$$F(\varphi_n) = nF(\varphi_1)$$

iſt, unter der Vorausſetzung, daß n eine poſitive ganze Zahl und φ_1 gegeben iſt. Jacobi's Conſtruction, durch welche dieſes Problem zur Löſung gebracht wird, iſt aber folgende. Aus dem Mittelpunkte C (Fig. 1.) beſchreibe man mit einem der Einheit gleichen Halbmeſſer einen Kreis, ziehe den willkührlichen Radius CA deſſelben, nehme von A an auf der Peripherie dieſes Kreiſes den Bogen $AM_1 = 2\varphi_1$ und ebenfalls von A an nach derſelben Seite hin $AM_1M_2 = 2\varphi_2$, wobei wir für jetzt φ_2 ebenfalls als gegeben anſehen wollen. Nun ziehe man die Sehnen AM_1, M_1M_2, halbire den von denſelben eingeſchloſſenen Winkel AM_1M_2 durch die Linie M_1D, welche den Durchmeſſer AB in D ſchneidet, fälle von D auf AM_1 das Perpendikel DO, und beſchreibe mit ſelbigem als Halbmeſſer aus D als Mittelpunkt einen zweiten Kreis, welcher alſo die Sehnen AM_1, M_1M_2 beide berühren wird. Zieht man jetzt durch M_2 eine den kleinern Kreis berührende, den größern in M_3 ſchneidende Linie M_2M_3, durch M_3 wieder eine den kleinern Kreis berührende, den größern in M_4 ſchneidende Linie M_3M_4, durch M_4 wieder eine den kleinern Kreis berührende, den größern in M_5 ſchneidende Linie M_4M_5, u. ſ. w.; ſo iſt $AM_1M_2M_3 = 2\varphi_3$, $AM_1M_2M_3M_4 = 2\varphi_4$, $AM_1M_2M_3M_4M_5 = 2\varphi_5$ u. ſ. w., und hierdurch alſo $2\varphi_3$, $2\varphi_4$, $2\varphi_5$, ... durch eine höchſt einfache geometriſche Verzeichnung gefunden. Daß man dieſe Conſtruction beliebig weit fortſetzen kann und daß dieſelbe auch die Amplituden φ_3, φ_4, φ_5 .... ſelbſt giebt, iſt klar.

Wir haben vorher φ_2 als bekannt angeſehen, und ſind dazu berechtigt, weil ſich φ_2 nach (19.) mittelſt der Formel

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \operatorname{tang}\varphi_1\,\Delta(\varphi_1)$$

immer leicht berechnen läßt. Indeß kann die Lage und Größe des kleinen Kreiſes in Fig. 1., d. i. der Mittelpunkt D und der Halbmeſſer DO auch immer leicht auf folgende Art unmittelbar aus φ_1 beſtimmt werden. k wird, wie ſich von ſelbſt verſteht, immer als gegeben angeſehen. Setzen wir nämlich CD = e, DO = ϱ; ſo iſt AD = 1 + e, und, weil $AM_1 = 2\varphi_1$, $BM_1 = \pi - 2\varphi_1$ iſt, der Winkel DAO des rechtwinkligen Dreiecks ADO offenbar $= \frac{1}{2}\pi - \varphi_1$. Ferner iſt augenſcheinlich $AM_1 = 2\sin\varphi_1$, alſo

$$\begin{aligned} OM_1 &= 2\sin\varphi_1 - (1+e)\cos(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi_1) \\ &= 2\sin\varphi_1 - (1+e)\sin\varphi_1 = (1-e)\sin\varphi_1, \end{aligned}$$

$$\operatorname{tang} OM_1D = \frac{DO}{OM_1} = \frac{\varrho}{(1-e)\sin\varphi_1} = \frac{(1+e)\cos\varphi_1}{(1-e)\sin\varphi_1} = \frac{1+e}{1-e}\cot\varphi_1.$$

Ferner iſt der Bogen $AM_1M_2 = 2\varphi_2$, alſo der Winkel

$AM_1M_2 = \frac{1}{2}(2\pi - 2\varphi_2) = \pi - \varphi_2$, $AM_1D = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\varphi_2 = OM'D$, und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\frac{1+e}{1-e}\cot\varphi_1 = \text{tang}\,(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\varphi_2) = \cot\tfrac{1}{2}\varphi_2\,,$$

$$(1+e)\cot\varphi_1 = (1-e)\cot\tfrac{1}{2}\varphi_2$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \frac{1-e}{1+e}\text{tang}\,\varphi_1\,.$$

Aber

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \text{tang}\,\varphi_1\,\Delta(\varphi_1)\,.$$

Alſo

$$\frac{1-e}{1+e} = \Delta(\varphi_1),\quad e = \frac{1-\Delta(\varphi_1)}{1+\Delta(\varphi_1)}\,,$$

und folglich

$$\varrho = (1+e)\cos\varphi_1 = \frac{2\cos\varphi_1}{1+\Delta(\varphi_1)}\,.$$

Durch e und ϱ iſt aber Lage und Größe des kleinen Kreiſes in unſerer Conſtruction vollſtändig beſtimmt.

Um nun die Richtigkeit der Conſtruction allgemein und in völliger Strenge zu beweiſen, wollen wir annehmen, daß überhaupt M_2 und M_3 die Endpunkte der Bogen $2\varphi_{n-1}$ und $2\varphi_n$ ſeyen. Ferner wollen wir ſetzen, daß von dem Punkte A bis zu dem Punkte M_2 die ganze Peripherie des mit dem der Einheit gleichen Halbmeſſer beſchriebenen Kreiſes i Mal durchlaufen worden iſt, ſo iſt klar, daß der Bogen

$$AM_3M_2 = 2(i+1)\pi - 2\varphi_{n-1}$$

iſt, indem man hierbei nur zu bedenken hat, daß man, um von A bis M_1 zu gelangen, indem man das letzte Mal in A anlangte, nach der Vorausſetzung i ganze Peripherien durchlaufen hatte, und nun noch den Bogen AM_1M_2 durchlaufen mußte, um bis zu M_2 zu gelangen, ſo daß alſo der Bogen $2\varphi_{n-1}$ und der Bogen AM_3M_2 zuſammen offenbar i + 1 ganze Peripherien ausmachen. Ganz eben ſo iſt

$$AM_4M_3 = 2(i+1)\pi - 2\varphi_n\,.$$

Zieht man nun AM_2, AM_3, DM_2, DM_3, ſo iſt im Dreieck ADM_2

$$AD = 1 + e\,;$$

$$AM_2 = 2\sin\{(i+1)\pi - \varphi_{n-1}\} = -2\sin\varphi_{n-1}\cos(i+1)\pi$$
$$= 2\sin\varphi_{n-1}\cos i\pi\,;$$

$$2\varphi_{n-1} + 2DAM_2 = 2i\pi + \pi = (2i+1)\pi\,,$$

$$DAM_2 = (2i+1)\frac{\pi}{2} - \varphi_{n-1}\,,$$

$$\cos DAM_2 = \sin\varphi_{n-1}\sin(2i+1)\frac{\pi}{2} = \sin\varphi_{n-1}\sin\left(i\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \sin\varphi_{n-1}\cos i\pi\,.$$

Folglich iſt nach einer bekannten Formel der ebenen Trigonometrie

$$DM_2^2 = AD^2 + AM_2^2 - 2AD.AM_2.\cos DAM_2$$
$$= (1+e)^2 + 4\sin\varphi^2{}_{n-1} - 4(1+e)\sin\varphi^2{}_{n-1}$$
$$= (1+e)^2 - 4e\sin\varphi^2{}_{n-1}.$$

Auf ganz ähnliche Art iſt im Dreieck ADM_3

$$AD = 1 + e;$$
$$AM_3 = 2\sin\{(i+1)\pi - \varphi_n\} = 2\sin\varphi_n\cos i\pi;$$
$$2\varphi_n - 2DAM_3 = 2i\pi + \pi = (2i+1)\pi,$$
$$DAM_3 = \varphi_n - (2i+1)\frac{\pi}{2},$$
$$\cos DAM_3 = \sin\varphi_n\cos i\pi;$$
$$DM_3^2 = (1+e)^2 - 4e\sin\varphi_n^2.$$

Setzt man die Area des Dreiecks $DM_2M_3 = D$, und

$$M_2M_3 = 2\sin(\varphi_n - \varphi_{n-1}) = y;$$

ſo iſt

$$D = \tfrac{1}{2}\varrho y.$$

Aber, wenn wir $DM_2 = p$, $DM_3 = q$ ſetzen, nach der bekannten Formel für den Inhalt des Dreiecks aus den drei Seiten

$$D = \tfrac{1}{4}\sqrt{4p^2y^2 - (p^2+y^2-q^2)^2}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{2y^2(p^2+q^2) - y^4 - (p^2-q^2)^2}.$$

Alſo

$$4\varrho^2 = 2(p^2+q^2) - y^2 - \frac{(p^2-q^2)^2}{y^2}.$$

Subſtituirt man nun die Ausdrücke

$$y = 2\sin(\varphi_n - \varphi_{n-1}),$$
$$p^2 + q^2 = 2(1+e)^2 - 4e(\sin\varphi_n^2 + \sin\varphi^2{}_{n-1}),$$
$$p^2 - q^2 = 4e(\sin\varphi_n^2 - \sin\varphi^2{}_{n-1}) = 4e\sin(\varphi_n + \varphi_{n-1})\sin(\varphi_n - \varphi_{n-1});$$

ſo erhält man

$$4\varrho^2 = 4(1+e)^2 - 8e(\sin\varphi_n^2 + \sin\varphi^2{}_{n-1})$$
$$- 4\sin(\varphi_n - \varphi_{n-1})^2 - 4e^2\sin(\varphi_n + \varphi_{n-1})^2,$$
$$\varrho^2 = \cos(\varphi_n - \varphi_{n-1})^2 + 2e\cos(\varphi_n - \varphi_{n-1})\cos(\varphi_n + \varphi_{n-1})$$
$$+ e^2\cos(\varphi_n + \varphi_{n-1})^2,$$
$$\varrho = \cos(\varphi_n - \varphi_{n-1}) + e\cos(\varphi_n + \varphi_{n-1})$$
$$= (1+e)\cos\varphi_n\cos\varphi_{n-1} + (1-e)\sin\varphi_n\sin\varphi_{n-1},$$
$$\frac{\varrho}{1+e} = \cos\varphi_n\cos\varphi_{n-1} + \frac{1-e}{1+e}\sin\varphi_n\sin\varphi_{n-1},$$

d. i. nach dem Obigen

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_n\cos\varphi_{n-1} + \sin\varphi_n\sin\varphi_{n-1}\Delta(\varphi_1).$$

Weil aber $F(\varphi_n) - F(\varphi_{n-1}) = F(\varphi_1)$ ſeyn ſoll, ſo muß nach (16.) wirklich

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_n\cos\varphi_{n-1} + \sin\varphi_n\sin\varphi_{n-1}\Delta(\varphi_1)$$

ſeyn, und unſere Conſtruction iſt folglich offenbar richtig. Meh-

reres über dieſe merkwürdige Conſtruction und ihre Anwendung findet man in **Legendre** Traité des fonctions elliptiques. Trois. Suppl. p. 174.

X. Vergleichung der elliptiſchen Functionen der zweiten Art.

22. Wir gehen hierbei von der in (14.) gefundenen Gleichung

$$\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin\mu^2} = \cos\mu\,,$$

welche nach (15.) der Gleichung

$$F(\varphi) + F(\psi) - F(\mu) = 0$$

entſpricht, aus, wobei wir zugleich wiederholen, daß immer

$$\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} + \frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}} = 0$$

und μ eine Conſtante iſt.

Durch Differentiation der erſten Gleichung erhält man

$$-\sin\varphi\cos\psi\,\partial\varphi - \sin\psi\cos\varphi\,\partial\psi = \sqrt{1-k^2\sin\mu^2}\,.\,\partial\,.\sin\varphi\sin\psi\,,$$

und, wenn man quadrirt:

$$(\sin\varphi\cos\psi\,\partial\varphi + \sin\psi\cos\varphi\,\partial\psi)^2 = (1-k^2\sin\mu^2)(\partial\,.\sin\varphi\sin\psi)^2$$

$$k^2\sin\mu^2(\partial\,.\sin\varphi\sin\psi)^2 = (\cos\varphi\sin\psi\,\partial\varphi + \cos\psi\sin\varphi\,\partial\psi)^2$$
$$-(\sin\varphi\cos\psi\,\partial\varphi + \sin\psi\cos\varphi\,\partial\psi)^2$$
$$= (\cos\varphi^2\sin\psi^2 - \sin\varphi^2\cos\psi^2)\,\partial\varphi^2 + (\sin\varphi^2\cos\psi^2 - \cos\varphi^2\sin\psi^2)\,\partial\psi^2$$
$$= (\sin\psi^2 - \sin\varphi^2)\,\partial\varphi^2 + (\sin\varphi^2 - \sin\psi^2)\,\partial\psi^2\,,$$

$$k^4\sin\mu^2(\partial\,.\sin\varphi\sin\psi)^2$$
$$= k^2(\sin\psi^2 - \sin\varphi^2)\,\partial\varphi^2 + k^2(\sin\varphi^2 - \sin\psi^2)\,\partial\psi^2\,.$$

Zu dieſer Gleichung addire man die Gleichung

$$0 = (1-k^2\sin\psi^2)\,\partial\varphi^2 + 2\,\partial\varphi\,\partial\psi\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}\,.\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}$$
$$+ (1-k^2\sin\varphi^2)\,\partial\psi^2\,,$$

welche ſich auf der Stelle durch Quadrirung der Gleichung

$$0 = \partial\varphi\sqrt{1-k^2\sin\psi^2} + \partial\psi\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}$$

ergiebt; ſo erhält man

$$k^4\sin\mu^2(\partial\,.\sin\varphi\sin\psi)^2$$
$$= (1-k^2\sin\varphi^2)\,\partial\varphi^2 + 2\,\partial\varphi\,\partial\psi\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}\,.\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}$$
$$+ (1-k^2\sin\psi^2)\,\partial\psi^2$$
$$= \{\partial\varphi\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2} + \partial\psi\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}\}^2\,,$$

und, wenn man die Quadratwurzel auszieht:

$$k^2\sin\mu\,\partial\,.\sin\varphi\sin\psi = \pm\,\partial\varphi\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2} \pm \partial\psi\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}\,;$$

alſo, wenn man integrirt

$$k^2\sin\mu\sin\varphi\sin\psi = \pm\int\partial\varphi\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2} \pm \int\partial\psi\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}$$
$$= \pm\int\Delta(\varphi)\,\partial\varphi \pm \int\Delta(\psi)\,\partial\psi\,,$$

oder nach unſerer Bezeichnung der elliptiſchen Functionen der zweiten Art, wenn nur die Integrale reſpective zwiſchen den Gränzen 0, φ und 0, ψ genommen werden:

$$k^2 \sin\mu \sin\varphi \sin\psi = \pm E(\varphi) \pm E(\psi) + \text{Const.}$$

Weil nun

$$F(\varphi) + F(\psi) - F(\mu) = 0$$

und $F(\varphi) = 0$ iſt für $\varphi = 0$; ſo iſt

$$F(\psi) - F(\mu) = 0,\ F(\psi) = F(\mu),\ \psi = \mu$$

für $\varphi = 0$. Aber, da das durch $E(\varphi)$ bezeichnete Integral zwiſchen den Gränzen 0, φ oder ſo genommen iſt, daß es für $\varphi = 0$ verſchwindet, $E(\varphi) = 0$ für $= 0$. Folglich, wenn man, um Const zu beſtimmen, in obiger Gleichung $\varphi = 0$ ſetzt:

$$0 = \pm E(\mu) + \text{Const},\ \text{Const} = \mp E(\mu);$$

alſo

$$\pm E(\varphi) \pm E(\psi) \mp E(\mu) = k^2 \sin\mu \sin\varphi \sin\psi,$$
$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\mu) = \pm k^2 \sin\mu \sin\varphi \sin\psi,$$

wo nun noch entſchieden werden muß, welches Vorzeichen man zu nehmen hat. Nach dem Obigen iſt

$$k^2 \sin\mu\, \partial . \sin\varphi \sin\psi = \pm \Delta(\varphi)\partial\varphi \pm \Delta(\psi)\partial\psi,$$

und nach (16.) hat man

$$\Delta(\varphi) = \frac{\cos\varphi - \cos\mu\cos\psi}{\sin\mu \sin\psi},\ \Delta(\psi) = \frac{\cos\psi - \cos\mu\cos\varphi}{\sin\mu\sin\varphi};$$

alſo

$$\pm k^2 \sin\mu\, \partial . \sin\varphi\sin\psi = \frac{\cos\varphi - \cos\mu\cos\psi}{\sin\mu\sin\psi}\partial\varphi + \frac{\cos\psi - \cos\mu\cos\varphi}{\sin\mu\sin\varphi}\partial\psi$$
$$= \frac{\sin\varphi\cos\varphi - \cos\mu\cos\psi\sin\varphi}{\sin\mu\sin\varphi\sin\psi}\partial\varphi + \frac{\sin\psi\cos\psi - \cos\mu\cos\varphi\sin\psi}{\sin\mu\sin\varphi\sin\psi}\partial\psi$$
$$= \frac{\sin\varphi\,\partial\sin\varphi + \cos\mu\cos\psi\,\partial\cos\varphi}{\sin\mu\sin\varphi\sin\psi} + \frac{\sin\psi\,\partial\sin\psi + \cos\mu\cos\varphi\,\partial\cos\psi}{\sin\mu\sin\varphi\sin\psi}$$
$$= \frac{\tfrac{1}{2}\partial . \sin\varphi^2 + \tfrac{1}{2}\partial . \sin\psi^2 + \cos\mu(\cos\varphi\,\partial\cos\psi + \cos\psi\,\partial\cos\varphi)}{\sin\mu\sin\varphi\sin\psi}$$
$$= \frac{\tfrac{1}{2}\partial . \sin\varphi^2 + \tfrac{1}{2}\partial . \sin\psi^2 + \cos\mu\,\partial . \cos\varphi\cos\psi}{\sin\mu\sin\varphi\sin\psi}$$
$$= \frac{\partial(\sin\varphi^2 + \sin\psi^2 + 2\cos\mu\cos\varphi\cos\psi)}{2\sin\mu\sin\varphi\sin\psi}.$$

Nach (16.) iſt aber auch

$$1 = \cos\mu^2 + \cos\varphi^2 + \cos\psi^2 - 2\cos\mu\cos\varphi\cos\psi + k^2\sin\mu^2\sin\varphi^2\sin\psi^2,$$
$$\sin\varphi^2 + \sin\psi^2 + 2\cos\mu\cos\varphi\cos\psi = 1 + \cos\mu^2 + k^2\sin\mu^2\sin\varphi^2\sin\psi^2,$$
$$\partial(\sin\varphi^2 + \sin\psi^2 + 2\cos\mu\cos\varphi\cos\psi)$$
$$= k^2\sin\mu^2\,\partial . \sin\varphi^2\sin\psi^2 = 2k^2\sin\mu^2\sin\varphi\sin\psi\,\partial . \sin\varphi\sin\psi;$$

alſo nach gehöriger Subſtitution in obige Gleichung:

$$\pm k^2\sin\mu\,\partial . \sin\varphi\sin\psi = k^2\sin\mu\,\partial . \sin\varphi\sin\psi,$$

woraus alſo hervorgeht, das man das obere Zeichen nehmen, und folglich

$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\mu) = k^2 \sin\mu \sin\varphi \sin\psi$$

ſetzen muß.

Hieraus ergiebt ſich nun der folgende merkwürdige Lehrſatz, welcher als das Fundamentaltheorem der Theorie der elliptiſchen Functionen der zweiten Art zu betrachten iſt:

Wenn die Amplituden φ_1, φ_2, φ_3 der Gleichung

$$F(\varphi_1) + F(\varphi_2) - F(\varphi_3) = 0$$

genügen; ſo iſt immer

$$E(\varphi_1) + E(\varphi_2) - E(\varphi_3) = k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 .$$

Nach (16.) hat man die Gleichungen

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \Delta(\varphi_1) ,$$
$$\cos\varphi_2 = \cos\varphi_1 \cos\varphi_3 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_3 \Delta(\varphi_2) ,$$
$$\cos\varphi_3 = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \Delta(\varphi_3) ;$$
$$\sin\varphi_1 = \frac{\sin\varphi_3 \cos\varphi_2 \;\Delta(\varphi_2) - \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \Delta(\varphi_3)}{1 - k^2 \sin\varphi_2{}^2 \sin\varphi_3{}^2} ,$$
$$\sin\varphi_2 = \frac{\sin\varphi_3 \cos\varphi_1 \Delta(\varphi_1) - \sin\varphi_1 \cos\varphi_3 \Delta(\varphi_3)}{1 - k^2 \sin\varphi_1{}^2 \sin\varphi_3{}^2} ,$$
$$\sin\varphi_3 = \frac{\sin\varphi_2 \cos\varphi_1 \Delta(\varphi_1) + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \Delta(\varphi_2)}{1 - k^2 \sin\varphi_1{}^2 \sin\psi_2{}^2} .$$

23. Setzen wir wieder allgemein

$$F(\varphi_n) = n F(\varphi_1) ,$$

ſo hat man die Gleichungen

$$F(\varphi_1) + F(\varphi_1) - F(\varphi_2) = 0 ,$$
$$F(\varphi_1) + F(\varphi_2) - F(\varphi_3) = 0 ,$$
$$F(\varphi_1) + F(\varphi_3) - F(\varphi_4) = 0 ,$$
$$F(\varphi_1) + F(\varphi_4) - F(\varphi_5) = 0 ,$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

welchen nach (22.) die Gleichungen

$$E(\varphi_1) + E(\varphi_1) - E(\varphi_2) = k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 ,$$
$$E(\varphi_1) + E(\varphi_2) - E(\varphi_3) = k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 ,$$
$$E(\varphi_1) + E(\varphi_3) - E(\varphi_4) = k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_3 \sin\varphi_4 ,$$
$$E(\varphi_1) + E(\varphi_4) - E(\varphi_5) = k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_4 \sin\varphi_5 ,$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

entſprechen. Nach gehöriger Subſtitution erhält man aus dieſen Gleichungen:

$$2E(\varphi_1) - E(\varphi_2) = k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$
$$3E(\varphi_1) - E(\varphi_3) = k^2 \sin\varphi_1 (\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_3)$$
$$4E(\varphi_1) - E(\varphi_4) = k^2 \sin\varphi_1 (\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 + \sin\varphi_3 \sin\varphi_4)$$
$$5E(\varphi_1) - E(\varphi_5) =$$
$$k^2 \sin\varphi_1 (\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 + \sin\varphi_3 \sin\varphi_4 + \sin\varphi_4 \sin_5)\varphi$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

welche alſo den Gleichungen

$$2F(\varphi_1)=F(\varphi_2),\ 3F(\varphi_1)=F(\varphi_3),\ 4F(\varphi_1)=F(\varphi_4),\ 5F(\varphi_1)=F(\varphi_5),\ \ldots$$

entſprechen.

XI. Vergleichung der elliptiſchen Functionen der dritten Art.

24. Wie vorher nehmen wir wieder an, daß

$$F(\varphi)+F(\psi)-F(\mu)=0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}+\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}}=\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}+\frac{\partial\psi}{\Delta(\psi)}=0$$

ſey. Setzen wir nun überhaupt

$$Q=\int\left\{\frac{\partial\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)}+\frac{\partial\varphi}{(1+n\sin\psi^2)\Delta(\psi)}\right\},$$

und führen

$$\frac{\partial\psi}{\Delta(\psi)}=-\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}$$

in dieſe Gleichung ein; ſo erhalten wir

$$Q=\int\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}\cdot\frac{n(\sin\psi^2-\sin\varphi^2)}{1+n(\sin\varphi^2-\sin\psi^2)+n^2\sin\varphi^2\sin\psi^2}.$$

Nach (22) iſt aber, da man, wie wir wiſſen, dort die obern Zeichen nehmen muß,

$$k^2\sin\mu\,\partial.\sin\varphi\sin\psi=\Delta(\varphi)\partial\varphi+\Delta(\psi)\partial\psi$$

$$=\Delta(\varphi)\partial\varphi-\frac{(\Delta(\psi))^2}{\Delta(\varphi)}\partial\varphi=\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}\left\{(\Delta(\varphi))^2-(\Delta(\psi))^2\right\}$$

$$=\frac{k^2\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}\left\{\sin\psi^2-\sin\varphi^2\right\};$$

alſo, wenn man dies in den obigen Ausdruck von Q einführt und der Kürze wegen

$$\sin\varphi^2+\sin\psi^2=p,\quad \sin\varphi\sin\psi=q$$

ſetzt:

$$Q=\int\frac{n\sin\mu\,\partial q}{1+np+n^2q^2}.$$

Um p aus dieſem Ausdruck zu eliminiren, ſo daß das Integral bloß von q und conſtanten Größen abhängt, iſt nach (14.)

$$\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\mu)=\cos\mu;$$

alſo

$$\cos\varphi^2\cos\psi^2=$$

$$\cos\mu^2+2\cos\mu\sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\mu)+\sin\varphi^2\sin\psi^2(1-k^2\sin\mu^2)$$

$$=\cos\mu^2+2q\cos\mu\,\Delta(\mu)+q^2(1-k^2\sin\mu^2);$$

aber auch

$$\cos\varphi^2\cos\psi^2 = 1 - (\sin\varphi^2 + \sin\psi^2) + \sin\varphi^2\sin\psi^2$$
$$= 1 - p + q^2;$$

alſo

$$p = \sin\mu^2 - 2q\cos\mu\,\varDelta(\mu) + k^2q^2\sin\mu^2;$$

folglich

$$Q = \int \frac{n\sin\mu\,\partial q}{1 + n\sin\mu^2 - 2nq\cos\mu\,\varDelta(\mu) + q^2(n^2 + nk^2\sin\mu^2)},$$

wobei wir annehmen wollen, daß das Integral zwiſchen den Gränzen 0, q genommen, oder ſo beſtimmt ſey, daß es für q = 0 verſchwindet.

Es iſt aber auch nach der eingeführten Bezeichnung der elliptiſchen Functionen der dritten Art

$$Q = \Pi(\varphi) + \Pi(\psi) + \text{Const.}$$

Alſo

$$\Pi(\varphi) + \Pi(\psi) + \text{Const.}$$
$$= \int_0^q \frac{n\sin\mu\,\partial q}{1 + n\sin\mu^2 - 2nq\cos\mu\,\varDelta(\mu) + q^2(n^2 + nk^2\sin\mu^2)}.$$

Weil aber nach der Vorausſetzung

$$F(\varphi) + F(\psi) - F(\mu) = 0$$

iſt, ſo iſt $\psi = \mu$ für $\varphi = 0$. Für $\varphi = 0$ iſt aber offenbar nach dem Obigen auch $q = 0$, und für dieſen Werth von q verſchwindet das Integral auf der rechten Seite in vorſtehender Gleichung. Alſo iſt für $\varphi = 0$:

$$\Pi(\mu) + \text{Const} = 0,\ \text{Const} = -\Pi(\mu);$$

folglich

$$\Pi(\varphi) + \Pi(\psi) - \Pi(\mu)$$
$$= \int_0^q \frac{n\sin\mu\,\partial q}{1 + n\sin\mu^2 - 2nq\cos\mu\,\varDelta(\mu) + q^2(n^2 + nk^2\sin\mu^2)}.$$

Um nun das Integral zu finden, wollen wir überhaupt

$$\int_0^x \frac{\partial x}{a + bx + cx^2}$$

entwickeln. Zu dem Ende ſetze man

$$\frac{\partial x}{a + bx + cx^2} = \frac{\partial x}{c\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x + x^2\right)} = \frac{\partial x}{c(\alpha + 2\beta x + x^2)}$$

$$= \frac{\partial x}{c(\alpha - \beta^2 + \beta^2 + 2\beta x + x^2)} = \frac{\partial x}{c\{\alpha - \beta^2 + (\beta + x)^2\}}$$

$$= \frac{\partial x}{c(\alpha - \beta^2)\left\{1 + \frac{(\beta + x)^2}{\alpha - \beta^2}\right\}},$$

wo alſo

$$\alpha = \frac{a}{c},\ \beta = \frac{b}{2c}$$

iſt. Sey nun

$$\frac{\beta + x}{\sqrt{\alpha - \beta^2}} = y,\ \partial x = \sqrt{\alpha - \beta^2} . \partial y .$$

Folglich

$$\int \frac{\partial x}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{c\sqrt{\alpha - \beta^2}} \int \frac{\partial y}{1 + y^2} = \frac{\text{Arc tang } y}{c\sqrt{\alpha - \beta^2}} .$$

Weil aber das Integral zwiſchen den Gränzen 0, x genommen oder ſo beſtimmt werden ſoll, daß es für x = 0 verſchwindet, und

$$y = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha - \beta^2}} \text{ für } x = 0$$

iſt; ſo iſt

$$\int_0^x \frac{\partial x}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{c\sqrt{\alpha - \beta^2}} \left\{ \text{Arc tang } y - \text{Arc tang } \frac{\beta}{\sqrt{\alpha - \beta^2}} \right\}$$

$$= \frac{1}{c\sqrt{\alpha - \beta^2}} \text{Arc tang} \frac{y - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha - \beta^2}}}{1 + \frac{\beta y}{\sqrt{\alpha - \beta^2}}} = \frac{1}{c\sqrt{\alpha - \beta^2}} \text{Arc tang} \frac{y\sqrt{\alpha - \beta^2} - \beta}{\sqrt{\alpha - \beta^2} + \beta y}$$

$$= \frac{1}{c\sqrt{\alpha - \beta^2}} \text{Arc tang} \frac{x\sqrt{\alpha - \beta^2}}{\alpha + \beta x} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \text{Arc tang} \frac{x\sqrt{4ac - b^2}}{2a + bx} .$$

Setzt man nun x = q und

$$1 + n \sin\mu^2 = a,\ -2n \cos\mu\, \Delta(\mu) = b,\ n^2 + nk^2 \sin\mu^2 = c ;$$

ſo iſt unſer obiges Integral:

$$n \sin\mu \int_0^q \frac{\partial q}{a + bq + cq^2} = \frac{2n \sin\mu}{\sqrt{4ac - b^2}} \text{Arc tang} \frac{q\sqrt{4ac - b^2}}{2a + bq} .$$

Nun findet man aber leicht

$$\begin{aligned} 4ac - b^2 &= 4 \sin\mu^2 (n^2 + nk^2 + n^3 + n^2 k^2) \\ &= 4n^2 \sin\mu^2 \left(1 + n + \frac{k^2}{n} + k^2\right) \\ &= 4n^2 \sin\mu^2 \left\{1 + n + (1 + n)\frac{k^2}{n}\right\} \\ &= 4n^2 (1 + n)\left(1 + \frac{k^2}{n}\right) \sin\mu^2 , \end{aligned}$$

$$\sqrt{4ac - b^2} = 2n\sqrt{\alpha} \sin\mu ,$$

wenn wir

$$(1 + n)\left(1 + \frac{k^2}{n}\right) = \alpha$$

ſetzen.

Ferner iſt, weil

$$q = \sin\varphi \sin\psi$$

und nach dem Obigen

$$q\Delta(\mu) = \sin\varphi \sin\psi\, \Delta(\mu) = \cos\varphi \cos\psi - \cos\mu$$

iſt:

$$2a + bq = 2 + 2n\sin\mu^2 - 2nq\cos\mu\,\Delta(\mu)$$
$$= 2 + 2n\sin\mu^2 - 2n\cos\mu\cos\varphi\cos\psi + 2n\cos\mu^2$$
$$= 2(1 + n - n\cos\mu\cos\varphi\cos\psi)\,.$$

Alſo

$$n\sin\mu\int_0^q \frac{\partial q}{a + bq + cq^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{Arc tang} \frac{n\sqrt{\alpha}\sin\mu\sin\varphi\sin\psi}{1 + n - n\cos\mu\cos\varphi\cos\psi}\,.$$

Iſt alſo

$$F(\varphi_1) + F(\varphi_2) - F(\varphi_3) = 0\,,$$

ſo iſt immer

$$\Pi(\varphi_1) + \Pi(\varphi_2) - \Pi(\varphi_3) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{Arc tang} \frac{n\sqrt{\alpha}\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3}{1 + n - n\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3}\,,$$

für den obigen Werth von α. Zugleich entſpricht dieſen beiden Gleichungen die Gleichung

$$E(\varphi_1) + E(\varphi_2) - E(\varphi_3) = k^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\,,$$

wie wir aus dem Vorhergehenden wiſſen.

Noch iſt hierbei zu bemerken, daß der für $\Pi(\varphi_1) + \Pi(\varphi_2) - \Pi(\varphi_3)$ gefundene Ausdruck imaginär wird, wenn α negativ iſt. In dieſem Falle verwandelt man, wie oft in der Integralrechnung, den Kreisbogen in einen natürlichen Logarithmus, wozu folgende Formel dient. Es iſt nämlich

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\,,\quad \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\,;$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{(e^{2x\sqrt{-1}} + 1)\sqrt{-1}}\,,$$

oder, wenn man $x\sqrt{-1}$ für x ſetzt:

$$\operatorname{tang} x\sqrt{-1} = \frac{e^{-2x} - 1}{(e^{-2x} + 1)\sqrt{-1}} = \frac{1 - e^{2x}}{(1 + e^{2x})\sqrt{-1}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\sqrt{-1}\,;$$

folglich

$$x\sqrt{-1} = \operatorname{Arc tang} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\sqrt{-1}\,.$$

Setzt man nun

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = z\,,$$

ſo wird

$$e^{2x} = \frac{1+z}{1-z},\ x = \tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1+z}{1-z},$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \,\text{Arc tang}\, z\sqrt{-1} = \tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1+z}{1-z},$$

mittelſt welcher Gleichung ſich folglich, wie man ſieht, ein Kreisbogen, deſſen Tangente imaginär iſt, immer leicht in den natürlichen Logarithmus einer reellen Größe verwandeln läßt. Deshalb wollen wir immer den obigen Ausdruck von $\Pi(\varphi_1) + \Pi(\varphi_2) - \Pi(\varphi_3)$ beibehalten.

Iſt n poſitiv, ſo iſt offenbar auch α immer poſitiv. In dieſem Falle kann man $n = \cot\Theta^2$ ſetzen. Dann iſt

$$\alpha = (1 + \cot\Theta^2)\left(1 + \frac{k^2}{\cot\Theta^2}\right) = \frac{1}{\sin\Theta^2}\left(1 + \frac{k^2\sin\Theta^2}{\cos\Theta^2}\right)$$

$$= \frac{1-(1-k^2)\sin\Theta^2}{\sin\Theta^2\cos\Theta^2} = \frac{1 - k'^2\sin\Theta^2}{\sin\Theta^2\cos\Theta^2},$$

d. i., wenn wir in der Folge, ſo wie wir nach dem Vorhergehenden immer

$$\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2} = \Delta(\varphi)$$

ſetzen, ſtets

$$\sqrt{1 - k'^2\sin\varphi^2} = \Delta'(\varphi)$$

ſetzen:

$$\sqrt{\alpha} = \frac{\Delta'(\Theta)}{\sin\Theta\cos\Theta}.$$

Folglich nach dem Obigen in dieſem Falle

$$\Pi(\varphi_1)+\Pi(\varphi_2)-\Pi(\varphi_3) = \frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\Delta'(\Theta)}\,\text{Arc tang}\,\frac{\cot\Theta\,\Delta'(\Theta)\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3}{1-\cos\Theta^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3}.$$

α iſt ferner offenbar auch poſitiv, wenn n negativ und ſein abſoluter Werth $> k^2$, < 1 iſt, ſo wie auch auf der Stelle in die Augen fällt, daß im entgegengeſetzten Falle, wenn der abſolute Werth von n nicht zwiſchen den angegebenen Gränzen liegt, α ſtets negativ iſt. Iſt nun n negativ und ſein abſoluter Werth $>k^2$, <1, ſo kann man

$$n = -1 + k'^2\sin\Theta^2$$

ſetzen, weil dann der abſolute Werth

$$1 - k'^2\sin\Theta^2$$

von n offenbar <1 und auch

$$1 - k'^2\sin\Theta^2 > k^2$$

iſt, indem hieraus

$$1-k^2 > k'^2\sin\Theta^2,\ k'^2 > k'^2\sin\Theta^2$$

folgt, wie es offenbar wirklich der Fall iſt. Für obigen Werth von n erhält man aber

$$\alpha = k'^2 \sin\Theta^2 \left\{1 - \frac{k^2}{1 - k'^2 \sin\Theta^2}\right\} = \frac{k'^4 \sin\Theta^2 \cos\Theta^2}{1 - k'^2 \sin\Theta^2},$$

$$\sqrt{\alpha} = \frac{k'^2 \sin\Theta \cos\Theta}{\sqrt{1 - k'^2 \sin\Theta^2}} = \frac{k'^2 \sin\Theta \cos\Theta}{\Delta'(\Theta)}.$$

Nach gehöriger Subſtitution erhält man in dieſem Falle

$$\Pi(\varphi_1) + \Pi(\varphi_2) - \Pi(\varphi_3)$$

$$= \frac{\Delta'(\Theta)}{k'^2 \sin\Theta \cos\Theta} \operatorname{Arc\,tang} \frac{-k'^2 \sin\Theta \cos\Theta\, \Delta'(\Theta) \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3}{k'^2 \sin\Theta^2 + (\Delta'(\Theta))^2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3}.$$

Iſt n negativ und ſein abſoluter Werth nicht zwiſchen den Gränzen k^2 und 1 enthalten, ſo ſey derſelbe zuerſt $< k^2$. Dann iſt man berechtigt

$$n = -k^2 \sin\Theta^2$$

zu ſetzen. Da in dieſem Falle α negativ iſt, ſo ſetze man

$$\sqrt{\alpha} = \sqrt{-\alpha}.\sqrt{-1} = \beta\sqrt{-1}.$$

Dies giebt nach dem Obigen

$$\Pi(\varphi_1) + \Pi(\varphi_2) - \Pi(\varphi_3) = \frac{1}{\beta\sqrt{-1}} \operatorname{Arc\,tang} \frac{n\beta \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3}{1 + n - n \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3} \sqrt{-1}$$

und folglich, wenn man

$$z = \frac{n\beta \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3}{1 + n - n \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3}$$

ſetzt:

$$\Pi(\varphi_1) + \Pi(\varphi_2) - \Pi(\varphi_3)$$

$$= \frac{1}{2\beta}\, l\, \frac{1 + n - n \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 + n\beta \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3}{1 + n - n \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 - n\beta \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3}.$$

Aber, wenn wir $-n$ für n ſetzen und

$$\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{(1 - n \sin\varphi^2)\Delta(\varphi)}$$

durch $\Pi(-n, \varphi)$ bezeichnen, wie in der Folge in ähnlichen Fällen immer geſchehen ſoll:

$$\beta = \sqrt{-\alpha} = \frac{(1-n)^{\frac{1}{2}}(k^2 - n)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}},\quad n\beta = n^{\frac{1}{2}}(1-n)^{\frac{1}{2}}(k^2 - n)^{\frac{1}{2}}.$$

Folglich, immer $-n$ ſtatt n geſetzt:

$$\Pi(-n, \varphi_1) + \Pi(-n, \varphi_2) - \Pi(-n, \varphi_3)$$

$$= \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2(1-n)^{\frac{1}{2}}(k^2-n)^{\frac{1}{2}}}\, l\, \frac{1-n+n \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 - n^{\frac{1}{2}}(1-n)^{\frac{1}{2}}(k^2-n)^{\frac{1}{2}} \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3}{1-n+n \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 + n^{\frac{1}{2}}(1-n)^{\frac{1}{2}}(k^2-n)^{\frac{1}{2}} \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3}.$$

Setzt man nun in dieſer Formel, wie erforderlich iſt, n nicht $= -k^2 \sin\Theta^2$, ſondern $= k^2 \sin\Theta^2$; ſo erhält man leicht

$$\Pi(-n, \varphi_1) + \Pi(-n, \varphi_2) - \Pi(-n, \varphi_3)$$

$$= \frac{\operatorname{tang}\Theta}{2\Delta(\Theta)}\, l\, \frac{(\Delta(\Theta))^2 + k^2 \sin\Theta^2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 - k^2 \sin\Theta \cos\Theta\, \Delta(\Theta) \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3}{(\Delta(\Theta))^2 + k^2 \sin\Theta^2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 + k^2 \sin\Theta \cos\Theta\, \Delta(\Theta) \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3}.$$

Weil aber nach (16.)

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 = \cos\varphi_3 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \varDelta(\varphi_3)$$

iſt; ſo iſt der Zähler und Nenner des Bruchs, von welchem in vorſtehender Formel der natürliche Logarithmus zu nehmen iſt, indem ſich auf erſtern die obern, auf letztern die untern Zeichen beziehen,

$$= 1 - k^2 \sin\Theta^2 + k^2 \sin\Theta^2 \{\cos\varphi_3{}^2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \varDelta(\varphi_3)\}$$
$$\mp k^2 \sin\Theta \cos\Theta \varDelta(\Theta) \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3$$
$$= 1 - k^2 \sin\Theta^2 \sin\varphi_3{}^2$$
$$+ k^2 \sin\Theta \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \{\sin\Theta \cos\varphi_3 \varDelta(\varphi_3) \mp \cos\Theta \sin\varphi_3 \varDelta(\Theta)\}.$$

Beſtimmen wir nun die Winkel ψ und ψ' ſo, daß durch dieſelben den Gleichungen

$$F(\Theta) - F(\varphi_3) = F(\psi),\quad F(\Theta) + F(\varphi_3) = F(\psi')$$

genügt wird, ſo daß alſo nach (16.)

$$\sin\psi = \frac{\sin\Theta \cos\varphi_3 \varDelta(\varphi_3) - \cos\Theta \sin\varphi_3 \varDelta(\Theta)}{1 - k^2 \sin\Theta^2 \sin\varphi_3{}^2},$$

$$\sin\psi' = \frac{\sin\Theta \cos\varphi_3 \varDelta(\varphi_3) + \cos\Theta \sin\varphi_3 \varDelta(\Theta)}{1 - k^2 \sin\Theta^2 \sin\varphi_3{}^2}$$

iſt; ſo iſt

$$\Pi(-n, \varphi_1) + \Pi(-n, \varphi_2) - \Pi(-n, \varphi_3)$$
$$= \frac{\tang\Theta}{2\varDelta(\Theta)} l \frac{1 + k^2 \sin\Theta \sin\psi \sin\varphi_1 \sin\varphi_2}{1 + k^2 \sin\Theta \sin\psi' \sin\varphi_1 \sin\varphi_2}.$$

Wenn n negativ iſt, ſind nun noch die drei Fälle zu betrachten, wo der abſolute Werth von $n > 1$, $= k^2$ und $= 1$ iſt. In den beiden letzten Fällen wird α offenbar $= 0$. Wir wollen nur noch kurz anzeigen, wie ſich dieſe Fälle auf die vorhergehenden zurückführen laſſen. Setzt man nämlich

$$p = \frac{\tang\varphi}{\varDelta(\varphi)},$$

ſo erhält man durch Differentiation

$$\frac{\partial p}{1 + \alpha p^2} = \frac{\partial\varphi}{\varDelta(\varphi)} \cdot \frac{1 - k^2 \sin\varphi^4}{(1 - k^2 \sin\varphi^2)\cos\varphi^2 + \alpha \sin\varphi^2}.$$

Setzt man nun im Nenner für α ſeinen Werth

$$\alpha = (1-n)\left(1 - \frac{k^2}{n}\right),$$

indem wir nämlich wieder $-n$ für n ſchreiben, ſo wird derſelbe

$$= (1 - k^2 \sin\varphi^2)\cos\varphi^2 + (1-n)\left(1 - \frac{k^2}{n}\right)\sin\varphi^2$$
$$= 1 - n\sin\varphi^2 + k^2 \sin\varphi^4 - \frac{k^2}{n}\sin\varphi^2$$
$$= 1 - n\sin\varphi^2 - \frac{k^2}{n}\sin\varphi^2 (1 - n\sin\varphi^2)$$
$$= (1 - n\sin\varphi^2)\left(1 - \frac{k^2}{n}\sin\varphi^2\right),$$

und es iſt folglich,

$$\frac{\partial p}{1+\alpha p^2} = \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} \cdot \frac{1-k^2\sin\varphi^4}{(1-n\sin\varphi^2)\left(1-\frac{k^2}{n}\sin\varphi^2\right)}$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}\left\{\frac{1}{1-n\sin\varphi^2} + \frac{1}{1-\frac{k^2}{n}\sin\varphi^2} - 1\right\};$$

alſo, da $p = 0$ für $\varphi = 0$:

$$\int_0^p \frac{\partial p}{1+\alpha p^2}$$

$$= \int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{(1-n\sin\varphi^2)\,\Delta(\varphi)} + \int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{(1-\frac{k^2}{n}\sin\varphi^2)\,\Delta(\varphi)} - \int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}$$

d. i.

$$\int_0^p \frac{\partial p}{1+\alpha p^2} = \Pi(-n,\ \varphi) + \Pi\left(-\frac{k^2}{n},\ \varphi\right) - F(\varphi).$$

Aber, wenn man $p\sqrt{\alpha} = q$, $\partial p\sqrt{\alpha} = \partial q$ ſetzt:

$$\int_0^p \frac{\partial p}{1+\alpha p^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^q \frac{\partial q}{1+q^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\text{Arc tang}\,q$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\text{Arc tang}\,p\sqrt{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\text{Arc tang}\,\frac{\sqrt{\alpha}\,\text{tang}\,\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

und folglich immer

$$\Pi(-n,\ \varphi) + \Pi\left(-\frac{k^2}{n},\ \varphi\right) = F(\varphi) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\text{Arc tang}\,\frac{\sqrt{\alpha}\,\text{tang}\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

oder, wenn α negativ iſt, für $\sqrt{\alpha} = \beta\sqrt{-1}$:

$$\Pi(-n,\ \varphi) + \Pi\left(-\frac{k^2}{n},\ \varphi\right) = F(\varphi) + \frac{1}{2\beta}\,l\,\frac{\Delta(\varphi)+\beta\,\text{tang}\,\varphi}{\Delta(\varphi)-\beta\,\text{tang}\,\varphi}.$$

Iſt nun $n > 1$, ſo kann man $n = \frac{1}{\sin\Theta^2}$ ſetzen. Dann iſt

$$\alpha = \left(1-\frac{1}{\sin\Theta^2}\right)(1-k^2\sin\Theta^2) = -\frac{1-k^2\sin\Theta^2}{\text{tang}\,\Theta^2},$$

$$\beta = \sqrt{-\alpha} = \frac{\sqrt{1-k^2\sin\Theta^2}}{\text{tang}\,\Theta} = \frac{\Delta(\Theta)}{\text{tang}\,\Theta}.$$

Folglich

$$\Pi\left(-\frac{1}{\sin\Theta^2},\varphi\right) + \Pi(-k^2\sin\Theta^2,\varphi) = F(\varphi) + \frac{\text{tang}\,\Theta}{2\Delta(\Theta)}\,l\,\frac{\text{tang}\,\Theta\,\Delta(\varphi)+\text{tang}\varphi\,\Delta(\Theta)}{\text{tang}\,\Theta\,\Delta(\varphi)-\text{tang}\varphi\,\Delta(\Theta)},$$

ſo daß ſich alſo $\Pi(-\frac{1}{\sin\Theta^2},\ \varphi)$ immer auf $F(\varphi)$ und das ſchon vorher gefundene $\Pi(-k^2\sin\Theta^2,\ \varphi)$ zurückführen läßt. Für $\varphi = \Theta$ wird der natürliche Logarithmus in vorſtehender Gleichung unendlich, und in der That iſt

Weil aber nach (16.)

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 = \cos\varphi_3 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \varDelta(\varphi_3)$$

iſt; ſo iſt der Zähler und Nenner des Bruchs, von welchem in vorſtehender Formel der natürliche Logarithmus zu nehmen iſt, indem ſich auf erſtern die obern, auf letztern die untern Zeichen beziehen,

$$= 1 - k^2 \sin\Theta^2 + k^4 \sin\Theta^4 \{\cos\varphi_3{}^2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \varDelta(\varphi_3)\}$$
$$\mp k^2 \sin\Theta \cos\Theta \varDelta(\Theta) \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3$$
$$= 1 - k^2 \sin\Theta^2 \sin\varphi_3{}^2$$
$$+ k^2 \sin\Theta \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \{\sin\Theta \cos\varphi_3 \varDelta(\varphi_3) \mp \cos\Theta \sin\varphi_3 \varDelta(\Theta)\}\,.$$

Beſtimmen wir nun die Winkel ψ und ψ' ſo, daß durch dieſelben den Gleichungen

$$F(\Theta) - F(\varphi_3) = F(\psi),\ F(\Theta) + F(\varphi_3) = F(\psi')$$

genügt wird, ſo daß alſo nach (16.)

$$\sin\psi = \frac{\sin\Theta \cos\varphi_3 \varDelta(\varphi_3) - \cos\Theta \sin\varphi_3 \varDelta(\Theta)}{1 - k^2 \sin\Theta^2 \sin\varphi_3{}^2},$$

$$\sin\psi' = \frac{\sin\Theta \cos\varphi_3 \varDelta(\varphi_3) + \cos\Theta \sin\varphi_3 \varDelta(\Theta)}{1 - k^2 \sin\Theta^2 \sin\varphi_3{}^2}$$

iſt; ſo iſt

$$\Pi(-n, \varphi_1) + \Pi(-n, \varphi_2) - \Pi(-n, \varphi_3)$$
$$= \frac{\tang\Theta}{2\varDelta(\Theta)}\, l\, \frac{1 + k^2 \sin\Theta \sin\psi \sin\varphi_1 \sin\varphi_2}{1 + k^2 \sin\Theta \sin\psi' \sin\varphi_1 \sin\varphi_2}\,.$$

Wenn n negativ iſt, ſind nun noch die drei Fälle zu betrachten, wo der abſolute Werth von $n > 1$, $= k^2$ und $= 1$ iſt. In den beiden letzten Fällen wird α offenbar $= 0$. Wir wollen nur noch kurz anzeigen, wie ſich dieſe Fälle auf die vorhergehenden zurückführen laſſen. Setzt man nämlich

$$p = \frac{\tang\varphi}{\varDelta(\varphi)}\,,$$

ſo erhält man durch Differentiation

$$\frac{\partial p}{1 + \alpha p^2} = \frac{\partial\varphi}{\varDelta(\varphi)} \cdot \frac{1 - k^2 \sin\varphi^4}{(1 - k^2 \sin\varphi^2) \cos\varphi^2 + \alpha \sin\varphi^2}\,.$$

Setzt man nun im Nenner für α ſeinen Werth

$$\alpha = (1 - n)\left(1 - \frac{k^2}{n}\right),$$

indem wir nämlich wieder $-n$ für n ſchreiben, ſo wird derſelbe

$$= (1 - k^2 \sin\varphi^2) \cos\varphi^2 + (1 - n)\left(1 - \frac{k^2}{n}\right) \sin\varphi^2$$

$$= 1 - n \sin\varphi^2 + k^2 \sin\varphi^4 - \frac{k^2}{n} \sin\varphi^2$$

$$= 1 - n \sin\varphi^2 - \frac{k^2}{n} \sin\varphi^2 (1 - n \sin\varphi^2)$$

$$= (1 - n \sin\varphi^2)\left(1 - \frac{k^2}{n} \sin\varphi^2\right),$$

und es iſt folglich,

$$\frac{\partial p}{1+\alpha p^2} = \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}\cdot\frac{1-k^2\sin\varphi^4}{(1-n\sin\varphi^2)\left(1-\frac{k^2}{n}\sin\varphi^2\right)}$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}\left\{\frac{1}{1-n\sin\varphi^2}+\frac{1}{1-\frac{k^2}{n}\sin\varphi^2}-1\right\};$$

alſo, da p = 0 für $\varphi = 0$:

$$\int_0^p \frac{\partial p}{1+\alpha p^2}$$

$$=\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{(1-n\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)}+\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\left(1-\frac{k^2}{n}\sin\varphi^2\right)\Delta(\varphi)}-\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}$$

d. i.

$$\int_0^p \frac{\partial p}{1+\alpha p^2} = \Pi(-n,\ \varphi)+\Pi\left(-\frac{k^2}{n},\ \varphi\right)-F(\varphi).$$

Aber, wenn man $p\sqrt{\alpha} = q$, $\partial p\sqrt{\alpha} = \partial q$ ſetzt:

$$\int_0^p \frac{\partial p}{1+\alpha p^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^q \frac{\partial q}{1+q^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\mathrm{Arc\,tang}\,q$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\mathrm{Arc\,tang}\,p\sqrt{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{\sqrt{\alpha}\,\mathrm{tang}\,\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

und folglich immer

$$\Pi(-n,\ \varphi)+\Pi\left(-\frac{k^2}{n},\ \varphi\right) = F(\varphi)+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{\sqrt{\alpha}\,\mathrm{tang}\,\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

oder, wenn α negativ iſt, für $\sqrt{\alpha} = \beta\sqrt{-1}$:

$$\Pi(-n,\ \varphi)+\Pi\left(-\frac{k^2}{n},\ \varphi\right) = F(\varphi)+\frac{1}{2\beta}\,l\,\frac{\Delta(\varphi)+\beta\,\mathrm{tang}\,\varphi}{\Delta(\varphi)-\beta\,\mathrm{tang}\,\varphi}.$$

Iſt nun $n>1$, ſo kann man $n = \frac{1}{\sin\Theta^2}$ ſetzen. Dann iſt

$$\alpha = \left(1-\frac{1}{\sin\Theta^2}\right)(1-k^2\sin\Theta^2) = -\frac{1-k^2\sin\Theta^2}{\mathrm{tang}\,\Theta^2},$$

$$\beta = \sqrt{-\alpha} = \frac{\sqrt{1-k^2\sin\Theta^2}}{\mathrm{tang}\,\Theta} = \frac{\Delta(\Theta)}{\mathrm{tang}\,\Theta}.$$

Folglich

$$\Pi\left(-\frac{1}{\sin\Theta^2},\varphi\right)+\Pi(-k^2\sin\Theta^2,\varphi)=F(\varphi)+\frac{\mathrm{tang}\,\Theta}{2\Delta(\Theta)}\,l\,\frac{\mathrm{tang}\,\Theta\,\Delta(\varphi)+\mathrm{tang}\,\varphi\,\Delta(\Theta)}{\mathrm{tang}\,\Theta\,\Delta(\varphi)-\mathrm{tang}\,\varphi\,\Delta(\Theta)},$$

ſo daß ſich alſo $\Pi\left(-\frac{1}{\sin\Theta^2},\ \varphi\right)$ immer auf $F(\varphi)$ und das ſchon vorher gefundene $\Pi(-k^2\sin\Theta^2,\ \varphi)$ zurückführen läßt. Für $\varphi = \Theta$ wird der natürliche Logarithmus in vorſtehender Gleichung unendlich, und in der That iſt

$$\Pi\left(-\frac{1}{\sin\Theta^2},\ \varphi\right)=\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\Theta^2}\right)\Delta(\varphi)}$$

für $\varphi=\Theta$ unendlich. Wird φ größer als Θ, ſo hat man in der obigen Gleichung den natürlichen Logarithmus einer negativen Größe zu nehmen, ein Symbol des Imaginären, welches damit zuſammenhängt, daß im vorliegenden Falle die durch das Integral

$$\Pi\left(-\frac{1}{\sin\Theta^2},\ \varphi\right)=\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\Theta^2}\right)\Delta(\varphi)}$$

dargeſtellte Summe unendlich große Glieder enthält.

Iſt $n=1$ oder $n=k^2$, ſo iſt $\alpha=0$ und folglich in beiden Fällen

$$\int_0^p\frac{\partial p}{1+\alpha p^2}=\Pi(-1,\ \varphi)+\Pi(-k^2,\ \varphi)-F(\varphi)$$

$$=\int_0^p\partial p=p=\frac{\tang\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

$$\Pi(-1,\varphi)+\Pi(-k^2,\ \varphi)=F(\varphi)+\frac{\tang\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

Nun iſt aber, wie wir ſchon in (9.) geſehen haben,

$$\partial.\Delta(\varphi)\tang\varphi=\frac{k'^2\,\partial\varphi}{\Delta(\varphi)\cos\varphi^2}-\frac{k'^2\,\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}+\Delta(\varphi)\,\partial\varphi,$$

wenn wir ſtatt des dortigen b^2 hier $k'^2=1-k^2$ ſetzen. Alſo

$$\Delta(\varphi)\tang\varphi=k'^2\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2\,\Delta(\varphi)}-k'^2\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}+\int_0^\varphi\Delta(\varphi)\partial\varphi,$$

d. i., weil

$$\Pi(-1,\varphi)=\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{(1-\sin\varphi^2)\,\Delta(\varphi)}=\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2\,\Delta(\varphi)}$$

iſt:

$$\Delta(\varphi)\tang\varphi=k'^2\,\Pi(-1,\ \varphi)-k'^2F(\varphi)+E(\varphi),$$

$$\Pi(-1,\ \varphi)=F(\varphi)-\frac{1}{k'^2}E(\varphi)+\frac{1}{k'^2}\Delta(\varphi)\tang\varphi,$$

und folglich nach der obigen Gleichung zwiſchen $\Pi(-1,\ \varphi)$ und $\Pi(-k^2,\ \varphi)$:

$$\Pi(-k^2,\ \varphi)=\frac{1}{k'^2}E(\varphi)+\frac{\tang\varphi}{\Delta(\varphi)}-\frac{1}{k'^2}\Delta(\varphi)\tang\varphi$$

$$=\frac{1}{k'^2}E(\varphi)-\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{k'^2\,\Delta(\varphi)}.$$

Durch dieſe Formeln ſind alſo $\Pi(-k^2,\ \varphi)$ und $\Pi(-1,\ \varphi)$ auf elliptiſche Functionen der erſten und zweiten Ordnung ge=

bracht, ſo daß uns nach allem Bisherigen nur folgende drei vorher ſchon vollſtändig behandelte Fälle übrig bleiben:

1. Wenn in der Function $\Pi(n, \varphi)$ oder $\Pi(\varphi)$, was nach der eingeführten Bezeichnung daſſelbe iſt, die Größe n poſitiv oder von der Form $n = \cot \Theta^2$ iſt.

2. Wenn n negativ, ſein abſoluter Werth aber $> k^2, < 1$, oder n von der Form

$$n = -1 + k'^2 \sin \Theta^2$$

iſt.

3. Wenn n negativ und ſein abſoluter Werth $< k^2$ oder n von der Form

$$n = -k^2 \sin \Theta^2$$

iſt.

Auch Legendre betrachtet immer nur dieſe drei Fälle, und ſchließt nach einer ausdrücklichen Bemerkung (Traité des fonctions elliptiques. T. I. p. 71.) namentlich den Fall, wenn n negativ und ſein abſoluter Werth größer als die Einheit iſt, ganz aus. Wegen des Falls, wenn n imaginär iſt, müſſen wir hier auf Chap. XXIV. des angeführten Werks oder auf die Exercices de calcul intégral. T. I. p. 147. verweiſen. Mit vieler Leichtigkeit laſſen ſich auch aus den obigen allgemeinen Formeln viele merkwürdige ſpecielle Sätze ableiten, welches aber keiner Schwierigkeit unterliegt, und uns hier, da dieſer Artikel uns noch ein weites Feld allgemeinerer Unterſuchungen darbietet, zu weit führen würde.

XII. Eigenſchaften der Ellipſe und Hyperbel, abgeleitet aus dem Vorhergehenden.

25. Wenn

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

die allgemeine Gleichung einer Ellipſe iſt, hier aber die große Halbaxe $a = 1$, die Excentricität $= \sqrt{1 - b^2} = k$ geſetzt wird; ſo iſt noch (9.) für $x = \sin\varphi$, wenn s den, den Coordinaten x, y entſprechenden, Bogen bezeichnet,

$$s = \int \Delta(\varphi)\, \partial\varphi\,,$$

das Integral zwiſchen den gehörigen Gränzen genommen. Iſt nun in Fig. 2. mit AA_1 und BB_1 als Axen die in Rede ſtehende Ellipſe beſchrieben, ſo denke man ſich über AA_1 als Durchmeſſer, d. i. mit einem der Einheit gleichen Radius einen Kreis beſchrieben, und nehme den Winkel $B'CM' = \varphi$. Dann iſt offenbar, wenn man von M' auf die Hauptaxe ein Perpendikel fällt, $CP = x = \sin\varphi$. Beſtimmt man nun das obige Inte-

gral ſo, daß es für $\varphi = 0$ verſchwindet, oder nimmt es zwiſchen den Gränzen 0 und φ, ſo wird durch daſſelbe offenbar der von dem Endpunkte B der Nebenaxe an gerechnete Bogen $BM = s$ der Ellipſe dargeſtellt, und es iſt folglich in der bekannten Bezeichnung der elliptiſchen Functionen der zweiten Art

$$BM = s = \int_0^\varphi \varDelta(\varphi)\partial\varphi = E(\varphi).$$

Jede elliptiſche Function der zweiten Art ſtellt alſo die Länge eines Bogens der Ellipſe vor, eine Eigenſchaft, von welcher die ganze Klaſſe dieſer Tranſcendenten den Namen erhalten hat, und aus der alſo auch im Allgemeinen hervorgeht, daß jede Eigenſchaft der elliptiſchen Functionen der zweiten Art zugleich eine Eigenſchaft der Ellipſe involvirt, worüber nur einige ſpecielle Bemerkungen beigebracht werden ſollen.

26. Wenn $F(\varphi) + F(\psi) - F(\mu) = 0$, d. i. nach 16.)

$$\cos\mu\cos\psi + \sin\mu\sin\psi\varDelta(\varphi) = \cos\varphi$$
$$\cos\mu\cos\varphi + \sin\mu\sin\varphi\varDelta(\psi) = \cos\psi$$
$$\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\varDelta(\mu) = \cos\mu$$

iſt; ſo iſt nach (22.) immer

$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\mu) = k^2\sin\mu\sin\varphi\sin\psi.$$

Setzen wir nun $\mu = \frac{1}{2}\pi$, ſo iſt $\varDelta(\mu) = \sqrt{1-k^2} = b$; alſo

$$\sin\psi\varDelta(\varphi) = \cos\varphi,\quad \sin\varphi\varDelta(\psi) = \cos\psi;$$
$$\cos\varphi\cos\psi - b\sin\varphi\sin\psi = 0;$$

oder die letzte Gleichung auch

$$b\,\mathrm{tang}\,\varphi\,\mathrm{tang}\,\psi = 1,$$

und dieſe Gleichung entſpricht der Gleichung

$$E(\varphi) + E(\psi) - E\left(\frac{\pi}{2}\right) = k^2\sin\varphi\sin\psi,$$

oder

$$E(\varphi) - \left\{E\left(\frac{\pi}{2}\right) - E(\psi)\right\} = k^2\sin\varphi\sin\psi.$$

Da nun nach (25.) $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$ die Länge des elliptiſchen Quadranten iſt, und die Bogen $E(\varphi)$, $E(\psi)$ von dem Endpunkte der kleinen Axe an gerechnet werden; ſo ergiebt ſich aus vorſtehender Gleichung unmittelbar das folgende merkwürdige zuerſt von Fagnani im Jahre 1718 gefundene Theorem:

Wenn $b\,\mathrm{tang}\,\varphi\,\mathrm{tang}\,\psi = 1$ iſt, ſo laſſen ſich auf dem elliptiſchen Quadranten von dem Endpunkte der kleinen und der großen Axe an immer zwei Bogen der Ellipſe abſchneiden, deren Differenz die algebraiſche Größe $k^2\sin\varphi\sin\psi$ iſt.

Die eine Amplitudo kann man ſich jederzeit willkührlich geben, und die andere mittelſt der Gleichungen

$$\tang\psi = \frac{1}{b}\cot\varphi,\ \tang\varphi = \frac{1}{b}\cot\psi$$

finden.

Merkwürdig iſt es, daß man auch immer leicht eine gerade Linie angeben kann, welche der Differenz der beiden in Rede ſtehenden elliptiſchen Bogen gleich iſt. Sind nämlich in Fig. 3. BM und AN die beiden elliptiſchen Bogen, ſo daß

$$BM - AN = k^2 \sin\varphi \sin\psi$$

iſt, ſo behaupte ich, daß, wenn man durch M und N die beiden Berührenden Mm und Nn zieht, deren Differenz der Differenz der beiden Bogen BM und AN gleich ſeyn wird. Bezieht man nämlich den Punkt N auf die große Axe der Ellipſe, und bezeichnet in Bezug auf dieſelbe die Coordinaten von N durch x, y; ſo iſt nach dem Vorhergehenden und nach (9.)

$$x = \sin\psi,\ y = b\cos\psi\,.$$

Bezieht man aber den Punkt M auf die kleine Axe und bezeichnet ſeine Coordinaten in Bezug auf dieſelbe durch x′, y′; ſo iſt eben ſo

$$x' = b\cos\varphi,\ y' = \sin\varphi\,.$$

Sind nun s und S die reſpective auf der großen und kleinen Axe genommenen Subtangenten der Punkte N und M, ſo iſt nach einer ſchon aus den erſten Elementen der Kegelſchnitte bekannten Formel

$$s = \frac{1-x^2}{x} = \frac{1-\sin\psi^2}{\sin\psi} = \frac{\cos\psi^2}{\sin\psi},$$

$$S = \frac{b^2-x'^2}{x'} = \frac{b^2-b^2\cos\varphi^2}{b\cos\varphi} = \frac{b\sin\varphi^2}{\cos\varphi}\,.$$

Setzt man aber Nn = t, Mm = T, ſo iſt, da $b^2 = 1-k^2$ iſt:

$$t^2 = s^2 + y^2 = \frac{\cos\psi^2(\cos\psi^2 + b^2\sin\psi^2)}{\sin\psi^2} = \frac{\cos\psi^2(1-k^2\sin\psi^2)}{\sin\psi^2},$$

$$T^2 = S^2 + y'^2 = \frac{\sin\varphi^2(\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2)}{\cos\varphi^2} = \frac{\sin\varphi^2(1-k^2\sin\varphi^2)}{\cos\varphi^2};$$

alſo

$$t = \cot\psi\,\Delta(\psi) = \cot\psi\cdot\frac{\cos\psi}{\sin\varphi} = \frac{\cos\psi^2}{\sin\varphi\sin\psi},$$

$$T = \tang\varphi\,\Delta(\varphi) = \tang\varphi\,.\,\frac{\cos\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi};$$

$$T - t = \frac{\sin\varphi^2 - \cos\psi^2}{\sin\varphi\sin\psi}\,.$$

Aber nach dem Obigen

$$\cos\varphi^2\cos\psi^2 = b^2\sin\varphi^2\sin\psi^2 = (1-k^2)\sin\varphi^2\sin\psi^2,$$

$$k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2 = \sin\varphi^2\sin\psi^2 - \cos\varphi^2\cos\psi^2$$

$$= \sin\varphi^2(1-\cos\psi^2) - \cos\psi^2(1-\sin\varphi^2)$$

$$= \sin\varphi^2 - \cos\psi^2;$$

alſo

$$T - t = k^2 \sin\varphi \sin\psi ,$$

d. i.

$$Mm - Nn = BM - AN ,$$

wie behauptet wurde.

Iſt $\varphi = \psi = \Theta$, ſo fallen die beiden Punkte M und N in den einen Punkt K (Fig. 3.) zuſammen. In dieſem Falle iſt

$$b \tang\varphi \tang\psi = b \tang\Theta^2 = 1, \ \tang\Theta = \frac{1}{\sqrt{b}} ;$$

$$\sin\varphi = \sin\psi = \sin\Theta = \sqrt{\frac{1}{1+\cot\Theta^2}} = \sqrt{\frac{1}{1+b}} ;$$

$$\cos\varphi = \cos\psi = \cos\Theta = \sqrt{\frac{1}{1+\tang\Theta^2}} = \sqrt{\frac{b}{1+b}} ;$$

folglich

$$BK - AK = \frac{k^2}{1+b} = \frac{1-b^2}{1+b} = 1 - b ,$$

d. i. die Differenz der Bogen BK und AK der Differenz der beiden Halbaxen gleich. Auch folgt aus dem Obigen auf der Stelle in dieſem Falle

$$BK = \tfrac{1}{2} E\left(\frac{\pi}{2}\right) + \tfrac{1}{2}(1-b) ,$$

$$AK = \tfrac{1}{2} E\left(\frac{\pi}{2}\right) - \tfrac{1}{2}(1-b) ,$$

wo $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$, wie immer, der elliptiſche Quadrant iſt. Denkt man ſich durch K eine Berührende gezogen und bezeichnet die zwiſchen K und der großen und kleinen Axe liegenden Theile derſelben reſpective durch t und T, ſo iſt nach dem Obigen

$$t = \frac{\cos\Theta^2}{\sin\Theta^2} = \cot\Theta^2 = b, \ T = \frac{\sin\Theta}{\sin\Theta} = 1 ,$$

d. i. t der kleinen, T der großen Halbaxe der Ellipſe gleich.

Schneidet man auf dem elliptiſchen Quadranten AB (Fig. 4.) von B aus einen beliebigen Bogen BD ab, und nimmt auf demſelben einen beliebigen Punkt M, ſo läßt ſich auf dem Bogen BD immer ein Punkt N ſo beſtimmen, daß die Differenz der Bogen BM und DN eine algebraiſche Größe iſt. Man beſtimme nämlich die Amplituden φ und ψ der gegebenen Bogen BD und BM, welches, wie aus dem Obigen und Fig. 2. erhellet, immer mittelſt einer leichten Conſtruction möglich iſt. Dann iſt BD $= E(\varphi)$, BM $= E(\psi)$. Berechnet man nun die Winkel φ' und ψ' aus den Formeln

$$\tang\varphi' = \tang\varphi\,\Delta(\psi), \ \tang\psi' = \tang\psi\,\Delta(\varphi) ,$$

und ſetzt $\mu = \varphi' - \psi'$; ſo iſt nach (16.)

$$F(\varphi) - F(\psi) - F(\mu) = 0, \ F(\psi) + F(\mu) - F(\varphi) = 0 ;$$

alſo nach (22.)

$$E(\psi) + E(\mu) - E(\varphi) = k^2 \sin\mu \sin\varphi \sin\psi$$

oder

$$E(\psi) - \{E(\varphi) - E(\mu)\} = k^2 \sin\mu \sin\varphi \sin\psi .$$

Iſt nun N der der Amplitude μ entſprechende Punkt, welcher ſich ebenfalls immer leicht durch Conſtruction finden läßt, ſo iſt BN $= E(\mu)$, BD — BN $= E(\varphi) - E(\mu) =$ DN; alſo

$$BM - DN = k^2 \sin\mu \sin\varphi \sin\psi$$

eine algebraiſche Größe.

27. Wir wollen nun noch zeigen, wie man auf dem elliptiſchen Quadranten immer einen Bogen MN (Fig. 3.) abſchneiden kann, deſſen Länge der Hälfte des elliptiſchen Quadranten gleich iſt. Die Amplitude des Punktes M ſey $= \varphi$, die des Punktes N $= \psi$, und Θ ſey die Amplitude des in (26.) in derſelben Figur K genannten Punktes; ſo iſt nach (26.)

$$\sin\Theta^2 = \frac{1}{1+b},\ BK = E(\Theta) = \tfrac{1}{2}E\left(\frac{\pi}{2}\right) + \tfrac{1}{2}(1-b) .$$

Nun denke man ſich φ, ψ ſo beſtimmt, daß

$$F(\varphi) + F(\Theta) - F(\psi) = 0$$

iſt; dann iſt nach (22.)

$$E(\varphi) + E(\Theta) - E(\psi) = k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\Theta ;$$

alſo

$$E(\psi) - E(\varphi) = \tfrac{1}{2}E\left(\frac{\pi}{2}\right) + \tfrac{1}{2}(1-b) - k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\Theta .$$

Da nun

$$MN = BN - BM = E(\psi) - E(\varphi) = \tfrac{1}{2}E\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

ſeyn ſoll, ſo muß

$$k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\Theta = \tfrac{1}{2}(1-b) ,$$
$$(1-b^2)\sin\varphi \sin\psi \sin\Theta^2 = \tfrac{1}{2}(1-b)\sin\Theta ,$$
$$(1+b)\sin\varphi \sin\psi \sin\Theta^2 = \tfrac{1}{2}\sin\Theta ,$$
$$\sin\varphi \sin\psi = \tfrac{1}{2}\sin\Theta$$

ſeyn. Wegen der Gleichung

$$F(\varphi) + F(\Theta) - F(\psi) = 0$$

iſt aber nach (16.)

$$\cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi\, \Delta(\Theta) = \cos\Theta ,$$

und

$$\Delta(\Theta) = \sqrt{1 - k^2 \sin\Theta^2} = \sqrt{1 - \frac{1-b^2}{1+b}} = \sqrt{b} ;$$

alſo

$$\cos\varphi \cos\psi + \tfrac{1}{2}\sin\Theta\sqrt{b} = \cos\Theta ,$$

d. i., weil

$$\cos\Theta = \sqrt{\frac{b}{1+b}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{1+b}} = \sin\Theta\sqrt{b}$$

iſt:

$$\cos\varphi\cos\psi = \tfrac{1}{2}\cos\Theta,$$

ſo daß man alſo zur Beſtimmung von φ und ψ jetzt die folgenden zwei Gleichungen hat:

$$\sin\varphi\sin\psi = \tfrac{1}{2}\sin\Theta,\ \cos\varphi\cos\psi = \tfrac{1}{2}\cos\Theta.$$

Durch Addition und Subtraction dieſer Gleichungen erhält man

$$\begin{aligned}\cos(\varphi-\psi) &= \tfrac{1}{2}(\cos\Theta + \sin\Theta)\\ &= \tfrac{1}{2}\left\{\cos\Theta + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\Theta\right)\right\}\\ &= \cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\Theta - \frac{\pi}{4}\right)\\ \cos(\varphi+\psi) &= \tfrac{1}{2}(\cos\Theta - \sin\Theta)\\ &= \tfrac{1}{2}\left\{\cos\Theta + \cos\left(\frac{\pi}{2}+\Theta\right)\right\}\\ &= \cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\Theta + \frac{\pi}{4}\right),\end{aligned}$$

wodurch ſich alſo die geſuchten Amplituden φ, ψ beide finden laſſen. Die Sinus der Winkel φ und ψ ſind die Abſciſſen der beiden Punkte M und N. Dieſe Sinus würden ſich auch leicht durch $\sin\Theta$ unmittelbar ausdrücken laſſen, wobei wir aber nicht länger verweilen.

Aehnliche Aufgaben findet man mehrere in Legendre Traité des fonctions elliptiques. T. I. p. 49.

28. Den vorhergehenden Sätzen von der Ellipſe fügen wir nun noch einige allgemeine Bemerkungen über die, analoge Eigenſchaften darbietende, Hyperbel bei. Aus (9.) wiſſen wir, daß, wenn die Excentricität der Hyperbel $= 1$, die halbe große Axe $= k$, die halbe kleine Axe $= b$, alſo $k^2 = 1 - b^2$, $b^2 = 1 - k^2$, der Bogen $= s$, und

$$y = b^2\operatorname{tang}\varphi,\ x = \frac{k}{\cos\varphi}\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2} = \frac{k}{\cos\varphi}\Delta(\varphi)$$

geſetzt wird,

$$s = \Delta(\varphi)\operatorname{tang}\varphi + b^2\int\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} - \int\Delta(\varphi)\,\partial\varphi$$

iſt, wenn nur die Integrale zwiſchen den gehörigen Gränzen genommen werden. Denkt man ſich nun die Integrale ſo beſtimmt, daß ſie für $x = k$, d. i. $y = 0$ oder $\varphi = 0$ verſchwinden, ſo wird der Bogen s offenbar von dem Scheitel A (Fig. 5.) an gerechnet, und es iſt folglich, für $CP = x$ und $PM = y$, in der bekannten Bezeichnung der elliptiſchen Functionen

$$s = AM = \Delta(\varphi)\operatorname{tang}\varphi + b^2F(\varphi) - E(\varphi).$$

Denken wir uns nun die Amplituden φ, ψ, μ wieder ſo beſtimmt, daß ſie der Gleichung

$$F(\varphi) + F(\psi) - F(\mu) = 0$$

genügen, und bezeichnen die entſprechenden Bogen der Hyperbel durch $H(\varphi)$, $H(\psi)$, $H(\mu)$; ſo iſt

$$H(\varphi) = \Delta(\varphi)\operatorname{tang}\varphi + b^2 F(\varphi) - E(\varphi),$$
$$H(\psi) = \Delta(\psi)\operatorname{tang}\psi + b^2 F(\psi) - E(\psi),$$
$$H(\mu) = \Delta(\mu)\operatorname{tang}\mu + b^2 F(\mu) - E(\mu);$$

alſo durch Addition der erſten und zweiten und Subtraction der dritten Gleichung:

$$H(\varphi) + H(\psi) - H(\mu) =$$
$$\Delta(\varphi)\operatorname{tang}\varphi + \Delta(\psi)\operatorname{tang}\psi - \Delta(\mu)\operatorname{tang}\mu - \{E(\varphi) + E(\psi) - E(\mu)\}$$

d. i. nach (22.)

$$H(\varphi) + H(\psi) - H(\mu) =$$
$$\Delta(\varphi)\operatorname{tang}\varphi + \Delta(\psi)\operatorname{tang}\psi - \Delta(\mu)\operatorname{tang}\mu - k^2 \sin\mu \sin\varphi \sin\psi,$$

wo das Aggregat auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens eine algebraiſche Größe iſt.

Denkt man ſich durch M eine Berührende der Hyperbel gezogen und auf dieſelbe von dem Mittelpunkte C das Perpendikel CQ gefällt, ſo läßt ſich zeigen, daß der Theil MQ dieſer Berührenden $= \Delta(\varphi)\operatorname{tang}\varphi$ iſt. Nach bekannten Sätzen von der Hyperbel iſt nämlich die Subtangente

$$PT = \frac{x^2 - k^2}{x} = \frac{k(1 - k^2)\operatorname{tang}\varphi^2 \cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin\varphi^2}}$$
$$= \frac{k b^2 \operatorname{tang}\varphi^2 \cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin\varphi^2}} = \frac{k y \sin\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin\varphi^2}} = \frac{k y \sin\varphi}{\Delta(\varphi)};$$

folglich

$$MT^2 = \frac{k^2 y^2 \sin\varphi^2}{1 - k^2 \sin\varphi^2} + y^2,\quad MT = \frac{y}{\Delta(\varphi)}.$$

Ferner iſt

$$CT = x - PT = \frac{k^2}{x} = \frac{k\cos\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

Aber

$$MT : PT = CT : TQ,$$

$$1 : k\sin\varphi = \frac{k\cos\varphi}{\Delta(\varphi)} : TQ,\quad TQ = \frac{k^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)};$$

folglich

$$MQ = MT + TQ = \frac{b^2 \operatorname{tang}\varphi + k^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)}$$
$$= \frac{(1 - k^2)\sin\varphi + k^2 \sin\varphi\cos\varphi^2}{\Delta(\varphi)\cos\varphi}$$
$$= \frac{\sin\varphi(1 - k^2 \sin\varphi^2)}{\cos\varphi\,\Delta(\varphi)} = \Delta(\varphi)\operatorname{tang}\varphi,$$

wie behauptet wurde. Bezeichnen wir nun die Differenz

$$MQ - AM = \Delta(\varphi)\,\mathrm{tang}\,\varphi - H(\varphi)$$

durch $G(\varphi)$; ſo folgt aus dem Obigen auf der Stelle die überaus merkwürdige Gleichung

$$G(\varphi) + G(\psi) - G(\mu) = k^2 \sin\mu \sin\varphi \sin\psi\,,$$

welche mit der analogen Gleichung bei der Ellipſe in (26.) eine ganz übereinſtimmende Form hat. Dieſe Gleichung würde zu ganz ähnlichen Betrachtungen wie die in (26.) und (27.) bei der Ellipſe angeſtellten Veranlaſſung geben, wenn wir dieſelben hier der Beſchränktheit des Raums wegen nicht übergehen müßten, da ſie überdies nach dem Vorhergehenden keiner Schwierigkeit unterworfen ſind. Den Amplituden darf bei der Hyperbel kein Werth, der größer als $\frac{1}{2}\pi$ iſt, beigelegt werden, weil für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ der entſprechende Bogen der Hyperbel unendlich wird.

Die nöthigen hierher gehörenden hiſtoriſchen und literariſchen Nachweiſungen ſ. m. Thl. IV. S. 249. Auch vergl. man den Artikel Lemniscata.

29. Noch wollen wir hier eine höchſt merkwürdige von Landen gefundene Vergleichung der Bogen der Ellipſe und Hyperbel beweiſen, indem wir dabei von folgendem auch für die Theorie der elliptiſchen Functionen überhaupt wichtigen Satze ausgehen:

Wenn zwiſchen k, k_1, φ, φ_1 die beiden Gleichungen

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},\quad \sin(2\varphi_1 - \varphi) = k\sin\varphi$$

Statt finden, und jetzt

$$F(k,\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}},\quad F(k_1,\varphi_1) = \int_0^{\varphi_1} \frac{\partial\varphi_1}{\sqrt{1-k_1^2\sin\varphi_1^2}}$$

geſetzt wird; ſo iſt immer

$$F(k_1,\varphi_1) = \frac{1+k}{2}F(k,\varphi)\,.$$

Aus der Gleichung $\sin(2\varphi_1 - \varphi) = k\sin\varphi$ folgt auf der Stelle

$$\cos(2\varphi_1 - \varphi) = \sqrt{1-k^2\sin\varphi^2} = \Delta(k,\varphi)\,.$$

Alſo iſt

$$\sin 2\varphi_1 \cos\varphi - \cos 2\varphi_1 \sin\varphi = k\sin\varphi\,,$$
$$\cos 2\varphi_1 \cos\varphi + \sin 2\varphi_1 \sin\varphi = \Delta(k,\varphi)\,.$$

Werden dieſe beiden Gleichungen reſpective zuerſt mit $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, dann mit $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ multiplicirt, und im erſten Falle zu einander addirt, im zweiten von einander ſubtrahirt, ſo erhält man

$$\sin 2\varphi_1 = \sin\varphi\{k\cos\varphi + \Delta(k,\varphi)\}\,,$$
$$\cos 2\varphi_1 = \Delta(k,\varphi)\cos\varphi - k\sin\varphi^2\,;$$

alſo aus dieſer letzten Gleichung

$$2\cos\varphi_1^2 = 1 - k\sin\varphi^2 + \Delta(k,\varphi)\cos\varphi\,,$$
$$2\sin\varphi_1^2 = 1 + k\sin\varphi^2 - \Delta(k,\varphi)\cos\varphi\,.$$

Hieraus ergiebt ſich

$$4\sin\varphi_1\cos\varphi_1\,\partial\varphi_1 = \frac{\{k\cos\varphi + \Delta(k,\varphi)\}^2\sin\varphi\,\partial\varphi}{\Delta(k,\varphi)}\,,$$

und, wenn man

$$2\sin\varphi_1\cos\varphi_1 = \sin 2\varphi_1$$

ſetzt, nach dem Obigen:

$$2\partial\varphi_1 = \frac{\partial\varphi}{\Delta(k,\varphi)}\{k\cos\varphi + \Delta(k,\varphi)\}\,.$$

Ferner findet man auch leicht

$$(k_1,\varphi_1) = \sqrt{1-k_1^2\sin\varphi_1^2} = \frac{k\cos\varphi + \Delta(k,\varphi)}{1+k}\,,$$

wenn man nur bedenkt, daß nach der Vorausſetzung

$$k_1^2 = \frac{4k}{(1+k)^2}$$

iſt.

Durch Diviſion ergiebt ſich hieraus

$$\frac{\partial\varphi_1}{\Delta(k_1,\varphi_1)} = \frac{1+k}{2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\Delta(k,\varphi)}\,,$$

und folglich, wenn man φ und φ_1 zugleich verſchwinden oder beide Bogen bei Null anfangen läßt:

$$\int_0^{\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\Delta(k_1,\varphi_1)} = \frac{1+k}{2}\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\Delta(k,\varphi)}\,,$$

d. i. in der eingeführten Bezeichnung

$$F(k_1,\varphi_1) = \frac{1+k}{2}F(k,\varphi)\,.$$

Zu bemerken iſt hierbei noch, daß man, wie man ſich leicht überzeugen wird, weil $\cos(2\varphi_1-\varphi) = \Delta(k,\varphi)$, alſo, ſo wie $\Delta(k,\varphi)$, immer poſitiv iſt, φ_1 oder φ, wenn reſpective φ oder φ_1 gegeben iſt, jederzeit ſo beſtimmen muß, daß $2\varphi_1 - \varphi$ ohne Rückſicht auf ſein Zeichen der kleinſte Bogen iſt, für welchen $\sin(2\varphi_1 - \varphi) = k\sin\varphi$ iſt. Man hat, um dies deutlich einzuſehen nur zu beachten, wie φ und φ_1 beide von Null an ſich nach und nach gleichzeitig ſtetig verändern. Für $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$ iſt

$$\sin(2\varphi_1 - \varphi) = \sin(\pi-\varphi) = \sin\varphi = k\sin\varphi$$

für jedes k; alſo offenbar $\sin\varphi = 0$. Ferner iſt für denſelben Werth von φ_1

$$\cos(2\varphi_1 - \varphi) = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi = 1\,,$$

da $\sin\varphi = 0$ iſt und

$$\varDelta(k, \varphi) = \sqrt{1 - k^2 \sin\varphi^2}$$

immer poſitiv genommen wird. Man hat alſo $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = -1$; folglich offenbar $\varphi = \pi$, wie auch ſogleich erhellet, weil nach der obigen allgemeinen Bemerkung für $2\varphi_1 - \varphi = \pi - \varphi$ ohne Rückſicht auf das Zeichen der kleinſte Bogen zu nehmen iſt, für welchen $\sin(2\varphi_1 - \varphi) = k\sin\varphi$, d. i. in dieſem Falle $\sin(2\varphi_1 - \varphi) = \sin(\pi - \varphi) = 0$ iſt, welches $\pi - \varphi = 0$, $\varphi = \pi$ giebt. Aus unſerer obigen allgemeinen Gleichung ergiebt ſich alſo in dieſem Falle

$$F\left(k_1, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1+k}{2} F(k, \pi).$$

Nun iſt aber offenbar (vergl. 10.)

$$F(k, \pi) = 2F\left(k, \frac{\pi}{2}\right),$$

und man hat alſo die folgende ſehr merkwürdige Gleichung zwiſchen den vollſtändigen elliptiſchen Functionen der erſten Art:

$$F\left(k_1, \frac{\pi}{2}\right) = (1+k) F\left(k, \frac{\pi}{2}\right),$$

wobei man zu merken hat, daß zwiſchen k und k_1 die Gleichung

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}.$$

Statt findet.

Setzen wir nun ferner

$$E(k_1, \varphi_1) = \int_0^{\varphi_1} \varDelta(k_1, \varphi_1)\partial\varphi_1,$$

d. i. nach dem Obigen

$$2(1+k)E(k_1, \varphi_1) = \int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\varDelta(k, \varphi)} \{k\cos\varphi + \varDelta(k, \varphi)\}^2,$$

oder, wenn man

$$\{k\cos\varphi + \varDelta(k,\varphi)\}^2 = k^2\cos\varphi^2 + 2k\varDelta(k, \varphi)\cos\varphi + 1 - k^2\sin\varphi^2$$
$$= 2(\varDelta(k, \varphi))^2 + 2k\varDelta(k, \varphi)\cos\varphi - k'^2$$

ſetzt, wo $k'^2 = 1 - k^2$ iſt:

$$2(1+k)E(k_1, \varphi_1) =$$
$$= 2\int_0^{\varphi} \varDelta(k, \varphi)\partial\varphi + 2k\int_0^{\varphi} \cos\varphi\,\partial\varphi - k'^2\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\varDelta(k, \varphi)},$$

d. i.

$$(1+k)E(k_1, \varphi_1) = E(k, \varphi) - \tfrac{1}{2}k'^2 F(k, \varphi) + k\sin\varphi,$$

oder

$$k'^2 F(k, \varphi) = 2E(k, \varphi) - 2(1+k)E(k_1, \varphi_1) + 2k\sin\varphi,$$

woraus man alſo ſieht, daß jede elliptiſche Function der erſten

Art $F(k, \varphi)$ durch die beiden elliptiſchen Functionen $E(k, \varphi)$ und $E(k_1, \varphi_1)$ ausgedrückt werden kann. Bezeichnen wir nun den in (28.) durch $H(\varphi)$ bezeichneten Bogen der Hyperbel jetzt durch $H(k, \varphi)$, wo k die halbe große Axe der Hyperbel bezeichnet, die Excentricität = 1 geſetzt, ſo iſt nach (28.)

$$H(k, \varphi) = \Delta(k, \varphi)\tang\varphi + b^2 F(k, \varphi) - E(k, \varphi),$$

für $b^2 = 1 - k^2 = k'^2$, indem a. a. O. die kleine Halbaxe der Hyperbel durch b bezeichnet worden iſt. Alſo, weil nach dem Vorhergehenden, indem man b für k' ſetzt,

$$b^2 F(k, \varphi) = 2E(k, \varphi) - 2(1+k)E(k_1, \varphi_1) + 2k\sin\varphi$$

iſt:

$$H(k, \varphi) = \Delta(k, \varphi)\tang\varphi + E(k, \varphi) - 2(1+k)E(k_1, \varphi_1) + 2k\sin\varphi,$$

woraus man alſo ſieht, daß jeder Bogen $H(k, \varphi)$ einer Hyperbel ſich durch die beiden elliptiſchen Bogen $E(k, \varphi)$ und $E(k_1, \varphi_1)$ (ſ. 25.) ausdrücken läßt, welches der berühmte von Landen gefundene und in den Philosophical Transactions. 1775. zuerſt bekannt gemachte Satz iſt. Auch ſ. m. Mathematical Memoirs by John Landen. 1780. und den Artikel Rectification (35.) in dieſem Wörterbuche. Umgekehrt würde ſich aus dem Obigen auch leicht ableiten laſſen, daß jeder Bogen der Ellipſe immer durch zwei Bogen der Hyperbel dargeſtellt oder gemeſſen werden kann.

Ueber das gegenſeitige Verhalten von k und k_1 iſt zu bemerken, daß k_1 zwar immer größer als k, aber kleiner als die Einheit iſt, wobei man zu beobachten hat, daß k immer kleiner als die Einheit iſt. Es iſt nämlich

$$(1-k)^2 > 0,\quad 1 - 2k + k^2 > 0;$$
$$1 + 2k + k^2 > 4k,\quad (1+k)^2 > 4k;$$
$$\frac{4k}{(1+k)^2} < 1,\quad k_1^2 < 1,\quad k_1 < 1.$$

Ferner iſt $1 + k < 2$, $(1+k)^2 < 4$, alſo

$$\frac{4}{(1+k)^2} > 1 \text{ und um ſo mehr } \frac{4}{(1+k)^2} > k;$$

alſo auch

$$\frac{4k}{(1+k)^2} > k^2,\quad k_1^2 > k^2,\quad k_1 > k.$$

Auch iſt

$$1 - k_1^2 = (1-k_1)(1+k_1) = 1 - \frac{4k}{(1+k)^2} = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2$$

$$1 - k_1 = \frac{(1-k)^2}{(1+k)^2(1+k_1)} = \frac{(1-k)^2}{(1+k)(1+2\sqrt{k}+k)},$$

wodurch die Differenz zwiſchen k_1 und 1 beſtimmt wird.

XIII. Beweis verſchiedener merkwürdiger Gleichungen zwiſchen den elliptiſchen Functionen der erſten und zweiten Art und ihren nach k oder k′ genommenen Differentialquotienten.

30. Bekanntlich iſt

$$E(\varphi)=\int_0^\varphi \Delta(\varphi)\partial\varphi,\quad F(\varphi)=\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)};$$

alſo nach dem Artikel Beſtimmtes Integral (18.), wenn man unter dem Integralzeichen nach k differentiirt:

$$\frac{\partial E(\varphi)}{\partial k}=\int_0^\varphi \frac{\partial\Delta(\varphi)}{\partial k}\partial\varphi,\quad \frac{\partial F(\varphi)}{\partial k}=-\int_0^\varphi \frac{\partial\Delta(\varphi)}{(\Delta(\varphi))^2\partial k}\partial\varphi.$$

Nun iſt aber

$$(\Delta(\varphi))^2=1-k^2\sin\varphi^2,\quad \frac{\partial\Delta(\varphi)}{\partial\varphi}=-\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)};$$

$$\frac{\partial^2\Delta(\varphi)}{\partial\varphi^2}=-k^2\frac{(\cos\varphi^2-\sin\varphi^2)(\Delta(\varphi))^2+k^2\sin\varphi^2\cos\varphi^2}{(\Delta(\varphi))^3}$$

$$=-k^2\frac{\cos\varphi^2-(1-k^2\sin\varphi^2)\sin\varphi^2}{(\Delta(\varphi))^3}$$

$$=-k^2\frac{1-2\sin\varphi^2+k^2\sin\varphi^4}{(\Delta(\varphi))^3}$$

$$=-\frac{k^2-2k^2\sin\varphi^2+k^4\sin\varphi^4}{(\Delta(\varphi))^3}$$

$$=\frac{k'^2-(1-2k^2\sin\varphi^2+k^4\sin\varphi^4)}{(\Delta(\varphi))^3}$$

$$=\frac{k'^2}{(\Delta(\varphi))^3}-(\Delta(\varphi),$$

$$\frac{\partial\varphi}{(\Delta(\varphi))^3}=\frac{1}{k'^2}\Delta(\varphi)\partial\varphi+\frac{\partial^2\Delta(\varphi)}{k'^2\partial\varphi^2}\partial\varphi;$$

und ferner

$$\frac{\partial\Delta(\varphi)}{\partial k}=-\frac{k\sin\varphi^2}{\Delta(\varphi)}=\frac{1}{k}\cdot\frac{1-k^2\sin\varphi^2-1}{\Delta(\varphi)}$$

$$=\frac{1}{k}\left\{\Delta(\varphi)-\frac{1}{\Delta(\varphi)}\right\},$$

$$\frac{\partial\Delta(\varphi)}{(\Delta(\varphi))^2\partial k}=\frac{1}{k}\left\{\frac{1}{\Delta(\varphi)}-\frac{1}{(\Delta(\varphi))^3}\right\};$$

folglich

$$\int_0^\varphi \frac{\partial\Delta(\varphi)}{\partial k}\partial\varphi=\frac{1}{k}\left\{\int_0^\varphi \Delta(\varphi)\partial\varphi-\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}\right\},$$

$$\int_0^\varphi \frac{\partial \Delta(\varphi)}{(\Delta(\varphi))^2 \partial k} \partial\varphi = \frac{1}{k}\left\{\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} - \int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{(\Delta(\varphi))^3}\right\}$$

$$= \frac{1}{k}\left\{\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} - \frac{1}{k'^2}\int_0^\varphi \Delta(\varphi)\partial\varphi - \frac{1}{k'^2}\int_0^\varphi \frac{\partial^2 \Delta(\varphi)}{\partial\varphi^2}\partial\varphi\right\}$$

$$= \frac{1}{k}\left\{\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} - \frac{1}{k'^2}\int_0^\varphi \Delta(\varphi)\partial\varphi - \frac{\partial \Delta(\varphi)}{k'^2 \partial\varphi}\right\}$$

$$= \frac{1}{k}\left\{\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} - \frac{1}{k'^2}\int_0^\varphi \Delta(\varphi)\partial\varphi + \frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{k'^2 \Delta(\varphi)}\right\};$$

alſo nach dem Obigen

$$\frac{\partial E(\varphi)}{\partial k} = \frac{1}{k}\left\{E(\varphi) - F(\varphi)\right\},$$

$$\frac{\partial F(\varphi)}{\partial k} = \frac{1}{k k'^2}\left\{E(\varphi) - k'^2 F(\varphi)\right\} - \frac{k \sin\varphi \cos\varphi}{k'^2 \Delta(\varphi)};$$

und folglich

$$F(\varphi) = E(\varphi) - k\frac{\partial E(\varphi)}{\partial k},$$

$$E(\varphi) = k'^2\left\{F(\varphi) + k\frac{\partial F(\varphi)}{\partial k}\right\} + \frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

Aus der erſten dieſer beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\partial F(\varphi)}{\partial k} = \frac{\partial E(\varphi)}{\partial k} - k\frac{\partial^2 E(\varphi)}{\partial k^2} - \frac{\partial E(\varphi)}{\partial k} = -k\frac{\partial^2 E(\varphi)}{\partial k^2};$$

alſo, wenn man dieſen Ausdruck und den Werth von $F(\varphi)$ aus der erſten Gleichung in die zweite Gleichung, zugleich aber $k'^2 = 1 - k^2$ ſetzt, nach leichter Rechnung:

$$(1-k^2)\frac{\partial^2 E(\varphi)}{\partial k^2} + \frac{1-k^2}{k}.\frac{\partial E(\varphi)}{\partial k} + E(\varphi) - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)} = 0.$$

Ganz auf ähnliche Art erhält man aus der zweiten der beiden obigen Gleichungen

$$\frac{\partial E(\varphi)}{\partial k} = k'^2\left\{2\frac{\partial F(\varphi)}{\partial k} + k\frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial k^2}\right\} - 2k\left\{F(\varphi) + k\frac{\partial F(\varphi)}{\partial k}\right\}$$
$$+ \frac{2k\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)} + \frac{k^3 \sin\varphi^3 \cos\varphi}{(\Delta(\varphi))^3}$$
$$= k'^2\left\{2\frac{\partial F(\varphi)}{\partial k} + k\frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial k^2}\right\} - 2k\left\{F(\varphi) + k\frac{\partial F(\varphi)}{\partial k}\right\}$$
$$+ \frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)} + \frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{(\Delta(\varphi))^3};$$

alſo nach gehöriger Subſtitution dieſes Ausdrucks und des Ausdrucks von $E(\varphi)$ in den obigen Ausdruck von $F(\varphi)$, indem man zugleich $k'^2 = 1 - k^2$ ſetzt, nach leichter Rechnung:

$$(1-k^2)\frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial k^2} + \frac{1-3k^2}{k}.\frac{\partial F(\varphi)}{\partial k} - F(\varphi) + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(\Delta(\varphi))^3} = 0,$$

ſo daß wir alſo die beiden Gleichungen

$$(1-k^2)\frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial k^2}+\frac{1-3k^2}{k}.\frac{\partial F(\varphi)}{\partial k}-F(\varphi)+\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(\Delta(\varphi))^3}=0,$$

$$(1-k^2)\frac{\partial^2 E(\varphi)}{\partial k^2}+\frac{1-k^2}{k}.\frac{\partial E(\varphi)}{\partial k}+E(\varphi)-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)}=0;$$

und, wenn wir $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, der Kürze wegen aber immer

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=F',\ E\left(\frac{\pi}{2}\right)=E'$$

ſetzen, die beiden Gleichungen

$$(1-k^2)\frac{\partial^2 F'}{\partial k^2}+\frac{1-3k^2}{k}.\frac{\partial F'}{\partial k}-F'=0,$$

$$(1-k^2)\frac{\partial^2 E'}{\partial k^2}+\frac{1-k^2}{k}.\frac{\partial E'}{\partial k}+E'=0$$

haben.

Um nun in dieſe Gleichungen ſtatt der veränderlichen Größe k die veränderliche Größe k′ einzuführen, wollen wir zuerſt ſehen, was man, wenn y überhaupt eine Function von k iſt, für $\frac{\partial y}{\partial k}$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial k^2}$ ſetzen muß. Da $k'^2=1-k^2$ iſt, ſo iſt

$$\frac{\partial k'}{\partial k}=-\frac{k}{k'};$$

alſo nach dem Artikel Differentialrechnung. 4. i. d. Z.

$$\frac{\partial y}{\partial k}=\frac{\partial y}{\partial k'}.\frac{\partial k'}{\partial k}=-\frac{k}{k'}.\frac{\partial y}{\partial k'},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial k^2}=-\frac{k}{k'}.\frac{\partial^2 y}{\partial k'^2}.\frac{\partial k'}{\partial k}-\frac{\partial y}{\partial k'}.\frac{k'+\frac{k^2}{k'}}{k'^2}$$

$$=\frac{k^2}{k'^2}.\frac{\partial^2 y}{\partial k'^2}-\frac{k^2+k'^2}{k'^3}.\frac{\partial y}{\partial k'}=\frac{k^2}{k'^2}.\frac{\partial^2 y}{\partial k'^2}-\frac{1}{k'^3}.\frac{\partial y}{\partial k'}.$$

Macht man nach dieſen Formeln die gehörigen Subſtitutionen, ſo erhält man:

$$(1-k'^2)\frac{\partial^2 F'}{\partial k'^2}+\frac{1-3k'^2}{k'}.\frac{\partial F'}{\partial k'}-F'=0,$$

$$(1-k'^2)\frac{\partial^2 E'}{\partial k'^2}-\frac{1+k'^2}{k'}.\frac{\partial E'}{\partial k'}+E'=0.$$

31. Die im Vorhergehenden bewieſenen Gleichungen ſind eine reiche Quelle merkwürdiger Sätze, von denen wir jedoch hier nur vorzüglich auf einen aufmerkſam machen wollen. Nach (30.) iſt nämlich

$$\frac{\partial E'}{\partial k}=\frac{1}{k}\{E'-F'\},\ \frac{\partial F'}{\partial k}=\frac{1}{kk'^2}\{E'-k'^2F'\}.$$

Bezeichnet man nun die dem Modulus k′ entſprechenden elliptiſchen Functionen durch E_1 und F_1, ſo iſt eben ſo

$$\frac{\partial E_1}{\partial k'} = \frac{1}{k'}\{E_1 - F_1\},\quad \frac{\partial F_1}{\partial k'} = \frac{1}{k'k^2}\{E_1 - k^2 F_1\},$$

oder nach (30.)

$$-\frac{k'}{k}\cdot\frac{\partial E_1}{\partial k} = \frac{1}{k'}\{E_1 - F_1\},\quad -\frac{k'}{k}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial k} = \frac{1}{k'k^2}\{E_1 - k^2 F_1\};$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial k} = -\frac{k}{k'^2}\{E_1 - F_1\},\quad \frac{\partial F_1}{\partial k} = -\frac{1}{kk'^2}\{E_1 - k^2 F_1\}.$$

Setzen wir aber die Größe

$$F'E_1 + F_1 E' - F'F_1 = Z;$$

ſo iſt

$$\frac{\partial Z}{\partial k} = F'\frac{\partial E_1}{\partial k} + E_1\frac{\partial F'}{\partial k} + F_1\frac{\partial E'}{\partial k} + E'\frac{\partial F_1}{\partial k} - F'\frac{\partial F_1}{\partial k} - F_1\frac{\partial F'}{\partial k},$$

d. i. nach gehöriger Subſtitution der für die Differentialquotienten vorher gefundenen Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial k} = &-\frac{k}{k'^2}F'(E_1 - F_1) + \frac{1}{kk'^2}E_1(E' - k'^2 F')\\ &+\frac{1}{k}F_1(E' - F') - \frac{1}{kk'^2}E'(E_1 - k^2 F_1)\\ &+\frac{1}{kk'^2}F'(E_1 - k^2 F_1) - \frac{1}{kk'^2}F_1(E' - k'^2 F')\\ = {} & F'E_1\left\{-\frac{k}{k'^2} - \frac{1}{k} + \frac{1}{kk'^2}\right\}\\ &+ E'F_1\left\{\frac{1}{k} + \frac{k}{k'^2} - \frac{1}{kk'^2}\right\}\\ &+ F'F_1\left\{\frac{k}{k'^2} - \frac{1}{k} - \frac{k}{k'^2} + \frac{1}{k}\right\}\\ &+ E'E_1\left\{\frac{1}{kk'^2} - \frac{1}{kk'^2}\right\}.\end{aligned}$$

Aber

$$\frac{1}{k} + \frac{k}{k'^2} - \frac{1}{kk'^2} = \frac{k^2 + k'^2 - 1}{kk'^2} = 0.$$

Alſo

$$\partial Z = 0,\quad Z = \text{Const};$$

d. i. für jedes k die Größe

$$F'E_1 + F_1 E' - F'F_1 = \text{Const},$$

ſo daß man alſo den Werth dieſer Größe für jedes k kennt, wenn man denſelben für irgend einen beſtimmten Werth von k kennt.

Setzen wir nun $k = 0$, alſo $k' = 1$, ſo iſt, wenn wir jetzt, wie auch ſchon früher mehrere Mal, in die Bezeichnung der elliptiſchen Functionen das Symbol des Modulus mit aufnehmen,

$$F(0,\varphi)=\int_0^\varphi \partial\varphi=\varphi,\ E(0,\varphi)=\int_0^\varphi \partial\varphi=\varphi;$$

$$F(1,\varphi)=\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi},\ E(1,\varphi)=\int_0^\varphi \cos\varphi\,\partial\varphi=\sin\varphi;$$

alſo

$$F(0,\varphi)E(1,\varphi)+F(1,\varphi)E(0,\varphi)-F(0,\varphi)F(1,\varphi)$$
$$=\varphi\sin\varphi+\varphi\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi}-\varphi\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi},$$

d. i., weil das zweite und dritte Glied auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ſich immer gegenſeitig aufheben, auch ſelbſt dann, wenn das Integral, wie es z. B. für $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, da für dieſen Werth $\cos\varphi=0$ iſt, in der That der Fall iſt, unendlich wird, immer

$$F(0,\varphi)E(1,\varphi)+F(1,\varphi)E(0,\varphi)-F(0,\varphi)F(1,\varphi)=\varphi\sin\varphi,$$

und folglich, wenn man $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ ſetzt, in dem Falle, wo $k=0$, $k'=1$ iſt:

$$F'E_1+F_1E'-F'F_1=\tfrac{1}{2}\pi;$$

alſo nach dem Obigen immer

$$F'E_1+F_1E'-F'F_1=\tfrac{1}{2}\pi,$$

oder, was daſſelbe iſt:

$$F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)E\left(k',\frac{\pi}{2}\right)+F\left(k',\frac{\pi}{2}\right)E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)-F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)F\left(k',\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},$$

für jedes k, eine Gleichung, welche offenbar einen ſehr merkwürdigen Satz enthält, der von Legendre gefunden iſt, und zuerſt in deſſen Mémoire sur les transcendantes elliptiques. Paris. An. II. p. 57. vorkommt. Zwiſchen k und k′ findet, wie ſich von ſelbſt verſteht, immer die Gleichung $k^2+k'^2=1$ Statt. Für $k=\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, iſt auch $k'=\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, und unſere Gleichung wird

$$\frac{\pi}{2}=F\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\frac{\pi}{2}\right)\left\{2E\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\frac{\pi}{2}\right)\right\},$$

ſo daß ſich alſo in dieſem Falle die elliptiſchen Functionen der erſten Art aus den elliptiſchen Functionen der zweiten Art berechnen laſſen, und umgekehrt. Es giebt noch andere Fälle dieſer Art, auf deren Entwickelung wir uns hier aber nicht einlaſſen können.

XIV. Annähernde Berechnung der elliptiſchen Functionen der erſten Art.

32. Nach (29.) hat man folgende Reihe zuſammenſtimmender Formeln:

$$k_1=\frac{2\sqrt{k}}{1+k},\ \sin(2\varphi_1-\varphi)=k\sin\varphi,\ F(k_1,\varphi_1)=\frac{1+k}{k}F(k,\varphi);$$

$$k_2 = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1},\ \sin(2\varphi_2 - \varphi_1) = k_1 \sin\varphi_1,\ F(k_2, \varphi_3) = \frac{1+k_1}{2} F(k_1, \varphi_1);$$

$$k_3 = \frac{2\sqrt{k_2}}{1+k_2},\ \sin(2\varphi_3 - \varphi_2) = k_2 \sin\varphi_2,\ F(k_3, \varphi_3) = \frac{1+k_2}{2} F(k_2, \varphi_2);$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

$k, k_1, k_2, k_3, \ldots.$ bilden eine wachſende Reihe und nähern ſich immer mehr und mehr der Einheit, ohne dieſelbe jemals zu überſteigen, werden derſelben aber immer bald ſehr nahe kommen. Beſtimmt man daher jetzt $k_{,}, k_{,,}, k_{,,,}, \ldots.;\ \varphi_{,}, \varphi_{,,}, \varphi_{,,,}, \ldots.$ aus den Gleichungen

$$k = \frac{2\sqrt{k_{,}}}{1+k_{,}},\ \sin(2\varphi - \varphi_{,}) = k_{,} \sin\varphi_{,};$$

$$k_{,} = \frac{2\sqrt{k_{,,}}}{1+k_{,,}},\ \sin(2\varphi_{,} - \varphi_{,,}) = k_{,,} \sin\varphi_{,,};$$

$$k_{,,} = \frac{2\sqrt{k_{,,,}}}{1+k_{,,,}},\ \sin(2\varphi_{,,} - \varphi_{,,,}) = k_{,,,} \sin\varphi_{,,,};$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

ſo werden offenbar $k, k_{,}, k_{,,}, k_{,,,}, \ldots.$ eine abnehmende Reihe bilden und der Null beliebig genähert werden können. Um das Letztere völlig deutlich zu überſehen, ſetze man

$$\sqrt{1-k^2} = k',\ \sqrt{1-k_{,}^2} = k'_{,},\ \sqrt{1-k^2_{,,}} = k'_{,,}, \ldots.;$$

ſo ergiebt ſich ſehr leicht

$$k_{,} = \frac{1-k'}{1+k'},\ k_{,,} = \frac{1-k'_{,}}{1+k'_{,}},\ k_{,,,} = \frac{1-k'_{,,}}{1+k'_{,,}},\ k_{IV} = \frac{1-k'_{,,,}}{1+k'_{,,,}}, \ldots.,$$

oder auch

$$k_{,} = \left\{\frac{k}{1+\sqrt{1-k^2}}\right\}^2,\ k_{,,} = \left\{\frac{k_{,}}{1+\sqrt{1-k_{,}^2}}\right\}^2,\ k_{,,,} = \left\{\frac{k_{,,}}{1+\sqrt{1-k_{,,}^2}}\right\}^2, \ldots$$

Es iſt alſo, weil wir immer annehmen, daß $k < 1$ iſt, offenbar

$$k_{,} < k^2,\ k_{,,} < k_{,}^2,\ k_{,,,} < k_{,,}^2,\ k_{IV} < k_{,,,}^2, \ldots,$$

oder

$$k_{,} < k^2,\ k_{,,} < k^4,\ k_{,,,} < k^8,\ k_{IV} < k^{16}, \ldots.,$$

wo offenbar die Exponenten von k jede beliebige noch ſo große Größe überſteigen können. Für $k < 1$ iſt aber, wenn n eine poſitive ganze Zahl bezeichnet, immer auch $k^n < 1$. Damit nun $k^n < v$ werde, wo v jede beliebige noch ſo kleine Größe, welche alſo immer < 1 angenommen werden kann, bezeichnet, muß man n ſo groß nehmen, daß

$$\frac{1}{k^n} > \frac{1}{v},\ \left(\frac{1}{k}\right)^n > \frac{1}{v}$$

iſt, wo nun $\frac{1}{k}$ und $\frac{1}{v}$ beide > 1 ſind, alſo, wenn wir, wie gleich nachher, die Logarithmen nehmen, die Logarithmen ächter

Brüche, welche bekanntlich negativ ſind, vermieden werden. Aus obiger Bedingung folgt aber

$$n \log \frac{1}{k} > \log \frac{1}{v}, \quad n > \frac{\log \frac{1}{v}}{\log \frac{1}{k}},$$

und man kann alſo n immer ſo groß nehmen, daß, für $k < 1$, $k^n < v$ wird. Demnach können die Glieder der Reihe

$$k, k^2, k^4, k^8, k^{16}, \ldots,$$

und alſo um ſo mehr die Glieder der Reihe

$$k, k_{,}, k_{,,}, k_{,,,}, k_{IV}, \ldots$$

der Null bis zu jedem beliebigen Grade nahe gebracht werden, wenn man ſie nur weit genug vom Anfange entfernt nimmt.

Da alſo $k, k_{,}, k_{,,}, k_{,,,}, \ldots$ ſich immer mehr und mehr der Null nähern, und derſelben beliebig nahe gebracht werden können, ſo erhellet auch aus den obigen Gleichungen, daß ſich die Winkel

$$2\varphi - \varphi_{,}, \; 2\varphi_{,} - \varphi_{,,}, \; 2\varphi_{,,} - \varphi_{,,,}, \; 2\varphi_{,,,} - \varphi_{IV}, \ldots$$

immer mehr und mehr der Null, oder die Gleichungen

$$2\varphi - \varphi_{,} = 0, \; 2\varphi_{,} - \varphi_{,,} = 0, \; 2\varphi_{,,} - \varphi_{,,,} = 0, \; 2\varphi_{,,,} - \varphi_{IV} = 0, \ldots;$$

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi_{,}, \; \varphi_{,} = \tfrac{1}{2}\varphi_{,,}, \; \varphi_{,,} = \tfrac{1}{2}\varphi_{,,,}, \; \varphi_{,,,} = \tfrac{1}{2}\varphi_{IV}, \ldots;$$

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi_{,}, \; \tfrac{1}{2}\varphi_{,} = \tfrac{1}{4}\varphi_{,,}, \; \tfrac{1}{4}\varphi_{,,} = \tfrac{1}{8}\varphi_{,,,}, \; \tfrac{1}{8}\varphi_{,,,} = \tfrac{1}{16}\varphi_{IV}, \ldots;$$

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi_{,} = \tfrac{1}{4}\varphi_{,,} = \tfrac{1}{8}\varphi_{,,,} = \tfrac{1}{16}\varphi_{IV} = \ldots$$

immer mehr und mehr der abſoluten Richtigkeit, d. h. die Winkel

$$\varphi, \; \tfrac{1}{2}\varphi_{,}, \; \tfrac{1}{4}\varphi_{,,}, \; \tfrac{1}{8}\varphi_{,,,}, \; \tfrac{1}{16}\varphi_{IV}, \ldots$$

jederzeit einer gewiſſen beſtimmten Gränze, welcher dieſelben beliebig nahe gebracht werden können, nähern werden. Wir wollen im Folgenden dieſe Gränze immer durch Ω bezeichnen.

Nach (29.) hat man nun

$$F(k, \varphi) = \frac{1 + k_{,}}{2} F(k_{,}, \varphi_{,})$$

$$F(k', \varphi_{,}) = \frac{1 + k_{,,}}{2} F(k_{,,}, \varphi_{,,}),$$

$$F(k_{,,}, \varphi_{,,}) = \frac{1 + k_{,,,}}{2} F(k_{,,,}, \varphi_{,,,}),$$

u. ſ. f. u. ſ. f.;

alſo

$$F(k, \varphi) = \frac{1+k_{,}}{2} F(k_{,}, \varphi_{,})$$
$$= \frac{1+k_{,}}{2} \cdot \frac{1+k_{,,}}{2} F(k_{,,}, \varphi_{,,})$$
$$= \frac{1+k_{,}}{2} \cdot \frac{1+k_{,,}}{2} \cdot \frac{1+k_{,,,}}{2} F(k_{,,,}, \varphi_{,,,})$$
$$= \frac{1+k_{,}}{2} \cdot \frac{1+k_{,,}}{2} \cdot \frac{1+k_{,,,}}{2} \cdot \frac{1+k_{IV}}{2} F(k_{IV}, \varphi_{IV})$$
u. ſ. f. u. ſ. f.

oder, weil $k_{,}$, $k_{,,}$, $k_{,,,}$, k_{IV}, ... ſich immer mehr und mehr der Null, alſo, weil überhaupt

$$F(0, \varphi) = \int_0^\varphi \partial\varphi = \varphi$$

iſt,

$$F(k_{,}, \varphi_{,}),\ F(k_{,,}, \varphi_{,,}),\ F(k_{,,,}, \varphi_{,,,}),\ F(k_{IV}, \varphi_{IV})$$

ſich immer mehr und mehr reſpective den Gränzen $\varphi_{,}$, $\varphi_{,,}$, $\varphi_{,,,}$, φ_{IV}, ... nähern, mit immer größerer Genauigkeit, je weiter man ſich vom Anfange entfernt:

$$F(k, \varphi) = (1+k_{,}) \cdot \tfrac{1}{2}\varphi_{,}$$
$$= (1+k_{,})(1+k_{,,}) \cdot \tfrac{1}{4}\varphi_{,,}$$
$$= (1+k_{,})(1+k_{,,})(1+k_{,,,}) \cdot \tfrac{1}{8}\varphi_{,,,}$$
$$= (1+k_{,})(1+k_{,,})(1+k_{,,,})(1+k_{IV}) \cdot \tfrac{1}{16}\varphi_{IV}$$
u. ſ. f.

d. i. in der eingeführten Bezeichnung

$$F(k, \varphi) = \Omega(1+k_{,})(1+k_{,,})(1+k_{,,,})(1+k_{IV}) \ldots\ldots,$$

welches unſtreitig eine ſehr merkwürdige in der Anwendung ſehr brauchbare Näherungsformel iſt, deren Erfindung ebenfalls Legendre gebührt. Setzen wir der Kürze wegen

$$K = (1+k_{,})(1+k_{,,})(1+k_{,,,})(1+k_{IV}) \ldots\ldots,$$

ſo iſt immer

$$F(k, \varphi) = K\Omega\,.$$

Da nach dem Obigen

$$1+k_{,} = \frac{2\sqrt{k_{,}}}{k},\ 1+k_{,,} = \frac{2\sqrt{k_{,,}}}{k_{,}},\ 1+k_{,,,} = \frac{2\sqrt{k_{,,,}}}{k_{,,}}, \ldots$$

iſt; ſo iſt auch

$$K = \frac{2\sqrt{k_{,}}}{k} \cdot \frac{2\sqrt{k_{,,}}}{k_{,}} \cdot \frac{2\sqrt{k_{,,,}}}{k_{,,}} \cdot \frac{2\sqrt{k_{IV}}}{k_{,,,}} \ldots\ldots$$

Auch iſt

$$1+k_{,} = \frac{2}{1+k'},\ 1+k_{,,} = \frac{2}{1+k'_{,}},\ 1+k_{,,,} = \frac{2}{1+k'_{,,}}, \ldots,$$

und

$$k'_{,} = \sqrt{\left\{1 - \left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2\right\}} = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'},$$

$$k'_{,,} = \sqrt{\left\{1 - \left(\frac{1-k'_{,}}{1+k'_{,}}\right)^2\right\}} = \frac{2\sqrt{k'_{,}}}{1+k'_{,}},$$

$$k'_{,,,} = \sqrt{\left\{1 - \left(\frac{1-k'_{,,}}{1+k'_{,,}}\right)^2\right\}} = \frac{2\sqrt{k'_{,,}}}{1+k'_{,,}},$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

alſo

$$1+k_{,} = \frac{k'_{,}}{\sqrt{k'}},\ 1+k_{,,} = \frac{k'_{,,}}{\sqrt{k'_{,}}},\ 1+k_{,,,} = \frac{k'_{,,,}}{\sqrt{k'_{,,}}},\ \ldots,$$

und folglich

$$K = \frac{k'_{,}}{\sqrt{k'}} \cdot \frac{k'_{,,}}{\sqrt{k'_{,}}} \cdot \frac{k'_{,,,}}{\sqrt{k'_{,,}}} \ldots = \sqrt{\frac{k'_{,}k'_{,,}k'_{,,,}k'_{IV}\ldots\ldots}{k'}},$$

welches eine ſehr bequeme Formel zur Berechnung von K iſt, wenn man die Rechnung durch Logarithmen führt.

Mittelſt einiger Hülfswinkel, Θ, $\Theta_{,}$, $\Theta_{,,}$, $\Theta_{,,,}$, ... kann man $k_{,}$, $k_{,,}$, $k_{,,,}$, k_{IV}, ... ſehr leicht berechnen, wie folgende Formeln zeigen:

$$k = \sin\Theta$$

$$k_{,} = \left\{\frac{k}{1+\sqrt{1-k^2}}\right\}^2 = \left\{\frac{\sin\Theta}{1+\cos\Theta}\right\}^2 = \tang\tfrac{1}{2}\Theta^2 = \sin\Theta_{,}$$

$$k_{,,} = \left\{\frac{k_{,}}{1+\sqrt{1-k_{,}^2}}\right\}^2 = \left\{\frac{\sin\Theta_{,}}{1+\cos\Theta_{,}}\right\}^2 = \tang\tfrac{1}{2}\Theta_{,}^2 = \sin\Theta_{,,}$$

$$k_{,,,} = \left\{\frac{k_{,,}}{1+\sqrt{1-k_{,,}^2}}\right\}^2 = \left\{\frac{\sin\Theta_{,,}}{1+\cos\Theta_{,,}}\right\}^2 = \tang\tfrac{1}{2}\Theta_{,,}^2 = \sin\Theta_{,,,}$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

Hat man aber k, $k_{,}$, $k_{,,}$, $k_{,,,}$, ſo hat man auch

$$k' = \cos\Theta,\ k'_{,} = \cos\Theta_{,},\ k'_{,,} = \cos\Theta_{,,},\ k'_{,,,} = \cos\Theta_{,,,},\ \ldots.$$

Auch die Winkel $\varphi_{,}$, $\varphi_{,,}$, $\varphi_{,,,}$, φ_{IV}, ... laſſen ſich durch ſehr einfache Formeln berechnen. Es iſt nämlich

$$\sin(2\varphi - \varphi_{,}) = k_{,}\sin\varphi_{,},$$

$$\sin 2\varphi\cos\varphi_{,} - \cos 2\varphi\sin\varphi_{,} = k_{,}\sin\varphi_{,},$$

$$\tang\varphi_{,} = \frac{\sin 2\varphi}{k_{,} + \cos 2\varphi}.$$

Aber

$$\tang(\varphi_{,} - \varphi) = \frac{\tang\varphi_{,} - \tang\varphi}{1 + \tang\varphi_{,}\tang\varphi}$$

und

$$\tang\varphi_{,} - \tang\varphi = \frac{\sin 2\varphi\cos\varphi - \cos 2\varphi\sin\varphi - k_{,}\sin\varphi}{\cos\varphi(k_{,} + \cos 2\varphi)} = \frac{(1-k_{,})\tang\varphi}{k_{,} + \cos 2\varphi},$$

$$1 + \tang\varphi_{,}\tang\varphi = \frac{\cos 2\varphi\cos\varphi + \sin 2\varphi\sin\varphi + k_{,}\cos\varphi}{\cos\varphi(k_{,} + \cos 2\varphi)} = \frac{1+k_{,}}{k_{,} + \cos 2\varphi};$$

alſo

$$\tang(\varphi_, - \varphi) = \frac{1-k_,}{1+k_,} \tang \varphi = k' \tang \varphi ,$$

folglich

$$\begin{aligned} \tang(\varphi_, - \varphi) &= k' \tang \varphi , \\ \tang(\varphi_{,,} - \varphi_,) &= k'_, \tang \varphi_, , \\ \tang(\varphi_{,,,} - \varphi_{,,}) &= k'_{,,} \tang \varphi_{,,} , \\ \tang(\varphi_{IV} - \varphi_{,,,}) &= k'_{,,,} \tang \varphi_{,,,} , \\ \text{u. ſ. f.} \qquad & \qquad \text{u. ſ. f.} \end{aligned}$$

nach welchen Formeln $\varphi_,$, $\varphi_{,,}$, $\varphi_{,,,}$, ... mit vieler Leichtigkeit, alſo auch Ω, berechnet werden können.

Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ wird

$$\begin{aligned} &\sin(\pi - \varphi_,) = \sin\varphi_, = k_, \sin\varphi_, = 0, \quad \pi - \varphi_, = 0, \quad \varphi_, = \pi ; \\ &\sin(2\pi - \varphi_{,,}) = -\sin\varphi_{,,} = k_{,,} \sin\varphi_{,,} = 0, \quad 2\pi - \varphi_{,,} = 0, \quad \varphi_{,,} = 2\pi ; \\ &\sin(4\pi - \varphi_{,,,}) = -\sin\varphi_{,,,} = k_{,,,} \sin\varphi_{,,,} = 0, \quad 4\pi - \varphi_{,,,} = 0, \quad \varphi_{,,,} = 4\pi ; \\ &\sin(8\pi - \varphi_{IV}) = -\sin\varphi_{IV} = k_{IV} \sin\varphi_{IV} = 0, \quad 8\pi - \varphi_{IV} = 0, \quad \varphi_{IV} = 8\pi ; \\ &\qquad \text{u. ſ. f.} \qquad\qquad \text{u. ſ. f.} \end{aligned}$$

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\pi, \ \tfrac{1}{2}\varphi_, = \tfrac{1}{2}\pi, \ \tfrac{1}{4}\varphi_{,,} = \tfrac{1}{2}\pi, \ \tfrac{1}{8}\varphi_{,,,} = \tfrac{1}{2}\pi, \ \ldots\ldots ,$$

ſo daß alſo in dieſem Falle $\Omega = \frac{1}{2}\pi$, folglich

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\pi K$$

iſt. Man hat ſich hierbei an die in (29.) gemachten Bemerkungen zu erinnern.

Iſt man bei der Berechnung von k, $k_,$, $k_{,,}$, $k_{,,,}$, ... auf ein ſehr kleines k gekommen, ſo kann man, um das nächſtfolgende k, welches ich überhaupt durch $k_,$ bezeichnen will, zu finden, ſich auch der Formel

$$k_, = \frac{1-k'}{1+k'} = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}} = \left(\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{k}\right)^2$$

$$= \frac{2-k^2-2\sqrt{1-k^2}}{k^2} = \tfrac{1}{4}k^2 + \frac{1.3}{4.6}k^4 + \frac{1.3.5}{4.6.8}k^6 + \ldots.$$

bedienen.

Aus der vorhergehenden Näherungsmethode würde ſich auch leicht eine Methode ableiten laſſen, φ zu finden, wenn $F(k, \varphi)$ für einen beliebigen Modulus gegeben iſt, wobei wir aber hier nicht länger verweilen.

XV. Annähernde Berechnung der elliptiſchen Functionen der zweiten Art.

33. Wir betrachten hier das allgemeine Integral

$$G = \int_0^\varphi (a + b \sin\varphi^2) \frac{\partial\varphi}{\Delta(k, \varphi)} ,$$

unter welchem, wie man leicht ſieht, für a = 1, b = 0 die

elliptiſchen Functionen der erſten, für $a = 1$, $b = -k^2$ die elliptiſchen Functionen der zweiten Art enthalten ſind. Setzen wir wieder

$$k = \frac{2\sqrt{k_,}}{1+k_,},\ \sin(2\varphi - \varphi_,) = k_, \sin\varphi_,;$$

ſo iſt nach (29.)

$$\sin\varphi^2 = \tfrac{1}{2}(1 + k_, \sin\varphi_,^2 - \Delta(k_,, \varphi_,)\cos\varphi_,),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\Delta(k,\varphi)} = \frac{1+k_,}{2} \cdot \frac{\partial\varphi_,}{\Delta(k_,, \varphi_,)},$$

und folglich nach gehöriger Subſtitution, da offenbar φ und $\varphi_,$ zugleich verſchwinden,

$$G = \frac{1+k_,}{2}\int_0^{\varphi_,}\{a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}bk_, \sin\varphi_,^2 - \tfrac{1}{2}b\Delta(k_,, \varphi_,)\cos\varphi_,\}\frac{\partial\varphi_,}{\Delta(k_,, \varphi_,)}$$

$$= \frac{1+k_,}{2}\left\{\int_0^{\varphi_,}(a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}bk_, \sin\varphi_,^2)\frac{\partial\varphi_,}{\Delta(k_,, \varphi_,)} - \tfrac{1}{2}b\sin\varphi_,\right\}$$

$$= \frac{1+k_,}{2}\left\{\int_0^{\varphi_,}(a_, + b_, \sin\varphi_,^2)\frac{\partial\varphi_,}{\Delta(k_,, \varphi_,)} - \tfrac{1}{2}b\sin\varphi_,\right\}$$

für $a + \frac{1}{2}b = a_,$, $\frac{1}{2}bk_, = b_,$.

Berechnet man nun $k_,$, $k_{,,}$, $k_{,,,}$, ...; $\varphi_,$, $\varphi_{,,}$, $\varphi_{,,,}$, ... wieder ganz wie in (32.), ſo daß dieſe Größen nämlich den Gleichungen

$$k = \frac{2\sqrt{k_,}}{1+k_,},\ \sin(2\varphi - \varphi_,) = k_, \sin\varphi_,;$$

$$k_, = \frac{2\sqrt{k_{,,}}}{1+k_{,,}},\ \sin(2\varphi_, - \varphi_{,,}) = k_{,,} \sin\varphi_{,,};$$

$$k_{,,} = \frac{2\sqrt{k_{,,,}}}{1+k_{,,,}},\ \sin(2\varphi_{,,} - \varphi_{,,,}) = k_{,,,} \sin\varphi_{,,,};$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

entſprechen; ſo hat man nach dem Vorhergehenden, wenn G, $G_,$, $G_{,,}$, ... lauter reſpective von a, b, k, φ; $a_,$, $b_,$, $k_,$, $\varphi_,$; $a_{,,}$, $b_{,,}$, $k_{,,}$, $\varphi_{,,}$; .... auf völlig gleiche Weiſe abhängende Integrale bezeichnen:

$$G = \frac{1+k_,}{2}\{G_, - \tfrac{1}{2}b\sin\varphi_,\}$$

$$G_, = \frac{1+k_{,,}}{2}\{G_{,,} - \tfrac{1}{2}b_,\sin\varphi_{,,}\}$$

$$G_{,,} = \frac{1+k_{,,,}}{2}\{G_{,,,} - \tfrac{1}{2}b_{,,}\sin\varphi_{,,,}\}$$

$$G_{,,,} = \frac{1+k_{IV}}{2}\{G_{IV} - \tfrac{1}{2}b_{,,,}\sin\varphi_{IV}\}$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

für

$$a_{,} = a + \tfrac{1}{2}b,\quad b_{,} = \tfrac{1}{2}bk_{,};$$
$$a_{,,} = a_{,} + \tfrac{1}{2}b_{,},\quad b_{,,} = \tfrac{1}{2}b_{,}k_{,,};$$
$$a_{,,,} = a_{,,} + \tfrac{1}{2}b_{,,},\quad b_{,,,} = \tfrac{1}{2}b_{,,}k_{,,,};$$
$$a_{\mathrm{IV}} = a_{,,,} + \tfrac{1}{2}b_{,,,},\quad b_{\mathrm{IV}} = \tfrac{1}{2}b_{,,,}k_{\mathrm{IV}};$$
u. ſ. f. u. ſ. f.

Da nun nach (32.) k, $k_{,}$, $k_{,,}$, $k_{,,,}$, ... der Null beliebig nahe gebracht werden können, wenn man ſich nur weit genug vom Anfange dieſer Reihe entfernt; ſo ſey für den beabſichtigten Grad der Näherung $k_{(n)} = 0$. Weil

$$b_{,} = \tfrac{1}{2}bk_{,}$$
$$b_{,,} = \tfrac{1}{2}b_{,}k_{,,} = \tfrac{1}{4}bk_{,}k_{,,}$$
$$b_{,,,} = \tfrac{1}{2}b_{,,}k_{,,,} = \tfrac{1}{8}bk_{,}k_{,,}k_{,,,}$$
$$b_{\mathrm{IV}} = \tfrac{1}{2}b_{,,,}k_{\mathrm{IV}} = \tfrac{1}{16}bk_{,}k_{,,}k_{,,,}k_{\mathrm{IV}}$$
u. ſ. f. u. ſ. f.

iſt; ſo nimmt, wenn nur der abſolute Werth von b, wie wir hier vorausſetzen wollen, die Einheit nicht überſteigt, die Reihe b, $b_{,}$, $b_{,,}$, $b_{,,,}$, ... ſchneller ab als die Reihe k, $k_{,}$, $k_{,,}$, $k_{,,,}$, ..., und man kann alſo für den beabſichtigten Grad der Näherung auch $b_{(n)} = 0$ ſetzen. Daß man den abſoluten Werth von b nie größer als die Einheit anzunehmen braucht, und eigentlich überhaupt b beliebig klein machen kann, erhellet leicht, indem man ja für jedes willkührliche noch ſo kleine α

$$G = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\varphi}(\alpha a + \alpha b \sin\varphi^2)\frac{\partial\varphi}{\varDelta(k,\varphi)}$$

ſetzen kann. Für $a_{(n)}$ erhält man leicht aus dem Obigen

$$a_{(n)} = a + \tfrac{1}{2}b\left\{1 + \frac{k_{,}}{2} + \frac{k_{,}k_{,,}}{4} + \frac{k_{,}k_{,,}k_{,,,}}{8} + \ldots\right\},$$

die Reihe ſo weit fortgeſetzt, bis ſie wegen $k_{(n)} = 0$ von ſelbſt abbricht.

Weil $k_{(n)} = 0$, $b_{(n)} = 0$ iſt, ſo iſt

$$\varDelta(k_{(n)}, \varphi_{(n)}) = 1$$

und

$$G_{(n)} = \int_0^{\varphi_{(n)}}(a_{(n)} + b_{(n)}\sin\varphi_{(n)}^2)\partial\varphi_{(n)} = a_{(n)}\int_0^{\varphi_{(n)}}\partial\varphi_{(n)}$$
$$= a_{(n)}\varphi_{(n)}.$$

Iſt nun, wie in (32.), Ω die Gränze, welcher die Winkel

$$\varphi,\ \tfrac{1}{2}\varphi_{,},\ \tfrac{1}{4}\varphi_{,,},\ \tfrac{1}{8}\varphi_{,,,},\ \tfrac{1}{16}\varphi_{\mathrm{IV}},\ \ldots.$$

ſich nähern, ſo iſt

$$\frac{1}{2^n}\varphi_{(n)} = \Omega,\quad \varphi_{(n)} = 2^n\Omega,$$

und folglich

$$G_{(n)} = 2^n a_{(n)} \,.\, \Omega \,.$$

Aber nach dem Obigen

$$G = \frac{1+k_{,}}{2} G_{,} - \left(\frac{1+k_{,}}{2}\right)\frac{b}{2}\sin\varphi_{,}$$

$$= \frac{(1+k_{,})(1+k_{,,})}{4} G_{,,} - \left(\frac{1+k_{,}}{2}\right)\frac{b}{2}\sin\varphi_{,}$$

$$- \left(\frac{1+k_{,}}{2}\right)\left(\frac{1+k_{,,}}{2}\right)\frac{b\,k_{,}}{4}\sin\varphi_{,,}$$

$$= \frac{(1+k_{,})(1+k_{,,})(1+k_{,,,})}{8} G_{,,,} - \left(\frac{1+k_{,}}{2}\right)\frac{b}{2}\sin\varphi_{,}$$

$$- \left(\frac{1+k_{,}}{2}\right)\left(\frac{1+k_{,,}}{2}\right)\frac{b\,k_{,}}{4}\sin\varphi_{,,}$$

$$- \left(\frac{1+k_{,}}{2}\right)\left(\frac{1+k_{,,}}{2}\right)\left(\frac{1+k_{,,,}}{2}\right)\frac{b\,k_{,}\,k_{,,}}{8}\sin\varphi_{,,,}$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

Alſo offenbar, wenn man wieder der Kürze wegen

$$(1+k_{,})((1+k_{,,})(1+k_{,,,})(1+k_{IV}) \ldots = K$$

ſetzt:

$$G = a_{(n)} K \Omega - \left(\frac{1+k_{,}}{2}\right)\frac{b}{2}\sin\varphi_{,}$$

$$- \left(\frac{1+k_{,}}{2}\right)\left(\frac{1+k_{,,}}{2}\right)\frac{b\,k_{,}}{4}\sin\varphi_{,,}$$

$$- \left(\frac{1+k_{,}}{2}\right)\left(\frac{1+k_{,,}}{2}\right)\left(\frac{1+k_{,,,}}{2}\right)\frac{b\,k_{,}\,k_{,,}}{8}\sin\varphi_{,,,}$$

$$- \left(\frac{1+k_{,}}{2}\right)\left(\frac{1+k_{,,}}{2}\right)\left(\frac{1+k_{,,,}}{2}\right)\left(\frac{1+k_{IV}}{2}\right)\frac{b\,k_{,}\,k_{,,}\,k_{,,,}}{16}\sin\varphi_{IV}$$

u. ſ. f.

oder, weil nach (32.)

$$1+k_{,} = \frac{2\sqrt{k_{,}}}{k},\ 1+k_{,,} = \frac{2\sqrt{k_{,,}}}{k_{,}},\ 1+k_{,,,} = \frac{2\sqrt{k_{,,,}}}{k_{,,}},\ \ldots$$

iſt:

$$G = a_{(n)} K \Omega - \frac{b}{k}\left\{\begin{array}{l} \frac{\sqrt{k_{,}}}{2}\sin\varphi_{,} \\ + \frac{\sqrt{k_{,}k_{,,}}}{4}\sin\varphi_{,,} \\ + \frac{\sqrt{k_{,}k_{,,}k_{,,,}}}{8}\sin\varphi_{,,,} \\ + \frac{\sqrt{k_{,}k_{,,}k_{,,,}k_{IV}}}{16}\sin\varphi_{IV} \\ + \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\};$$

$a_{(n)}$ wird nach der oben gegebenen Formel gefunden.

Für die elliptiſchen Functionen der zweiten Art muß man, wie ſchon oben erinnert worden iſt, $a = 1$, $b = -k^2$ ſetzen. Dadurch erhält man, wenn man in dieſem Falle

$$a_{(n)} = L = 1 - \frac{k^2}{2} - \frac{k^2 k_{,}}{4} - \frac{k^2 k_{,} k_{,,}}{8} - \frac{k^2 k_{,} k_{,,} k_{,,,}}{16} - \ldots$$

ſetzt:

$$\begin{aligned} E(k, \varphi) = KL\Omega &+ \frac{k\sqrt{k_{,}}}{2}\sin\varphi_{,} \\ &+ \frac{k\sqrt{k_{,}k_{,,}}}{4}\sin\varphi_{,,} \\ &+ \frac{k\sqrt{k_{,}k_{,,}k_{,,,}}}{8}\sin\varphi_{,,,} \\ &+ \frac{k\sqrt{k_{,}k_{,,}k_{,,,}k_{IV}}}{16}\sin\varphi_{IV} \\ &+ \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

für

$$K = (1 + k_{,})(1 + k_{,,})(1 + k_{,,,}) \ldots = \sqrt{\frac{k'_{,} k'_{,,} k'_{,,,} k'_{IV} \ldots}{k'}}.$$

Durch dieſe Formel iſt zugleich auch die unbeſtimmte Rectification der Ellipſe gefunden, da bekanntlich (25.) durch $E(k, \varphi)$ immer die Länge eines Bogens einer Ellipſe, deren Excentricität $= k$, die halbe Hauptaxe $= 1$ iſt, dargeſtellt wird.

Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ iſt nach (32.)

$$\sin\varphi_{,} = \sin\varphi_{,,} = \sin\varphi_{,,,} = \ldots = 0;$$

alſo, weil nach (32.) auch $\Omega = \frac{1}{2}\pi$ iſt:

$$E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\pi KL,$$

welches die Länge des elliptiſchen Quadranten iſt. Alle dieſe Approximations-Formeln ſind ſehr bequem zur Rectification der Ellipſe.

Für den Bogen $H(\varphi)$ der Hyperbel iſt nach (28.)

$$\begin{aligned} H(\varphi) &= \Delta(k, \varphi)\,\mathrm{tang}\,\varphi + b^2 F(k, \varphi) - E(k, \varphi) \\ &= \Delta(k, \varphi)\,\mathrm{tang}\,\varphi + (1 - k^2) F(k, \varphi) - E(k, \varphi) \\ &= \Delta(k, \varphi)\,\mathrm{tang}\,\varphi - \int_0^\varphi \left\{\Delta(k, \varphi) - \frac{1 - k^2}{\Delta(k, \varphi)}\right\}\partial\varphi \\ &= \Delta(k, \varphi)\,\mathrm{tang}\,\varphi - \int_0^\varphi \frac{k^2 \cos\varphi^2\,\partial\varphi}{\Delta(k, \varphi)}. \end{aligned}$$

Letzteres Integral geht aus unſerm allgemeinen Integral hervor, wenn man $a = k^2$, $b = -k^2$ ſetzt. Dies giebt nach dem Obigen

$$\varDelta(k,\varphi)\operatorname{tang}\varphi - H(\varphi)$$
$$= \tfrac{1}{2}k^2 K\Omega\left\{1-\frac{k_,}{2}-\frac{k_,k_{,,}}{4}-\frac{k_,k_{,,}k_{,,,}}{8}-\ldots\right\}$$
$$+\frac{k}{2}\left\{\frac{\sqrt{k_,}}{1}\sin\varphi_, + \frac{\sqrt{k_,k_{,,}}}{2}\sin\varphi_{,,} + \frac{\sqrt{k_,k_{,,}k_{,,,}}}{4}\sin\varphi_{,,,} + \frac{\sqrt{k_,k_{,,}k_{,,,}k_{\text{IV}}}}{8}\sin\varphi_{\text{IV}} + \ldots\right\}.$$

Die geometriſche Bedeutung dieſer Differenz geht unmittelbar aus (28.) hervor. Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ wird dieſe Differenz

$$= \tfrac{1}{4}k^2 \pi K\left\{1-\frac{k_,}{2}-\frac{k_,k_{,,}}{4}-\frac{k_,k_{,,}k_{,,,}}{8}-\ldots\right\},$$

und dies iſt offenbar die Differenz zwiſchen der vom Mittelpunkte an gerechneten Aſymptote und der vom Scheitel an gerechneten halben Hyperbel, wie ebenfalls unmittelbar aus (28.) hervorgeht.

34. Eine andere Näherungsmethode ergiebt ſich auf folgende Art. Für

$$k = \frac{2\sqrt{k_,}}{1+k_,},\ \sin(2\varphi-\varphi_,) = k_,\sin\varphi_,$$

iſt nach (33.)

$$G = \frac{1+k_,}{2}\{G_, - \tfrac{1}{2}b\sin\varphi_,\},\ a_, = a+\tfrac{1}{2}b,\ b_, = \tfrac{1}{2}bk_,\,.$$

Daher iſt für

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},\ \sin(2\varphi_1-\varphi) = k\sin\varphi$$

offenbar

$$G_1 = \frac{1+k}{2}\{G - \tfrac{1}{2}b_1\sin\varphi\},\ a = a_1+\tfrac{1}{2}b_1,\ b = \tfrac{1}{2}b_1 k;$$

d. i.

$$G = \frac{2}{1+k}G_1 + \tfrac{1}{2}b_1\sin\varphi,\ b_1 = \frac{2b}{k},\ a_1 = a-\tfrac{1}{2}b_1\,.$$

Hat man alſo folgende Reihe von Gleichungen

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},\ \sin(2\varphi_1-\varphi) = k\sin\varphi;$$
$$k_2 = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1},\ \sin(2\varphi_2-\varphi_1) = k_1\sin\varphi_1;$$
$$k_3 = \frac{2\sqrt{k_2}}{1+k_2},\ \sin(2\varphi_3-\varphi_2) = k_2\sin\varphi_2;$$
$$k_4 = \frac{2\sqrt{k_3}}{1+k_3},\ \sin(2\varphi_4-\varphi_3) = k_3\sin\varphi_3;$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

ſo entſpricht derſelben jederzeit die folgende Reihe

$$G = \frac{2}{1+k} G_1 + \tfrac{1}{2} b_1 \sin\varphi \,,$$

$$G_1 = \frac{2}{1+k_1} G_2 + \tfrac{1}{2} b_2 \sin\varphi_1 \,,$$

$$G_2 = \frac{2}{1+k_2} G_3 + \tfrac{1}{2} b_3 \sin\varphi_2 \,,$$

$$G_3 = \frac{2}{1+k_3} G_4 + \tfrac{1}{2} b_4 \sin\varphi_3 \,,$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

für

$$b_1 = \frac{2b}{k},\ a_1 = a - \tfrac{1}{2} b_1 \,;$$

$$b_2 = \frac{2b_1}{k_1},\ a_2 = a_1 - \tfrac{1}{2} b_2 \,;$$

$$b_3 = \frac{2b_2}{k_2},\ a_3 = a_2 - \tfrac{1}{2} b_3 \,;$$

$$b_4 = \frac{2b_3}{k_3},\ a_4 = a_3 - \tfrac{1}{2} b_4 \,;$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

Nach (29.) wachſen $k, k_1, k_2, k_3, \ldots$ fortwährend und nähern ſich immer mehr und mehr der Einheit, ohne dieſelbe jedoch jemals zu überſteigen. Kann man nun für den beabſichtigten Grad der Näherung $k_n = 1$ ſetzen, ſo iſt

$$\Delta(k_n, \varphi_n) = \cos\varphi_n$$

und folglich

$$G_n = \int_0^{\varphi_n} (a_n + b_n \sin\varphi^2{}_n) \frac{\partial\varphi_n}{\cos\varphi_n}$$

$$= (a_n + b_n) \int_0^{\varphi_n} \frac{\partial\varphi_n}{\cos\varphi_n} - b_n \int_0^{\varphi_n} \cos\varphi\, \partial\varphi_n$$

$$= (a_n + b_n)\, l \tang(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi_n) - b_n \sin\varphi_n$$

(Integralformel. 117.).

Da ſich nun $k, k_1, k_2, k_3, \ldots$ immer mehr und mehr der Einheit nähern, ſo werden ſich nach dem Obigen auch die Gleichungen

$$\sin(2\varphi_1 - \varphi) = \sin\varphi,\ 2\varphi_1 - \varphi = \varphi,\ \varphi_1 = \varphi \,;$$

$$\sin(2\varphi_2 - \varphi_1) = \sin\varphi_1,\ 2\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_1,\ \varphi_2 = \varphi_1 \,;$$

$$\sin(2\varphi_3 - \varphi_2) = \sin\varphi_2,\ 2\varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_2,\ \varphi_3 = \varphi_2 \,;$$

$$\sin(2\varphi_4 - \varphi_4) = \sin\varphi_3,\ 2\varphi_4 - \varphi_3 = \varphi_3,\ \varphi_4 = \varphi_3 \,;$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

d. i. die Gleichung

$$\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \ldots.$$

der abſoluten Richtigkeit, oder die Winkel $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4,$

.... immer mehr und mehr einer gewiſſen beſtimmten Gränze nähern, welche wir durch Ω' bezeichnen wollen. Für $k_n = 1$ iſt alſo $\varphi_n = \Omega'$, folglich

$$G_n = (a_n + b_n)\,l\,\mathrm{tang}\,(45^0 + \tfrac{1}{2}\Omega') - b_n \sin \Omega'$$

zu ſetzen. a_n und b_n werden aus den Reihen

$$b_1 = \frac{2b}{k},\ a_1 = a - \tfrac{1}{2}b_1;$$

$$b_2 = \frac{2b_1}{k_1},\ a_2 = a_1 - \tfrac{1}{2}b_2;$$

$$b_3 = \frac{2b_2}{k_2},\ a_3 = a_2 - \tfrac{1}{2}b_3;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_n = \frac{2b_{n-1}}{k_{n-1}},\ a_n = a_{n-1} - \tfrac{1}{2}b_n$$

berechnet. Auch iſt

$$b_1 = \frac{2b}{k},\ b_2 = \frac{4b}{kk_1},\ b_3 = \frac{8b}{kk_1k_2},\ \ldots\ b_n = \frac{2^n b}{kk_1k_2\ldots k_{n-1}};$$

$$a_1 = a - \frac{b}{k},$$

$$a_2 = a - \frac{b}{k} - \frac{2b}{kk_1},$$

$$a_3 = a - \frac{b}{k} - \frac{2b}{kk_1} - \frac{4b}{kk_1k_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = a - \frac{b}{k} - \frac{2b}{kk_1} - \frac{4b}{kk_1k_2} - \ldots - \frac{2^{n-1}b}{kk_1k_2\ldots k_{n-1}};$$

alſo

$$a_n + b_n = a + \frac{2^n b}{kk_1\ldots k_{n-1}} - \frac{b}{k} - \frac{2b}{kk_1} - \frac{4b}{kk_1k_2} - \ldots - \frac{2^{n-1}b}{kk_1\ldots k_{n-1}}.$$

Es iſt aber auch

$$(a_1 + b_1) - (a + b) = \frac{b}{k}(1 - k),$$

$$(a_2 + b_2) - (a_1 + b_1) = \frac{2b}{kk_1}(1 - k_1),$$

$$(a_3 + b_3) - (a_2 + b_2) = \frac{4b}{kk_1k_2}(1 - k_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(a_n + b_n) - (a_{n-1} + b_{n-1}) = \frac{2^{n-1}b}{kk_1k_2\ldots k_{n-1}}(1 - k_{n-1});$$

alſo, wenn man addirt:

$$a_n + b_n = a + \frac{b}{k} + \frac{2b}{kk_1}(1 - k_1) + \frac{4b}{kk_1k_2}(1 - k_2) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{2^{n-1}b}{kk_1k_2\ldots k_{n-1}}(1 - k_{n-1}).$$

Aber, wenn man

$$\sqrt{1-k^2} = k', \quad \sqrt{1-k_1^2} = k'_1, \quad \sqrt{1-k_2^2} = k'_2, \ldots$$

ſetzt, da

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad k_2 = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}, \quad k_3 = \frac{2\sqrt{k_2}}{1+k_2}, \ldots$$

iſt:

$$k'_1 = \sqrt{\left\{1-\frac{4k}{(1+k)^2}\right\}} = \sqrt{\frac{(1-k)^2}{(1+k)^2}} = \frac{1-k}{1+k},$$

$$k'_2 = \sqrt{\left\{1-\frac{4k_1}{(1+k_1)^2}\right\}} = \sqrt{\frac{(1-k_1)^2}{(1+k_1)^2}} = \frac{1-k_1}{1+k_1},$$

$$k'_3 = \sqrt{\left\{1-\frac{4k_2}{(1+k_2)^2}\right\}} = \sqrt{\frac{(1-k_2)^2}{(1+k_2)^2}} = \frac{1-k_2}{1+k_2},$$

u. ſ. f. u. ſ. f.;

alſo umgekehrt

$$k = \frac{1-k'_1}{1+k'_1}, \quad k_1 = \frac{1-k'_2}{1+k'_2}, \quad k_2 = \frac{1-k'_3}{1+k'_3}, \ldots$$

Folglich auch

$$k' = \sqrt{1-k^2} = \sqrt{\left\{1-\left(\frac{1-k'_1}{1+k'_1}\right)^2\right\}} = \frac{2\sqrt{k'_1}}{1+k'_1},$$

$$k'_1 = \sqrt{1-k_1^2} = \sqrt{\left\{1-\left(\frac{1-k'_2}{1+k'_2}\right)^2\right\}} = \frac{2\sqrt{k'_2}}{1+k'_2},$$

$$k'_2 = \sqrt{1-k_2^2} = \sqrt{\left\{1-\left(\frac{1-k'_3}{1+k'_3}\right)^2\right\}} = \frac{2\sqrt{k'_3}}{1+k'_3},$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

$$1+k = \frac{2}{1+k'_1} = \frac{k'}{\sqrt{k'_1}} = \frac{2\sqrt{k}}{k_1},$$

$$1+k_1 = \frac{2}{1+k'_2} = \frac{k'_1}{\sqrt{k'_2}} = \frac{2\sqrt{k_1}}{k_2},$$

$$1+k_2 = \frac{2}{1+k'_3} = \frac{k'_2}{\sqrt{k'_3}} = \frac{2\sqrt{k_2}}{k_3},$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

$$1-k = \frac{2k'_1}{1+k'_1} = k'\sqrt{k'_1},$$

$$1-k_1 = \frac{2k'_2}{1+k'_2} = k'_1\sqrt{k'_2},$$

$$1-k_2 = \frac{2k'_3}{1+k'_3} = k'_2\sqrt{k'_3},$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

Alſo auch nach dem Obigen

$$k'_1 = \frac{1-k}{1+k} = \frac{k'k_1\sqrt{k'_1}}{2\sqrt{k}},$$

$$k'_2 = \frac{1-k_1}{1+k_1} = \frac{k'_1 k_2\sqrt{k'_2}}{2\sqrt{k_1}} = \frac{k'k_1 k_2\sqrt{k'_1 k'_2}}{4\sqrt{kk_1}},$$

$$k'_3 = \frac{1-k_2}{1+k_2} = \frac{k'_2 k_3\sqrt{k'_3}}{2\sqrt{k_2}} = \frac{k'k_1 k_2 k_3\sqrt{k'_1 k'_2 k'_3}}{8\sqrt{kk_1 k_2}},$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

und folglich

$$1-k = k'\sqrt{k'_1}$$

$$1-k_1 = \frac{k'k_1\sqrt{k'_1 k'_2}}{2\sqrt{k}},$$

$$1-k_2 = \frac{k'k_1 k_2\sqrt{k'_1 k'_2 k'_3}}{4\sqrt{kk_1}},$$

$$1-k_3 = \frac{k'k_1 k_2 k_3\sqrt{k'_1 k'_2 k'_3 k'_4}}{8\sqrt{kk_1 k_2}},$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

Alſo, da man ſtatt $\frac{b}{k}$ in der oben für $a_n + b_n$ gefundenen Reihe offenbar

$$b + \frac{b}{k} - b = b + \frac{b}{k}(1-k) = b + \frac{b}{k}k'\sqrt{k'_1}$$

ſetzen kann:

$$a_n + b_n =$$

$$a + b + \frac{bk'}{k}\left\{\sqrt{k'_1} + \sqrt{\left(\frac{k'_1 k'_2}{k}\right)} + \sqrt{\left(\frac{k'_1 k'_2 k'_3}{kk_1}\right)} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \sqrt{\left(\frac{k'_1 k'_2 k'_3 \ldots k'_n}{kk_1 k_2 \ldots k_{n-2}}\right)}\right\}.$$

Weil k, k_1, k_2, k_3, ... ſich immer mehr und mehr der Einheit, alſo k', k'_2, k'_3, ... ſich immer mehr und mehr der Null nähern, ſo iſt dies offenbar eine ſehr ſtark convergirende und daher eine ſehr bequeme Rechnung geſtattende Reihe.

Durch ſucceſſive Subſtitution ergiebt ſich nun aus dem Obigen

$$G=\frac{2}{1+k}G_1+\tfrac{1}{2}b_1\sin\varphi$$

$$=\frac{4}{(1+k)(1+k_1)}G_2+\tfrac{1}{2}b_1\sin\varphi+\frac{1}{1+k}b_2\sin\varphi_1$$

$$=\frac{8}{(1+k)(1+k_1)(1+k_2)}G_3+\tfrac{1}{2}b_1\sin\varphi+\frac{1}{1+k}b_2\sin\varphi_1+\frac{2}{(1+k)(1+k_1)}b_3\sin\varphi$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{2^n}{(1+k)(1+k_1)\ldots(1+k_{n-1})}G_n+\tfrac{1}{2}b_1\sin\varphi+\frac{1}{1+k}b_2\sin\varphi_1$$

$$+\frac{2}{(1+k)(1+k_1)}b_3\sin\varphi_2+\ldots+\frac{2^{n-2}}{(1+k)(1+k_1)\ldots(1+k_{n-2})}b_n\sin\varphi_{n-1},$$

oder, wenn wir

$$\frac{2^n}{(1+k)(1+k_1)\ldots(1+k_{n-1})}=K'$$

ſetzen:

$$G=(a_n+b_n)K'l\tang(45^0+\tfrac{1}{2}\Omega')-b_n K'\sin\Omega'$$

$$+\tfrac{1}{2}b_1\sin\varphi+\frac{1}{1+k}b_2\sin\varphi_1+\frac{2}{(1+k)(1+k_1)}b_3\sin\varphi_2+\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{2^{n-2}}{(1+k)(1+k_1)\ldots(1+k_{n-2})}b_n\sin\varphi_{n-1}.$$

Aber überhaupt

$$(1+k)(1+k_1)\ldots(1+k_{n-1})=\frac{2\sqrt{k}}{k_1}.\frac{2\sqrt{k_1}}{k_2}.\frac{2\sqrt{k_2}}{k_3}\ldots\frac{2\sqrt{k_{n-1}}}{k_n}$$

$$=\frac{2^n}{k_n}\sqrt{\left(\frac{k}{k_1k_2k_3\ldots k_{n-1}}\right)};$$

folglich, weil man nach dem Obigen $k_n=1$ ſetzen kann:

$$K'=\sqrt{\left(\frac{k_1k_2k_3\ldots k_{n-1}}{k}\right)}.$$

Ferner iſt

$$\frac{2^{n-2}b_n}{(1+k)(1+k_1)\ldots(1+k_{n-2})}=2^{n-2}.\frac{k_{n-1}}{2^{n-1}}\sqrt{\left(\frac{k_1k_2\ldots k_{n-2}}{k}\right)}.\frac{2^n b}{kk_1\ldots k_{n-1}}$$

$$=\frac{2^{n-1}b}{k\sqrt{kk_1k_2\ldots k_{n-2}}};$$

$$b_nK'=\frac{2^n b}{kk_1\ldots k_{n-1}}\sqrt{\left(\frac{k_1k_2\ldots k_{n-1}}{k}\right)}=\frac{b}{k}.\frac{2^n}{\sqrt{kk_1k_2\ldots k_{n-1}}};$$

alſo

$$G=(a_n+b_n)K'l\tang(45^0+\tfrac{1}{2}\Omega')-\frac{b}{k}.\frac{2^n\sin\Omega'}{\sqrt{kk_1k_2\ldots k_{n-1}}}$$

$$+\frac{b}{k}\left\{\sin\varphi+\frac{2}{\sqrt{k}}\sin\varphi_1+\frac{4}{\sqrt{kk_1}}\sin\varphi_2+\frac{8}{\sqrt{kk_1k_2}}\sin\varphi_3+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ldots+\frac{2^{n-1}\sin\varphi_{n-1}}{\sqrt{kk_1k_2k_3\ldots k_{n-2}}}\right\}$$

$$=(a_n+b_n)K'l\tang(45^0+\tfrac{1}{2}\Omega')-\frac{b}{k}\Sigma,$$

wo die Bedeutung von Σ ſogleich in die Augen fallen wird.

Die durch Σ bezeichnete Reihe läßt ſich aber auch noch auf eine andere Art ausdrücken. Man ſetze nämlich überhaupt

$$\psi(n) = \frac{2^n k_n \sin\varphi_n}{\sqrt{k k_1 k_2 \ldots k_{n-1}}} - \sin\varphi - \frac{2}{\sqrt{k}}\sin\varphi_1 - \frac{4}{\sqrt{kk_1}}\sin\varphi_2$$
$$- \ldots - \frac{2^{n-1}\sin\varphi_{n-1}}{\sqrt{k k_1 k_2 k_3 \ldots k_{n-2}}};$$

ſo iſt

$$\psi(n+1) - \psi(n) =$$
$$\frac{2^{n+1} k_{n+1} \sin\varphi_{n+1}}{\sqrt{k k_1 k_2 \ldots k_n}} - \frac{2^n k_n \sin\varphi_n}{\sqrt{kk_1 \ldots k_{n-1}}} - \frac{2^n \sin\varphi_n}{\sqrt{kk_1 \ldots k_{n-1}}}$$
$$= \frac{2^{n+1} k_{n+1} \sin\varphi_{n+1}}{\sqrt{k k_1 k_2 \ldots k_n}} - \frac{2^n (1 + k_n)}{\sqrt{kk_1 \ldots k_{n-1}}}\sin\varphi_n;$$

aber nach dem Obigen

$$1 + k_n = \frac{2\sqrt{k_n}}{k_{n+1}} = \frac{2 k_n}{k_{n+1}\sqrt{k_n}};$$

alſo

$$\psi(n+1) - \psi(n) = \frac{2^{n+1}}{\sqrt{kk_1 k_2 \ldots k_n}}\left\{k_{n+1}\sin\varphi_{n+1} - \frac{k_n}{k_{n+1}}\sin\varphi_n\right\}.$$

Folglich, weil

$$\psi(1) = \frac{2 k_1 \sin\varphi_1}{\sqrt{k}} - \sin\varphi$$
$$= k\sin\varphi + \frac{2 k_1 \sin\varphi_1}{\sqrt{k}} - (1 + k)\sin\varphi$$
$$= k\sin\varphi + \frac{2k_1 \sin\varphi_1}{\sqrt{k}} - \frac{2\sqrt{k}}{k_1}\sin\varphi$$
$$= k\sin\varphi + \frac{2 k_1 \sin\varphi_1}{\sqrt{k}} - \frac{2 k}{k_1\sqrt{k}}\sin\varphi$$
$$= k\sin\varphi + \frac{2}{\sqrt{k}}\left\{k_1 \sin\varphi_1 - \frac{k}{k_1}\sin\varphi\right\}$$

iſt;

$$\psi(1) = k\sin\varphi + \frac{2}{\sqrt{k}}\left\{k_1 \sin\varphi_1 - \frac{k}{k_1}\sin\varphi\right\}$$
$$\psi(2) - \psi(1) = \frac{4}{\sqrt{kk_1}}\left\{k_2 \sin\varphi_2 - \frac{k_1}{k_2}\sin\varphi_1\right\}$$
$$\psi(3) - \psi(2) = \frac{8}{\sqrt{kk_1 k_2}}\left\{k_3 \sin\varphi_3 - \frac{k_2}{k_3}\sin\varphi_2\right\}$$
$$\psi(4) - \psi(3) = \frac{16}{\sqrt{kk_1 k_2 k_3}}\left\{k_4 \sin\varphi_4 - \frac{k_3}{k_4}\sin\varphi_3\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi(n) - \psi(n-1) = \frac{2^n}{\sqrt{kk_1 \ldots k_{n-1}}}\left\{k_n \sin\varphi_n - \frac{k_{n-1}}{k_n}\sin\varphi_{n-1}\right\}.$$

Alſo, wenn man addirt, da wegen $k_n = 1$, $\varphi_n = \Omega$

$$\psi(n) = \frac{2^n \sin \Omega'}{\sqrt{k k_1 \ldots k_{n-1}}} - \sin \varphi - \frac{2}{\sqrt{k}} \sin \varphi_1 - \ldots$$

$$\ldots - \frac{2^{n-1} \sin \varphi_{n-1}}{\sqrt{k k_1 k_2 \ldots k_{n-2}}} = \Sigma$$

iſt;

$$\Sigma = k \sin \varphi + \frac{2}{\sqrt{k}} \left\{ k_1 \sin \varphi_1 - \frac{k}{k_1} \sin \varphi \right\}$$

$$+ \frac{4}{\sqrt{k k_1}} \left\{ k_2 \sin \varphi_2 - \frac{k_1}{k_2} \sin \varphi_1 \right\}$$

$$+ \frac{8}{\sqrt{k k_1 k_2}} \left\{ k_3 \sin \varphi_3 - \frac{k_2}{k_3} \sin \varphi_2 \right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{2^n}{\sqrt{k k_1 \ldots k_{n-1}}} \left\{ k_n \sin \varphi_n - \frac{k_{n-1}}{k_n} \sin \varphi_{n-1} \right\}.$$

Vergleicht man die beiden in (33.) und hier entwickelten Näherungsmethoden mit einander, ſo fällt in die Augen, daß die bequeme Anwendbarkeit der erſten darauf beruhet, daß die Größen $k, k', k'', k''', \ldots$ ſich möglichſt ſchnell der Null nähern, ſo wie im Gegentheil, wenn die zweite Methode bequem anwendbar ſeyn ſoll, die Größen $k, k_1, k_2, k_3, \ldots$ ſich möglichſt ſchnell der Einheit nähern müſſen, woraus alſo hervorgeht, daß man ſich im Allgemeinen mit dem größten Vortheil der erſten oder zweiten Methode bedienen wird, jenachdem k entweder nahe $= 0$ oder nahe $= 1$ iſt. Wäre alſo z. B. eine Ellipſe zu rectificiren, deren Excentricität k nahe $= 1$ iſt, ſo würde man ſich dazu am beſten der zweiten Methode bedienen, und hat ſich hierbei nur zu erinnern, daß man n immer ſo groß nehmen muß, daß der beabſichtigte Grad der Näherung verſtattet, $k_n = 1$ zu ſetzen. Für die elliptiſchen Functionen, d. i. für die Rectification der Ellipſe, muß man, wie ſchon in (33.), $a = 1$, $b = -k^2$ ſetzen, wodurch man

$$a_n + b_n =$$

$$k'^2 - kk' \left\{ \sqrt{k'_1} + \sqrt{\left(\frac{k'_1 k'_2}{k}\right)} + \sqrt{\left(\frac{k'_1 k'_2 k'_3}{k k_1}\right)} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \sqrt{\left(\frac{k'_1 k'_2 k'_3 \ldots k'_n}{k k_1 k_2 \ldots k_{n-2}}\right)} \right\},$$

oder auch, weil nach dem Obigen

$$k' \sqrt{k'_1} = 1 - k$$

iſt,

$$a_n + b_n =$$

$$= k'\sqrt{k'_1}\left\{1 - \sqrt{kk'_2} - \sqrt{\left(\frac{kk'_2\,k'_3}{k_1}\right)} - \sqrt{\left(\frac{kk'_2\,k'_3\,k'_4}{k_1\,k_2}\right)} - \ldots - \sqrt{\left(\frac{kk'_2\,k'_3\,\ldots\,k'_n}{k_1\,k_2\,\ldots\,k_{n-2}}\right)}\right\},$$

$$E(\varphi) = (a_n + b_n)\,K'\,l\,tang(45^0 + \tfrac{1}{2}\Omega') + k\Sigma$$

erhält. K' und Σ behalten ihre vorher angegebenen allgemeinen Werthe. Für den elliptiſchen Quadranten muß man $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ſetzen. Beſondere Formeln für dieſen Fall giebt Legendre im Traité des fonctions elliptiques. T. I. p. 115. M. ſ. auch den Artikel Cylinder (3.) i. d. Z. und Rectification.

Für die Hyperbel müßte man wie in (33.) verfahren, wobei wir jedoch hier nicht länger verweilen, da die Sache nach der dort gegebenen Erläuterung durchaus keine Schwierigkeit hat.

Eine ähnliche Methode, wie die hier in (34.) entwickelte, in dem Falle, wo k nahe = 1 iſt, würde ſich auch für die elliptiſchen Functionen der erſten Art geben laſſen; indeß ſind dieſe ja auch unter dem hier betrachteten allgemeinen Integral begriffen.

XVI. Annähernde Berechnung der elliptiſchen Functionen der dritten Art.

35. Wir wollen zuerſt die beiden ſpeciellen Fälle, wenn in der elliptiſchen Function der dritten Art

$$\Pi(n,\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{(1 + n\sin\varphi^2)\,\Delta(\varphi)}$$

n = k oder n = — k iſt, einer beſondern Betrachtung unterwerfen. Da offenbar

$$\Pi(n,\varphi) = \tfrac{1}{2}\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} + \tfrac{1}{2}\int_0^\varphi \frac{1 - n\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}$$

iſt, ſo iſt $\Pi(n, \varphi)$ als gefunden zu betrachten, wenn das zweite Integral auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens gefunden iſt, da das erſte eine elliptiſche Function der erſten Art iſt. Iſt nun zuerſt n = k, ſo ſetze man

$$\sin\psi = \frac{(1 + k)\sin\varphi}{1 + k\sin\varphi^2},$$

welches verſtattet iſt, da offenbar

$$(1 + k\sin\varphi^2)^2 > (1 + k)^2\sin\varphi^2$$

iſt, indem hieraus, wenn man quadrirt,

$$1 + 2k\sin\varphi^2 + k^2\sin\varphi^4 > \sin\varphi^2 + 2k\sin\varphi^2 + k^2\sin\varphi^2,$$

$$\cos\varphi^2 > k^2\sin\varphi^2\cos\varphi^2,\ k^2\sin\varphi^2 < 1$$

folgt, wie es wirklich der Fall iſt, da bekanntlich immer $k < 1$ iſt. Durch Differentiation erhält man nun leicht

$$\cos\psi\,\partial\psi = \frac{(1+k)\cos\varphi(1-k\sin\varphi^2)\,\partial\varphi}{(1+k\sin\varphi^2)^2},$$

und folglich, weil

$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi\,\varDelta(\varphi)}{1+k\sin\varphi^2}$$

iſt:

$$\partial\psi = \frac{(1+k)(1-k\sin\varphi^2)}{1+k\sin\varphi^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\varDelta(\varphi)};$$

alſo

$$\int_0^\varphi \frac{1-k\sin\varphi^2}{1+k\sin\varphi^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\varDelta(\varphi)} = \frac{\psi}{1+k},$$

da $\psi = 0$ für $\varphi = 0$. Hierdurch iſt alſo dieſes Integral und folglich auch $\Pi(n, \varphi)$ in dem Falle $n = k$ gefunden.

Iſt $n = -k$, ſo findet man, indem

$$\sin\omega = \frac{(1-k)\sin\varphi}{1-k\sin\varphi^2}$$

geſetzt wird, auf ganz ähnliche Art

$$\int_0^\varphi \frac{1+k\sin\varphi^2}{1-k\sin\varphi^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\varDelta(\varphi)} = \frac{\omega}{1-k}.$$

Hiernach können wir alſo im Folgenden von dem Falle $n = \pm k$ ganz abſtrahiren.

In (24.) haben wir ferner, für

$$\alpha = (1+n)\left(1+\frac{k^2}{n}\right),$$

die beiden merkwürdigen Gleichungen gefunden:

$$\Pi(n, \varphi) + \Pi\left(\frac{k^2}{n}, \varphi\right) = F(\varphi) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\text{Arc tang}\,\frac{\sqrt{\alpha}\,\text{tang}\,\varphi}{\varDelta(\varphi)},$$

wenn α poſitiv iſt, und, wenn $\sqrt{\alpha} = \beta\sqrt{-1}$ iſt:

$$\Pi(n, \varphi) + \Pi\left(\frac{k^2}{n}, \varphi\right) = F(\varphi) + \frac{1}{2\beta}\,l\,\frac{\varDelta(\varphi)+\beta\,\text{tang}\,\varphi}{\varDelta(\varphi)-\beta\,\text{tang}\,\varphi}.$$

Da nun, weil wir von dem Falle $n = \pm k$ ganz abſtrahiren, und $k < 1$ iſt, offenbar immer der abſolute Werth von n oder $\frac{k^2}{n}$ kleiner als k iſt, ſo ſieht man, daß man im Folgenden immer annehmen kann, daß in $\Pi(n, \varphi)$ der abſolute Werth von n kleiner als k iſt. Die Fälle $n = -k^2$ und $n = -1$, in denen $\alpha = 0$ wird, die obigen Gleichungen alſo nicht mehr Statt finden, ſind ſchon in (24.) erledigt worden.

36. Wir betrachten nun wieder das allgemeinere Integral

$$\Gamma = \int_0^\varphi \frac{A+B\sin\varphi^2}{1+n\sin\varphi^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\varDelta(k, \varphi)},$$

welches ſich aber auch auf die Form

$$\Gamma = \int_0^\varphi \frac{A + nA\sin\varphi^2 + (B - nA)\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\varDelta(k,\varphi)},$$

d. i., wenn wir ſtatt A und B — nA reſpective a und b ſetzen, auf die Form

$$\Gamma = \int_0^\varphi \left\{a + \frac{b\sin\varphi^2}{1+n\sin\varphi^2}\right\} \frac{\partial\varphi}{\varDelta(k,\varphi)}$$

bringen läßt.

Wie in (33.) ſetzen wir nun auch hier

$$k = \frac{2\gamma k_,}{1+k_,},\ \sin(2\varphi - \varphi_,) = k_,\sin\varphi_,;$$

$$\sin\varphi^2 = \tfrac{1}{2}(1 + k_,\sin\varphi_,^2 - \varDelta(k_,,\varphi_,)\cos\varphi_,),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\varDelta(k,\varphi)} = \frac{1+k_,}{2} \cdot \frac{\partial\varphi_,}{\varDelta(k_,,\varphi_,)};$$

ſo wird

$$\Gamma =$$

$$\frac{1+k_,}{2}\int_0^{\varphi_,} \left\{a + \frac{\frac{1}{2}b(1+k_,\sin\varphi_,^2 - \varDelta(k_,,\varphi_,)\cos\varphi_,)}{1+\frac{1}{2}n(1+k_,\sin\varphi_,^2 - \varDelta(k_,,\varphi_,)\cos\varphi_,)}\right\} \frac{\partial\varphi_,}{\varDelta(k_,,\varphi_,)}.$$

Multiplicirt man nun Zähler und Nenner des Bruchs in der Klammer mit

$$1 + \tfrac{1}{2}n(1+k_,\sin\varphi_,^2 + \varDelta(k_,,\varphi_,)\cos\varphi_,),$$

ſo wird der Nenner

$$= (1 + \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{2}nk_,\sin\varphi_,^2)^2 - \tfrac{1}{4}n^2(1 - k_,^2\sin\varphi_,^2)\cos\varphi_,^2$$
$$= 1 + n + n\{\tfrac{1}{4}n(1 + k_,^2) + (1 + \tfrac{1}{2}n)k_,\}\sin\varphi_,^2.$$

Da aber

$$k^2 = \frac{4k_,}{(1+k_,)^2},\ 1 - k^2 = k'^2 = \left(\frac{1-k_,}{1+k_,}\right)^2;$$

$$k' = \frac{1-k_,}{1+k_,},\ k_, = \frac{1-k'}{1+k'},\ 1+k_, = \frac{2}{1+k'},\ 1+k_,^2 = \frac{2(1+k'^2)}{(1+k')^2}$$

iſt; ſo ergiebt ſich nach gehöriger Subſtitution der obige Nenner

$$= 1 + n + \frac{n(n+k^2)}{(1+k')^2}\sin\varphi_,^2$$

$$= (1+n)\left\{1 + \frac{n(n+k^2)}{(1+n)(1+k')^2}\sin\varphi_,^2\right\} = (1+n)(1+n_,\sin\varphi_,^2),$$

für

$$n_, = \frac{n(n+k^2)}{(1+n)(1+k')^2}.$$

Der Zähler wird durch die angezeigte Multiplication

$$= \tfrac{1}{2}b(1 + k_{,}\sin\varphi_{,}^{2} - \Delta(k_{,}, \varphi_{,})\cos\varphi_{,})$$
$$+ \tfrac{1}{4}bn\left\{\begin{matrix}1 + 2k_{,}\sin\varphi_{,}^{2} + k_{,}^{2}\sin\varphi_{,}^{4} \\ -(1-k_{,}^{2}\sin\varphi_{,}^{2})\cos\varphi_{,}^{2}\end{matrix}\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}b\{1 + k_{,}\sin\varphi_{,}^{2} + \tfrac{1}{2}n(1+k_{,})^{2}\sin\varphi_{,}^{2}\}$$
$$- \tfrac{1}{2}b\Delta(k_{,}, \varphi_{,})\cos\varphi_{,}$$
$$= \tfrac{1}{2}b\left\{\begin{matrix}1+n_{,}\sin\varphi_{,}^{2} \\ -\frac{n(n+k^{2})}{(1+n)(1+k')^{2}}\sin\varphi_{,}^{2} + \frac{1-k'}{1+k'}\sin\varphi_{,}^{2} + \frac{2n}{(1+k')^{2}}\sin\varphi_{,}^{2}\end{matrix}\right\}$$
$$- \tfrac{1}{2}b\Delta(k_{,}, \varphi_{,})\cos\varphi_{,}$$
$$= \tfrac{1}{2}b\left\{1 + n_{,}\sin\varphi_{,}^{2} + \frac{k^{2}+2n+n^{2}}{(1+n)(1+k')^{2}}\sin\varphi_{,}^{2}\right\}$$
$$- \tfrac{1}{2}b\Delta(k_{,}, \varphi_{,})\cos\varphi_{,}$$
$$= \tfrac{1}{2}b(1+n_{,}\sin\varphi_{,}^{2}) + (1+n)b_{,}\sin\varphi_{,}^{2}$$
$$- \tfrac{1}{2}b\Delta(k_{,}, \varphi_{,})\cos\varphi_{,},$$

wenn wir

$$b_{,} = b.\frac{k^{2}+2n+n^{2}}{2(1+n)^{2}(1+k')^{2}}$$

ſetzen.

Folglich iſt:

$$\Gamma = \frac{1+k_{,}}{2}\int_{0}^{\varphi_{,}}\left\{a + \frac{\frac{1}{2}b}{1+n} + \frac{b_{,}\sin\varphi_{,}^{2}}{1+n_{,}\sin\varphi_{,}^{2}}\right\}\frac{\partial\varphi_{,}}{\Delta(k_{,}, \varphi_{,})}$$
$$- \frac{1+k_{,}}{2}.\frac{\frac{1}{2}b}{1+n}\int_{0}^{\varphi_{,}}\frac{\cos\varphi_{,}\partial\varphi_{,}}{1+n_{,}\sin\varphi_{,}^{2}},$$

und es iſt alſo, wenn wir

$$a_{,} = a + \frac{\frac{1}{2}b}{1+n},$$
$$b_{,} = b.\frac{k^{2}+2n+n^{2}}{2(1+n)^{2}(1+k')^{2}},$$
$$n_{,} = \frac{n(n+k^{2})}{(1+n)(1+k')^{2}},$$
$$\Gamma_{,} = \int_{0}^{\varphi_{,}}\left\{a_{,} + \frac{b_{,}\sin\varphi_{,}^{2}}{1+n_{,}\sin\varphi_{,}^{2}}\right\}\frac{\partial\varphi_{,}}{\Delta(k_{,}, \varphi_{,})}$$

ſetzen:

$$\Gamma = \frac{1+k_{,}}{2}\left\{\Gamma_{,} - \frac{\frac{1}{2}b}{1+n}\int_{0}^{\varphi_{,}}\frac{\cos\varphi_{,}\partial\varphi_{,}}{1+n_{,}\sin\varphi_{,}^{2}}\right\}.$$

Werden alſo $k_{,}, k_{,,}, k_{,,,}, \ldots; \varphi_{,}, \varphi_{,,}, \varphi_{,,,}, \ldots,$ aus den Gleichungen

$$k = \frac{2\sqrt{k_{,}}}{1+k_{,}},\ \sin(2\varphi-\varphi_{,}) = k_{,}\sin\varphi_{,};$$
$$k_{,} = \frac{2\sqrt{k_{,,}}}{1+k_{,,}},\ \sin(2\varphi_{,}-\varphi_{,,}) = k_{,,}\sin\varphi_{,,};$$

$$k_{,,} = \frac{2\sqrt{k_{,,,}}}{1+k_{,,,}},\quad \sin(2\varphi_{,,} - \varphi_{,,,}) = k_{,,,}\sin\varphi_{,,,};$$
u. ſ. f. u. ſ. f.

beſtimmt; ſo iſt

$$\Gamma = \frac{1+k_{,}}{2}\left\{\Gamma_{,} - \frac{\frac{1}{2}b}{1+n}\int_0^{\varphi_{,}} \frac{\cos\varphi_{,}\,\partial\varphi_{,}}{1+n_{,}\sin\varphi_{,}^2}\right\}$$

$$\Gamma_{,} = \frac{1+k_{,,}}{2}\left\{\Gamma_{,,} - \frac{\frac{1}{2}b_{,}}{1+n_{,}}\int_0^{\varphi_{,,}} \frac{\cos\varphi_{,,}\,\partial\varphi_{,,}}{1+n_{,,}\sin\varphi_{,,}^2}\right\}$$

$$\Gamma_{,,} = \frac{1+k_{,,,}}{2}\left\{\Gamma_{,,,} - \frac{\frac{1}{2}b_{,,}}{1+n_{,,}}\int_0^{\varphi_{,,,}} \frac{\cos\varphi_{,,,}\,\partial\varphi_{,,,}}{1+n_{,,,}\sin\varphi_{,,,}^2}\right\}$$

$$\Gamma_{,,,} = \frac{1+k_{IV}}{2}\left\{\Gamma_{IV} - \frac{\frac{1}{2}b_{,,,}}{1+n_{,,,}}\int_0^{\varphi_{IV}} \frac{\cos\varphi_{IV}\,\partial\varphi_{IV}}{1+n_{IV}\sin\varphi_{IV}^2}\right\}$$
u. ſ. f. u. ſ. f.

und aus dem Obigen erhellet leicht, wie a, b, n; $a_{,}$, $b_{,}$, $n_{,}$; $a_{,,}$, $b_{,,}$, $n_{,,}$; u. ſ. f. ſucceſſive aus einander gefunden werden.

Macht man $n = mk$, $n_{,} = m_{,}k_{,}$, $n_{,,} = m_{,,}k_{,,}$, u. ſ. f., ſo wird nach dem Obigen leicht erhalten:

$$m_{,} = \frac{m(m+k)}{1+mk},\quad m_{,,} = \frac{m_{,}(m_{,}+k_{,})}{1+m_{,}k_{,}},\quad m_{,,,} = \frac{m_{,,}(m_{,,}+k_{,,})}{1+m_{,,}k_{,,}},\ \ldots.$$

Alſo iſt

$$1 \pm \frac{m_{,}}{m} = \frac{(1\pm k)(1\pm m)}{1+mk}.$$

Der abſolute Werth von n iſt bekanntlich kleiner als k, und folglich der abſolute Werth von $m < 1$. Iſt nun zuerſt $\frac{m_{,}}{m}$ poſitiv, ſo hat man

$$1 - \frac{m_{,}}{m} = \frac{(1-k)(1-m)}{1+mk},$$

alſo offenbar $1 - \frac{m_{,}}{m}$ poſitiv, und folglich der abſolute Werth von $\frac{m_{,}}{m} < 1$. Iſt $\frac{m_{,}}{m}$ negativ, ſo hat man

$$1 + \frac{m_{,}}{m} = \frac{(1+k)(1+m)}{1+mk},$$

alſo offenbar der abſolute Werth von $\frac{m_{,}}{m}$ wieder < 1, da $1 + \frac{m_{,}}{m}$ augenſcheinlich poſitiv iſt, indem man nur immer gehörig vor Augen behält, daß auch $k < 1$ iſt. Es iſt alſo immer rückſichtlich der abſoluten Werthe $m_{,} < m$, und die abſoluten Werthe von m, $m_{,}$, $m_{,,}$, $m_{,,,}$, ... bilden folglich eine abnehmende Reihe, ſo daß alſo, da der abſolute Werth von $m < 1$ iſt, jeder dieſer Werthe < 1 iſt. Nun können nach (32.) k, $k_{,}$, $k_{,,}$, $k_{,,,}$, ..., wenn man ſich nur weit genug vom

Anfange dieſer Reihe entfernt, der Null beliebig nahe gebracht werden, und dies gilt alſo nach dem Vorhergehenden um ſo mehr von den abſoluten Werthen der Größen mk, $m_{,}k_{,}$, $m_{,,}k_{,,}$, $m_{,,,}k_{,,,}$, ..., d. i. von den abſoluten Werthen der Größen n, $n_{,}$, $n_{,,}$, $n_{,,,}$, ..., ſo daß folglich dieſe Reihe auch immer ſtärker convergirt wie die Reihe k, $k_{,}$, $k_{,,}$, $k_{,,,}$, ... Setzt man alſo $k_{(\mu)} = 0$, ſo iſt um ſo mehr $n_{(\mu)} = 0$ zu ſetzen.

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$\lambda = \frac{k^2 + 2n + n^2}{(1+n)^2(1+k')^2} = \frac{(1+n)^2 - k'^2}{(1+n)^2(1+k')^2},$$

$$\lambda_{,} = \frac{k_{,}^2 + 2n_{,} + n_{,}^2}{(1+n_{,})^2(1+k'_{,})^2} = \frac{(1+n_{,})^2 - k'^2_{,}}{(1+n_{,})^2(1+k'_{,})^2},$$

$$\lambda_{,,} = \frac{k_{,,}^2 + 2n_{,,} + n_{,,}^2}{(1+n_{,,})^2(1+k'_{,,})^2} = \frac{(1+n_{,,})^2 - k'^2_{,,}}{(1+n_{,,})^2(1+k'_{,,})^2},$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

ſo iſt

$$b_{,} = \tfrac{1}{2}\lambda b,\; b_{,,} = \tfrac{1}{4}\lambda\lambda_{,}b,\; b_{,,,} = \tfrac{1}{8}\lambda\lambda_{,}\lambda_{,,}b, \ldots\ldots$$

Iſt nun, wie man offenbar anzunehmen berechtigt iſt (ſ. 33. bei einem ganz ähnlichen Falle), der abſolute Werth von b nicht größer als die Einheit, ſo iſt für den beabſichtigten Grad der Näherung, da für denſelben nach der Vorausſetzung $k_{(\mu)} = n_{(\mu)} = 0$ iſt, augenſcheinlich auch $b_{(\mu+1)} = 0$ zu ſetzen. Endlich iſt auch für dieſen Grad der Näherung

$$a_{(\mu)} = a + \frac{\frac{1}{2}b}{1+n} + \frac{\frac{1}{2}b_{,}}{1+n_{,}} + \frac{\frac{1}{2}b_{,,}}{1+n_{,,}} + \frac{\frac{1}{2}b_{,,,}}{1+n_{,,,}} + \ldots,$$

dieſe Reihe einſchließlich bis zu dem $b_{(\mu)}$ enthaltenden Gliede fortgeſetzt, oder auch

$$a_{(\mu)} = a + \frac{\frac{1}{2}b}{1+n} + \frac{\frac{1}{4}\lambda b}{1+n_{,}} + \frac{\frac{1}{8}\lambda\lambda_{,}b}{1+n_{,,}} + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{\frac{1}{2^{\mu+1}}\lambda\lambda_{,}\lambda_{,,}\ldots\lambda_{(\mu-1)}b}{1+n_{(\mu)}}.$$

Mittelſt des Obigen ergiebt ſich aber, immer unter der Vorausſetzung, daß $k_{(\mu)} = 0$ iſt, auf der Stelle

$$\Gamma_{(\mu)} = a_{(\mu)}\,\varphi_{(\mu)},$$

oder, wenn Ω wieder dieſelbe Bedeutung wie in (32.) und (33.) hat,

$$\Gamma_{(\mu)} = 2^{\mu} a_{(\mu)}\,\Omega.$$

Alſo iſt, wenn wir wieder der Kürze wegen

$$(1+k_{,})(1+k_{,,})(1+k_{,,,})(1+k_{\text{IV}})\ldots = K$$

ſetzen, wie leicht erhellen wird:

$$\Gamma = a_{(\mu)} K \Omega$$
$$- \frac{1+k_{,}}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}b}{1+n} \int_0^{\varphi_{,}} \frac{\cos\varphi_{,} \partial\varphi_{,}}{1+n_{,}\sin\varphi_{,}^2}$$
$$- \frac{1+k_{,}}{2} \cdot \frac{1+k_{,,}}{2} \cdot \frac{\frac{1}{4}\lambda b}{1+n_{,}} \int_0^{\varphi_{,,}} \frac{\cos\varphi_{,,} \partial\varphi_{,,}}{1+n_{,,}\sin\varphi_{,,}^2}$$
$$- \frac{1+k_{,}}{2} \cdot \frac{1+k_{,,}}{2} \cdot \frac{1+k_{,,,}}{2} \cdot \frac{\frac{1}{8}\lambda\lambda_{,} b}{1+n_{,,}} \int_0^{\varphi_{,,,}} \frac{\cos\varphi_{,,,} \partial\varphi_{,,,}}{1+n_{,,,}\sin\varphi_{,,,}^2}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder, weil

$$1+k_{,} = \frac{2\sqrt{k_{,}}}{k},\ 1+k_{,,} = \frac{2\sqrt{k_{,,}}}{k_{,}},\ 1+k_{,,,} = \frac{2\sqrt{k_{,,,}}}{k_{,,}},\ \ldots$$

iſt:

$$\Gamma = a_{(\mu)} K \Omega$$
$$- \frac{\sqrt{k_{,}}}{k} \cdot \frac{\frac{1}{2}b}{1+n} \int_0^{\varphi_{,}} \frac{\cos\varphi_{,} \partial\varphi_{,}}{1+n_{,}\sin\varphi_{,}^2}$$
$$- \frac{\sqrt{k_{,}}}{k} \cdot \frac{\sqrt{k_{,,}}}{k_{,}} \cdot \frac{\frac{1}{4}\lambda b}{1+n_{,}} \int_0^{\varphi_{,,}} \frac{\cos\varphi_{,,} \partial\varphi_{,,}}{1+n_{,,}\sin\varphi_{,,}^2}$$
$$- \frac{\sqrt{k_{,}}}{k} \cdot \frac{\sqrt{k_{,,}}}{k_{,}} \cdot \frac{\sqrt{k_{,,,}}}{k_{,,}} \cdot \frac{\frac{1}{8}\lambda\lambda_{,} b}{1+n_{,,}} \int_0^{\varphi_{,,,}} \frac{\cos\varphi_{,,,} \partial\varphi_{,,,}}{1+n_{,,,}\sin\varphi_{,,,}^2}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzt man nun überhaupt

$$\sqrt{n} \cdot \sin\varphi = x,\quad \sqrt{n} \cdot \cos\varphi\, \partial\varphi = \partial x\,;$$

ſo iſt

$$\frac{\cos\varphi\, \partial\varphi}{1+n\sin\varphi^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\partial x}{1+x^2}\,;$$

folglich, wenn man integrirt, nach einer ſehr bekannten Formel:

$$\int_0^{\varphi} \frac{\cos\varphi\, \partial\varphi}{1+n\sin\varphi^2} = \frac{\text{Arc tang}(\sqrt{n} \cdot \sin\varphi)}{\sqrt{n}}\,;$$

alſo

$$\Gamma = a_{(\mu)} K \Omega$$
$$- \frac{\sqrt{k_{,}}}{k} \cdot \frac{\frac{1}{2}b}{1+n} \cdot \frac{\text{Arc tang}(\sqrt{n_{,}} \cdot \sin\varphi_{,})}{\sqrt{n_{,}}}$$
$$- \frac{\sqrt{k_{,}}}{k} \cdot \frac{\sqrt{k_{,,}}}{k_{,}} \cdot \frac{\frac{1}{4}\lambda b}{1+n_{,}} \cdot \frac{\text{Arc tang}(\sqrt{n_{,,}} \cdot \sin\varphi_{,,})}{\sqrt{n_{,,}}}$$
$$- \frac{\sqrt{k_{,}}}{k} \cdot \frac{\sqrt{k_{,,}}}{k_{,}} \cdot \frac{\sqrt{k_{,,,}}}{k_{,,}} \cdot \frac{\frac{1}{8}\lambda\lambda_{,} b}{1+n_{,,}} \cdot \frac{\text{Arc tang}(\sqrt{n_{,,,}} \cdot \sin\varphi_{,,,})}{\sqrt{n_{,,,}}}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wie man ſich zu verhalten hat, wenn die nach der hier befolgten Methode genommenen Integrale imaginär werden, erhellet

aus (24.). Die Kreisbogen werden dann, wie immer in ähnlichen Fällen, in natürliche Logarithmen verwandelt.

Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ wird

$$\Gamma = \tfrac{1}{2}\pi\, \mathrm{a}_{(\mu)} \mathrm{K} \text{ (ſ. 32. 33.)}$$

Daß man hier auch eine ähnliche Näherungsmethode, wie die in (34.) gezeigte, anwenden könnte, erhellet leicht. Wir müſſen indeß der Kürze wegen in dieſer Beziehung auf Legendre's Traité des fonctions elliptiques. T. I. Chap. XXII. verweiſen.

XVII. Entwickelung der elliptiſchen Functionen in Reihen.

37. Wir beginnen mit der Entwickelung von $(\Delta(\varphi))^{-1}$ in eine Reihe von der Form

$$\frac{1}{\Delta(\varphi)} = \mathrm{A} - 2\mathrm{A}_1 \cos 2\varphi + 4\mathrm{A}_2 \cos 4\varphi - 6\mathrm{A}_3 \cos 6\varphi + \ldots,$$

auf welche, wie wir ſehen werden, alles Uebrige zurückkommt. Um die conſtanten Coefficienten der vorſtehenden Gleichung gemäß zu beſtimmen, ſetze man

$$\Theta = \frac{1 - \mathrm{k}'}{1 + \mathrm{k}'},$$

ſo iſt

$$\mathrm{k}' = \frac{1-\Theta}{1+\Theta},\ \mathrm{k}^2 = 1 - \mathrm{k}'^2 = 1 - \left(\frac{1-\Theta}{1+\Theta}\right)^2;$$

alſo

$$(\Delta(\varphi))^2 = 1 - \mathrm{k}^2 \sin\varphi^2 = \frac{(1+\Theta)^2 \cos\varphi^2 + (1-\Theta)^2 \sin\varphi^2}{(1+\Theta)^2}$$

$$= \frac{1 + 2\Theta(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2) + \Theta^2}{(1+\Theta)^2}$$

$$= \frac{1 + 2\Theta\cos 2\varphi + \Theta^2}{(1+\Theta)^2}$$

$$= \frac{1 + \Theta\left(e^{2\varphi\sqrt{-1}} + e^{-2\varphi\sqrt{-1}}\right) + \Theta^2}{(1+\Theta)^2}$$

$$= \frac{\left(1 + \Theta e^{2\varphi\sqrt{-1}}\right)\left(1 + \Theta e^{-2\varphi\sqrt{-1}}\right)}{(1+\Theta)^2},$$

$$\frac{1}{\Delta(\varphi)} = (1+\Theta)\left(1 + \Theta e^{2\varphi\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \Theta e^{-2\varphi\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (1+\Theta)\left\{1 - \tfrac{1}{2}\Theta e^{2\varphi\sqrt{-1}} + \frac{1.3}{2.4}\Theta^2 e^{4\varphi\sqrt{-1}} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\Theta^3 e^{6\varphi\sqrt{-1}} + \ldots\right\}$$

$$\times\left\{1 - \tfrac{1}{2}\Theta e^{-2\varphi\sqrt{-1}} + \frac{1.3.}{2.4.}\Theta^2 e^{-4\varphi\sqrt{-1}} - \frac{1.3.5.}{2.4.6.}\Theta^3 e^{-6\varphi\sqrt{-1}} + \ldots\right\}.$$

Multiplicirt man nun dieſe beiden Reihen wirklich in einander, ſo ergiebt ſich ſehr leicht

$$A=(1+\Theta)\left\{1+(\tfrac{1}{2})^2\Theta^2+\left(\frac{1.3.}{2.4.}\right)^2\Theta^4+\left(\frac{1.3.5.}{2.4.6.}\right)^2\Theta^6+\ldots\right\},$$

$$A_1=\frac{1+\Theta}{1}\left\{\tfrac{1}{2}\Theta+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.4}\Theta^3+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\Theta^5+\ldots\right\},$$

$$A_2=\frac{1+\Theta}{2}\left\{\frac{1.3}{2.4}\Theta^2+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\Theta^4+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\Theta^6+\ldots\right\},$$

$$A_3=\frac{1+\Theta}{3}\left\{\frac{1.3.5}{2.4.6}\Theta^3+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\Theta^5+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5.7.9.}{2.4.6.8.10}\Theta^7+\ldots\right\},$$

$$A_4=\frac{1+\Theta}{4}\left\{\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\Theta^4+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1.3..9}{2.4..10}\Theta^6+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3..11}{2.4..12}\Theta^8+\ldots\right\},$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

und das Fortſchreitungsgeſetz dieſer Reihen iſt leicht zu überſehen. Je kleiner Θ iſt, deſto brauchbarer ſind dieſelben zur Berechnung der Coefficienten. Für $\Theta=\frac{1}{2}$ iſt

$$k'=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{3},\ k=\sqrt{1-k'^2}=\tfrac{2}{3}\sqrt{2}=0{,}9428\ .$$

So lange alſo der Werth von k dieſe Gränze nicht überſteigt, wird man ſich der obigen Reihe mit Vortheil bedienen. Wenn aber $k>0{,}9428$ iſt, wird $\Theta>\frac{1}{2}$, die obigen Reihen convergiren nur wenig, und man wird dann beſſer auf folgende Art verfahren.

38. Zuerſt kommt es darauf an, die beiden erſten Coefficienten A und A_1 genau zu finden, wozu man auf folgende Art gelangt. Aus der zum Grunde gelegten Gleichung in (37.) folgt durch Multiplication mit $\partial\varphi$ und $\cos 2\varphi\,\partial\varphi$:

$$\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}=A\partial\varphi-2A_1\cos 2\varphi\,\partial\varphi+4A_2\cos 4\varphi\,\partial\varphi-\ldots\ldots,$$

$$\frac{\cos 2\varphi\,\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}=A\cos 2\varphi\partial\varphi-2A_1\cos 2\varphi\cos 2\varphi\,\partial\varphi+4A_2\cos 4\varphi\cos 2\varphi\partial\varphi-\ldots;$$

und folglich, wenn man zunächſt die erſte Gleichung integrirt:

$$\int\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}=A\varphi-A_1\sin 2\varphi+A_2\sin 4\varphi-A_3\sin 6\varphi+\ldots.;$$

alſo

$$\tfrac{1}{2}A\pi=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}=F\left(\frac{\pi}{2}\right),\ A=\frac{2}{\pi}F\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Ferner iſt allgemein

$$\cos 2n\varphi\cos 2\varphi=\frac{\cos 2(n+1)\varphi+\cos 2(n-1)\varphi}{2},$$

$$\int\cos 2n\varphi\cos 2\varphi\,\partial\varphi=\frac{1}{4(n+1)}\sin 2(n+1)\varphi+\frac{1}{4(n-1)}\sin 2(n-1)\varphi,$$

und folglich, wenn n nicht $= 1$ iſt, da in dieſem Falle $\frac{1}{4(n-1)}$ unendlich wird,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2n\varphi \cos 2\varphi \,\partial\varphi = 0.$$

Für $n = 1$ iſt

$$\cos 2\varphi \cos 2\varphi = \frac{\cos 4\varphi + 1}{2},$$

$$\int \cos 2\varphi \cos 2\varphi \,\partial\varphi = \tfrac{1}{8}\sin 4\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2\varphi \cos 2\varphi \,\partial\varphi = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Auch iſt

$$\int \cos 2\varphi \,\partial\varphi = \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi, \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2\varphi \,\partial\varphi = 0.$$

Folglich nach dem Obigen

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos 2\varphi \,\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} = -\tfrac{1}{2}A_1\pi, \quad A_1 = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos 2\varphi \,\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

Aber

$$\frac{\sin\varphi^2}{\Delta(\varphi)} = \frac{k^2 \sin\varphi^2}{k^2 \Delta(\varphi)} = \frac{1-(1-k^2\sin\varphi^2)}{k^2\Delta(\varphi)} = \frac{1}{k^2}\left\{\frac{1}{\Delta(\varphi)} - \Delta(\varphi)\right\},$$

$$\frac{\cos\varphi^2}{\Delta(\varphi)} = \frac{k^2\cos\varphi^2}{k^2\Delta(\varphi)} = \frac{k^2 - k^2\sin\varphi^2}{k^2\Delta(\varphi)} = \frac{1-k^2\sin\varphi^2-(1-k^2)}{k^2\Delta(\varphi)}$$

$$= \frac{1}{k^2}\left\{\Delta(\varphi) - \frac{k'^2}{\Delta(\varphi)}\right\};$$

$$\int_0^\varphi \frac{\sin\varphi^2\,\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} = \frac{1}{k^2}\left\{\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} - \int_0^\varphi \Delta(\varphi)\,\partial\varphi\right\} = \frac{1}{k^2}\{F(\varphi) - E(\varphi)\},$$

$$\int_0^\varphi \frac{\cos\varphi^2\,\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} = \frac{1}{k^2}\left\{\int_0^\varphi \Delta(\varphi)\,\partial\varphi - k'^2\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}\right\} = \frac{1}{k^2}\{E(\varphi) - k'^2F(\varphi)\};$$

alſo, da $\cos 2\varphi = \cos\varphi^2 - \sin\varphi^2$ iſt:

$$\int_0^\varphi \frac{\cos 2\varphi\,\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} = \frac{1}{k^2}\left\{2E(\varphi) - (1+k'^2)F(\varphi)\right\}$$

$$= \frac{2}{k^2}\{E(\varphi) - F(\varphi)\} + F(\varphi).$$

Folglich nach dem Obigen

$$\tfrac{1}{2}A_1\pi = \frac{2}{k^2}\left\{F\left(\frac{\pi}{2}\right) - E\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} - F\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

ſo daß alſo ſowohl $A_{\prime}$ als auch $A_{\prime\prime}$ durch vollſtändige elliptiſche Functionen der erſten und zweiten Art ausgedrückt werden kann. Nach (32.) und (33.) iſt nun

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\pi K, \quad E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\pi KL$$

für

$$K = \sqrt{\frac{k'_{,} k'_{,,} k'_{,,,} k'_{IV} \ldots}{k'}},$$

$$L = 1 - \frac{k^2}{2} - \frac{k^2 k_{,}}{4} - \frac{k^2 k_{,} k_{,,}}{8} - \ldots;$$

alſo nach dem Obigen

$$A = K = \sqrt{\frac{k'_{,} k'_{,,} k'_{,,,} k'_{IV} \ldots}{k'}},$$

$$A_1 = \frac{2}{k^2} K(1-L) - K = A\left\{\frac{2(1-L)}{k^2} - 1\right\},$$

d. i.

$$A_1 = A\left\{\frac{k_{,}}{2} + \frac{k_{,} k_{,,}}{4} + \frac{k_{,} k_{,,} k_{,,,}}{8} + \ldots\right\}.$$

Wäre k nahe der Einheit gleich, ſo könnte man ſich auch zur Berechnung von A und A_1 der Näherungsmethode in (34.) bedienen.

Hat man auf dieſe Weiſe A und A_1, ſo können die übrigen Coefficienten auf folgende Art gefunden werden. Differentiirt man die Gleichung

$$\frac{1}{\Delta(\varphi)} = A - 2A_1 \cos 2\varphi + 4A_2 \cos 4\varphi - 6A_3 \cos 6\varphi + \ldots,$$

ſo erhält man:

$$\frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{(\Delta(\varphi))^3} = 4A_1 \sin 2\varphi - 16A_2 \sin 4\varphi + 36A_3 \sin 6\varphi - \ldots,$$

und, wenn man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens mit

$$\frac{2(\Delta(\varphi))^2}{k^2} = \frac{2(1 - k^2 \sin\varphi^2)}{k^2} = \frac{2}{k^2} - 2\sin\varphi^2$$

$$= \frac{2}{k^2} - 1 + (\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2) = \frac{2}{k^2} - 1 + \cos 2\varphi$$

multiplicirt, da $\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$ iſt:

$$\begin{aligned}\frac{\sin 2\varphi}{\Delta(\varphi)} = &\left\{4A_1\left(\frac{2}{k^2} - 1\right) - 8A_2\right\}\sin 2\varphi \\ &- \left\{16A_2\left(\frac{2}{k^2} - 1\right) - 18A_3 - 2A_1\right\}\sin 4\varphi \\ &+ \left\{36A_3\left(\frac{2}{k^2} - 1\right) - 32A_4 - 8A_2\right\}\sin 6\varphi \\ &- \left\{64A_4\left(\frac{2}{k^2} - 1\right) - 50A_5 - 18A_3\right\}\sin 8\varphi \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Ferner ergiebt ſich aus der zum Grunde gelegten Gleichung, wenn man dieſelbe mit $\sin 2\varphi$ multiplicirt und die Producte der Sinus und Coſinus wieder auf gewöhnliche Weiſe als Aggregate zweier Sinus darſtellt:

$$\frac{\sin 2\varphi}{\Delta(\varphi)} = (A - 2A_2)\sin 2\varphi$$
$$- (A_1 - 3A_3)\sin 4\varphi$$
$$+ (2A_2 - 4A_4)\sin 6\varphi$$
$$- (3A_3 - 5A_5)\sin 8\varphi$$
$$+ \ldots\ldots\ldots,$$

und durch Vergleichung der beiden Ausdrücke von $\frac{\sin 2\varphi}{\Delta(\varphi)}$ erhält man:

$$2.\ 3A_2 = 4A_1\left(\frac{2}{k^2} - 1\right) - A,$$

$$3.\ 5A_3 = 16A_2\left(\frac{2}{k^2} - 1\right) - 1.3A_1,$$

$$4.\ 7A_4 = 36A_3\left(\frac{2}{k^2} - 1\right) - 2.5A_2,$$

$$5.\ 9A_5 = 64A_4\left(\frac{2}{k^2} - 1\right) - 3.7A_3,$$

$$6.\ 11A_6 = 100A_5\left(\frac{2}{k^2} - 1\right) - 4.9A_4,$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

mittelſt welcher Gleichungen alſo alle Coefficienten gefunden werden können, da man A und A_1 nach dem Obigen ſchon kennt.

39. Aus der Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} = A\,\partial\varphi - 2A_1\cos 2\varphi\,\partial\varphi + 4A_2\cos 4\varphi\,\partial\varphi - 6A_3\cos 6\varphi\,\partial\varphi + \ldots,$$

in welcher A, A_1, A_2, A_3, ... bekannt ſind, folgt nun auf der Stelle, wenn man zwiſchen den Gränzen 0, φ integrirt:

$$F(\varphi) = A\varphi - A_1\sin 2\varphi + A_2\sin 4\varphi - A_3\sin 6\varphi + \ldots,$$

wodurch alſo die Entwickelung der elliptiſchen Functionen der erſten Art gefunden iſt.

Ferner ſetze man

$$E(\varphi) = B\varphi + B_1\sin 2\varphi - B_2\sin 4\varphi + B_3\sin 6\varphi - \ldots,$$

und differentiire; ſo erhält man

$$\Delta(\varphi) = B + 2B_1\cos 2\varphi - 4B_2\cos 4\varphi + 6B_3\cos 6\varphi - \ldots,$$

und, wenn man zum zweiten Mal differentiirt:

$$\frac{k^2\sin 2\varphi}{2\Delta(\varphi)} = 4B_1\sin 2\varphi - 16B_2\sin 4\varphi + 36B_3\sin 6\varphi - \ldots$$

Aber nach dem Obigen auch

$$\frac{k^2 \sin 2\varphi}{2\Delta(\varphi)} = \tfrac{1}{2}k^2 \sin 2\varphi \{A - 2A_1 \cos 2\varphi + 4A_2 \cos 4\varphi - \ldots\}$$

$$\begin{aligned} = & \tfrac{1}{2}k^2(A - 2A_2)\sin 2\varphi \\ & - \tfrac{1}{2}k^2(A_1 - 3A_3)\sin 4\varphi \\ & + \tfrac{1}{2}k^2(2A_2 - 4A_4)\sin 6\varphi \\ & - \tfrac{1}{2}k^2(3A_3 - 5A_5)\sin 8\varphi \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und folglich durch Vergleichung beider Reihen:

$$B_1 = \frac{k^2}{8}(A - 2A_2),$$

$$4B_2 = \frac{k_2}{8}(A_1 - 3A_3),$$

$$9B_3 = \frac{k_2}{8}(2A_2 - 4A_4),$$

$$16B_4 = \frac{k^2}{8}(3A_3 - 5A_5),$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

ſo daß alſo auf dieſe Weiſe zugleich auch die Entwickelung der elliptiſchen Functionen der zweiten Art gefunden iſt.

40. Was die Entwickelung der elliptiſchen Functionen der dritten Art betrifft, ſo ſetze man

$$\Pi(\varphi) = C\varphi - C_1 \sin 2\varphi + C_2 \sin 4\varphi - C_3 \sin 6\varphi + \ldots.$$

und verſuche nun zunächſt die Beſtimmung der Coefficienten der Reihe

$$(1 + n \sin\varphi^2)^{-1} = a + a_1 \cos 2\varphi + a_2 \cos 4\varphi + a_3 \cos 6\varphi + \ldots.$$

Da

$$\sin\varphi^2 = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$$

iſt, ſo iſt, wenn man auf beiden Seiten mit $n + 2 - n\cos 2\varphi$ multiplicirt:

$$\begin{aligned} 2 = \; & (n+2)a - \tfrac{1}{2}na_1 \\ & + \{(n+2)a_1 - \tfrac{1}{2}na_2 - na\}\cos 2\varphi \\ & + \{(n+2)a_2 - \tfrac{1}{2}na_3 - \tfrac{1}{2}na_1\}\cos 4\varphi \\ & + \{(n+2)a_3 - \tfrac{1}{2}na_4 - \tfrac{1}{2}na_2\}\cos 6\varphi \\ & + \{(n+2)a_4 - \tfrac{1}{2}na_5 - \tfrac{1}{2}na_3\}\cos 8\varphi \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und man hat alſo folgende Gleichungen zwiſchen den Coefficienten:

$$\begin{aligned} & (n+2)a - \tfrac{1}{2}na_1 = 2, \\ & (n+2)a_1 - \tfrac{1}{2}na_2 - na = 0, \\ & (n+2)a_2 - \tfrac{1}{2}na_3 - \tfrac{1}{2}na_1 = 0, \\ & (n+2)a_3 - \tfrac{1}{2}na_4 - \tfrac{1}{2}na_2 = 0, \\ & (n+2)a_4 - \tfrac{1}{2}na_5 - \tfrac{1}{2}na_3 = 0, \end{aligned}$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

Um nun zuerſt a zu beſtimmen, denke man ſich in der Gleichung

$$(1+n\sin\varphi^2)^{-1} = 1 - n\sin\varphi^2 + n^2\sin\varphi^4 - n^3\sin\varphi^6 + n^4\sin\varphi^8 - \ldots$$

für die Potenzen der Sinus ihre bekannten goniometriſchen Ausdrücke durch die Coſinus der vielfachen Winkel geſetzt, ſo erhält man das von φ unabhängige Glied leicht

$$= 1 - \tfrac{1}{2}n + \frac{1.3}{2.4}n^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}n^3 + \ldots,$$

d. i. nach dem binomiſchen Lehrſatze

$$a = (1+n)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+n}}.$$

Ferner iſt

$$\tfrac{1}{2}na_1 = \frac{n+2}{\sqrt{1+n}} - 2 = \frac{1+n-2\sqrt{1+n}+1}{\sqrt{1+n}}$$

$$= \frac{(\sqrt{1+n}-1)^2}{\sqrt{1+n}},$$

und folglich, weil

$$n = (\sqrt{1+n}+1)(\sqrt{1+n}-1)$$

iſt:

$$a_1 = 2\frac{\sqrt{1+n}-1}{\sqrt{1+n}.(\sqrt{1+n}+1)},$$

oder, wenn wir

$$\frac{\sqrt{1+n}-1}{\sqrt{1+n}+1} = \theta$$

ſetzen:

$$a_1 = 2a\theta.$$

Hieraus ergiebt ſich ferner

$$na_2 = 2a\{2(n+2)\theta - n\}.$$

Aber, wie leicht erhellet,

$$n = \theta(\sqrt{1+n}+1)^2.$$

Folglich

$$na_2 = 2a\theta\{2(n+2) - (\sqrt{1+n}+1)^2\}$$

$$= 2a\theta(\sqrt{1+n}-1)^2,$$

und, weil

$$n = (\sqrt{1+n}+1)(\sqrt{1+n}-1)$$

iſt:

$$a_2 = 2a\theta\frac{\sqrt{1+n}-1}{\sqrt{1+n}+1} = 2a\theta^2.$$

Hieraus folgt mittelſt der obigen Gleichungen

$$na_3 = 2a\Theta\{2(n+2)\Theta - n\}$$
$$= 2a\Theta^2\{2(n+2) - (\sqrt{1+n}+1)^2\}$$
$$= 2a\Theta^2(\sqrt{1+n}-1)^2,$$

und wenn man wieder

$$n = (\sqrt{1+n}+1)(\sqrt{1+n}-1)$$

ſetzt:

$$a_3 = 2a\Theta^2\frac{\sqrt{1+n}-1}{\sqrt{1+n}+1} = 2a\Theta^3.$$

Auf ganz ähnliche Weiſe iſt ferner

$$na_4 = 2a\Theta^2\{2(n+2)\Theta - n\}$$
$$= 2a\Theta^3\{2(n+2) - (\sqrt{1+n}+1)^2\}$$
$$= 2a\Theta^3(\sqrt{1+n}-1)^2,$$
$$a_4 = 2a\Theta^3\frac{\sqrt{1+n}-1}{\sqrt{1+n}+1} = 2a\Theta^4.$$

Wie man ſo weiter gehen kann, iſt klar, und es iſt folglich, für

$$a = \frac{1}{\sqrt{1+n}},\ \Theta = \frac{\sqrt{1+n}-1}{\sqrt{1+n}+1},$$

immer

$$\frac{1}{1+n\sin\varphi^2} = a + 2a\Theta\cos 2\varphi + 2a\Theta^2\cos 4\varphi + 2a\Theta^3\cos 6\varphi$$
$$+ 2a\Theta^4\cos 8\varphi + \ldots,$$
$$\frac{\sqrt{1+n}}{1+n\sin\varphi^2} = 1 + 2\Theta\cos 2\varphi + 2\Theta^2\cos 4\varphi + 2\Theta^3\cos 6\varphi + \ldots$$

Aber

$$\frac{1}{\Delta(\varphi)} = A - 2A_1\cos 2\varphi + 4A_2\cos 4\varphi - 6A_3\cos 6\varphi + \ldots$$

Multiplicirt man nun dieſe Reihe mit der vorhergehenden, ſo iſt das Product, wenn man nur jedem Gliede noch den Factor $\partial\varphi$ beifügt, und der Kürze wegen $\sqrt{1+n} = \alpha$ ſetzt,

$$= \frac{\alpha\partial\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)} = \alpha\partial\Pi(\varphi)$$
$$= \alpha\{C\partial\varphi - 2C_1\cos 2\varphi\,\partial\varphi + 4C_2\cos 4\varphi\,\partial\varphi - 6C_3\cos 6\varphi\,\partial\varphi + \ldots\}.$$

Verwandelt man nun die Producte der Coſinus nach bekannten goniometriſchen Formeln in Aggregate und vergleicht die beiden Reihen mit einander, ſo erhält man zur Beſtimmung von C, C_1, C_2, C_3, ... folgende Gleichungen:

$$\alpha C = A - 2\Theta A_1 + 4\Theta^2 A_2 - 6\Theta^3 A_3 + 8\Theta^4 A_4 - \ldots,$$
$$-2\alpha C_1 = \begin{cases}\Theta(\alpha C + A)\\ -2A_1 + 4\Theta A_2 - 6\Theta^2 A_3 + 8\Theta^3 A_4 - \ldots\end{cases}$$
$$4\alpha C_2 = \begin{cases}\Theta^2(\alpha C + A) - 2\Theta A_1\\ +4A_2 - 6\Theta A_3 + 8\Theta^2 A_4 - 10\Theta^3 A_5 + \ldots\end{cases}$$

$$-6\alpha C_3 = \begin{cases} \Theta^3(\alpha C + A) - 2\Theta^2 A_1 + 4\Theta A_2 \\ - 6A_3 + 8\Theta A_4 - 10\Theta^2 A_5 + 12\Theta^3 A_6 - \ldots \end{cases}$$

$$8\alpha C_4 = \begin{cases} \Theta^4(\alpha C + A) - 2\Theta^3 A_1 + 4\Theta^2 A_2 - 6\Theta A_3 \\ + 8A_4 - 10\Theta A_5 + 12\Theta^2 A_6 - 14\Theta^3 A_7 + \ldots \end{cases}$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

und dieſe Ausdrücke, deren Geſetz leicht zu überſehen iſt, geſtatten, weil Θ immer ein ächter Bruch iſt, eine bequeme Berechnung der Coefficienten C, C_1, C_2, C_3, ... bei den elliptiſchen Functionen der dritten Art.

XVIII. Erſtes Theorem von Jacobi über die elliptiſchen Functionen der erſten Art.

41. Die von dem berühmten, indem ich dieſes ſchreibe, jüngſt verſtorbenen Legendre ſeit einer langen Reihe von Jahren mit der größten Liebe und Ausdauer gepflegte Theorie der elliptiſchen Functionen iſt in neueſter Zeit durch zwei jüngere Mathematiker: C. G. J. Jacobi in Königsberg und den in dieſen Zuſätzen ſchon mehrmals genannten Abel, mit mehreren überaus merkwürdigen Entdeckungen, von denen jetzt das Wichtigſte, ſo weit es hier der Raum geſtattet, mitgetheilt werden ſoll, bereichert worden. Nach (8.) laſſen ſich die elliptiſchen Functionen der erſten Art unter folgender Form darſtellen:

$$F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\Delta(k, \varphi)} = \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \xi,$$

wo $x = \sin\varphi$ iſt, und bekanntlich φ die Amplitude von $\xi = F(k, \varphi)$ genannt wird. Setzen wir daher mit Jacobi $\varphi = \text{am.}\xi$, oder, wie hier der Kürze wegen geſchehen ſoll, mit Legendre $\varphi = A\xi$, ſo iſt $x = \sin \text{am}\, \xi$ oder $x = \sin A\xi$. Setzen wir ferner im Folgenden immer

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\Delta(k, \varphi)} = \int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = K,$$

ſo ſoll $K - \xi = \xi'$ das Complement von ξ genannt werden. Iſt aber die elliptiſche Function $F(k, \varphi') = K - \xi$, ſo ſoll φ', welches $= A(K-\xi)$ iſt, die Coamplitudo von ξ genannt, und nach Jacobi durch $\text{coam.}\xi$, oder hier nach Legendre durch $CA\xi$ bezeichnet werden, ſo daß alſo immer $A(K-\xi) = CA\xi$, $A\xi = CA(K-\xi)$ iſt. k', für welches immer

$$k^2 + k'^2 = 1$$

iſt, heißt das Complement des Modulus k.

42. Sey jetzt

$$F(k, \varphi) + F(k, \psi) = F(k, \sigma),\ F(k, \varphi) - F(k, \psi) = F(k, \Theta);$$

ſo iſt nach (16.)

$$\sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta(k,\psi) + \cos\varphi\sin\psi\,\Delta(k,\varphi)}{1-k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2},$$

$$\sin\Theta = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta(k,\psi) - \cos\varphi\sin\psi\,\Delta(k,\varphi)}{1-k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2};$$

folglich

$$\sin\sigma + \sin\Theta = \frac{2\sin\varphi\cos\psi\,\Delta(k,\psi)}{1-k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2},$$

$$\sin\sigma\sin\Theta = \frac{\sin\varphi^2 - \sin\psi^2}{1-k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2};$$

alſo, weil

$$(1\pm\sin\sigma)(1\pm\sin\Theta) = 1\pm(\sin\sigma+\sin\Theta)+\sin\sigma\sin\Theta$$

iſt:

$$(1\pm\sin\sigma)(1\pm\sin\Theta) = \frac{1-k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2+\sin\varphi^2-\sin\psi^2\pm2\sin\varphi\cos\psi\,\Delta(k,\psi)}{1-k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2},$$

Setzen wir nun

$$F(k,\psi)+F(k,\psi') = F\left(k,\frac{\pi}{2}\right) = K;$$

ſo iſt nach (18.)

$$\sin\psi = \frac{\cos\psi'}{\Delta(k,\psi')},\ \cos\psi = \frac{k'\sin\psi'}{\Delta(k,\psi')},\ \Delta(k,\psi)\,\Delta(k,\psi') = k',$$

$$k'\tang\psi\tang\psi' = 1;$$

folglich, wenn man dieſe Werthe von $\sin\psi$ und $\cos\psi$ in den Zähler des für

$$(1\pm\sin\sigma)(1\pm\sin\Theta)$$

gefundenen Ausdrucks einführt, der Zähler des Bruchs, nachdem derſelbe im Zähler und im Nenner mit $\Delta^2(k,\psi') = (\Delta(k,\psi'))^2$ multiplicirt worden,

$$\begin{aligned}
&= (1+\sin\varphi^2)(1-k^2\sin\psi'^2)-(1+k^2\sin\varphi^2)\cos\psi'^2\\
&\quad\pm 2k'\sin\varphi\sin\psi'\,\Delta(k,\psi)\,\Delta(k,\psi')\\
&= 1+\sin\varphi^2-k^2\sin\psi'^2-k^2\sin\varphi^2\sin\psi'^2\\
&\quad-\cos\psi'^2-k^2\sin\varphi^2\cos\psi'^2\pm2k'^2\sin\varphi\sin\psi'\\
&= \sin\psi'^2+\sin\varphi^2-k^2\sin\psi'^2-k^2\sin\varphi^2\pm2k'^2\sin\varphi\sin\psi'\\
&= (1-k^2)\sin\psi'^2+(1-k^2)\sin\varphi^2\pm2k'^2\sin\varphi\sin\psi'\\
&= k'^2(\sin\psi'\pm\sin\varphi)^2;
\end{aligned}$$

alſo

$$(1\pm\sin\sigma)(1\pm\sin\Theta) = \frac{k'^2(\sin\psi'\pm\sin\varphi)^2}{(1-k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2)\,\Delta^2(k,\psi')},$$

$$\frac{(1\pm\sin\sigma)(1\pm\sin\Theta)}{\cos\psi^2} = \frac{k'^2(\sin\psi'\pm\sin\varphi)^2}{(1-k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2)\cos\psi^2\,\Delta^2(k,\psi')}$$

$$= \frac{k'^2(\sin\psi'\pm\sin\varphi)^2}{k'^2(1-k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2)\sin\psi'^2},$$

d. i.

$$\frac{(1 \pm \sin\sigma)(1 \pm \sin\Theta)}{\cos\psi^2} = \frac{\left\{1 \pm \frac{\sin\varphi'}{\sin\psi'}\right\}^3}{1 - k^2 \sin\varphi^2 \sin\psi^2}.$$

Setzen wir nun

$$F(k,\varphi) = \xi,\ F(k,\psi) = \frac{p-m}{p}K,$$

ſo iſt

$$\varphi = A\xi,\ \psi = A\left(\frac{p-m}{p}K\right).$$

Aber

$$F(k,\varphi) + F(k,\psi) = F(k,\sigma),\ F(k,\varphi) - F(k,\psi) = F(k,\Theta);$$

alſo

$$F(k,\sigma) = \xi + \frac{p-m}{p}K,\ F(k,\Theta) = \xi - \frac{p-m}{p}K;$$

$$\sigma = A\left(\xi + \frac{p-m}{p}K\right),\ \Theta = A\left(\xi - \frac{p-m}{p}K\right).$$

Ferner iſt

$$F(k,\psi) + F(k,\psi') = \frac{p-m}{p}K + F(k,\psi') = K;$$

alſo

$$F(k,\psi') = \frac{m}{p}K,\ \psi' = A\left(\frac{m}{p}K\right),$$

ſo wie offenbar auch

$$\psi = CA\left(\frac{m}{p}K\right),\ \psi' = CA\left(\frac{p-m}{p}K\right)$$

iſt. Setzen wir nun wieder $\sin\varphi = x$ und der Kürze wegen

$$\frac{p-m}{p}K = \lambda_m;$$

ſo wird unſere obige Gleichung:

$$\frac{\left\{1 \pm \frac{x}{\sin CA\lambda_m}\right\}^2}{1 - k^2 x^2 \sin^2 A\lambda_m} = \frac{\{1 \pm \sin A(\xi + \lambda_m)\}\{1 \pm \sin A(\xi - \lambda_m)\}}{\cos^2 A\lambda_m},$$

oder

$$\frac{\left\{1 \pm \frac{x}{\sin A\left(\frac{m}{p}K\right)}\right\}^2}{1 - k^2 x^2 \sin^2 CA\left(\frac{m}{p}K\right)} = \frac{\{1 \pm \sin A(\xi + \lambda_m)\}\{1 \pm \sin A(\xi - \lambda_m)\}}{\cos^2 CA\left(\frac{m}{p}K\right)}.$$

43. Bevor wir von dieſer merkwürdigen Gleichung, welche den folgenden Unterſuchungen vorzüglich zum Grunde liegt, wei=

tere Anwendung machen, müſſen wir noch Folgendes einſchalten. Iſt nämlich

$$F(k,\varphi)\pm F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=F(k,\varphi)\pm K=F(k,\psi),$$

ſo iſt nach (16.)

$$\sin\psi=\pm\frac{\cos\varphi}{\Delta(k,\varphi)},\ \cos\psi=\mp\frac{k'\sin\varphi}{\Delta(k,\varphi)},\ \Delta(k,\psi)=\frac{k}{\Delta(k,\varphi)},$$

und, wenn

$$F(k,\psi)\pm F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=F(k,\psi)\pm K=F(k,\psi')$$

geſetzt wird:

$$\sin\psi'=\pm\frac{\cos\psi}{\Delta(k,\psi)},\ \cos\psi'=\mp\frac{k'\sin\psi}{\Delta(k,\psi)},\ \Delta(k,\psi')=\frac{k'}{\Delta(k,\psi)};$$

alſo

$$\sin\psi'=-\frac{k'\sin\varphi}{\Delta(k,\varphi)}\cdot\frac{\Delta(k,\varphi)}{k'}=-\sin\varphi,$$

ſo daß folglich, wenn

$$F(k,\varphi)\pm 2K=F(k,\psi')$$

iſt, immer $\sin\psi'=-\sin\varphi$ iſt. Setzen wir nun

$$F(k,\varphi)=\xi,\ \varphi=A\xi,$$

ſo iſt

$$F(k,\psi')=\xi\pm 2K,\ \psi'=A(\xi\pm 2K),$$

und es iſt folglich immer

$$\sin A\xi=-\sin A(\xi\pm 2K);$$

alſo durch wiederholte Anwendung dieſer Relation

$$\sin A\xi=-\sin A(\xi\pm 2K)=\sin A(\xi\pm 4K)$$
$$=-\sin A(\xi\pm 6K)=\sin A(\xi\pm 8K)=\ldots.$$

44. Betrachten wir nun, unter der Vorausſetzung, daß p eine beliebige ungerade Zahl iſt, das Product der Factoren

$$1\mp\sin A\xi=1\mp x,$$

$$\frac{\left\{1-\dfrac{x}{\sin A\left(\frac{1}{p}K\right)}\right\}^2}{1-k^2x^2\sin^2 CA\left(\frac{1}{p}K\right)},$$

$$\frac{\left\{1+\dfrac{x}{\sin A\left(\frac{3}{p}K\right)}\right\}^2}{1-k^2x^2\sin^2 CA\left(\frac{3}{p}K\right)},$$

$$\frac{\left\{1-\frac{x}{\sin A\left(\frac{5}{p}K\right)}\right\}^2}{1-k^2x^2\sin^2 CA\left(\frac{5}{p}K\right)},$$

$$\vdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\frac{\left\{1\pm\frac{x}{\sin A\left(\frac{p-2}{p}K\right)}\right\}^2}{1-k^2x^2\sin^2 CA\left(\frac{p-2}{p}K\right)};$$

welches wir im Folgenden immer $= 1 - y$ ſetzen wollen; ſo ergiebt ſich aus (42.) auf der Stelle, daß dieſes Product dem Producte der Größen

$$1 \mp \sin A\xi;$$

$$1 \pm \sin A\left(\xi + \frac{2}{p}K\right),\quad 1 \pm \sin A\left(\xi - \frac{2}{p}K\right);$$

$$1 \mp \sin A\left(\xi + \frac{4}{p}K\right),\quad 1 \mp \sin A\left(\xi - \frac{4}{p}K\right);$$

$$1 \pm \sin A\left(\xi + \frac{6}{p}K\right),\quad 1 \pm \sin A\left(\xi - \frac{6}{p}K\right);$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$1 + \sin A\left(\xi + \frac{p-3}{p}K\right),\quad 1 + \sin A\left(\xi - \frac{p-3}{p}K\right);$$

$$1 - \sin A\left(\xi + \frac{p-1}{p}K\right),\quad 1 - \sin A\left(\xi - \frac{p-1}{p}K\right)$$

gleich iſt, wenn man dieſes Product durch das Product

$$Q = \cos^2 CA\left(\frac{1}{p}K\right).\cos^2 CA\left(\frac{3}{p}K\right).\cos^2 CA\left(\frac{5}{p}K\right)\ldots\cos^2 CA\left(\frac{p-2}{p}K\right)$$

dividirt. Die obern und untern Zeichen gelten, jenachdem p von der Form $4n + 1$ oder $4n - 1$ iſt.

Iſt nun zuerſt p von der Form $4n + 1$, ſo kann man die Factoren des erſten Products, ohne Rückſicht auf den Factor $1 \mp \sin A\xi$, immer in folgender Ordnung nehmen, indem man dieſelben zugleich theilweiſe nach dem in (43.) bewieſenen Satze umformt:

$$1 - \sin A\left(\xi + \frac{4}{p}K\right) = 1 - \sin A\left(\xi + \frac{4}{p}K\right)$$

$$1 - \sin A\left(\xi + \frac{8}{p}K\right) = 1 - \sin A\left(\xi + \frac{8}{p}K\right)$$

$$1-\sin A\left(\xi+\frac{12}{p}K\right)=1-\sin A\left(\xi+\frac{12}{p}K\right)$$

. . . .

$$1-\sin A\left(\xi+\frac{p-1}{p}K\right)=1-\sin A\left(\xi+\frac{4n}{p}K\right)$$

$$1+\sin A\left(\xi-\frac{p-3}{p}K\right)=1+\sin A\left(\xi+\frac{p+3}{p}K-2K\right)$$

$$=1-\sin A\left(\xi+\frac{4(n+1)}{p}K\right)$$

$$1+\sin A\left(\xi-\frac{p-7}{p}K\right)=1+\sin A\left(\xi+\frac{p+7}{p}K-2K\right)$$

$$=1-\sin A\left(\xi+\frac{4(n+2)}{p}K\right)$$

. . . .

$$1+\sin A\left(\xi-\frac{2}{p}K\right)=1+\sin A\left(\xi+\frac{2p-2}{p}K-2K\right)$$

$$=1-\sin A\left(\xi+\frac{4.2n}{p}K\right)$$

. . . .

$$1+\sin A\left(\xi+\frac{2}{p}K\right)=1+\sin A\left(\xi+\frac{2p+2}{p}K-2K\right)$$

$$=1-\sin A\left(\xi+\frac{4(2n+1)}{p}K\right)$$

$$1+\sin A\left(\xi+\frac{6}{p}K\right)=1+\sin A\left(\xi+\frac{2p+6}{p}K-2K\right)$$

$$=1-\sin A\left(\xi+\frac{4(2n+2)}{p}K\right)$$

. . . .

$$1+\sin A\left(\xi+\frac{p-3}{p}K\right)=1+\sin A\left(\xi+\frac{3p-3}{p}K-2K\right)$$

$$=1-\sin A\left(\xi+\frac{4.3n}{p}K\right)$$

$$1-\sin A\left(\xi-\frac{p-1}{p}K\right)=1-\sin A\left(\xi+\frac{3p+1}{p}K-4K\right)$$

$$=1-\sin A\left(\xi+\frac{4(3n+1)}{p}K\right)$$

$$1-\sin A\left(\xi-\frac{p-5}{p}K\right)=1-\sin A\left(\xi+\frac{3p+5}{p}K-4K\right)$$

$$=1-\sin A\left(\xi+\frac{4(3n+2)}{p}K\right)$$

. . . .

$$1-\sin A\left(\xi-\frac{4}{p}K\right)=1-\sin A\left(\xi+\frac{4p-4}{p}K-4K\right)$$

$$=1-\sin A\left(\xi+\frac{4.4n}{p}K\right).$$

Iſt $p=4n-1$, ſo ſind die Factoren unſers Products:

$$1+\sin A\left(\xi+\frac{4}{p}K\right)=1+\sin A\left(\xi+\frac{4}{p}K\right)$$

$$1+\sin A\left(\xi+\frac{8}{p}K\right)=1+\sin A\left(\xi+\frac{8}{p}K\right)$$

$$1+\sin A\left(\xi+\frac{12}{p}K\right)=1+\sin A\left(\xi+\frac{12}{p}K\right)$$

. . . .

$$1+\sin A\left(\xi+\frac{p-3}{p}K\right)=1+\sin A\left(\xi+\frac{4(n-1)}{p}K\right),$$

$$1-\sin A\left(\xi-\frac{p-1}{p}K\right)=1-\sin A\left(\xi+\frac{p+1}{p}K-2K\right)$$

$$=1+\sin A\left(\xi+\frac{4n}{p}K\right)$$

$$1-\sin A\left(\xi-\frac{p-5}{p}K\right)=1-\sin A\left(\xi+\frac{p+5}{p}K-2K\right)$$

$$=1+\sin A\left(\xi+\frac{4(n+1)}{p}K\right)$$

. . . .

$$1-\sin A\left(\xi-\frac{2}{p}K\right)=1-\sin A\left(\xi+\frac{2p-2}{p}K-2K\right)$$

$$=1+\sin A\left(\xi+\frac{4(2n-1)}{p}K\right)$$

$$1-\sin A\left(\xi+\frac{2}{p}K\right)=1-\sin A\left(\xi+\frac{2p+2}{p}K-2K\right)$$

$$=1+\sin A\left(\xi+\frac{4.2n}{p}K\right)$$

$$1-\sin A\left(\xi+\frac{6}{p}K\right)=1-\sin A\left(\xi+\frac{2p+6}{p}K-2K\right)$$
$$=1+\sin A\left(\xi+\frac{4(2n+1)}{p}K\right)$$

. . . .

$$1-\sin A\left(\xi+\frac{p-1}{p}K\right)=1-\sin A\left(\xi+\frac{3p-1}{p}K-2K\right)$$
$$=1+\sin A\left(\xi+\frac{4(3n-1)}{p}K\right)$$
$$1+\sin A\left(\xi-\frac{p-3}{p}K\right)=1+\sin A\left(\xi+\frac{3p+3}{p}K-4K\right)$$
$$=1+\sin A\left(\xi+\frac{4.3n}{p}K\right)$$
$$1+\sin A\left(\xi-\frac{p-7}{p}K\right)=1+\sin A\left(\xi+\frac{3p+7}{p}K-4K\right)$$
$$=1+\sin A\left(\xi+\frac{4(3n+1)}{p}K\right)$$

. . . .

$$1+\sin A\left(\xi-\frac{4}{p}K\right)=1+\sin A\left(\xi+\frac{4p-4}{p}K-4K\right)$$
$$=1+\sin A\left(\xi+\frac{4(4n-2)}{p}K\right).$$

Setzen wir alſo, p mag von der Form $4n+1$ oder von der Form $4n-1$ ſeyn,

$$P=\left\{1\mp\sin A\left(\xi+\frac{4}{p}K\right)\right\}$$
$$\times\left\{1\mp\sin A\left(\xi+\frac{8}{p}K\right)\right\}$$
$$\times\left\{1\mp\sin A\left(\xi+\frac{12}{p}K\right)\right\}$$

. . . .

$$\times\left\{1\mp\sin A\left(\xi+\frac{4(p-1)}{p}K\right)\right\};$$

ſo iſt

$$1-y=(1\mp\sin A\xi)\frac{P}{Q}$$

oder

$$1-y=(1\mp x)\frac{P}{Q},$$

wo Q ſeinen obigen Werth hat, und die obern Zeichen ſich im=

mer auf $p = 4n + 1$, die untern auf $p = 4n - 1$ beziehen.

45. Die Function $1 - y$ läßt ſich aber noch auf eine andere ſehr merkwürdige Form bringen, zu welcher die folgenden Betrachtungen führen.

Setzt man in dem Ausdruck

$$(1 \mp \sin A\xi)\frac{P}{Q}$$

$\xi + \frac{4}{p}K$ ſtatt ξ, ſo geht, indem Q, welches nicht von ξ abhängt, ungeändert bleibt, jeder Factor von

$$(1 \mp \sin A\xi)P$$

in den nächſtfolgenden über, und der letzte Factor wird nach (43.)

$$= 1 \mp \sin A(\xi + 4K) = 1 \mp \sin A\xi,$$

d. i. dem erſten Factor gleich, ſo daß alſo die Größe

$$(1 \mp \sin A\xi)\frac{P}{Q}$$

durch die in Rede ſtehende Subſtitution nicht geändert wird; und überhaupt ſchließt man hieraus ſehr leicht, daß dieſe Größe ungeändert bleibt, wenn man, indem m eine beliebige poſitive ganze Zahl bezeichnet, $\xi + \frac{4m}{p}K$ für ξ ſetzt.

Für $\xi = 0$ iſt nach (44.)

$$\begin{aligned} P = & \left\{1 \pm \sin A\left(\frac{2}{p}K\right)\right\}\left\{1 \pm \sin A\left(-\frac{2}{p}K\right)\right\} \\ & \times \left\{1 \mp \sin A\left(\frac{4}{p}K\right)\right\}\left\{1 \mp \sin A\left(-\frac{4}{p}K\right)\right\} \\ & \times \left\{1 \pm \sin A\left(\frac{6}{p}K\right)\right\}\left\{1 \pm \sin A\left(-\frac{6}{p}K\right)\right\} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \times \left\{1 + \sin A\left(\frac{p-3}{p}K\right)\right\}\left\{1 + \sin A\left(-\frac{p-3}{p}K\right)\right\} \\ & \times \left\{1 - \sin A\left(\frac{p-1}{p}K\right)\right\}\left\{1 - \sin A\left(-\frac{p-1}{p}K\right)\right\}. \end{aligned}$$

Iſt aber allgemein wie oben

$$\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \xi,$$

ſo iſt, wie aus der Theorie der Beſtimmten Integrale (ſ. dieſen Artikel. 5.) auf der Stelle folgt:

$$\int_0^{-x} \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = -\xi;$$

alſo

$$x = \sin A\xi, \quad -x = \sin A(-\xi),$$

und folglich immer

$$\sin A(-\xi) = -\sin A\xi\,,$$

ſo daß alſo nach dem Vorhergehenden für $\xi = 0$:

$$\begin{aligned}P = &\left\{1 - \sin^2 A\left(\frac{2}{p}K\right)\right\}\\ \times&\left\{1 - \sin^2 A\left(\frac{4}{p}K\right)\right\}\\ \times&\left\{1 - \sin^2 A\left(\frac{6}{p}K\right)\right\}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \times&\left\{1 - \sin^2 A\left(\frac{p-3}{p}K\right)\right\}\\ \times&\left\{1 - \sin^2 A\left(\frac{p-1}{p}K\right)\right\}\end{aligned}$$

$$= \cos^2 A\left(\frac{2}{p}K\right).\cos^2 A\left(\frac{4}{p}K\right).\cos^2 A\left(\frac{6}{p}K\right)..\cos^2 A\left(\frac{p-1}{p}K\right).$$

Aber

$$\begin{aligned}&\frac{2}{p}K + \frac{p-2}{p}K = K\,,\\ &\frac{4}{p}K + \frac{p-4}{p}K = K\,,\\ &\frac{6}{p}K + \frac{p-6}{p}K = K\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ &\frac{p-3}{p}K + \frac{3}{p}K = K\,,\\ &\frac{p-1}{p}K + \frac{1}{p}K = K\,.\end{aligned}$$

Folglich nach (41.)

$$\begin{aligned}A\left(\frac{2}{p}K\right) &= CA\left(\frac{p-2}{p}K\right)\\ A\left(\frac{4}{p}K\right) &= CA\left(\frac{p-4}{p}K\right)\\ A\left(\frac{6}{p}K\right) &= CA\left(\frac{p-6}{p}K\right)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A\left(\frac{p-3}{p}K\right) &= CA\left(\frac{3}{p}K\right)\\ A\left(\frac{p-1}{p}K\right) &= CA\left(\frac{1}{p}K\right).\end{aligned}$$

Alſo

$$P = \cos^2 CA\left(\frac{1}{p}K\right).\cos^2 CA\left(\frac{3}{p}K\right).\cos^2 CA\left(\frac{5}{p}K\right)..\cos^2 CA\left(\frac{p-2}{p}K\right),$$

d. i. $P = Q$ (44.). Für $\xi = 0$ iſt aber offenbar auch $x = 0$, d. i. $\sin A\xi = 0$, und es iſt alſo

$$(1 \mp \sin A\xi)\frac{P}{Q} = 1$$

für $\xi = 0$, oder, da dieſe Größe $= 1 - y$ geſetzt worden iſt, $y = 0$ für $\xi = 0$.

Da nun ferner

$$(1 \mp \sin A\xi)\frac{P}{Q}$$

für jedes ξ ungeändert bleibt, wenn man $\xi + \frac{4m}{p}K$ für ξ ſetzt, ſo iſt offenbar auch

$$(1 \mp \sin A\xi)\frac{P}{Q} = 1,$$

d. i. $y = 0$, für

$$\xi = \frac{4m}{p}K,$$

wo m jede poſitive ganze Zahl bezeichnen kann.

x iſt immer $= \sin A\xi$, und man ſieht alſo hieraus, daß y für jeden der p folgenden Werthe von x verſchwindet:

$$x=0,\ \sin A\left(\frac{4}{p}K\right),\ \sin A\left(\frac{8}{p}K\right),\ \sin A\left(\frac{12}{p}K\right),\ \ldots \sin A\left(\frac{4(p-1)}{p}K\right).$$

In (44.) haben wir aber geſehen, daß für jedes ξ die Reihe der Größen

$$1 \pm \sin A\left(\xi + \frac{2}{p}K\right),\ 1 \pm \sin A\left(\xi - \frac{2}{p}K\right);$$

$$1 \mp \sin A\left(\xi + \frac{4}{p}K\right),\ 1 \mp \sin A\left(\xi - \frac{4}{p}K\right);$$

$$1 \pm \sin A\left(\xi + \frac{6}{p}K\right),\ 1 \pm \sin A\left(\xi - \frac{6}{p}K\right);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$1 - \sin A\left(\xi + \frac{p-1}{p}K\right),\ 1 - \sin A\left(\xi - \frac{p-1}{p}K\right)$$

einerlei iſt mit der Reihe der Größen

$$1 \mp \sin A\left(\xi + \frac{4}{p}K\right),$$

$$1 \mp \sin A\left(\xi + \frac{8}{p}K\right),$$

$$1 \mp \sin A\left(\xi + \frac{12}{p}K\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$1 \mp \sin A\left(\xi + \frac{4(p-1)}{p}K\right);$$

alſo iſt auch für jedes ξ offenbar die Reihe der Größen

$$\pm \sin A\left(\xi + \frac{2}{p}K\right),\ \pm \sin A\left(\xi - \frac{2}{p}K\right);$$
$$\mp \sin A\left(\xi + \frac{4}{p}K\right),\ \mp \sin A\left(\xi - \frac{4}{p}K\right);$$
$$\pm \sin A\left(\xi + \frac{6}{p}K\right),\ \pm \sin A\left(\xi - \frac{6}{p}K\right);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$- \sin A\left(\xi + \frac{p-1}{p}K\right),\ - \sin A\left(\xi - \frac{p-1}{p}K\right)$$

einerlei mit der Reihe der Größen

$$\mp \sin A\left(\xi + \frac{4}{p}K\right),$$
$$\mp \sin A\left(\xi + \frac{8}{p}K\right),$$
$$\mp \sin A\left(\xi + \frac{12}{p}K\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\mp \sin A\left(\xi + \frac{4(p-1)}{p}K\right);$$

folglich für $\xi = 0$ die Reihe der Größen

$$\pm \sin A\left(\frac{2}{p}K\right),\ \pm \sin A\left(-\frac{2}{p}K\right);$$
$$\mp \sin A\left(\frac{4}{p}K\right),\ \mp \sin A\left(-\frac{4}{p}K\right);$$
$$\pm \sin A\left(\frac{6}{p}K\right),\ \pm \sin A\left(-\frac{6}{p}K\right);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$- \sin A\left(\frac{p-1}{p}K\right),\ - \sin A\left(-\frac{p-1}{p}K\right);$$

d. i., weil immer $\sin A(-\xi) = -\sin A\xi$ iſt, die Reihe der Größen

$$\pm \sin A\left(\frac{2}{p}K\right),\ \mp \sin A\left(\frac{2}{p}K\right);$$
$$\mp \sin A\left(\frac{4}{p}K\right),\ \pm \sin A\left(\frac{4}{p}K\right);$$
$$\pm \sin A\left(\frac{6}{p}K\right),\ \mp \sin A\left(\frac{6}{p}K\right);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$- \sin A\left(\frac{p-1}{p}K\right),\ \sin A\left(\frac{p-1}{p}K\right)$$

einerlei mit der Reihe der Größen

$$\mp \sin A\left(\frac{4}{p}K\right), \mp \sin A\left(\frac{8}{p}K\right), \mp \sin A\left(\frac{12}{p}K\right), \ldots \mp \sin A\left(\frac{4(p-1)}{p}K\right);$$

alſo offenbar auch immer die Reihe der Größen

$$-\sin A\left(\frac{2}{p}K\right), \sin A\left(\frac{2}{p}K\right);$$
$$-\sin A\left(\frac{4}{p}K\right), \sin A\left(\frac{4}{p}K\right);$$
$$-\sin A\left(\frac{6}{p}K\right), \sin A\left(\frac{6}{p}K\right);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-\sin A\left(\frac{p-1}{p}K\right), \sin A\left(\frac{p-1}{p}K\right)$$

einerlei mit der Reihe der Größen

$$\sin A\left(\frac{4}{p}K\right), \sin A\left(\frac{8}{p}K\right), \sin A\left(\frac{12}{p}K\right), \ldots \sin A\left(\frac{4(p-1)}{p}K\right).$$

Folglich wird auch $y = 0$ für die folgenden p Werthe von x:

$$x = 0, \sin A\left(\frac{2}{p}K\right), \sin A\left(\frac{4}{p}K\right), \sin A\left(\frac{6}{p}K\right), \ldots \sin A\left(\frac{p-1}{p}K\right);$$
$$-\sin A\left(\frac{2}{p}K\right), -\sin A\left(\frac{4}{p}K\right), -\sin A\left(\frac{6}{p}K\right), \ldots -\sin A\left(\frac{p-1}{p}K\right).$$

Zugleich fällt auch, weil die Größen

$$0, \frac{2}{p}K, \frac{4}{p}K, \frac{6}{p}K, \frac{8}{p}K, \ldots \frac{p-1}{p}K$$

ſämmtlich kleiner als K ſind, ſogleich in die Augen, daß die vorſtehenden p Werthe von x ſämmtlich unter einander ungleich ſind, indem keine Amplitude in dieſem Falle $\frac{1}{2}\pi$ überſteigt.

Setzen wir nun

$$1 - y = \frac{Z}{V}, \; y = \frac{V-Z}{V},$$

wo V nach (44.) das Product der Größen

$$1 - k^2x^2 \sin^2 CA\left(\frac{1}{p}K\right),$$
$$1 - k^2x^2 \sin^2 CA\left(\frac{3}{p}K\right),$$
$$1 - k^2x^2 \sin^2 CA\left(\frac{5}{p}K\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$1 - k^2x^2 \sin^2 CA\left(\frac{p-2}{p}K\right)$$

iſt; ſo iſt auch V — Z eine Function, welche für die obigen p Werthe von x verſchwindet. V — Z iſt aber, wie aus (44.) ſogleich erhellet, da

$$p-2=2\left(\frac{p-1}{2}\right)-1,\ 2.\frac{p-1}{2}+1=p$$

iſt, eine ganze rationale Function des pten Grades von x. Alſo kann man nach der Theorie der Gleichungen, wenn wir der Kürze wegen

$$A\left(\frac{2}{p}K\right)=CA\left(\frac{p-2}{p}K\right)=\alpha_2,$$

$$A\left(\frac{4}{p}K\right)=CA\left(\frac{p-4}{p}K\right)=\alpha_4,$$

$$A\left(\frac{6}{p}K\right)=CA\left(\frac{p-6}{p}K\right)=\alpha_6,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A\left(\frac{p-1}{p}K\right)=CA\left(\frac{1}{p}K\right)=\alpha_{p-1}$$

ſetzen,

$$V-Z=$$

$$\frac{x}{\mu}\left(1-\frac{x}{\sin\alpha_2}\right)\left(1-\frac{x}{\sin\alpha_4}\right)\left(1-\frac{x}{\sin\alpha_6}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\sin\alpha_{p-1}}\right)$$

$$\times\left(1+\frac{x}{\sin\alpha_2}\right)\left(1+\frac{x}{\sin\alpha_4}\right)\left(1+\frac{x}{\sin\alpha_6}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{\sin\alpha_{p-1}}\right)$$

$$=\frac{x}{\mu}\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_4^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_6^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_{p-1}^2}\right)$$

ſetzen, wo μ einen gewiſſen conſtanten Factor bezeichnet, der nun noch zu beſtimmen iſt. Setzen wir alſo

$$U=\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_4^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_6^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_{p-1}^2}\right),$$

$$V=(1-k^2x^2\sin\alpha_2^2)(1-k^2x^2\sin\alpha_4^2)(1-k^2x^2\sin\alpha_6^2)\cdots(1-k^2x^2\sin\alpha_{p-1}^2)$$

ſo iſt nach dem Obigen immer

$$y=\frac{x}{\mu}\cdot\frac{U}{V}.$$

Um μ zu beſtimmen, iſt zuerſt folgende Bemerkung vorauszuſchicken. Iſt nämlich

$$F(k,\varphi)+F(k,\psi)=K,$$

ſo iſt nach (18.)

$$\sin\psi=\frac{\cos\varphi}{\Delta(k,\varphi)}.$$

Setzen wir nun $\varphi=A\xi$, ſo iſt $\psi=CA\xi$, und folglich

$$\sin^2 CA\xi = \frac{\cos^2 A\xi}{1-k^2\sin^2 A\xi} = -\frac{\sin^2 A\xi - 1}{1-k^2\sin^2 A\xi},$$

$$\frac{1-\frac{1}{\sin^2 A\xi}}{1-k^2\sin^2 A\xi} = -\frac{\sin^2 CA\xi}{\sin^2 A\xi}.$$

Iſt $p = 4n + 1$, ſo hat $1 - y$ den Factor $1 - x$, und es wird alſo $1 - y = 0$ für $1 - x = 0$, d. i. $y = 1$ für $x = 1$. Folglich hat man in dieſem Falle

$$1 = \frac{1}{\mu}\left(\frac{1-\frac{1}{\sin\alpha_2^2}}{1-k^2\sin\alpha_2^2}\right)\left(\frac{1-\frac{1}{\sin\alpha_4^2}}{1-k^2\sin\alpha_4^2}\right)\cdots\left(\frac{1-\frac{1}{\sin\alpha_{p-1}^2}}{1-k^2\sin\alpha_{p-1}^2}\right).$$

Aber allgemein

$$\frac{1-\frac{1}{\sin\alpha_{2m}^2}}{1-k^2\sin\alpha_{2m}^2} = \frac{1-\frac{1}{\sin^2 A\left(\frac{2m}{p}K\right)}}{1-k^2\sin A\left(\frac{2m}{p}K\right)} = -\frac{\sin^2 CA\left(\frac{2m}{p}K\right)}{\sin^2 A\left(\frac{2m}{p}K\right)}$$

$$= -\frac{\sin^2 A\left(\frac{p-2m}{p}K\right)}{\sin^2 A\left(\frac{2m}{p}K\right)} = -\frac{\sin\alpha_{p-2m}^2}{\sin\alpha_{2m}^2}.$$

Folglich, da in dieſem Falle die Anzahl der Factoren des obigen Products gerade iſt:

$$1 = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{\sin\alpha_{p-2}^2\sin\alpha_{p-4}^2\sin\alpha_{p-6}^2\ldots\sin\alpha_1^2}{\sin\alpha_2^2\sin\alpha_4^2\sin\alpha_6^2\ldots\sin\alpha_{p-1}^2},$$

$$\mu = \frac{\sin\alpha_1^2\sin\alpha_3^2\sin\alpha_5^2\ldots\sin\alpha_{p-2}^2}{\sin\alpha_2^2\sin\alpha_4^2\sin\alpha_6^2\ldots\sin\alpha_{p-1}^2}.$$

Iſt $p = 4n - 1$, ſo hat $1 - y$ den Factor $1 + x$, und es wird alſo $1 - y = 0$ für $1 + x = 0$, d. i. $y = 1$ für $x = -1$. In dieſem Falle iſt aber die Anzahl der Factoren ungerade, und man erhält folglich für μ wieder den vorhergehenden Ausdruck.

46. Da U und V bloß die gerade Potenz x^2 von x enthalten, ſo folgt aus der in (45.) gefundenen Gleichung

$$y = \frac{x}{\mu}\cdot\frac{U}{V}$$

auf der Stelle, daß y in $-y$ übergeht, wenn x in $-x$ übergeht. Ein beliebiger Factor von $\frac{U}{V}$ iſt

$$\frac{1-\frac{x^2}{\sin\alpha_{2m}^2}}{1-k^2x^2\sin\alpha_{2m}^2}.$$

Setzt man in demſelben $\frac{1}{kx}$ für x, ſo geht er, wie leicht erhellet, in

$$\frac{1}{k^2 \sin\alpha^4}\cdot\frac{1-k^2x^2\sin\alpha_{2m}^2}{1-\frac{x^2}{\sin\alpha_{2m}^2}}$$

über, und man ſieht alſo, daß $\frac{U}{V}$, wenn man $\frac{1}{kx}$ für x ſetzt, in

$$\frac{1}{A}\cdot\frac{V}{U}$$

übergeht, für

$$A = k^{p-1}\sin\alpha_2{}^4\sin\alpha_4{}^4\sin\alpha_6{}^4\ldots\ldots\sin\alpha_{p-1}^4\,.$$

Bezeichnen wir nun den dem Werthe $\frac{1}{kx}$ von x entſprechenden Werth von y durch y', ſo iſt

$$y' = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{kx}\cdot\frac{1}{A}\cdot\frac{V}{U}$$

oder

$$\frac{1}{y'} = \mu^2 kA.\frac{x}{\mu}.\frac{U}{V}\,,$$

d. i. $\frac{1}{y'} = \mu^2 kAy$, $y' = \frac{1}{\mu^2 kAy}$, oder, wenn wir der Kürze wegen

$$h = \mu^2 kA = k^p\sin\alpha_1{}^4\sin\alpha_3{}^4\sin\alpha_5{}^4\ldots\sin\alpha_{p-2}^4$$

ſetzen:

$$y' = \frac{1}{hy}\,.$$

Die Gleichung

$$y = \frac{x}{\mu}\cdot\frac{U}{V}$$

hat alſo die wichtige Eigenſchaft, daß man in derſelben, ohne ihre Richtigkeit zu ſtören, $\frac{1}{kx}$ für x und $\frac{1}{hy}$ für y ſetzen kann, wenn nur die Conſtante h wie vorher beſtimmt wird. Dieſe Gleichung iſt aber, wie wir aus dem Vorhergehenden wiſſen, eine bloße Transformation der Gleichung

$$1-y=$$
$$(1\mp x).\frac{\left(1-\frac{x}{\sin\alpha_1}\right)^2\left(1+\frac{x}{\sin\alpha_3}\right)^2\left(1-\frac{x}{\sin\alpha_5}\right)^2\ldots\left(1\pm\frac{x}{\sin\alpha_{p-2}}\right)^2}{(1-k^2x^2\sin\alpha_2{}^2)(1-k^2x^2\sin\alpha_4{}^2)\ldots(1-k^2x^2\sin\alpha_{p-1}^2)},$$

von welcher wir in (44.) ausgegangen ſind, indem ſich die dortige Gleichung immer leicht auf dieſe ihr hier gegebene Form

bringen läßt; alſo wird auch die Richtigkeit dieſer Gleichung durch die doppelte Subſtitution: $\frac{1}{kx}$ für x und $\frac{1}{hy}$ für y, nicht geſtört. Führt man aber dieſe Subſtitution wirklich aus, ſo ergiebt ſich die Gleichung:

$$1-\frac{1}{hy}=$$

$$B\left(1\mp\frac{1}{kx}\right).\frac{(1-kx\sin\alpha_1)^2(1+kx\sin\alpha_3)^2..(1\pm kx\sin\alpha_{p-2})^2}{\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_{p-1}^2}\right)},$$

für

$$\frac{1}{B}=(-1)^{\frac{p-1}{2}}k^{p-1}\sin\alpha_1^2\sin\alpha_2^2\sin\alpha_3^2\sin\alpha_4^2\ldots\sin\alpha_{p-2}^2\sin\alpha_{p-1}^2.$$

Für x = — x wird nach dem Obigen y = — y, und man hat alſo auch die beiden folgenden Gleichungen:

$$1+y=$$

$$(1\pm x).\frac{\left(1+\frac{x}{\sin\alpha_1}\right)^2\left(1-\frac{x}{\sin\alpha_3}\right)^2\left(1+\frac{x}{\sin\alpha_5}\right)^2..\left(1\mp\frac{x}{\sin\alpha_{p-2}}\right)^2}{(1-k^2x^2\sin\alpha_2^2)(1-k^2x^2\sin\alpha_4^2)\;..\;(1-k^2x^2\sin\alpha_{p-1}^2)},$$

$$1+\frac{1}{hy}=$$

$$B\left(1\pm\frac{1}{kx}\right).\frac{(1+kx\sin\alpha_1)^2(1-kx\sin\alpha_3)^2..(1\mp kx\sin\alpha_{p-2})^2}{\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_{p-1}^2}\right)}.$$

Multiplicirt man nun alle vier vorhergehende Gleichungen in einander, und ſetzt der Kürze wegen

$$1-y=(1\mp x)\frac{R^2}{V},$$

$$1+y=(1\pm x)\frac{S^2}{V},$$

$$1-\frac{1}{hy}=B\left(1\mp\frac{1}{kx}\right)\frac{R'^2}{U},$$

$$1+\frac{1}{hy}=B\left(1\pm\frac{1}{kx}\right)\frac{S'^2}{U},$$

wo die Bedeutung von R, S, R′, S′ leicht erhellen wird, und die Bedeutung von U, V aus (45.) bekannt iſt; ſo wird

$$\left(1-y^2\right)\left(1-\frac{1}{h^2y^2}\right)=\left(1-x^2\right)\left(1-\frac{1}{k^2x^2}\right).\frac{B^2R^2S^2R'^2S'^2}{U^2V^2}.$$

Aber, wenn wir

$$P=\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_3^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_5^2}\right)..\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_{p-2}^2}\right),$$

$$Q=(1-k^2x^2\sin\alpha_1^2)(1-k^2x^2\sin\alpha_3^2)\;..\;(1-k^2x^2\sin\alpha_{p-2}^2)$$

ſetzen, offenbar

$$P = RS,\ Q = R'S;$$

alſo

$$\left(1-y^2\right)\left(1-\frac{1}{h^2 y^2}\right) = \left(1-x^2\right)\left(1-\frac{1}{k^2 x^2}\right) \cdot \frac{B^2 T^2}{U^2 V^2},$$

für $T = PQ$. Multiplicirt man auf beiden Seiten dieſer Gleichung mit $k^2 h^2 x^2 y^2$, ſo ergiebt ſich leicht:

$$(1-y^2)(1-h^2 y^2) = (1-x^2)(1-k^2 x^2) \cdot \frac{h^2 y^2 B^2 T^2}{k^2 x^2 U^2 V^2}.$$

Aber nach dem Obigen

$$\frac{y}{xU} = \frac{1}{\mu V};$$

Alſo

$$(1-y^2)(1-h^2 y^2) = (1-x^2)(1-k^2 x^2)\frac{h^2 B^2 T^2}{k^2 \mu^2 V^4},$$

und, wenn man

$$X = \frac{x}{\mu} U,\ y = \frac{X}{V}$$

ſetzt:

$$(V^2-X^2)(V^2-h^2 X^2) = (1-x^2)(1-k^2 x^2)\frac{h^2 B^2}{k^2 \mu^2} T^2.$$

Für $x = 0$ iſt $X = 0$, $V = 1$, $P = 1$, $Q = 1$, $T = 1$. Alſo

$$\frac{h^2 B^2}{k^2 \mu^2} = 1,$$

und folglich

$$(V^2-X^2)(V^2-h^2 X^2) = (1-x^2)(1-k^2 x^2) T^2;$$

oder

$$(V-X)(V+X)(V-hX)(V+hX)$$
$$= (1-x)(1+x)(1-kx)(1+kx) T^2;$$

Auch iſt

$$(1-y^2)(1-h^2 y^2) = (1-x^2)(1-k^2 x^2)\frac{T^2}{V^4},$$

oder

$$\frac{T^2}{V^4} = \frac{(1-y^2)(1-h^2 y^2)}{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}.$$

47. Nach (45.) ſind V und U zwei ganze rationale Functionen des $(p-1)$ten Grades von x, und

$$X = \frac{x}{\mu} U$$

iſt alſo eine ganze rationale Function des pten Grades von x. Die Factoren

$$V - X,\ V + X,\ V - hX;\ V + hX$$

ſind folglich ſämmtlich ganze rationale Functionen des pten Grades von x. Auch zeigt die Anſicht der in (45.) mitgetheilten Ausdrücke von V und U auf der Stelle, daß V und X keinen gemeinſchaftlichen Factor haben. Dann können aber, wenn c und c′ zwei beliebige ungleiche conſtante Größen bezeichnen, überhaupt auch

$$V + cX \text{ und } V + c'X$$

keinen gemeinſchaftlichen Factor haben. Wäre nämlich

$$V + cX = (x - \alpha)P,\ V + c'X = (x - \alpha)P'\ ;$$

ſo wäre

$$(c - c')X = (x - \alpha)(P - P')\ ,$$

und folglich, weil nach der Annahme $c - c'$ nicht $= 0$ iſt, $x - \alpha$ ein Factor von X, alſo auch, wie leicht erhellet, von V, ſo daß folglich V und X den gemeinſchaftlichen Factor $x - \alpha$ hätten, welches gegen die Vorausſetzung iſt. Hieraus ſieht man, daß die Größen

$$V - X,\ V + X,\ V - hX,\ V + hX$$

keinen gemeinſchaftlichen Factor haben. Weil aber nach (46.)

$$(V - X)(V + X)(V - hX)(V + hX)$$
$$= (1 - x)(1 + x)(1 - kx)(1 + kx)T^2$$

iſt, und, wie wir ſo eben geſehen haben, in keiner der auf der linken Seite des Gleichheitszeichens in einander multiplicirten Größen ein Factor enthalten iſt, den auch eine der andern enthielte, ſo muß offenbar jede dieſer vier Größen das Product eines Factors des erſten Grades in das Quadrat eines Polynoms des $\left(\frac{p-1}{2}\right)$ten Grades ſeyn, indem augenſcheinlich nur unter dieſer Bedingung das Product der in Rede ſtehenden vier Größen die Form

$$(1 - x)(1 + x)(1 - kx)(1 + kx)T^2$$

haben kann, wobei man nur nie vergeſſen darf, daß jede dieſer vier Größen ein Polynom des pten Grades iſt, und keine gemeinſchaftlichen Factoren in denſelben vorkommen.

48. Aus der Gleichung

$$y = \frac{X}{V}$$

folgt durch Differentiation

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{V\frac{\partial X}{\partial x} - X\frac{\partial V}{\partial x}}{V^2}\ ,$$

$$V^2\frac{\partial y}{\partial x} = V\frac{\partial X}{\partial x} - X\frac{\partial V}{\partial x}\ ,$$

oder, wenn c eine beliebige conſtante Größe bezeichnet,

$$V^2\frac{\partial y}{\partial x} = (V-cX)\frac{\partial X}{\partial x} - X\frac{\partial(V-cX)}{\partial x}.$$

Hat nun $V-cX$ den quadratiſchen Factor $(\alpha-\beta x)^2$, ſo daß

$$V-cX = (\alpha-\beta x)^2 P$$

iſt, ſo iſt

$$\frac{\partial(V-cX)}{\partial x} = (\alpha-\beta x)^2\frac{\partial P}{\partial x} - 2\beta(\alpha-\beta x)P;$$

und $V^2\frac{\partial y}{\partial x}$ hat folglich den einfachen Factor $\alpha-\beta x$. Für $V-cX$ kann man aber $V-X$, $V+X$, $V-hX$, $V+hX$ ſetzen, und ſieht alſo hieraus, daß alle einfachen Faktoren, deren Quadrate Factoren der Größen $V-X$, $V+X$, $V-hX$, $V+hX$ ſind, einfache Factoren von $V^2\frac{\partial y}{\partial x}$ ſind, woraus alſo, alles in (47.) Beigebrachte gehörig berückſichtigt, mit völliger Deutlichkeit hervorgeht, daß $V^2\frac{\partial y}{\partial x}$ durch die Größe T (47.) theilbar iſt. Nun iſt aber V ein Polynom des (p—1)ten, X ein Polynom des pten Grades, alſo

$$V^2\frac{\partial y}{\partial x} = V\frac{\partial X}{\partial x} - X\frac{\partial V}{\partial x}$$

offenbar ein Polynom des (2p—2)ten Grades. Das Product

$$(1-x)(1+x)(1-kx)(1+kx)T^2$$
$$= (V-X)(V+X)(V-hX)(V+hX)$$

iſt ein Polynom des 4pten, alſo T^2 ein Polynom des (4p—4)ten, T ein Polynom des (2p—2)ten Grades, und der Quotient von $V^2\frac{\partial y}{\partial x}$ durch T muß folglich, da T in $V^2\frac{\partial y}{\partial x}$ aufgeht, eine conſtante Größe ſeyn, welche wir $= \lambda$ ſetzen wollen, ſo daß alſo

$$V^2\frac{\partial y}{\partial x} = \lambda T,\ \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\lambda T}{V^2}$$

iſt. Aber nach (46.)

$$\frac{T}{V^2} = \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Folglich

$$\frac{1}{\lambda}.\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}} = \frac{\lambda\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Denkt man ſich jetzt X nach aufſteigenden Potenzen von x entwickelt, ſo iſt das niedrigſte x enthaltende Glied offenbar $\frac{x}{\mu}$, das niedrigſte x^0 enthaltende Glied der Entwickelung von $\frac{\partial X}{\partial x}$

alſo $=\frac{1}{\mu}$. Das niedrigſte x^0 enthaltende Glied der Entwickelung von V iſt $=1$, und das niedrigſte Glied der Entwickelung von $\frac{\partial V}{\partial x}$ enthält alſo, da V eine Function von x^2 iſt, ſchon x. Alſo iſt das niedrigſte x^0 enthaltende Glied in der Entwickelung von

$$V^2\frac{\partial y}{\partial x}=V\frac{\partial X}{\partial x}-X\frac{\partial V}{\partial x}$$

offenbar $=\frac{1}{\mu}$. Das niedrigſte x^0 enthaltende Glied von $T=PQ$ iſt nach (46.) $=1$. Weil nun nach dem Obigen

$$V\frac{\partial X}{\partial x}-X\frac{\partial V}{\partial x}=\lambda T$$

iſt, ſo ergiebt ſich durch Vergleichung der einzelnen Glieder der Entwickelungen nach Potenzen von x, wenn man nur die erſten Glieder beibehält, oder, was daſſelbe iſt, für $x=0$ auf der Stelle:

$$\frac{1}{\mu}=\lambda;$$

alſo

$$\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\mu\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}},$$

und folglich, da, wegen der Gleichung

$$y=\frac{x}{\mu}.\frac{U}{V},$$

für $x=0$ offenbar $y=0$ iſt:

$$\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\mu\int_0^y\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}},$$

d. i. für $x=\sin\varphi$, $y=\sin\psi$:

$$F(k,\varphi)=\mu F(h,\psi).$$

Dies führt nun auf das folgende überaus merkwürdige Theorem:

Wenn für irgend ein ungerades p

$$y=\frac{x}{\mu}.\frac{U}{V}$$

iſt, ſo iſt für

$$\mu=\frac{\sin\alpha_1{}^2\sin\alpha_3{}^2\sin\alpha_5{}^2\ldots\sin\alpha_{p-2}^2}{\sin\alpha_2{}^2\sin\alpha_4{}^2\sin\alpha_6{}^2\ldots\sin\alpha_{p-1}^2},$$

$$h=k^p\sin\alpha_1{}^4\sin\alpha_3{}^4\sin\alpha_5{}^4\ldots\sin\alpha_{p-2}^4$$

immer

$$F(k,\varphi)=\mu F(h,\psi),$$

indem man $x=\sin\varphi$, $y=\sin\psi$ ſetzt.

Statt der Gleichung

$$y = \frac{x}{\mu} . \frac{U}{V}$$

kann man aber auch nach dem Obigen die Gleichung

$$1 - y =$$

$$(1 \mp x) . \frac{\left(1 - \frac{x}{\sin\alpha_1}\right)^2 \left(1 + \frac{x}{\sin\alpha_3}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{\sin\alpha_5}\right)^2 \left(1 \pm \frac{x}{\sin\alpha_{p-2}}\right)^2}{(1 - k^2 x^2 \sin\alpha_2{}^2)(1 - k^2 x^2 \sin\alpha_4{}^2) .. (1 - k^2 x^2 \sin\alpha_{p-1}^2)}$$

ſetzen, indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem p von der Form $4n + 1$ oder von der Form $4n - 1$ iſt.

Setzt man, wie es nach dem Obigen verſtattet iſt, $-x$ und $-y$ reſpective für x und y, und dividirt die vorhergehende Gleichung mit der auf dieſe Weiſe erhaltenen Gleichung, ſo ergiebt ſich:

$$\frac{1 - y}{1 + y} =$$

$$\frac{1 \mp x}{1 \pm x} . \left(\frac{\sin\alpha_1 - x}{\sin\alpha_1 + x}\right)^2 \left(\frac{\sin\alpha_3 + x}{\sin\alpha_3 - x}\right)^2 \left(\frac{\sin\alpha_5 - x}{\sin\alpha_5 + x}\right)^2 .. \left(\frac{\sin\alpha_{p-2} \pm x}{\sin\alpha_{p-2} \mp x}\right)^2.$$

Aber allgemein bekanntlich

$$\frac{1 \mp \sin\varphi}{1 \pm \sin\varphi} = \tang(45^0 \mp \tfrac{1}{2}\varphi)^2,$$

$$\frac{\sin\alpha \mp \sin\varphi}{\sin\alpha \pm \sin\varphi} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha \mp \varphi)\cos\frac{1}{2}(\alpha \pm \varphi)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha \pm \varphi)\cos\frac{1}{2}(\alpha \mp \varphi)} = \frac{\tang\frac{1}{2}(\alpha \mp \varphi)}{\tang\frac{1}{2}(\alpha \pm \varphi)}.$$

Alſo, wenn man zugleich die Quadratwurzel auszieht, und wieder $x = \sin\varphi$, $y = \sin\psi$ ſetzt:

$$\tang(45^0 - \tfrac{1}{2}\psi) =$$

$$\tang(45^0 \mp \varphi) . \frac{\tang\frac{1}{2}(\alpha_1 - \varphi)}{\tang\frac{1}{2}(\alpha_1 + \varphi)} . \frac{\tang\frac{1}{2}(\alpha_3 + \varphi)}{\tang\frac{1}{2}(\alpha_3 - \varphi)} . \frac{\tang\frac{1}{2}(\alpha_5 - \varphi)}{\tang\frac{1}{2}(\alpha_5 + \varphi)} .. \frac{\tang\frac{1}{2}(\alpha_{p-2} \pm \varphi)}{\tang\frac{1}{2}(\alpha_{p-2} \mp \varphi)},$$

aus welcher Gleichung alſo ψ beſtimmt werden muß, wenn für die obigen Werthe von μ und h

$$F(k, \varphi) = \mu F(h, \psi)$$

ſeyn ſoll.

Aus der Gleichung

$$y = \frac{x}{\mu} . \frac{U}{V}$$

folgt auch auf der Stelle zur Berechnung von ψ aus φ folgende Gleichung:

$$\sin\psi =$$

$$\frac{\sin\varphi}{\mu} . \frac{\left(1 - \frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_2^2}\right)\left(1 - \frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_{p-1}^2}\right)}{(1 - k^2 \sin\varphi^2 \sin\alpha_2{}^2)(1 - k^2 \sin\varphi^2 \sin\alpha_4{}^2) .. (1 - k^2 \sin\varphi^2 \sin\alpha_{p-1}^2)}.$$

Endlich iſt auch nach dem Obigen

$$1 - \sin\psi =$$

$$(1 \mp \sin\varphi) \cdot \frac{\left(1 - \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha_1}\right)^2 \left(1 + \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha_3}\right)^2 \ldots \left(1 \pm \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha_{p-2}}\right)^2}{(1 - k^2 \sin\varphi^2 \sin\alpha_2^2)(1 - k^2 \sin\varphi^2 \sin\alpha_4^2) \ldots (1 - k^2 \sin\varphi^2 \sin\alpha_{p-1}^2)},$$

$$1 + \sin\psi =$$

$$(1 \pm \sin\varphi) \frac{\left(1 + \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha_1}\right)^2 \left(1 - \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha_3}\right)^2 \ldots \left(1 \mp \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha_{p-2}}\right)^2}{(1 - k^2 \sin\varphi^2 \sin\alpha_2^2)(1 - k^2 \sin\varphi^2 \sin\alpha_4^2) \ldots (1 - k^2 \sin\varphi^2 \sin\alpha_{p-1}^2)}.$$

Multiplicirt man nun dieſe beiden Gleichungen in einander und zieht die Quadratwurzel aus, ſo erhält man:

$$\cos\psi =$$

$$\cos\varphi \frac{\left(1 - \frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_1^2}\right)\left(1 - \frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_3^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_{p-2}^2}\right)}{(1 - k^2 \sin\varphi^2 \sin\alpha_2^2)(1 - k^2 \sin\varphi^2 \sin\alpha_4^2) \ldots (1 - k^2 \sin\varphi^2 \sin\alpha_{p-1}^2)}.$$

Da allgemein nach dem Obigen

$$\alpha_m = A\left(\frac{m}{p} K\right),$$

alſo

$$F(k, \alpha_m) = \frac{m}{p} K,$$

und bekanntlich

$$K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$$

iſt, ſo muß α_m aus der Gleichung

$$F(k, \alpha_m) = \frac{m}{p} F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$$

beſtimmt werden, wozu in (19.) die nöthige Anleitung ertheilt worden iſt.

Jacobi hat dieſes merkwürdige Theorem nebſt ſeinem Beweiſe zuerſt in Schumachers aſtronomiſchen Nachrichten Nr. 123. 127., dann in den ſchon angeführten Fundamentis Theoriae functionum ellipticarum. p. 36. ff., Legendre im Traité des fonctions elliptiques. Premier supplément. p. 3. und einen Nachtrag zu dem Beweiſe im Troisième supplément. p. 169 mitgetheilt. Des Letztern Darſtellung ſind wir hier vorzüglich gefolgt.

XIX. Zweites Theorem von Jacobi über die elliptiſchen Functionen der erſten Art.

49. In der Gleichung

$$\frac{\partial x}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = \mu \cdot \frac{\partial y}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - h^2 y^2)}}$$

ſetze man, für $i = \sqrt{-1}$,

$$x = i \tang \sigma, \; y = i \tang \tau;$$

ſo iſt

$$\partial x = \frac{i\partial\sigma}{\cos\sigma^2}, \; \partial y = \frac{i\partial\tau}{\cos\tau^2};$$

$$1 - x^2 = 1 + \tang\sigma^2 = \frac{1}{\cos\sigma^2}, \; 1 - y^2 = 1 + \tang\tau^2 = \frac{1}{\cos\tau^2};$$

$$1 - k^2x^2 = 1 + k^2\tang\sigma^2 = \frac{1-(1-k^2)\sin\sigma^2}{\cos\sigma^2},$$

$$1 - h^2y^2 = 1 + h^2\tang\tau^2 = \frac{1-(1-h^2)\sin\tau^2}{\cos\tau^2};$$

folglich, wenn wir

$$1 - k^2 = k'^2, \; 1 - h^2 = h'^2$$

ſetzen:

$$\frac{\partial\sigma}{\sqrt{1-k'^2\sin\sigma^2}} = \mu\frac{\partial\tau}{\sqrt{1-h'^2\sin\tau^2}};$$

$$\int_0^\sigma \frac{\partial\sigma}{\sqrt{1-k'^2\sin\sigma^2}} = \mu\int_0^\tau \frac{\partial\tau}{\sqrt{1-h'^2\sin\tau^2}};$$

d. i. $F(k', \sigma) = \mu F(h', \tau)$.

Da $x = \sin\varphi$, $y = \sin\psi$ iſt, ſo iſt

$$\sin\varphi = i\tang\sigma, \; \sin\psi = i\tang\tau;$$

$$\cos\varphi^2 = 1 + \tang\sigma^2 = \frac{1}{\cos\sigma^2}, \; \cos\varphi = \frac{1}{\cos\sigma};$$

$$\cos\psi^2 = 1 + \tang\tau^2 = \frac{1}{\cos\tau^2}, \; \cos\psi = \frac{1}{\cos\tau}.$$

$$\tang\varphi = i\sin\sigma, \; \tang\psi = i\sin\tau.$$

Aus den in (48.) für $\sin\psi$ und $\cos\psi$ gegebenen Formeln folgt durch Diviſion

$$\tang\psi =$$

$$\frac{\tang\varphi}{\mu}\cdot\frac{\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_{p-1}^2}\right)}{\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_1^2}\right)\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_{p-2}^2}\right)}.$$

Aber überhaupt

$$1 - \frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha^2} = 1 + \frac{\tang\sigma^2}{\sin\alpha^2} = 1 + \operatorname{cosec}\alpha^2\tang\sigma^2$$

$$= 1 + (1+\cot\alpha^2)\tang\sigma^2 = \frac{1+\cot\alpha^2\sin\sigma^2}{\cos\sigma^2}.$$

Folglich

$$\sin\tau =$$

$$\frac{\sin\sigma}{\mu}\cdot\frac{(1+\cot\alpha_2{}^2\sin\sigma^2)(1+\cot\alpha_4{}^2\sin\sigma^2)\ldots(1+\cot\alpha_{p-1}^2\sin\sigma^2)}{(1+\cot\alpha_1{}^2\sin\sigma^2)(1+\cot\alpha_3{}^2\sin\sigma^2)\ldots(1+\cot\alpha_{p-2}^2\sin\sigma^2)},$$

mittelſt welcher Formel τ aus σ gefunden wird.

Nach (45.) iſt allgemein

$$\sin^2 CA\xi = \frac{\cos^2 A\xi}{1-k^2\sin^2 A\xi};$$

alſo

$$k^2\sin^2 A\xi = 1-\frac{\cos^2 A\xi}{\sin^2 CA\xi}.$$

Aber für jedes n

$$\alpha_n = A\left(\frac{n}{p}K\right),\ \alpha_{p-n} = A\left(\frac{p-n}{p}K\right) = CA\left(\frac{n}{p}K\right).$$

Alſo

$$k^2\sin\alpha_n^2 = 1-\frac{\cos\alpha_n^2}{\sin\alpha_{p-n}^2},$$

und folglich

$$1-k^2\sin\varphi^2\sin\alpha_n^2 = 1+\left\{1-\frac{\cos\alpha_n^2}{\sin\alpha_{p-n}^2}\right\}\operatorname{tang}\sigma^2$$

$$= \frac{1-\dfrac{\cos\alpha_n^2}{\sin\alpha_{p-n}^2}\sin\sigma^2}{\cos\sigma^2}.$$

Alſo nach der Formel für $\cos\psi$ in (48.)

$$\frac{1}{\cos\tau} =$$

$$\frac{1}{\cos\sigma}\cdot\frac{(1+\cot\alpha_1{}^2\sin\sigma^2)(1+\cot\alpha_3{}^2\sin\sigma^2)\ldots(1+\cot\alpha_{p-2}^2\sin\sigma^2)}{\left\{1-\dfrac{\cos\alpha_2{}^2}{\sin\alpha_{p-2}^2}\sin\sigma^2\right\}\left\{1-\dfrac{\cos\alpha_4{}^2}{\sin\alpha_{p-4}^2}\sin\sigma^2\right\}\ldots\left\{1-\dfrac{\cos\alpha_{p-1}^2}{\sin\alpha_1{}^2}\sin\sigma^2\right\}},$$

$$\cos\tau =$$

$$\cos\sigma\frac{\left\{1-\dfrac{\cos\alpha_2{}^2}{\sin\alpha_{p-2}^2}\sin\sigma^2\right\}\left\{1-\dfrac{\cos\alpha_4{}^2}{\sin\alpha_{p-4}^2}\sin\sigma^2\right\}\ldots\left\{1-\dfrac{\cos\alpha_{p-1}^2}{\sin\alpha_1{}^2}\sin\sigma^2\right\}}{(1+\cot\alpha_1{}^2\sin\sigma^2)(1+\cot\alpha_3{}^2\sin\sigma^2)\ldots(1+\cot\alpha_{p-2}^2\sin\sigma^2)}.$$

Ferner iſt nach (46.)

$$\frac{T}{V^2} = \frac{PQ}{V^2} = \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$= \frac{\cos\sigma^2}{\cos\tau^2}\cdot\frac{\sqrt{1-h'^2\sin\tau^2}}{\sqrt{1-k'^2\sin\sigma^2}}.$$

Aber, wie leicht aus (48.) und (46.) folgt

$$\frac{\cos\psi}{\cos\varphi} = \frac{P}{V} = \frac{\cos\sigma}{\cos\tau},\ \frac{P^2}{V^2} = \frac{\cos\sigma^2}{\cos\tau^2};$$

alſo

$$\frac{\sqrt{1-h'^2 \sin\tau^2}}{\sqrt{1-k'^2 \sin\sigma^2}} = \frac{Q}{P} =$$

$$\frac{\left\{1-\frac{\cos\alpha_1{}^2}{\sin\alpha^2_{p-1}}\sin\sigma^2\right\}\left\{1-\frac{\cos\alpha_3{}^2}{\sin\alpha^2_{p-3}}\sin\sigma^2\right\}\ldots\left\{1-\frac{\cos\alpha^2_{p-2}}{\sin\alpha_2{}^2}\sin\sigma^2\right\}}{(1+\cot\alpha_1{}^2\sin\sigma^2)(1+\cot\alpha_3{}^2\sin\sigma^2)\ldots(1+\cot\alpha^2_{p-2}\sin\sigma^2)}.$$

In der Gleichung

$$F(k', \sigma) = \mu F(h', \tau)$$

ſetze man nun, wie offenbar verſtattet iſt, h ſtatt k'; dann iſt

$$h'^2 = 1 - h^2 = 1 - k'^2 = k^2,\ h' = k.$$

Den entſprechenden Werth von μ bezeichne man durch μ', und, da überhaupt

$$\alpha_m = A\left(\frac{m}{p}K\right)$$

iſt, jetzt aber $k = h'$ iſt, ſo ſey jetzt überhaupt

$$\beta_m = A\left(\frac{m}{p}H'\right),$$

für

$$H' = F\left(h', \frac{\pi}{2}\right),$$

wo alſo β_m ſo zu beſtimmen iſt, daß

$$F(h', \beta_m) = \frac{m}{p}H' = \frac{m}{p}F\left(h', \frac{\pi}{2}\right)$$

iſt. Bezeichnen wir nun die dem Modulus h entſprechende Amplitudo durch ψ, die dem Modulus k entſprechende Amplitudo durch ω, und ſetzen $\sin\psi = y$, $\sin\omega = z$; ſo iſt nach dem Vorhergehenden

$$F(h, \psi) = \mu' F(k, \omega)$$

für

$$z = \frac{y}{\mu'}\cdot\frac{(1+y^2\cot\beta_2{}^2)(1+y^2\cot\beta_4{}^2)\ldots(1+y^2\cot\beta_{p-1})}{(1+y^2\cot\beta_1{}^2)(1+y^2\cot\beta_3{}^2)\ldots(1+y^2\cot\beta^2_{p-2})},$$

$$\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$\frac{\left\{1-\frac{y^2\cos\beta_2{}^2}{\sin\beta^2_{p-2}}\right\}\left\{1-\frac{y^2\cos\beta_4{}^2}{\sin\beta^2_{p-4}}\right\}\ldots\left\{1-\frac{y^2\cos\beta^2_{p-1}}{\sin\beta_1{}^2}\right\}}{(1+y^2\cot\beta_1{}^2)(1+y^2\cot\beta_3{}^2)\ldots(1+y^2\cot\beta^2_{p-2})},$$

$$\frac{\sqrt{1-k^2z^2}}{\sqrt{1-h^2y^2}} =$$

$$\frac{\left\{1-\frac{y^2\cos\beta_1{}^2}{\sin\beta^2_{p-1}}\right\}\left\{1-\frac{y^2\cos\beta_3{}^2}{\sin\beta^2_{p-3}}\right\}\ldots\left\{1-\frac{y^2\cos\beta^2_{p-2}}{\sin\beta_2{}^2}\right\}}{(1+y^2\cot\beta_1{}^2)(1+y^2\cot\beta_3{}^2)\ldots(1+y^2\cot\beta^2_{p-2})},$$

$$\mu' = \frac{\sin\beta_1{}^2 \sin\beta_3{}^2 \sin\beta_5{}^2 \ldots \sin\beta_{p-2}^2}{\sin\beta_2{}^2 \sin\beta_4{}^2 \sin\beta_6{}^2 \ldots \sin\beta_{p-1}^2},$$

$$k' = h'^p \sin\beta_1{}^4 \sin\beta_3{}^4 \sin\beta_5{}^4 \ldots \sin\beta_{p-2}^4.$$

50. Kehren wir jetzt auf ein Paar Augenblicke wieder zu dem in XVIII. bewieſenen erſten Theorem zurück, ſo erhellet aus den Formeln

$$y = \frac{x}{\mu} \cdot \frac{\left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_2{}^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_4{}^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_6{}^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_{p-1}^2}\right)}{(1 - k^2x^2\sin\alpha_2{}^2)(1 - k^2x^2\sin\alpha_4{}^2)\ldots(-k^2x^2\sin\alpha_{p-1}^2)},$$

$$1 - y =$$

$$(1 \mp x)\frac{\left(1 - \frac{x}{\sin\alpha_1}\right)^2\left(1 + \frac{x}{\sin\alpha_3}\right)^2\left(1 - \frac{x}{\sin\alpha_5{}^2}\right)^2\ldots\left(1 \pm \frac{x}{\sin\alpha_{p-2}}\right)^2}{(1 - k^2x^2\sin\alpha_2{}^2)(1 - k^2x^2\sin\alpha_4{}^2)\ldots(1 - k^2x^2\sin\alpha_{p-1}^2)},$$

$$1 + y =$$

$$(1 \pm x)\frac{\left(1 + \frac{x}{\sin\alpha_1}\right)^2\left(1 - \frac{x}{\sin\alpha_3}\right)^2\left(1 + \frac{x}{\sin\alpha_5{}^2}\right)\ldots\left(1 \mp \frac{x}{\sin\alpha_{p-2}}\right)^2}{(1 - k^2x^2\sin\alpha_2{}^2)(1 - k^2x^2\sin\alpha_4{}^2)\ldots(1 - k^2x^2\sin\alpha_{p-1}^2)},$$

wenn man x und y, d. i., weil $x = \sin\varphi$, $y = \sin\psi$ iſt, φ und ψ von Null an ſich ſtetig verändern läßt, daß folgende Werthe von φ und ψ als zuſammenſtimmende Werthe zu betrachten ſind:

$$\varphi = 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots\ldots \alpha_{p-2}, \alpha_{p-1};$$

$$\psi = 0, \tfrac{1}{2}\pi, \pi, \tfrac{3}{2}\pi, 2\pi, \ldots\ldots \frac{p-2}{2}\pi, \frac{p-1}{2}\pi.$$

Weil ferner bekanntlich

$$F(k, \alpha_p) = \frac{p}{p} F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$$

iſt; ſo iſt $\alpha_p = \frac{1}{2}\pi$, und folglich in dieſem Falle, für $\varphi = \alpha_p$, $x = \sin\varphi = 1$. Iſt nun $p = 4n + 1$, ſo iſt in dieſem Falle, da $1 - x = 0$ iſt und die obern Zeichen genommen werden müſſen, $1 - y = 0$, $y = 1$. Iſt aber $p = 4n - 1$, ſo iſt, da $1 - x = 0$ iſt und die untern Zeichen genommen werden müſſen, $1 + y = 0$, $y = -1$. Im erſten Falle iſt

$$\frac{p}{2}\pi = 2n\pi + \tfrac{1}{2}\pi,\ \sin\frac{p}{2}\pi = 1;$$

im zweiten Falle dagegen iſt

$$\frac{p}{2}\pi = 2n\pi - \tfrac{1}{2}\pi,\ \sin\frac{p}{2}\pi = -1;$$

und folglich, wie aus den beiden obigen Reihen der zuſammen gehörenden Werthe von φ und ψ ſogleich hervorgeht, in beiden Fällen $\psi = \frac{p}{2}\pi$, wenn $\varphi = \alpha_p = \frac{1}{2}\pi$ iſt. Ueberhaupt ſieht man hieraus, daß, wenn φ zwiſchen α_m und α_{m+1} liegt, ψ zwi-

ſchen $\frac{m}{2}\pi$ und $\frac{m+1}{2}\pi$ zu nehmen iſt, ſo wie auch leicht erhellen wird, wie man ſich zu verhalten hat, wenn φ größer als $\frac{1}{2}\pi$ wird. Setzt man nun in der Gleichung des Satzes in XVIII.

$$F(k, \varphi) = \mu F(h, \psi)$$

für φ und ψ die beiden zuſammengehörenden Werthe $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{p}{2}\pi$; ſo wird

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \mu F\left(h, \frac{p}{2}\pi\right).$$

Aber nach (10.)

$$F\left(h, \frac{p}{2}\pi\right) = pF\left(h, \frac{\pi}{2}\right);$$

alſo

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = p\mu F\left(h, \frac{\pi}{2}\right),$$

oder, wenn wir der Kürze wegen wieder

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = K, \; F\left(h, \frac{\pi}{2}\right) = H$$

ſetzen:

$$K = p\mu H.$$

51. Weil

$$\frac{(1 + \cot\alpha_2{}^2)(1 + \cot\alpha_4{}^2)\ldots(1 + \cot\alpha_{p-1}^2)}{(1 + \cot\alpha_1{}^2)(1 + \cot\alpha_3{}^2)\ldots(1 + \cot\alpha_{p-2}^2)}$$

$$= \frac{\sin\alpha_1{}^2 \sin\alpha_3{}^2 \sin\alpha_5{}^2 \ldots \sin\alpha_{p-2}^2}{\sin\alpha_2{}^2 \sin\alpha_4{}^2 \sin\alpha_6{}^2 \ldots \sin\alpha_{p-1}^2} = \mu$$

iſt, ſo iſt für $\sigma = \frac{1}{2}\pi$ nach (49.) auch $\tau = \frac{1}{2}\pi$, ſo wie offenbar $\tau = 0$ für $\sigma = 0$. Alſo giebt die Gleichung

$$F(k', \sigma) = \mu F(h', \tau)$$

in dieſem Falle

$$F\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = \mu F\left(h', \frac{\pi}{2}\right)$$

oder in abkürzender Bezeichnung

$$K' = \mu H'.$$

Wir haben alſo

$$\frac{K}{pH} = \mu, \; \frac{K'}{H'} = \mu,$$

woraus auf der Stelle die merkwürdige Gleichung

$$\frac{K}{K'} = p\frac{H}{H'}, \; \frac{F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)}{F\left(k', \frac{\pi}{2}\right)} = p\frac{F\left(h, \frac{\pi}{2}\right)}{F\left(h', \frac{\pi}{2}\right)}$$

folgt.

52. Eben ſo leicht wie in (51.) erhellet aus (49.), daß zu gleicher Zeit $\psi = \frac{1}{2}\pi$, $\omega = \frac{1}{2}\pi$ iſt. Alſo folgt aus der Gleichung

$$F(h, \psi) = \mu' F(k, \omega)$$

in (49.)

$$F\left(h, \frac{\pi}{2}\right) = \mu' F\left(k, \frac{\pi}{2}\right), \quad H = \mu' K;$$

und wir haben daher (ſ. 50.) die beiden Gleichungen:

$$\frac{K}{H} = p\mu, \quad \frac{H}{K} = \mu',$$

woraus, wenn man multiplicirt, die merkwürdige Gleichung

$$p\mu\mu' = 1$$

erhalten wird.

Verbindet man nun die Gleichungen

$$F(k, \varphi) = \mu F(h, \psi), \quad F(h, \psi) = \mu' F(k, \omega)$$

mit einander; ſo erhält man

$$F(k, \varphi) = \mu\mu' F(k, \omega),$$

d. i., weil $\mu\mu' = \frac{1}{p}$ iſt:

$$F(k, \omega) = pF(k, \varphi),$$

in welcher Gleichung die allgemeine Auflöſung des Problems der Multiplication der elliptiſchen Functionen der erſten Art, wenn der Multiplicator eine ungerade Zahl iſt, enthalten iſt. Iſt nämlich die Amplitudo gegeben, ſo ſucht man zuerſt ψ mittelſt der Formel

$$y = \frac{x}{\mu} \cdot \frac{\left(1 - \frac{x_2}{\sin\alpha_2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_4^2}\right) \ldots\ldots \left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_{p-1}^2}\right)}{(1 - k^2x^2\sin\alpha_2^2)(1 - k^2x^2\sin\alpha_4^2)\ldots(1 - k^2x^2\sin\alpha_{p-1}^2)}$$

oder einer andern zu dieſem Zweck dienlichen Formel des erſten Theorems und dann ω mittelſt der Formel

$$z = \frac{y}{\mu'} \cdot \frac{(1 + y^2\cot\beta_2^2)(1 + y^2\cot\beta_4^2)\ldots(1 + y^2\cot\beta_{p-1}^2)}{(1 + y^2\cot\beta_1^2)(1 + y^2\cot\beta_3^2)\ldots(1 + y^2\cot\beta_{p-2}^2)}$$

des zweiten Theorems, indem man bemerkt, daß die Verbindung der Gleichungen

$$F(k, \varphi) = \mu F(h, \psi), \quad F(h, \psi) = \mu' F(k, \omega)$$

nach dem Vorhergehenden zu der Gleichung

$$F(k, \omega) = pF(k, \varphi)$$

führt. Wäre ω gegeben und φ der Gleichung

$$F(k, \varphi) = \frac{1}{p} F(k, \omega)$$

gemäß zu beſtimmen, ſo müßte man $y = \sin\psi$ aus $z = \sin\omega$ durch Auflöſung der zweiten der beiden obigen algebraiſchen Glei-

chungen, und dann eben ſo $x = \sin\varphi$ aus $y = \sin\psi$ mittelſt der erſten dieſer beiden Gleichungen beſtimmen, ſo daß alſo hierdurch auch das Problem der Diviſion der elliptiſchen Functionen der erſten Art, wenn p eine ungerade Zahl iſt, auf die Auflöſung bloßer algebraiſcher Gleichungen gebracht iſt.

53. Mittelſt des erſten Theorems kann man von der Function $F(k, \varphi)$ zu einer elliptiſchen Function des Modulus h, von dieſer wieder eben ſo zu einer andern des Modulus h_1, von dieſer zu einer andern des Modulus h_2, u. ſ. f. übergehen, und aus (48.) erhellet, daß

$$k, h, h_1, h_2, h_3, \ldots.$$

eine abnehmende Reihe bilden, deren Gränze Null iſt. Eben ſo leicht erhellet, daß man mittelſt der Formeln des erſten Theorems durch Auflöſung bloßer algebraiſcher Gleichungen aus $F(k, \varphi)$ eine Reihe anderer elliptiſcher Functionen ableiten kann, deren Moduli die ſteigende Reihe

$$\ldots\ldots k_3, k_2, k_1, k,$$

deren Glieder ſich immer mehr und mehr der Einheit nähern, bilden, ſo daß man alſo aus jeder elliptiſchen Function $F(k, \varphi)$ eine unendliche Reihe anderer ableiten kann, deren Moduli die nach beiden Seiten hin in's Unendliche fortſchreitende Reihe

$$\text{Lim. } 1) \ldots k_4, k_3, k_2, k_1, k, h, h_1, h_2, h_3, h_4, \ldots (\text{Lim. } 0$$

bilden, und mit dieſer Reihe kann man dann ferner nach den in (49.) gegebenen Formeln eine neue Reihe elliptiſcher Functionen verbinden, deren Moduli die Complemente der vorhergehenden ſind, und daher ebenfalls eine nach beiden Seiten hin in's Unendliche aber im entgegengeſetzten Sinne fortſchreitende Reihe

$$\text{Lim. } 0) \ldots k'_4, k'_3, k'_2, k'_1, k', h', h'_1, h'_2, h'_3, h'_4, \ldots (\text{Lim. } 1$$

bilden.

Das Folgende enthält eine der wichtigſten und intereſſanteſten Anwendungen der beiden von Jacobi gefundenen Theoreme. Außerdem laſſen ſich von denſelben noch viele andere Anwendungen machen, worüber vorzüglich Legendre Traité des fonctions elliptiques. Deux. suppl. nachzuſehen iſt, da uns die Beſchränktheit des Raums mehr zu ſagen verbietet.

XX. Darſtellung der trigonometriſchen Functionen der Amplitudo als Producte mit unendlich vielen Factoren.

54. Die Hauptgleichungen der beiden von Jacobi gefundenen Theoreme ſind nach dem Vorhergehenden bekanntlich

$$F(k, \varphi) = \mu F(h, \psi),\quad F(h, \psi) = \mu' F(k, \omega),$$

wo nach (46.)

$$h = k^p \sin\alpha_1{}^4 \sin\alpha_3{}^4 \sin\alpha_5{}^4 \ldots \sin\alpha_{p-2}^4$$

iſt, und die zweite Gleichung für

$$z = \frac{y}{\mu'} \cdot \frac{(1+y^2\cot\beta_2{}^2)(1+y^2\cot\beta_4{}^2)\,..\,(1+y^2\cot\beta_{p-1}^2)}{(1+y^2\cot\beta_1{}^2)(1+y^2\cot\beta_3{}^2)\,..\,(1+y^2\cot\beta_{p-2}^2)};$$

$$y = \sin\psi, \quad z = \sin\omega\,;$$

$$F(h', \beta_m) = \frac{m}{p} F\left(h', \frac{\pi}{2}\right) = \frac{m}{p} H'\,;$$

$$\mu' = \frac{\sin\beta_1{}^2 \sin\beta_3{}^2 \sin\beta_5{}^2 \ldots \sin\beta_{p-2}^2}{\sin\beta_2{}^2 \sin\beta_4{}^2 \sin\beta_6{}^2 \ldots \sin\beta_{p-1}^2}$$

erfüllt wird, immer vorausgeſetzt, daß p eine ungerade Zahl iſt.

Setzen wir nun $p = \infty$, ſo iſt offenbar $h = 0$, alſo

$$H = F\left(h, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \partial\varphi = \tfrac{1}{2}\pi\,.$$

Ferner iſt überhaupt

$$2\int_0^x \frac{\partial x}{1-x^2} = \int_0^x \frac{\partial x}{1-x} + \int_0^x \frac{\partial x}{1+x} = l\,\frac{1+x}{1-x}\,;$$

folglich

$$\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{1-\sin x^2}} = \int_0^x \frac{\cos x\,\partial x}{1-\sin x^2} = \int_0^x \frac{\partial \sin x}{1-\sin x^2} = \tfrac{1}{2} l\,\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\,;$$

alſo, weil $h' = \sqrt{1-h^2} = 1$ iſt, offenbar

$$F(h', \beta_m) = \tfrac{1}{2} l\,\frac{1+\sin\beta_m}{1-\sin\beta_m}\,.$$

Ferner iſt nach (51.) und (52.)

$$\mu' = \frac{H}{K}, \quad \frac{K}{K'} = p\frac{H}{H'}\,;$$

alſo im vorliegenden Falle

$$\mu' = \frac{\pi}{2K}, \quad \frac{H'}{p} = \frac{HK'}{K} = \frac{\pi K'}{2K}, \quad \frac{m}{p}H' = \frac{m}{2}\cdot\frac{\pi K'}{K}\,;$$

folglich

$$F(h', \beta_m) = \frac{m}{p}H' = \tfrac{1}{2} l\,\frac{1+\sin\beta_m}{1-\sin\beta_m} = \frac{m}{2}\cdot\frac{\pi K'}{K},$$

und daher, wenn wir der Kürze wegen

$$e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q$$

ſetzen:

$$\frac{1+\sin\beta_m}{1-\sin\beta_m} = q^{-m}\,;$$

folglich

$$\sin\beta_m = \frac{1-q^m}{1+q^m}, \quad \cos\beta_m = \frac{2q^{\frac{m}{2}}}{1+q^m}, \quad \cot\beta_m^2 = \frac{4q^m}{(1-q^m)^2}\,;$$

$$\frac{1+y^2\cot\beta_m^2}{1+y^2\cot\beta_{m-1}^2} = \left(\frac{1-q^{m-1}}{1-q^m}\right)^2 \cdot \frac{1-2(1-2y^2)q^m+q^{2m}}{1-2(1-2y^2)q^{m-1}+q^{2m-2}}$$

$$= \left(\frac{1-q^{m-1}}{1-q^m}\right)^2 \cdot \frac{1-2q^m\cos 2\psi+q^{2m}}{1-2q^{m-1}\cos 2\psi+q^{2m-2}},$$

da bekanntlich

$$\cos 2\psi = 1 - 2\sin\psi^2 = 1 - 2y^2$$

iſt. Dies giebt alſo nach dem Obigen

$$\frac{\sin\omega}{\sin\psi} =$$

$$\frac{2K}{\pi}A^2 \cdot \frac{1-2q^2\cos 2\psi+q^4}{1-2q\cos 2\psi+q^2} \cdot \frac{1-2q^4\cos 2\psi+q^8}{1-2q^3\cos 2\psi+q^6} \cdot \frac{1-2q^6\cos 2\psi+q^{12}}{1-2q^5\cos 2\psi+q^{10}} \cdots,$$

für

$$A = \frac{1-q}{1-q^2} \cdot \frac{1-q^3}{1-q^4} \cdot \frac{1-q^5}{1-q^6} \cdot \frac{1-q^7}{1-q^8} \cdots\cdots$$

Da $h = 0$ iſt, ſo iſt

$$F(h,\psi) = \psi = \mu' F(k,\omega) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{F(k,\omega)}{K},$$

und ψ kann alſo immer aus ω gefunden werden.

Für A läßt ſich auf folgende Art noch ein zweiter Ausdruck finden. Für $\omega = \frac{1}{2}\pi$ iſt nämlich nach (52.) auch $\psi = \frac{1}{2}\pi$, und folglich nach der vorher gefundenen Gleichung

$$1 = \frac{2K}{\pi}A^2 \cdot \left(\frac{1+q^2}{1+q}\right)^2 \left(\frac{1+q^4}{1+q^3}\right)^2 \left(\frac{1+q^6}{1+q^5}\right)^2 \cdots\cdots,$$

$$A = \left(\frac{\pi}{2K}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1+q}{1+q^2} \cdot \frac{1+q^3}{1+q^4} \cdot \frac{1+q^5}{1+q^6} \cdot \frac{1+q^7}{1+q^8} \cdots\cdots$$

Da für $p = \infty$ nach dem Obigen $h = 0$, und wie aus der allgemeinen Gleichung

$$F(h',\beta_m) = \frac{m}{p} F\left(h', \frac{\pi}{2}\right)$$

ſogleich erhellet,

$$\sin\beta_p = \sin\beta_{p-1} = \sin\beta_{p-2} = \ldots = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\cos\beta_p = \cos\beta_{p-1} = \cos\beta_{p-2} = \ldots\ldots = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

iſt; ſo werden die beiden andern Hauptformeln in (49.) in dieſem Falle

$$\frac{\cos\omega}{\cos\psi} =$$

$$\frac{(1-y^2\cos\beta_2{}^2)(1-y^2\cos\beta_4{}^2)(1-y^2\cos\beta_6{}^2)\ldots\ldots}{(1+y^2\cot\beta_1{}^2)(1+y^2\cot\beta_3{}^2)(1+y^2\cot\beta_5{}^2)\ldots\ldots},$$

$$\Delta(k,\omega) = \frac{(1-y^2\cos\beta_1{}^2)(1-y^2\cos\beta_3{}^2)(1-y^2\cos\beta_5{}^2)\ldots.}{(1+y^2\cot\beta_1{}^2)(1+y^2\cot\beta_3{}^2)(1+y^2\cot\beta_5{}^2)\ldots.},$$

d. i. auf ganz ähnliche Art wie vorher:

$$\frac{\cos\omega}{\cos\psi} =$$

$$B^2.\frac{1+2q^2\cos2\psi+q^4}{1-2q\cos2\psi+q^2}.\frac{1+2q^4\cos2\psi+q^8}{1-2q^3\cos2\psi+q^6}.\frac{1+2q^6\cos2\psi+q^{12}}{1-2q^5\cos2\psi+q^{10}}\ldots.,$$

$$B = \frac{1-q}{1+q^2}.\frac{1-q^3}{1+q^4}.\frac{1-q^5}{1+q^6}.\frac{1-q^7}{1+q^8}\ldots.;$$

$$\Delta(k,\omega) =$$

$$D^2.\frac{1+2q\cos2\psi+q^2}{1-2q\cos2\psi+q^2}.\frac{1+2q^3\cos2\psi+q^6}{1-2q^3\cos2\psi+q^6}.\frac{1+2q^5\cos2\psi+q^{10}}{1-2q^5\cos2\psi+q^{10}}\ldots.,$$

$$D = \frac{1-q}{1+q}.\frac{1-q^3}{1+q^3}.\frac{1-q^5}{1+q^5}.\frac{1-q^7}{1+q^7}\ldots..$$

Für $\omega = \frac{1}{2}\pi$ iſt auch $\psi = \frac{1}{2}\pi$; alſo, da in dieſem Falle

$$\Delta(k,\omega) = \sqrt{1-k^2} = k'$$

iſt:

$$k' = D^2.\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^2\left(\frac{1-q^3}{1+q^3}\right)^2\left(\frac{1-q^5}{1+q^5}\right)^2\ldots.,$$

$$D = (k')^{\frac{1}{2}}.\frac{1+q}{1-q}.\frac{1+q^3}{1-q^3}.\frac{1+q^5}{1-q^5}.\frac{1+q^7}{1-q^7}\ldots.;$$

folglich auch, wie aus der Vergleichung der beiden Ausdrücke von D ſogleich folgt:

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{1-q}{1+q}.\frac{1-q^3}{1+q^3}.\frac{1-q^5}{1+q^5}.\frac{1-q^7}{1+q^7}\ldots.$$

Für $\omega = \frac{1}{2}\pi$, $\psi = \frac{1}{2}\pi$ wird

$$\frac{\cos\omega}{\cos\psi} = \frac{0}{0}.$$

Um den wahren Werth dieſes Bruchs zu finden, differentiire man den Zähler und Nenner nach einer aus der Differentialrechnung bekannten Regel, und ſetze dann $\omega = \psi = \frac{1}{2}\pi$; ſo erhält man

$$\frac{\cos\omega}{\cos\psi} = \frac{\sin\omega\,\partial\omega}{\sin\psi\,\partial\psi} = \frac{\partial\omega}{\partial\psi}.$$

Aber

$$\mu' F(k,\omega) = F(h,\psi);$$

folglich

$$\mu'\frac{\partial\omega}{\sqrt{1-k^2\sin\omega^2}} = \frac{\partial\psi}{\sqrt{1-h^2\sin\psi^2}},$$

d. i., weil $h = 0$ iſt:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\psi} = \frac{1}{\mu'}\sqrt{1-k^2\sin\omega^2} = \frac{2K}{\pi}\sqrt{1-k^2\sin\omega^2};$$

alſo für $\omega = \psi = \frac{1}{2}\pi$:

$$\frac{\cos\omega}{\cos\psi} = \frac{2Kk'}{\pi}.$$

Folglich

$$\frac{2Kk'}{\pi} = B^2.\left(\frac{1-q^2}{1+q}\right)^2\left(\frac{1-q^4}{1+q^3}\right)^2\left(\frac{1-q^6}{1+q^5}\right)^2 \ldots\ldots,$$

$$B = \left(\frac{2Kk'}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1+q}{1-q^2}.\frac{1+q^3}{1-q^4}.\frac{1+q^5}{1-q^6}.\frac{1+q^7}{1-q^8}\ldots\ldots$$

55. Die vorhergehenden Formeln involviren gewiſſe Functionen von q, die wir jetzt näher beſtimmen wollen, indem wir der Abkürzung wegen

$$\alpha = (1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)\ldots\ldots,$$
$$\alpha' = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots\ldots,$$
$$\beta = (1+q)(1+q^3)(1+q^5)(1+q^7)\ldots\ldots,$$
$$\beta' = (1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)(1+q^8)\ldots\ldots,$$

ſetzen. Da

$$\alpha\alpha' = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)\ldots\ldots,$$
$$\beta\beta' = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)(1+q^5)\ldots\ldots,$$

iſt; ſo erhält man

$$\alpha\alpha'\beta\beta' = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots\ldots = \alpha';$$

alſo

$$\alpha\beta\beta' = 1,\ \frac{1}{\alpha} = \beta\beta';$$

d. i.

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots\ldots} = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots\ldots$$

Nach (54.) iſt

$$A = \frac{\alpha}{\alpha'} = \left(\frac{\pi}{2K}\right)^{\frac{1}{2}}.\frac{\beta}{\beta'},\ B = \frac{\alpha}{\beta'} = \left(\frac{2Kk'}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\beta}{\alpha'},$$

$$D = \frac{\alpha}{\beta} = (k')^{\frac{1}{2}}.\frac{\beta}{\alpha},$$

welches aber nebſt der Gleichung $\alpha\beta\beta' = 1$ doch nur drei Gleichungen zwiſchen α, α', β, β' ſind, da die beiden erſten der drei letzten Gleichungen, wenn man ſie in einander multiplicirt, offenbar daſſelbe Reſultat geben, wie die dritte, ſo daß man alſo zwiſchen den vier geſuchten Größen in der That nur die drei Gleichungen

$$\frac{\alpha}{\beta} = (k')^{\frac{1}{4}},\ \frac{\alpha'}{\beta'} = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(k')^{\frac{1}{4}},\ \alpha\beta\beta' = 1$$

hat, und daher noch eine vierte zu finden ſuchen muß, wozu man auf folgende Art gelangt.

Der Kürze wegen ſey

$$e^{\psi\sqrt{-1}} = e^{i\psi} = V,$$

ſo iſt bekanntlich

$$\cos\psi = \frac{V + V^{-1}}{2}, \sin\psi = \frac{V - V^{-1}}{2i};$$

folglich

$$\cos 2\psi = \cos\psi^2 - \sin\psi^2$$

$$= \frac{V^2 + 2 + V^{-2}}{4} + \frac{V^2 - 2 + V^{-2}}{4} = \frac{V^2 + V^{-2}}{2},$$

und daher allgemein

$$1 - 2q^n \cos 2\psi + q^{2n} = 1 - q^n(V^2 + V^{-2}) + q^{2n}$$
$$= 1 - q^n(V^2 + V^{-2}) + q^{2n}.V^2.V^{-2}$$
$$= (1 - q^n V^2)(1 - q^n V^{-2});$$

alſo nach (54.)

$$\sin\omega =$$
$$\frac{2K}{\pi} A^2 . \frac{V - V^{-1}}{2i} . \frac{\begin{cases} 1 - q^2 V^2 . 1 - q^4 V^2 . 1 - q^6 V^2 \ldots \\ 1 - q^2 V^{-2} . 1 - q^4 V^{-2} . 1 - q^6 V^{-2} \ldots \end{cases}}{\begin{cases} 1 - q V^2 . 1 - q^3 V^2 . 1 - q^5 V^2 \ldots \\ 1 - q V^{-2} . 1 - q^3 V^{-2} . 1 - q^5 V^{-2} \ldots \end{cases}}.$$

56. Bevor wir hier weiter gehen können, ſind noch folgende auch an ſich wichtige Bemerkungen einzuſchalten. Setzt man, indem immer $i = \sqrt{-1}$ iſt, $\sin\varphi = i\tang\psi$, ſo iſt

$$\cos\varphi = \sqrt{1 + \tang\psi^2} = \frac{1}{\cos\psi};$$

alſo

$$\partial\sin\varphi = \cos\varphi\,\partial\varphi = \frac{\partial\varphi}{\cos\psi} = \frac{i\partial\psi}{\cos\psi^2}, \partial\varphi = \frac{i\partial\psi}{\cos\psi},$$

und demnach

$$\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}} = \frac{i\partial\psi}{\sqrt{\cos\psi^2 + k^2\sin\psi^2}} = \frac{i\partial\psi}{\sqrt{1 - k'^2\sin\psi^2}};$$

alſo, da für $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi$ reſpective $\psi = 0$, $\psi = \psi$ zu ſetzen iſt:

$$\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}} = i\int_0^\psi \frac{\partial\psi}{\sqrt{1 - k'^2\sin\psi^2}},$$

d. i.

$$F(k, \varphi) = iF(k', \psi).$$

Für $\psi = \frac{1}{2}\pi$ iſt

$$\sin\varphi = i . \frac{1}{0} = \frac{i}{0} = \frac{i^2}{0.i} = -\frac{1}{0};$$

ſo daß alſo, wenn

$$F(k, \varphi) = iF\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = iK'$$

geſetzt wird, immer

$$\sin\varphi = -\frac{1}{0},$$

oder, was daſſelbe iſt, ſtets

$$\sin A(iK') = -\frac{1}{0}$$

iſt, wenn A(iK'), wie gewöhnlich, die Amplitudo von iK' in Bezug auf k als Modulus bezeichnet.

Iſt nun überhaupt

$$\xi = F(k, \varphi), \quad \Theta = F(k, \psi);$$

ſo iſt nach (16.)

$$\sin A(\xi + \Theta) = \frac{\sin\varphi\cos\psi\Delta(\psi) + \cos\varphi\sin\psi\Delta(\varphi)}{1 - k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2};$$

alſo, wenn wir $\Theta = iK'$ ſetzen, da in dieſem Falle

$$\sin\psi = \sin A\Theta = -\frac{1}{0},$$

$$\cos\psi = \sqrt{1-\sin\psi^2} = \sqrt{-\sin\psi^2} = i\sin\psi,$$

$$\Delta(\psi) = \sqrt{1-k^2\sin\psi^2} = \sqrt{-k^2\sin\psi^2} = ik\sin\psi$$

iſt:

$$\sin A(\xi + iK') = \frac{-k\sin\varphi\sin\psi^2 + \cos\varphi\sin\psi\Delta(\varphi)}{1 - k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2}$$

$$= \frac{-k\sin\varphi\sin\psi^2 + \cos\varphi\sin\psi\Delta(\varphi)}{-k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2},$$

oder, wenn man nur immer im Auge behält, daß

$$\sin\psi = -\frac{1}{0}$$

iſt:

$$\sin A(\xi + iK') = \frac{1}{k\sin\varphi} = \frac{1}{k\sin A\xi}.$$

57. Kehren wir nun wieder zu (55.) zurück, ſo iſt nach (54.) in den dort gebrauchten Zeichen

$$\psi = \frac{\pi}{2K}F(k, \omega), \quad \frac{2K\psi}{\pi} = F(k, \omega).$$

Setzt man aber jetzt

$$\frac{2K\psi}{\pi} + iK' \text{ für } \frac{2K\psi}{\pi},$$

alſo

$$\psi + \frac{i\pi K'}{2K} \text{ für } \psi;$$

ſo geht nach (56.)

$$\sin\omega = \sin A\left(\frac{2K\psi}{\pi}\right)$$

in

$$\sin A\left(\frac{2K\psi}{\pi} + iK'\right) = \frac{1}{k\sin A\left(\frac{2K\psi}{\pi}\right)},$$

d. i. in $\frac{1}{k\sin\omega}$ über. Auch geht

$$V = e^{i\psi}$$

in

$$e^{i\psi - \frac{\pi K'}{2K}} = e^{i\psi}.e^{-\frac{\pi K'}{2K}} = Vq^{\frac{1}{2}}$$

über. Durch dieſe Subſtitutionen wird alſo die in (55.) gefundene Gleichung:

$$\frac{1}{k\sin\omega} =$$

$$\frac{2K}{\pi}A^2 . \frac{Vq^{\frac{1}{2}} - V^{-1}q^{-\frac{1}{2}}}{2i} . \frac{\begin{cases}1-q^3V^2 . 1-q^5V^2 . 1-q^7V^2 \ldots . \\ 1-qV^{-2} . 1-q^3V^{-2} . 1-q^5V^{-2} \ldots .\end{cases}}{\begin{cases}1-q^2V^2 . 1-q^4V^2 . 1-q^6V^2 \ldots . \\ 1-V^{-2} . 1-q^2V^{-2} . 1-q^4V^{-2} \ldots .\end{cases}}$$

und, wenn man nun dieſe Gleichung mit der Gleichung in (55.) multiplicirt:

$$\frac{1}{k} = -\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 A^4 . \frac{(V-V^{-1})(Vq^{\frac{1}{2}}-V^{-1}q^{-\frac{1}{2}})}{4(1-V^{-2})(1-qV^2)}$$

$$= -\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 A^4 . \frac{(1-V^{-2})(qV^2-1)}{4V^{-1}Vq^{\frac{1}{2}}(1-V^{-2})(1-qV^2)},$$

d. i.

$$\frac{1}{k} = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 A^4 . \frac{1}{4q^{\frac{1}{2}}}, \quad A = \left(\frac{\pi}{K}\right)^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}} k^{-\frac{1}{4}} = \frac{\alpha}{\alpha'} .$$

Verbindet man nun dieſe Gleichung mit den drei in (55.) zwiſchen α, α', β, β' gefundenen Gleichungen; ſo erhält man:

$$\alpha^6 = 2q^{\frac{1}{4}}k'k^{-\frac{1}{2}},$$

$$\alpha'^6 = \left(\frac{K}{\pi}\right)^3 q^{-\frac{1}{2}}(2kk'),$$

$$\beta^6 = 2q^{\frac{1}{4}}(kk')^{-\frac{1}{2}},$$

$$\beta'^6 = \tfrac{1}{4}k(k'q)^{-\frac{1}{2}}.$$

Folglich

$$B = \frac{\alpha}{\beta'} = 2^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{8}}\left(\frac{k'}{k}\right)^{\frac{1}{4}},$$

$$D = \frac{\alpha}{\beta} = (k')^{\frac{1}{4}}.$$

Hiernach werden alſo die Formeln in (54.), da

$$F(k, \omega) = \frac{2K\psi}{\pi}, \quad \omega = A\left(\frac{2K\psi}{\pi}\right)$$

iſt,

$$\frac{\sin A\left(\frac{2K\psi}{\pi}\right)}{\sin\psi} =$$

$$\frac{2q^{\frac{1}{4}}}{k^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1-2q^2\cos 2\psi+q^4}{1-2q\cos 2\psi+q^2} \cdot \frac{1-2q^4\cos 2\psi+q^8}{1-2q^3\cos 2\psi+q^6} \cdot \frac{1-2q^6\cos 2\psi+q^{12}}{1-2q^5\cos 2\psi+q^{10}} \cdots,$$

$$\frac{\cos A\left(\frac{2K\psi}{\pi}\right)}{\cos\psi} =$$

$$2q^{\frac{1}{4}}\left(\frac{k'}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1+2q^2\cos 2\psi+q^4}{1-2q\cos 2\psi+q^2} \cdot \frac{1+2q^4\cos 2\psi+q^8}{1-2q^3\cos 2\psi+q^6} \cdot \frac{1+2q^6\cos 2\psi+q^{12}}{1-2q^5\cos 2\psi+q^{10}} \cdots,$$

$$\varDelta\left(k, A\left(\frac{2K\psi}{\pi}\right)\right) =$$

$$(k')^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1+2q\cos 2\psi+q^2}{1-2q\cos 2\psi+q^2} \cdot \frac{1+2q^3\cos 2\psi+q^6}{1-2q^3\cos 2\psi+q^6} \cdot \frac{1+2q^5\cos 2\psi+q^{10}}{1-2q^5\cos 2\psi+q^{10}} \cdots$$

Entwickelt man das Product

$$\alpha\alpha' = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)\ldots$$

in eine Reihe, ſo erhält man die Reihe

$$1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-q^{15}+\ldots,$$

in welcher die Exponenten von q von der Form $\frac{1}{2}(3n^2 \pm n)$ ſind (Product. 2.). Die Summe dieſer Reihe iſt alſo

$$= \alpha\alpha' = \left(\frac{K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(2kk')^{\frac{1}{3}}k^{-\frac{1}{4}}q^{-\frac{1}{24}}.$$

Sehr viele andere hierher gehörende merkwürdige Formeln ſ. m. bei Legendre a. a. O. p. 93—138.

XXI. Abels allgemeines Theorem über eine beſondere Klaſſe von Functionen, von denen die elliptiſchen Functionen ein beſonderer Fall ſind.

58. Seyen fx und φx zwei beliebige ganze rationale Functionen von x, und

$$\psi x = \int \frac{fx\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}},$$

wo α eine conſtante Größe bezeichnet. Zerlegt man nun φx auf willkührliche Weiſe in zwei ganze rationale Factoren $\varphi_1 x$ und und $\varphi_2 x$, ſo daß $\varphi x = \varphi_1 x . \varphi_2 x$ iſt, und ſetzt

$$\Theta x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n,$$
$$\Theta_1 x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_m x^m,$$

wo a_0, a_1, a_2, ... a_n; c_0, c_1, c_2, ... c_m beliebige Größen bezeichnen, die, ſelbſt veränderlich, alle von einer neuen veränderlichen Größe y abhängig gedacht, übrigens auch zum Theil als conſtant angenommen werden können; ſo iſt für

$$(\Theta x)^2 \varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2 \varphi_2 x$$
$$= A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \ldots (x-x_\mu),$$

wo A nicht von x abhängt, jederzeit

$$\varepsilon_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 \psi x_2 + \varepsilon_3 \psi x_3 + \varepsilon_4 \psi x_4 + \ldots + \varepsilon_\mu \psi x_\mu$$
$$= C - \frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}} l \frac{\Theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} + \Theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}}{\Theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} - \Theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}}$$
$$+ K\left\{\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} l \frac{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} + \Theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} - \Theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}\right\},$$

indem zur Erklärung der in dieſer Formel gebrauchten Zeichen nun noch Folgendes zu bemerken iſt. Die Coefficienten ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, ... ε_μ ſind ſämmtlich $= \pm 1$, können aber nicht willkührlich $= +1$ und $= -$ geſetzt werden, ſondern ſind von den Functionen ψx_1, ψx_2, ψx_3, ψx_4, ... ψx_μ, in welche ſie multiplicirt ſind, abhängig. C iſt eine conſtante Größe, und

$$K\left\{\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} l \frac{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} + \Theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} - \Theta_1 x\sqrt{\varphi_1 x}}\right\}$$

bezeichnet den Coefficienten des $\frac{1}{x}$ enthaltenden Gliedes in der Entwickelung von

$$\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} l \frac{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} + \Theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} - \Theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}$$

nach den abſteigenden Potenzen von x. Die durch l bezeichneten Logarithmen ſind natürliche. Dieſes merkwürdige Theorem hat Abel in Crelles Journal B. III. S. 314., wo daſſelbe zuerſt mitgetheilt wird, und nach ihm Legendre a. a. O. p. 163. auf folgende Art bewieſen.

Man nehme an, daß x_1, x_2, x_3, ... x_μ ſämmtlich unter einander ungleich ſeyen und ſetze

$$(\Theta x)^2 \varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2 \varphi_2 x = Fx,$$

ſo iſt, wenn jetzt x irgend eine der Größen x_1, x_2, x_3, ... x_μ bezeichnet, $Fx = 0$; folglich, wenn wir das bloß in Bezug auf x genommene Differential von Fx durch $F'x.\partial x$, das in Bezug auf a_0, a_1, a_2, ... a_n; c_0, c_1, c_2, ... c_m, d. i. das in Bezug auf y genommene Differential dagegen durch δFx bezeichnen:

$$F'x.\partial x + \delta Fx = 0.$$

Aber, weil $\varphi_1 x$ und $\varphi_2 x$ von $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$; $c_0, c_1, c_2, \ldots c_m$ unabhängig ſind,

$$\delta F x = 2\Theta x \varphi_1 x \delta \Theta x - 2\Theta_1 x \varphi_2 x \delta \Theta_1 x ;$$

folglich

$$F'x . \partial x = - \delta F x = 2\Theta_1 x \varphi_2 x \delta \Theta_1 x - 2 \Theta x \varphi_1 x \delta \Theta x .$$

Da nun

$$(\Theta x)^2 \varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2 \varphi_2 x = 0 ,$$

alſo

$$(\Theta x)^2 \varphi_1 x = (\Theta_1 x)^2 \varphi_2 x$$

iſt; ſo iſt

$$\Theta x \sqrt{\varphi_1 x} = \pm \Theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x} ,$$

oder, wenn wir $\varepsilon = \pm 1$ ſetzen:

$$\Theta x \sqrt{\varphi_1 x} = \varepsilon \Theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x} ;$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten zuerſt mit $\sqrt{\varphi_1 x}$, dann mit $\varepsilon \sqrt{\varphi_2 x}$ multiplicirt:

$$\Theta x \varphi_1 x = \varepsilon \Theta_1 x \sqrt{\varphi_1 x \varphi_2 x} = \varepsilon \Theta_1 x \sqrt{\varphi x} ,$$

$$\Theta_1 x \varphi_2 x = \varepsilon \Theta x \sqrt{\varphi_1 x \varphi_2 x} = \varepsilon \Theta x \sqrt{\varphi x} ;$$

und daher nach dem Vorhergehenden

$$F'x . \partial x = 2\varepsilon \{\Theta x \delta \Theta_1 x - \Theta_1 x \delta \Theta x\} \sqrt{\varphi x} .$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten mit

$$\frac{\varepsilon f x}{(x - \alpha) F'x \sqrt{\varphi x}} ;$$

ſo erhält man:

$$\frac{\varepsilon f x \partial x}{(x - \alpha) \sqrt{\varphi x}} = \frac{2\{\Theta x \delta \Theta_1 x - \Theta_1 x \delta \Theta x\} f x}{(x - \alpha) F'x} ,$$

oder, wenn man in abkürzender Bezeichnung

$$2\{\Theta x \delta \Theta_1 x - \Theta_1 x \delta \Theta x\} f x = \chi x$$

ſetzt:

$$\frac{\varepsilon f x \partial x}{(x - \alpha) \sqrt{\varphi x}} = \frac{\chi x}{(x - \alpha) F'x} .$$

Man hat hierbei zu bemerken, daß unter der obigen Vorausſetzung, nach welcher $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$ ſämmtlich unter einander verſchieden ſind, $F'x$ nicht $= 0$ iſt, wie leicht auf folgende Art gezeigt werden kann. Da x eine beliebige der Größen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$ bezeichnen ſoll, ſo wollen wir z. B. $x = x_1$ ſetzen. Bezeichnen wir nun das Product

$$(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \ldots (x - x_\mu)$$

durch Φx, ſo iſt

$$F x = (x - x_1) \Phi x ,$$

$$F'x = (x - x_1) \Phi' x + \Phi x ,$$

alſo $F'x_1 = \Phi x_1$, und folglich $F'x_1$ nicht $= 0$, da

$$\Phi x_1 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)\ldots(x_1 - x_\mu)$$

nicht = 0 iſt, weil wir annehmen, daß x_1, x_2, x_3, ... x_μ ſämmtlich unter einander ungleich ſind.

Setzen wir nun für irgend eine durch das Functionszeichen Γ bezeichnete Function Γx von x überhaupt

$$\Gamma x_1 + \Gamma x_2 + \Gamma x_3 + \Gamma x_4 + \ldots + \Gamma x_\mu = \Sigma\Gamma x\,,$$

ſo ergiebt ſich aus dem Obigen, da x jede der Größen x_1, x_2, x_3, ... x_μ bezeichnen kann, wenn man ſich in der Gleichung

$$\frac{\varepsilon f x\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = \frac{\chi x}{(x-\alpha)F'x}$$

für x nach und nach alle Glieder dieſer Reihe geſetzt denkt, die entſprechenden Werthe von ε durch ε_1, ε_2, ε_3, ... ε_μ bezeichnet, und dann auf beiden Seiten addirt, auf der Stelle die Gleichung

$$\Sigma\frac{\varepsilon f x\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = \Sigma\frac{\chi x}{(x-\alpha)F'x}\,.$$

Setzt man jetzt

$$\chi x = (x-\alpha)\,\chi_1 x + \chi\alpha\,,$$

wo

$$\chi_1 x = \frac{\chi x - \chi\alpha}{x-\alpha}$$

iſt, und zugleich erhellet, daß $\chi_1 x$ eine um einen Grad niedrigere ganze rationale Function von x als die ganze rationale Function χx iſt; ſo erhält man nach gehöriger Subſtitution

$$\Sigma\frac{\varepsilon f x\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = \Sigma\frac{\chi_1 x}{F'x} + \chi\alpha\,\Sigma\frac{1}{(x-\alpha)F'x}\,.$$

Nach dem Artikel Function (2.) i. d. Z. iſt aber

$$\frac{1}{F\alpha} = \frac{1}{(\alpha-x_1)F'x} + \frac{1}{(\alpha-x_2)F'x_2} + \ldots + \frac{1}{(\alpha-x_\mu)F'x_\mu}$$

$$= \Sigma\frac{1}{(\alpha-x)F'x} = -\Sigma\frac{1}{(x-\alpha)F'x}$$

folglich

$$\Sigma\frac{\varepsilon f x\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = -\frac{\chi\alpha}{F\alpha} + \Sigma\frac{\chi_1 x}{F'x}\,.$$

Um das zweite Glied auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens zu finden, denke man ſich den vorher erhaltenen Ausdruck von $\frac{1}{F\alpha}$ nach ſteigenden Potenzen von $\frac{1}{\alpha}$ entwickelt; ſo wird

$$\frac{1}{F\alpha} = \frac{1}{\alpha}\Sigma\frac{1}{F'x} + \frac{1}{\alpha^2}\Sigma\frac{x}{F'x} + \frac{1}{\alpha^3}\Sigma\frac{x^2}{F'x} + \ldots,$$

und es iſt alſo überhaupt $\Sigma\frac{x^n}{F'x}$ der Coefficient von $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1}$

in der Entwickelung von $\frac{1}{F\alpha}$ nach ſteigenden Potenzen von $\frac{1}{\alpha}$, oder der Coefficient von $\frac{1}{\alpha}$ in der Entwickelung von $\frac{\alpha^n}{F\alpha}$ nach fallenden Potenzen von α, oder auch, was daſſelbe iſt, der Coefficient von $\frac{1}{x}$ in der Entwickelung von $\frac{x^n}{Fx}$ nach fallenden Potenzen von x. Weil nun nach dem Obigen $\chi_1 x$ eine ganze rationale Function von x iſt, ſo iſt offenbar $\Sigma\frac{\chi_1 x}{F'x}$ der Coefficient von $\frac{1}{x}$ in der Entwickelung von $\frac{\chi_1 x}{Fx}$ nach fallenden Potenzen von x, oder, wenn wir überhaupt den Coefficienten von $\frac{1}{x}$ in der Entwickelung von Γx nach fallenden Potenzen von x durch $K\Gamma x$ bezeichnen,

$$\Sigma\frac{\chi_1 x}{F'x} = K\frac{\chi_1 x}{Fx}.$$

Aber nach dem Obigen

$$\chi_1 x = \frac{\chi x - \chi\alpha}{x-\alpha},$$

$$\frac{\chi_1 x}{Fx} = \frac{\chi x}{(x-\alpha)Fx} - \frac{\chi\alpha}{(x-\alpha)Fx};$$

folglich

$$K\frac{\chi_1 x}{Fx} = K\frac{\chi x}{(x-\alpha)Fx} - K\frac{\chi\alpha}{(x-\alpha)Fx}.$$

Weil aber die höchſte in Fx enthaltene Potenz der veränderlichen Größe x^μ, in $(x-\alpha)Fx$ alſo $x^{\mu+1}$ iſt, ſo erhält man durch Entwickelung von

$$\frac{\chi\alpha}{(x-\alpha)Fx}$$

nach den fallenden Potenzen von x offenbar einen Ausdruck von der Form

$$A\left(\frac{1}{x}\right)^{\mu+1} + B\left(\frac{1}{x}\right)^{\mu+2} + C\left(\frac{1}{x}\right)^{\mu+3} + \ldots,$$

wo $\mu+1$ mindeſtens $=2$ iſt. Alſo iſt

$$K\frac{\chi\alpha}{(x-\alpha)Fx} = 0,$$

und folglich

$$\Sigma\frac{\chi_1 x}{F'x} = K\frac{\chi_1 x}{Fx} = K\frac{\chi x}{(x-\alpha)Fx};$$

alſo nach dem Obigen

$$\Sigma\frac{\varepsilon fx\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = -\frac{\chi\alpha}{F\alpha} + K\frac{\chi x}{(x-\alpha)Fx}.$$

Aber

$$\chi x = 2fx\{\Theta x\,\partial\Theta_1 x - \Theta_1 x\,\partial\Theta x\},$$
$$\chi\alpha = 2f\alpha\{\Theta\alpha\,\partial\Theta_1\alpha - \Theta_1\alpha\,\partial\Theta\alpha\},$$
$$Fx = (\Theta x)^2\varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2\varphi_2 x,$$
$$F\alpha = (\Theta\alpha)^2\varphi_1\alpha - (\Theta_1\alpha)^2\varphi_2\alpha,$$

alſo

$$\Sigma\frac{\varepsilon fx\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = -\frac{2f\alpha\{\Theta\alpha\,\partial\Theta_1\alpha - \Theta_1\alpha\,\partial\Theta\alpha\}}{(\Theta\alpha)^2\varphi_1\alpha - (\Theta_1\alpha)^2\varphi_2\alpha}$$
$$+ K\left\{\frac{2fx}{x-\alpha}\cdot\frac{\Theta x\,\partial\Theta_1 x - \Theta_1 x\,\partial\Theta x}{(\Theta x)^2\varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2\varphi_2 x}\right\}.$$

Um dieſe Gleichung und das Folgende gehörig zu verſtehen, ſind einige Bemerkungen vorauszuſchicken. Wir denken uns nach dem Obigen $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$; $c_0, c_1, c_2, \ldots c_m$ ſämmtlich von der einen veränderlichen Größe y abhängig. Weil nun

$$(\Theta x)^2\varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2\varphi_2 x$$
$$= A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_\mu)$$

geſetzt iſt, ſo ſind $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$ ſämmtlich Functionen von y, und es kann alſo auch

$$\Sigma\frac{\varepsilon fx\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}}$$
$$= \frac{\varepsilon_1 fx_1\,\partial x_1}{(x_1-\alpha)\sqrt{\varphi x_1}} + \frac{\varepsilon_2 fx_2\,\partial x_2}{(x_2-\alpha)\sqrt{\varphi x_2}} + \ldots + \frac{\varepsilon_\mu fx_\mu\,\partial x_\mu}{(x_\mu-\alpha)\sqrt{\varphi x_\mu}}$$

als bloß von y und ∂y abhängend angeſehen werden. Die Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in obiger Gleichung hängt aber ebenfalls bloß von y und ∂y ab, da auch

$$K\left\{\frac{2fx}{x-\alpha}\cdot\frac{\Theta x\,\partial\Theta_1 x - \Theta_1 x\,\partial\Theta x}{(\Theta x)^2\varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2\varphi_2 x}\right\}$$

x nicht enthält, indem dieſe Größe nur der Coeffcient von $\frac{1}{x}$ in der Entwickelung der hinter K ſtehenden Function nach den fallenden Potenzen von $\frac{1}{x}$ iſt. Beziehen ſich daher auch die folgenden Integrale bloß auf die veränderliche Größe y, ſo iſt

$$\int\Sigma\frac{\varepsilon fx\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = C - 2f\alpha\int\frac{\Theta\alpha\,\partial\Theta_1\alpha - \Theta_1\alpha\,\partial\Theta\alpha}{(\Theta\alpha)^2\varphi_1\alpha - (\Theta_1\alpha)^2\varphi_2\alpha}$$
$$+ \int K\left\{\frac{2fx}{x-\alpha}\cdot\frac{\Theta x\,\partial\Theta_1 x - \Theta_1 x\,\partial\Theta x}{(\Theta x)^2\varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2\varphi_2 x}\right\},$$

da $f\alpha$ offenbar kein y enthält und folglich conſtant iſt.

Setzen wir nun aber, wenn man in Bezug auf x als veränderliche Größe integrirt, überhaupt

$$\int \frac{fx\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = \psi x,$$

alſo

$$\int \frac{\varepsilon fx\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = \varepsilon\psi x;$$

ſo iſt offenbar, wenn die in

$$\int \Sigma \frac{\varepsilon fx\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} =$$

$$\int \frac{\varepsilon_1 fx_1\,\partial x_1}{(x_1-\alpha)\sqrt{\varphi x_1}} + \int \frac{\varepsilon_2 fx_2\,\partial x_2}{(x_2-\alpha)\sqrt{\varphi x_2}} + \ldots + \int \frac{\varepsilon_\mu fx_\mu\,\partial x_\mu}{(x_\mu-\alpha)\sqrt{\varphi x_\mu}}$$

enthaltenen Integrale in Bezug auf y genommen werden, wie es nach dem Vorhergehenden geſchehen ſoll,

$$\int \Sigma \frac{\varepsilon fx\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = \varepsilon_1\psi x_1 + \varepsilon_2\psi x_2 + \varepsilon_3\psi x_3 + \ldots + \varepsilon_\mu\psi x_\mu.$$

Ferner iſt nach dem Obigen mit Vernachläſſigung aller übrigen Glieder in der Entwickelung der nachſtehenden Function nach abſteigenden Potenzen von x:

$$\frac{2fx}{x-\alpha}\cdot\frac{\Theta x\,\delta\Theta_1 x - \Theta_1 x\,\delta\Theta x}{(\Theta x)^2\varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2\varphi_2 x}$$

$$= \ldots + \frac{1}{x}K\left\{\frac{2fx}{x-\alpha}\cdot\frac{\Theta x\,\delta\Theta_1 x - \Theta_1 x\,\delta\Theta x}{(\Theta x)^2\varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2\varphi_2 x}\right\} + \ldots;$$

folglich, wenn man in Bezug auf y als veränderliche Größe integrirt, da in dieſer Beziehung $x-\alpha$, fx, x conſtant ſind:

$$\frac{2fx}{x-\alpha}\int\frac{\Theta x\,\delta\Theta_1 x - \Theta_1 x\,\delta\Theta x}{(\Theta x)^2\varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2\varphi_2 x}$$

$$= \ldots + \frac{1}{x}\int K\left\{\frac{2fx}{x-\alpha}\cdot\frac{\Theta x\,\delta\Theta_1 x - \Theta_1 x\,\delta\Theta x}{(\Theta x)^2\varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2\varphi_2 x}\right\} + \ldots,$$

und daher

$$K\left\{\frac{2fx}{x-\alpha}\int\frac{\Theta x\,\delta\Theta_1 x - \Theta_1 x\,\delta\Theta x}{(\Theta x)^2\varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2\varphi_2 x}\right\} = \int K\left\{\frac{2fx}{x-\alpha}\cdot\frac{\Theta x\,\delta\Theta_1 x - \Theta_1 x\,\delta\Theta x}{(\Theta x)^2\varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2\varphi_2 x}\right\}.$$

Hieraus ergiebt ſich nun nach dem Obigen die Gleichung:

$$\varepsilon_1\psi x_1 + \varepsilon_2\psi x_2 + \varepsilon_3\psi x_3 + \ldots + \varepsilon_\mu\psi x_\mu$$
$$= C - 2f\alpha\int\frac{\Theta\alpha\,\delta\Theta_1\alpha - \Theta_1\alpha\,\delta\Theta\alpha}{(\Theta\alpha)^2\varphi_1\alpha - (\Theta_1\alpha)^2\varphi_2\alpha}$$
$$+ K\left\{\frac{2fx}{x-\alpha}\int\frac{\Theta x\,\delta\Theta_1 x - \Theta_1 x\,\delta\Theta x}{(\Theta x)^2\varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2\varphi_2 x}\right\}.$$

Weil aber $\varphi_1\alpha$, $\varphi_2\alpha$, $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$ offenbar als conſtant zu betrachten ſind, ſo iſt, weil, wie leicht durch Differentiation erhellet, allgemein

$$\int\frac{p\,\partial q - q\,\partial p}{p^2 m - q^2 n} = \frac{1}{2\sqrt{mn}}\,l\,\frac{p\sqrt{m} + q\sqrt{n}}{p\sqrt{m} - q\sqrt{n}}$$

iſt:

$$e_1\psi x_1 + e_2\psi x_2 + e_3\psi x_3 + \ldots + e_\mu \psi x_\mu$$

$$= C - \frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}}\, l\, \frac{\Theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} + \Theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}}{\Theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} - \Theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}}$$

$$+ K\left\{\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}}\, l\, \frac{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} + \Theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} - \Theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}\right\},$$

und dies iſt die zu beweiſende Formel, welche wir im Folgenden durch (A) bezeichnen wollen. Man hat hierbei zu bemerken, daß nach dem Obigen $\varphi_1 x\varphi_2 x = \varphi x$, $\varphi_1\alpha\varphi_2\alpha = \varphi\alpha$ iſt. Die ſpeciellen Werthe von e_1, e_2, e_3, ... e_μ, ob nämlich für die einzelnen Glieder dieſer Reihe + 1 oder — zu ſetzen iſt, müſſen aus den Gleichungen

$$\Theta x_1\sqrt{\varphi_1 x_1} = e_1\Theta_1 x_1\sqrt{\varphi_2 x_1},$$

$$\Theta x_2\sqrt{\varphi_1 x_2} = e_2\Theta_1 x_2\sqrt{\varphi_2 x_2},$$

$$\Theta x_3\sqrt{\varphi_1 x_3} = e_3\Theta_1 x_3\sqrt{\varphi_2 x_3},$$

. . . .

$$\Theta x_\mu\sqrt{\varphi_1 x_\mu} = e_\mu\Theta_1 x_\mu\sqrt{\varphi_2 x_\mu}$$

beſtimmt werden.

Der vorhergehende Beweis dieſes merkwürdigen Satzes, den Jacobi (Crelle's Journal B. VIII. S. 414.) mit Recht das große Abelſche Theorem genannt hat, iſt auf den Fall eingeſchränkt, wenn x_1, x_2, x_3, ... x_μ ſämmtlich unter einander verſchieden ſind. Indeß liegt in der Gleichung (A) ſelbſt im Allgemeinen Nichts, wodurch die Nothwendigkeit, dieſelbe auf den erwähnten Fall einzuſchränken, bedingt würde, und man kann ſich, wie es uns ſcheint, auch durch das folgende einfache Raiſonnement überzeugen, daß dieſe Gleichung auch dann noch gültig bleibt, wenn unter den Größen x_1, x_2, x_3, ... x_μ beliebig viele einander gleiche vorkommen. Die Gleichung (A) gilt nämlich ganz allgemein für alle Werthe von x_1, x_2, x_3, ... x_μ, wenn dieſelben nach der Bedingung des vorhergehenden Beweiſes nur alle unter einander verſchieden ſind. Dies kann aber offenbar nicht anders in dieſer Allgemeinheit Statt finden, als wenn dieſe Gleichung ganz allgemein für jeden Werth der Größe y, von welcher wir uns x_1, x_2, x_3, ... x_μ abhängig gedacht haben, gilt. Dann wird dieſelbe offenbar auch dann noch gültig bleiben, wenn man für y ſolche Werthe ſetzt, für welche beliebig viele der Größen x_1, x_2, x_3, ... x_μ einander gleich werden. Ich glaube, daß dieſe einfache Betrachtung zur Rechtfertigung dieſer Behauptung hinreichend ſeyn wird, und halte weitere Unterſuchungen über dieſen Gegenſtand für überflüſſig. Auch Abel und Legendre betrachten bloß den Fall, wenn die genannten Größen ſämmtlich unter einander ungleich ſind.

Setzt man $x_1 = x_2$, ſo iſt nach dem Vorhergehenden

$$\Theta x_1 \sqrt{\varphi_2 x_1} = \varepsilon_1 \Theta_1 x_1 \sqrt{\varphi_2 x_1} = \varepsilon_2 \Theta_1 x_1 \sqrt{\varphi_2 x_1};$$

folglich, wenn nicht

$$\Theta_1 x_1 \sqrt{\varphi_2 x_1} = 0$$

iſt, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Fände das Letztere Statt, ſo wäre auch

$$\Theta x_1 \sqrt{\varphi_1 x_1} = 0;$$

folglich offenbar auch

$$\Theta x_1 \varphi_1 x_1 = 0, \ \Theta_1 x_1 \varphi_2 x_1 = 0,$$

und die ganzen rationalen Functionen

$$\Theta x \varphi_1 x, \ \Theta_1 x \varphi_2 x$$

hätten alſo nach bekannten Sätzen der Algebra einen gemeinſchaftlichen Factor. Haben alſo dieſe Functionen keinen gemeinſchaftlichen Factor, ſo iſt $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, wenn $x_1 = x_2$ iſt. Wie ſich dies allgemeiner machen läßt, iſt klar, und man erhält nun alſo leicht folgenden Satz:

Wenn

$$(\Theta x)^2 \varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2 \varphi_2 x = A(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2} \ldots (x-x_\mu)^{n_\mu}$$

iſt, und die ganzen rationalen Functionen $\Theta x \varphi_1 x$ und $\Theta_1 x \varphi_2 x$ keinen gemeinſchaftlichen Factor haben; ſo iſt

$$\varepsilon_1 n_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 n_2 \psi x_2 + \varepsilon_3 n_3 \psi x_3 + \ldots + \varepsilon_\mu n_\mu \psi x_\mu$$
$$= C - \frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}} l \frac{\Theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} + \Theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}}{\Theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} - \Theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}}$$
$$+ K\left\{\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} l \frac{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} + \Theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} - \Theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}\right\}.$$

Setzt man $(x-\alpha)fx$ ſtatt fx, ſo wird $f\alpha$ in vorſtehender Gleichung $= 0$, und man erhält, wenn ſonſt Alles bleibt, wie vorher, für

$$\psi x = \int \frac{fx\,\partial x}{\sqrt{\varphi x}};$$

$$\varepsilon_1 n_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 n_2 \psi x_2 + \varepsilon_3 n_3 \psi x_3 + \ldots + \varepsilon_\mu n_\mu \psi x_\mu$$
$$= C + K\left\{\frac{fx}{\sqrt{\varphi x}} l \frac{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} + \Theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} - \Theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}\right\}.$$

Setzt man allgemein

$$fx = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \nu x^n,$$
$$\varphi x = \alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + \ldots + \varrho' x^r$$
$$= x^r\left\{\varrho' + \ldots + \frac{\gamma'}{x^{r-2}} + \frac{\beta'}{x^{r-1}} + \frac{\alpha'}{x^r}\right\};$$

ſo wird

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi x}} = (\varphi x)^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{r}{2}}\left\{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3} + \ldots\right\}$$

$$= ax^{-\frac{r}{2}} + bx^{-\frac{r}{2}-1} + cx^{-\frac{r}{2}-2} + dx^{-\frac{r}{2}-3} + \ldots;$$

alſo

$$\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = Ax^{n-\frac{r}{2}-1} + Bx^{n-\frac{r}{2}-2} + Cx^{n-\frac{r}{2}-3} + \ldots$$

Auch iſt klar, daß

$$1\frac{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} + \Theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} - \Theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}},$$

wegen der ganz gleichförmigen Bildung des Zählers und des Nenners, die beide nur in den Zeichen + und — verſchieden ſind, ſich im Allgemeinen in eine Reihe von der Form

$$a' + \frac{b'}{x} + \frac{c'}{x^2} + \frac{d'}{x^3} + \frac{e'}{x^4} + \ldots,$$

alſo

$$\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}}1\frac{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} + \Theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} - \Theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}$$

ſich in eine Reihe von der Form

$$A'x^{n-\frac{r}{2}-1} + B'x^{n-\frac{r}{2}-2} + C'x^{n-\frac{r}{2}-3} + \ldots$$

entwickeln laſſen wird. Iſt nun $n < \frac{r}{2}$, $2n < r$, ſo kann nie für irgend ein poſitives k, welches auch = 0 ſeyn kann,

$$n - \frac{r}{2} - k - 1 = -1$$

ſeyn, weil ſonſt

$$n = \frac{r}{2} + k,$$

d. i. $n \gtreqless \frac{r}{2}$, $2n \gtreqless r$ wäre. Iſt alſo $2n < r$, ſo kommt in obiger Reihe kein $\frac{1}{x} = x^{-1}$ enthaltendes Glied vor, und es iſt folglich in dieſem Falle

$$K\left\{\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}}1\frac{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} + \Theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} - \Theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}\right\} = 0.$$

Dies führt auf folgenden Satz:

Wenn der Grad der Function $(fx)^2$ kleiner als der Grad von φx iſt; ſo iſt, für

$$\psi x = \int\frac{fx\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}},$$

wenn ſonſt Alles bleibt wie vorher, jederzeit

$$e_1 n_1 \psi x_1 + e_2 n_2 \psi x_2 + e_3 n_3 \psi x_3 + \ldots + e_\mu n_\mu \psi x_\mu$$
$$= C - \frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}}\, l\, \frac{\Theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} + \Theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}}{\Theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} - \Theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}}$$

Dies gilt alſo z. B. immer, wenn $fx = 1$ oder überhaupt eine conſtante Größe, φx eine beliebige ganze rationale Function von x iſt.

Setzt man jetzt $(x-\alpha)fx$ ſtatt fx und bezeichnet den Grad von fx durch n, den Grad von φx durch r, ſo daß alſo $n+1$ der Grad von $(x-\alpha)fx$, $2n+2$ der Grad von $(x-\alpha)^2(fx)^2$ iſt; ſo erhält man mittelſt des Obigen leicht folgenden Satz:

Wenn $2n+2 < r$ iſt, ſo iſt für

$$\psi x = \int \frac{fx\,\partial x}{\sqrt{\varphi x}},$$

immer

$$e_1 n_1 \psi x_1 + e_2 n_2 \psi x_2 + e_3 n_3 \psi x_3 + \ldots + e_\mu n_\mu \psi x_\mu = C,$$

d. i. gleich einer conſtanten Größe.

Dies gilt alſo immer, wenn $fx = 1$ oder überhaupt eine conſtante Größe, φx eine ganze rationale Function des dritten oder eines höheren Grades iſt.

59. Um den Zuſammenhang dieſer allgemeinen Theoreme mit der Theorie der elliptiſchen Functionen zu zeigen, wollen wir hier nur die Anwendung derſelben auf die elliptiſchen Functionen der erſten Art machen.

Da nach (8.)

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} = \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

iſt, wo bekanntlich $x = \sin\varphi$ iſt, ſo überſieht man, indem, wenn wir

$$\varphi x = (1-x^2)(1-k^2x^2)$$

ſetzen, dieſe Function vom vierten Grade iſt, auf der Stelle, daß hier der in (58.) zuletzt bewieſene Lehrſatz Anwendung findet. Zerlegen wir nun φx in die beiden Factoren

$$\varphi_1 x = 1 - k^2x^2,\ \varphi_2 x = 1 - x\ ,$$

ſo kann man, wenn

$$x_1 = \sin\varphi_1,\ x_2 = \sin\varphi_2,\ x_3 = \sin\varphi_3,\ ,\ x_4 = \sin\varphi_4$$

beliebige als gegeben zu betrachtende Größen bezeichnen, für

$$\Theta x = a + a_1 x,\ \Theta_1 x = c + c_1 x,$$

die Coefficienten a, a_1, c, c_1, offenbar ſo beſtimmen, daß der Gleichung

$$(\Theta x)^2\varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2\varphi_2 x$$
$$= (a+a_1x)^2(1-k^2x^2) - (c+c_1x)^2(1-x^2)$$
$$= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

genügt wird, und folglich nach dem angeführten in (58.) zuletzt bewieſenen Lehrſatze

$$\varepsilon_1 F(\varphi_1) + \varepsilon_2 F(\varphi_2) + \varepsilon_3 F(\varphi_3) + \varepsilon_4 F(\varphi_4) = C$$

iſt. Setzen wir aber $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$, ſo iſt auch

$$F(\varphi_1) = F(\varphi_2) = F(\varphi_3) = F(\varphi_4) = 0\,;$$

folglich in dieſem Falle

$$\varepsilon_1 F(\varphi_1) + \varepsilon_2 F(\varphi_2) + \varepsilon_3 F(\varphi_3) + \varepsilon_4 F(\varphi_4) = 0\,.$$

Um nun eine dieſer Gleichung entſprechende Bedingungsgleichung zu finden, ſetze man nach der Reihe

$$x = 1,\ x = -1,\ x = \frac{1}{k},\ x = -\frac{1}{k}\,;$$

ſo erhält man aus dem Obigen, indem immer $1 - k^2 = k'^2$ geſetzt wird, leicht die Gleichungen

$$(a + a_1)^2 k'^2 = (1 - x_1)(1 - x^2)(1 - x_3)(1 - x_4)\,,$$
$$(a - a_1)^2 k'^2 = (1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)(1 + x_4)\,,$$
$$(ck + c_1)^2 k'^2 = (1 - kx_1)(1 - kx_2)(1 - kx_3)(1 - kx_4)\,,$$
$$(ck - c_1)^2 k'^2 = (1 + kx_1)(1 + kx_2)(1 + kx_3)(1 + kx_4)\,.$$

Für $x = 0$ erhält man

$$a^2 - c^2 = x_1 x_2 x_3 x_4$$

und, wenn man die Coefficienten von x^4 mit einander vergleicht

$$c_1^2 - a_1^2 k^2 = 1\,.$$

Multiplicirt man nun die erſte und zweite, die dritte und vierte der vier obigen Gleichungen in einander; ſo erhält man leicht die beiden Gleichungen

$$(a^2 - a_1^2) k'^2 = \pm \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 \cos\varphi_4\,,$$
$$(c_1^2 - c^2 k^2) k'^2 = \pm \Delta(\varphi_1) \Delta(\varphi_2) \Delta(\varphi_3) \Delta(\varphi_4)\,,$$

wo die Zeichen ſich nicht auf einander beziehen. Nimmt man hierzu nun noch die Gleichungen

$$a^2 - c^2 = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \sin\varphi_4\,,$$
$$c_1^2 = a_1^2 k^2 = 1\,;$$

ſo erhält man, weil

$$(c_1^2 - c^2 k^2) k'^2 + (a^2 - a_1^2) k^2 k'^2$$
$$= (c_1^2 - a_1^2 k^2) k'^2 + (a^2 - c^2) k^2 k'^2$$

iſt, die Bedingungsgleichung

$$\pm \Delta(\varphi_1) \Delta(\varphi_2) \Delta(\varphi_3) \Delta(\varphi_4) \pm k^2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 \cos\varphi_4$$
$$= k'^2 + k^2 k'^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \sin\varphi_4\,,$$

wo die obern und untern Zeichen ſich nicht auf einander beziehen. Nähme man aber in dem erſten Gliede dieſer Gleichung auf der linken Seite des Gleichheitszeichens das untere Zeichen, ſo wäre, da bekanntlich $\Delta(\varphi_1)$, $\Delta(\varphi_2)$, $\Delta(\varphi_3)$, $\Delta(\varphi_4)$ immer poſitiv genommen werden, und überhaupt

$$\Delta(\varphi) = \sqrt{\cos\varphi^2 + k'^2 \sin\varphi^2}\,,$$

alſo $\Delta(\varphi) > \cos\varphi$ iſt, die Größe auf der linken Seite unſerer obigen Gleichung ſtets negativ, da doch im Gegentheil die Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens offenbar ſtets poſitiv iſt, weil, wie wir aus dem Vorhergehenden wiſſen, immer $k < 1$ angenommen wird. Man muß alſo in dem in Rede ſtehenden Gliede das obere Zeichen nehmen, ſo daß folglich unſere Bedingungsgleichung

$$\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)\Delta(\varphi_3)\Delta(\varphi_4) \pm k^2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 \cos\varphi_4$$
$$= k'^2 + k^2 k'^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \sin\varphi_4$$

iſt. Für $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$ wird dieſe Gleichung

$$1 \pm k^2 = k'^2.$$

Da nun aber bekanntlich

$$1 - k^2 = k'^2$$

iſt, ſo muß man im zweiten Gliede das untere Zeichen nehmen, und die der Gleichung

$$e_1 F(\varphi_1) + e_2 F(\varphi_2) + e_3 F(\varphi_3) + e_4 F(\varphi_4) = 0$$

entſprechende Bedingungsgleichung iſt alſo

$$\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)\Delta(\varphi_3)\Delta(\varphi_4) - k^2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 \cos\varphi_4$$
$$= k'^2 + k^2 k'^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \sin\varphi_4.$$

Für $\varphi_4 = 0$ iſt folglich die der Gleichung

$$e_1 F(\varphi_1) + e_2 F(\varphi_2) + e_3 F(\varphi_3) = 0$$

entſprechende Bedingungsgleichung:

$$\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)\Delta(\varphi_3) - k^2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 = k'^2.$$

Entwickelt man aus dieſer Gleichung, nachdem man ſie rational gemacht hat, $\cos\varphi_3$; ſo erhält man

$$\cos\varphi_3 = \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \pm \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)}{1 - k^2 \sin\varphi_1{}^2 \sin\varphi_2{}^2},$$

welches alſo die der Gleichung

$$e_1 F(\varphi_1) + e_2 F(\varphi_2) + e_3 F(\varphi_3) = 0$$

entſprechende Bedingungsgleichung iſt, wo nun aber noch e_1, e_2, e_3 zu beſtimmen ſind, wozu man leicht durch folgende Betrachtung gelangt. Setzt man nämlich $k = 0$, ſo erhält man

$$\cos\varphi_3 = \cos(\varphi_1 \mp \varphi_2),$$

d. i.

$$\varphi_1 \mp \varphi_2 - \varphi_3 = 0.$$

Dieſe Gleichung muß mit der Gleichung

$$e_1 \varphi_1 + e_2 \varphi_2 + e_3 \varphi_3 = 0,$$

welche für $k = 0$ aus der Gleichung

$$e_1 F(\varphi_1) + e_2 F(\varphi_2) + e_3 F(\varphi_3) = 0$$

folgt, übereinſtimmen, ſo daß alſo

$$e_1 = +1, \; e_2 = \mp 1, \; e_3 = -1$$

iſt, und folglich die Gleichung

$$\cos\varphi_3 = \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \pm \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)}{1 - k^2 \sin\varphi_1{}^2 \sin\varphi_2{}^2}$$

der Gleichung

$$F(\varphi_1) \mp F(\varphi_2) - F(\varphi_3) = 0$$

oder

$$F(\varphi_3) = F(\varphi_1) \mp F(\varphi_2),$$

mit gegenſeitiger Beziehung der Vorzeichen, entſpricht, welches ganz mit dem, was wir in (16.) gefunden haben, übereinſtimmt.

Das ganze dritte Supplement zu Legendre's Traité des fonctions elliptiques iſt der Anwendung des Abel'ſchen Theorems auf die elliptiſchen Functionen und andere Integrale gewidmet, ſo daß wir alſo hier auf dieſes Werk von Neuem verweiſen müſſen. Da überhaupt die in der Formel

$$\int \frac{fx\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}}$$

enthaltenen Tranſcendenten ähnliche Eigenſchaften wie die elliptiſchen Functionen haben, und gewiſſermaßen einen höheren Grad der letztern bilden, ſo hat Legendre dieſelben, oder vielmehr, in noch größerer Allgemeinheit, die in der Formel

$$\int \frac{Fx\,\partial x}{\sqrt{\varphi x}}$$

wenn Fx eine beliebige rationale, φx eine beliebige ganze rationale Function bezeichnet, enthaltenen Tranſcendenten Hyper- oder Ultra-elliptiſche Functionen (fonctions ultra-elliptiques) genannt, wofür jedoch mit Recht Jacobi den Namen Abelſche Tranſcendenten vorgeſchlagen hat.

XXII. Hiſtoriſche und literariſche Bemerkungen.

60. Wenige hiſtoriſche und literariſche Bemerkungen mögen dieſen ſchon ſehr angewachſenen Artikel beſchließen. Ohne der frühern Arbeiten Eulers, Lagranges, Fagnanis und Landens, worüber der Artikel Rectification (63. ff.) verglichen werden kann, und auch in dieſem Artikel oben ſchon Einiges beigebracht worden iſt, der Kürze wegen hier weiter zu gedenken, iſt ſogleich zu bemerken, daß die Theorie der elliptiſchen Functionen ihre ganze jetzige Geſtalt dem berühmten Legendre verdankt, welcher dieſelbe während ſeiner langen rühmlichen wiſſenſchaftlichen Laufbahn nie aus den Augen verloren und in Wahrheit väterlich gepflegt hat. Seine erſten Arbeiten finden ſich in den beiden Abhandlungen: Mémoire I sur les intégrations par arc d'ellipse. Mém. de Paris. 1786. p. 616. Mémoire II sur les intégrations par arc d'ellipse et sur la comparaison de ces arcs. Mém. de Paris 1786. p. 644. und in dem beſonders erſchienenen Mémoire sur les transcendantes ellipti-

ques. Paris. An II. Geſammelt erſchienen ſeine Entdeckungen, mit neuen vermehrt, und in ein Syſtem gebracht, in den Exercices de calcul intégral. T. I — III. Paris. 1811 — 1816. Der erſte Theil enthält die Theorie der elliptiſchen Functionen und der Euler'ſchen Integrale, der zweite Theil andere Unterſuchungen aus der Integralrechnung und die Anwendung der Theorie der elliptiſchen Functionen auf Geometrie und Mechanik, der dritte Theil die elliptiſchen Tafeln. Als eine neue Ausgabe dieſes Werks iſt zu betrachten: Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes. T. I — II. Paris. 1825 — 1826, deſſen erſter Theil die Theorie, der zweite die Tafeln der elliptiſchen Functionen und die Anleitung zu deren Berechnung enthält. Jedoch kann man das ältere, verſchiedene andere Unterſuchungen aus der Integralrechnung enthaltende, Werk eben deshalb neben dem neuern nicht entbehren. Wohl vorzüglich angeregt durch die Erſcheinung dieſes Werkes, mit dem Legendre ſeine Laufbahn auf die rühmlichſte Weiſe beſchloſſen hat, widmeten nun zwei jüngere Mathematiker: Abel und K. G. J. Jacobi ihre Kräfte der Theorie der elliptiſchen Functionen, und bereicherten dieſelbe mit Entdeckungen, die zu den ſchönſten in der Mathematik überhaupt gehören, und noch weite Ausſichten eröffnen. Da von denſelben aber ſchon ausführlich die Rede geweſen iſt, ſo möge hier nur noch die Bemerkung genügen, daß ſich die Abhandlungen dieſer beiden Mathematiker faſt ſämmtlich in Crelles Journal T. I — IX. finden, hier aber nicht alle nahmhaft gemacht werden können, und daß Jacobi die ſeinigen in einem eignen Werke: Fundamenta nova Theoriae functionum ellipticarum. Regimonti. 1829., welches unſtreitig zu den bedeutendſten neuern Erſcheinungen auf dem Gebiete der mathematiſchen Literatur gehört, im Zuſammenhange bekannt gemacht hat, obgleich auch jetzt ſchon verſchiedene neuere Abhandlungen in Crelles Journal dieſem Werke zur Ergänzung dienen müſſen. Abel ward zu dem größten Schaden der Wiſſenſchaft vor der Vollendung ſeines Précis d'une théorie des fonctions elliptiques. (Crelles Journal T. IV. S. 236. S. 309.), in welchem wir namentlich auch auf das théorème fontamental §. 1., welches mit dem allgemeinen Satze in XXI. zuſammenhängt, aufmerkſam machen, von einem zu frühen Tode übereilt. Durch die wichtigen Entdeckungen dieſer beiden jüngern Mathematiker ward Legendre veranlaßt, ſeinem Traité des fonctions elliptiques in einem dritten Bande (Paris. 1828.) drei Supplemente folgen zu laſſen, deren erſtes die beiden Haupttheoreme von Jacobi (ſ. oben XVIII. XIX.) und deren Anwendung, das zweite die weitere Ausführung dieſer Anwendungen zum Gegenſtande hat und mit Abels großem Theorem (ſ. oben XXI.) ſchließt. Das dritte Supplement iſt, wie ſchon erwähnt, ganz der Anwendung dieſes wichtigen Satzes gewidmet. Ueber die Abelſchen Transcendenten ſ. m. auch eine Abhandlung von Richelot in Crelles Journal. T. XII.

Entgegengeſetzte Größen. Buſſe, Vergleichung zwiſchen Carnots und meiner Anſicht der Algebra. Freib. 1804. Ueber Carnots Géométrie de position. Paris. 1803 (überſ. von Schumacher. Altona, 1810.) ſ. m. den Artikel Lage, wo das Nöthige über dieſes wichtige Werk geſagt iſt. Andere Schriften über die entgegengeſetzten Größen von Wilken's (Brnſchwg. 1800.), Förſtemann (Nordh. u. Lpzg. 1817.), Herrmann (Wien, 1818.), W. A. Dieſterweg (Bonn, 1831.). Vorzüglich ſ. m. auch Rothe, Syſtematiſches Lehrb. der Arithm. Lpzg. 1804. Zehntes und eilftes Kapitel.

Epicykloide. Magold, Abhandlung über die Epicykloide. Landshut, 1813. Eytelwein handelt in ſeinem Handbuche der Statik feſter Körper. Theil III. Berlin, 1808. S. 16. S. 35. von der gemeinen und ſphäriſchen Epicykloide ausführlich. M. ſ. auch Cauſtiſche Flächen und Linien (25. 29.) i. d. Z.

Ergänzung, dekadiſche, gleichbedeutend mit dem arithmetiſchen Complement eines Logarithmen im Art. Complement.

Erzeugende Functionen. 1. Wenn y_x das allgemeine Symbol einer Function von x iſt, ſo heißt der ſymboliſche Ausdruck

$$\ldots + y_{-x}t^{-x} + \ldots + y_{-2}t^{-2} + y_{-1}t^{-1} + y_0 + y_x t + y_2 t^2 + \ldots + y_x t^x + \ldots$$

die erzeugende oder generirende Function (fonction génératrice) von y_x, und ſoll im Folgenden immer durch εy_x bezeichnet werden.

2. Multiplicirt oder dividirt man die erzeugende Function von y_x mit t, t^2, t^3, t^4, ...; ſo erhält man die Reihen

$$\ldots + y_{-(x+1)}t^{-x} + \ldots + y_{-3}t^{-2} + y_{-2}t^{-1} + y_{-1} + y_0 t + y_1 t^2 + \ldots + y_{x-1}t^x + \ldots;$$
$$\ldots + y_{-(x+2)}t^{-x} + \ldots + y_{-4}t^{-2} + y_{-3}t^{-1} + y_{-2} + y_{-1}t + y_0 t^2 + \ldots + y_{x-2}t^x + \ldots,$$
$$\ldots + y_{-(x+3)}t^{-x} + \ldots + y_{-5}t^{-2} + y_{-4}t^{-1} + y_{-3} + y_{-2}t + y_{-1}t^2 + \ldots + y_{x-3}t^x + \ldots,$$
$$\ldots + y_{-(x+4)}t^{-x} + \ldots + y_{-6}t^{-2} + y_{-5}t^{-1} + y_{-4} + y_{-3}t + y_{-2}t^2 + \ldots + y_{x-4}t^x + \ldots,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

und

$$\ldots + y_{-(x-1)}t^{-x} + \ldots + y_{-1}t^{-2} + y_0 t^{-1} + y_1 + y_2 t + y_3 t^2 + \ldots + y_{x+1}t^x + \ldots,$$
$$\ldots + y_{-(x-2)}t^{-x} + \ldots + y_0 t^{-2} + y_1 t^{-1} + y_2 + y_3 t + y_4 t^2 + \ldots + y_{x+2}t^x + \ldots,$$
$$\ldots + y_{-(x-3)}t^{-x} + \ldots + y_1 t^{-2} + y_2 t^{-1} + y_3 + y_4 t + y_5 t^2 + \ldots + y_{x+3}t^x + \ldots,$$
$$\ldots + y_{-(x-4)}t^{-x} + \ldots + y_2 t^{-2} + y_3 t^{-1} + y_4 + y_5 t + y_6 t^2 + \ldots + y_{x+4}t^x + \ldots,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

woraus erhellet, daß allgemein

$$1. \quad \varepsilon y_{x-n} = t^n \varepsilon y_x,$$

und

$$2. \quad \varepsilon y_{x+n} = \frac{\varepsilon y_x}{t^n}$$

iſt.

Auch iſt, wie man auf der Stelle überſieht

$$3.\quad \varepsilon(y_x \pm z_x) = \varepsilon y_x \pm \varepsilon z_x\ .$$

Alſo iſt ferner

$$\varepsilon(y_{x+1} - y_x) = \varepsilon y_{x+1} - \varepsilon y_x = \frac{\varepsilon y_x}{t} - \varepsilon y_x = \left(\frac{1}{t} - 1\right)\varepsilon y_x\ ;$$

und folglich, wenn wir

$$y_{x+1} - y_x = \Delta y_x$$

ſetzen:

$$4.\quad \varepsilon\Delta y_x = \left(\frac{1}{t} - 1\right)\varepsilon y_x\ .$$

Folglich

$$\varepsilon\Delta^2 y_x = \left(\frac{1}{t}-1\right)\varepsilon\Delta y_x = \left(\frac{1}{t}-1\right)\left(\frac{1}{t}-1\right)\varepsilon y_x = \left(\frac{1}{t}-1\right)^2 \varepsilon y_x\ ,$$

$$\varepsilon\Delta^3 y_x = \left(\frac{1}{t}-1\right)\varepsilon\Delta^2 y_x = \left(\frac{1}{t}-1\right)\left(\frac{1}{t}-1\right)^2\varepsilon y_x = \left(\frac{1}{t}-1\right)^3 \varepsilon y_x\ ,$$

$$\varepsilon\Delta^4 y_x = \left(\frac{1}{t}-1\right)\varepsilon\Delta^3 y_x = \left(\frac{1}{t}-1\right)\left(\frac{1}{t}-1\right)^3\varepsilon y_x = \left(\frac{1}{t}-1\right)^4 \varepsilon y_x\ ,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

d. i. allgemein

$$5.\quad \varepsilon\Delta^n y_x = \left(\frac{1}{t} - 1\right)^n \varepsilon y_x\ .$$

Aus (1.) und (5.) folgt

$$6.\quad \varepsilon\Delta^n y_{x-m} = t^m\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n \varepsilon y_x\ ,$$

und aus (2.) und (5.) ergiebt ſich

$$7.\quad \varepsilon\Delta^n y_{x+m} = t^{-m}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n \varepsilon y_x\ .$$

Iſt a eine conſtante Größe, ſo iſt offenbar immer

$$8.\quad \varepsilon(a y_x) = a\,\varepsilon y_x\ .$$

Bezeichnen wir nun mit Laplace die Function

$$a y_x + a' y_{x+1} + a'' y_{x+2} + \ldots + a^{(n)} y_{x+n}$$

durch ∇y_x; ſo iſt nach (3.), (8.) und (2.)

$$\varepsilon\nabla y_x = a\varepsilon y_x + a'\varepsilon y_{x+1} + a''\varepsilon y_{x+2} + \ldots + a^{(n)}\varepsilon y_{x+n}$$

$$= a\varepsilon y_x + a'\frac{\varepsilon y_x}{t} + a''\frac{\varepsilon y_x}{t^2} + \ldots + a^{(n)}\frac{\varepsilon y_x}{t^n}\ ;$$

alſo

$$9.\quad \varepsilon\nabla y_x = \left\{a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} + \ldots + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right\}\varepsilon y_x\ .$$

Bezeichnet man ferner das, was aus ∇y_x wird, wenn man

∇y_x für y_x ſetzt, durch $\nabla^2 y_x$, das, was aus $\nabla^2 y_x$ wird, wenn man $\nabla^2 y_x$ für ∇y_x ſetzt, durch $\nabla^3 y_x$; das, was aus $\nabla^3 y_x$ wird, wenn man $\nabla^3 y_x$ für $\nabla^2 y_x$ ſetzt, durch $\nabla^4 y_x$, u. ſ. w.; ſo iſt nach (9.)

$$\varepsilon\nabla^2 y_x =$$
$$\left\{a+\frac{a'}{t}+\frac{a''}{t^2}+\ldots+\frac{a^{(n)}}{t^n}\right\}\varepsilon\nabla y_x = \left\{a+\frac{a'}{t}+\frac{a''}{t}+\ldots+\frac{a^{(n)}}{t^n}\right\}^2 \varepsilon y_x,$$
$$\varepsilon\nabla^3 y_x =$$
$$\left\{a+\frac{a'}{t}+\frac{a''}{t^2}+\ldots+\frac{a^{(n)}}{t^n}\right\}\varepsilon\nabla^2 y_x = \left\{a+\frac{a'}{t}+\frac{a''}{t}+\ldots+\frac{a^{(n)}}{t^n}\right\}^3 \varepsilon y_x,$$
$$\varepsilon\nabla^4 y_x =$$
$$\left\{a+\frac{a'}{t}+\frac{a''}{t^2}+\ldots+\frac{a^{(n)}}{t^n}\right\}\varepsilon\nabla^3 y_x = \left\{a+\frac{a'}{t}+\frac{a''}{t}+\ldots+\frac{a^{(n)}}{t^n}\right\}^4 \varepsilon y_x,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.;

alſo allgemein

$$10.\quad \varepsilon\nabla^p y_x = \left\{a+\frac{a'}{t}+\frac{a''}{t}+\ldots+\frac{a^{(n)}}{t^n}\right\}^p \varepsilon y_x.$$

Nach (6.) und (7.) iſt nun

$$\varepsilon\Delta^q\nabla^p y_{x-m} = t^m\left(\frac{1}{t}-1\right)^q \varepsilon\nabla^p y_x,\ \varepsilon\Delta^q\nabla^p y_{x+m} = t^{-m}\left(\frac{1}{t}-1\right)^q \varepsilon\nabla^p y_x;$$

folglich nach (10.)

$$11.\quad \varepsilon\Delta^q\nabla^p y_{x-m} = t^m\left\{a+\frac{a'}{t}+\frac{a''}{t}+\ldots+\frac{a^{(n)}}{t^n}\right\}^p\left(\frac{1}{t}-1\right)^q \varepsilon y_x,$$

$$12.\quad \varepsilon\Delta^q\nabla^p y_{x+m} = t^{-m}\left\{a+\frac{a'}{t}+\frac{a''}{t}+\ldots+\frac{a^{(n)}}{t^n}\right\}^p\left(\frac{1}{t}-1\right)^q \varepsilon y_x.$$

3. Setzen wir jetzt

$$s^p = \alpha+\frac{\alpha'}{t}+\frac{\alpha''}{t^2}+\frac{\alpha'''}{t^3}+\ldots\ldots+\frac{\alpha^{(k)}}{t^k};$$

ſo kann man mit der größten Leichtigkeit den Coefficienten von t^x in der Entwickelung von $s^p\varepsilon y_x$ finden. Nach (9.) iſt nämlich, wenn wir jetzt

$$\nabla y_x = \alpha y_x + \alpha' y_{x+1} + \alpha'' y_{x+2} + \ldots + \alpha^{(k)} y_{x+k}$$

ſetzen:

$$\varepsilon\nabla y_x = \left\{\alpha+\frac{\alpha'}{t}+\frac{\alpha''}{t^2}\alpha+\frac{\alpha'''}{t^3}+\ldots+\frac{\alpha^{(k)}}{t^k}\right\}\varepsilon y_x = s^p\varepsilon y_x,$$

und folglich nach der in (1.) gegebenen Definition der erzeugenden Functionen offenbar

$$\alpha y_x + \alpha' y_{x+1} + \alpha'' y_{x+2} + \ldots \alpha^{(k)} y_{x+k}$$

der Coefficient von t^x in der Entwickelung von $s^p\varepsilon_x y$, welchen man aus

$$s^p = \alpha+\frac{\alpha'}{t}+\frac{\alpha''}{t^2}+\frac{\alpha'''}{t^3}+\ldots+\frac{\alpha^{(k)}}{t^k}.$$

durch ein ganz mechaniſches Verfahren finden kann, indem man nämlich y_x für $\frac{1}{t}$ ſchreibt, wodurch man

$$\alpha(y_x)^0 + \alpha'(y_x)^1 + \alpha''(y_x)^2 + \alpha'''(y_x)^3 + \ldots + \alpha^{(k)}(y_x)^k$$

erhält. Schreibt man nun hierin für

$$(y_x)^0, (y_x)^1, (y_x)^2, (y_x)^3, \ldots (y_x)^k$$

reſpective

$$y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, y_{x+3}, \ldots y_{x+k};$$

ſo erhält man den geſuchten Coefficienten

$$\alpha y_x + \alpha' y_{x+1} + \alpha'' y_{x+2} + \alpha''' y_{x+3} + \ldots \alpha^{(k)} y_{x+k}$$

von t^x in der Entwickelung von $s^p \varepsilon y_x$. Wäre z. B.

$$s = \frac{1}{t} - 1,$$

ſo wäre nach dem binomiſchen Lehrſatze

$$s^p = \frac{1}{t^p} - \frac{p}{1} \cdot \frac{1}{t^{p-1}} + \frac{p(p-1)}{1.2} \cdot \frac{1}{t^{p-2}} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} \cdot \frac{1}{t^{p-3}} + \ldots,$$

und folglich

$$(y_x)^p - \frac{p}{1}(y_x)^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2}(y_x)^{p-2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}(y_x)^{p-3} + \ldots$$

der Coefficient von t^x in der Entwickelung von $s^p \varepsilon y_x$, wenn man nur in dieſem Ausdruck für $(y_x)^p$, $(y_x)^{p-1}$, $(y_x)^{p-2}$, ... reſpective y_{x+p}, y_{x+p-1}, y_{x+p-2}, ... ſchreibt, wodurch man für den in Rede ſtehenden Coefficienten auf der Stelle den Ausdruck

$$y_{x+p} - \frac{p}{1} y_{x+p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} y_{x+p-2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} y_{x+p-3} + \ldots.$$

erhält.

Weil nun nach (5.)

$$\varepsilon \Delta^p y_x = \left(\frac{1}{t} - 1\right)^p \varepsilon y_x = s^p \varepsilon y_x$$

und nach der Definition der generirenden Functionen $\Delta^p y_x$ der Coefficient von t^x in $\varepsilon \Delta^p y_x$, alſo auch der Coefficient von t^x in $s^p \varepsilon y_x$ iſt; ſo iſt nach dem Vorhergehenden

$$13. \quad \Delta^p y_x =$$

$$y_{x+p} - \frac{p}{1} y_{x+p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} y_{x+p-2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} y_{x+p-3} + \ldots,$$

woraus man ſieht, mit welcher Leichtigkeit man dieſen auch ſonſt (ſ. z. B. Differenzen-Rechnung 1. i. d. Z.) bekannten Ausdruck mittelſt der Theorie der generirenden Functionen erhält.

Entwickelt man

$$\left\{a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} + \ldots + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right\}^p$$

nach Potenzen von $\frac{1}{t}$, ſchreibt in der Entwickelung y_x für $\frac{1}{t}$, und ſetzt dann wieder für $(y_x)^0$, $(y_x)^1$, $(y_x)^2$,.... respective y_x, y_{x+1}, y_{x+2}...., ſo erhält man den Coefficienten von t^x in der Entwickelung von

$$\left\{a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} + \ldots + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right\} \varepsilon y_x .$$

Weil aber nach (10.)

$$\varepsilon \nabla^p y_x = \left\{a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} + \ldots + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right\} \varepsilon y_x ,$$

und nach der Erklärung der generirenden Functionen $\nabla^p y_x$ der Coefficient von t^x in $\varepsilon \nabla^p y_x$, alſo auch in

$$\left\{a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t} + \ldots + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right\} \varepsilon y_x$$

iſt; ſo erhält man durch die gezeigte Entwickelung dieſes Coefficienten zugleich $\nabla^p y_x$, ſo wie man vorher $\Delta^p y_x$ erhielt.

4. Wenn s^p nach den Potenzen von $\frac{1}{t} - 1$ entwickelt iſt; ſo kann man den Coefficienten von t^x in $s^p \varepsilon y_x$ noch auf eine andere Art finden und auf einen andern Ausdruck bringen. Iſt nämlich

$$s^p = \alpha + \alpha'\left(\frac{1}{t} - 1\right) + \alpha''\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + \ldots + \alpha^{(k)}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^k ;$$

ſo iſt

$$s^p \varepsilon y_x = \alpha \varepsilon y_x + \alpha'\left(\frac{1}{t} - 1\right)\varepsilon y_x + \alpha''\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 \varepsilon y_x + .. + \alpha^{(k)}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^k \varepsilon y_x ,$$

und folglich nach (5.)

$$s^p \varepsilon y_x = \alpha \varepsilon y_x + \alpha' \varepsilon \Delta y_x + \alpha'' \varepsilon \Delta^2 y_x + \alpha''' \varepsilon \Delta^3 y_x + \ldots + \alpha^{(k)} \varepsilon \Delta^k y_x .$$

Da nun nach der Theorie der generirenden Functionen y_x, Δy_x, $\Delta^2 y_x$, ... $\Delta^k y_x$ respective die Coefficienten von t^x in den Functionen εy_x, $\varepsilon \Delta y_x$, $\varepsilon \Delta^2 y_x$, ... $\varepsilon \Delta^k y_x$ ſind; ſo iſt

$$\alpha y_x + \alpha' \Delta y_x + \alpha'' \Delta^2 y_x + \alpha''' \Delta^3 y_x + \ldots + \alpha^{(k)} \Delta^k y_x$$

der Coefficient von t^x in der Entwickelung von $s^p \varepsilon y_x$, und dieſer Coefficient wird aus dem obigen Ausdruck von s^p auf folgende Art durch ein ganz mechaniſches Verfahren gefunden. Man ſetzt nämlich in dem obigen Ausdrucke von s^p Δy_x für $\frac{1}{t} - 1$. Dadurch erhält man

$$\alpha(\Delta y_x)^0 + \alpha'(\Delta y_x)^1 + \alpha''(\Delta y_x)^2 + \alpha'''(\Delta y_x)^3 + \ldots + \alpha^{(k)}(\Delta y_x)^k .$$

Setzt man nun ferner für

$$(\Delta y_x)^0, (\Delta y_x)^1, (\Delta y_x)^2, (\Delta y_x)^3, \ldots (\Delta y_x)^k$$

reſpective

$$\Delta^{\prime} y_x,\ \Delta^{\prime} y_x,\ \Delta^{2} y_x,\ \Delta^{3} y_x,\ \ldots\ \Delta^{k} y_x$$

oder

$$y_x,\ \Delta y_x,\ \Delta^{2} y_x,\ \Delta^{3} y_x,\ \ldots\ \Delta^{k} y_x\,;$$

ſo erhält man

$$\alpha y_x + \alpha' \Delta y_x + \alpha'' \Delta^2 y_x + \alpha''' \Delta^3 y_x + \ldots + \alpha^{(k)} \Delta^k y_x\,,$$

welches der oben gefundene Ausdruck für den Coefficienten von t^x in der Entwickelung von $s^p \varepsilon y_x$ iſt, der alſo aus dem obigen nach Potenzen von $\frac{1}{t} - 1$ entwickelten Ausdrucke von s^p durch ein ganz mechaniſches Verfahren abgeleitet werden kann.

Setzt man z. B. $s = \frac{1}{t}$, alſo

$$s = 1 + \left(\frac{1}{t} - 1\right);$$

ſo iſt

$$s^p = 1 + \frac{p}{1}\left(\frac{1}{t} - 1\right) + \frac{p(p-1)}{1.2}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^3 + \ldots$$

Setzt man nun Δy_x für $\frac{1}{t} - 1$, ſo ergiebt ſich folgender Ausdruck:

$$(\Delta y_x)^0 + \frac{p}{1}(\Delta y_x)^1 + \frac{p(p-1)}{1.2}(\Delta y_x)^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}(\Delta y_x)^3 + \ldots,$$

und hieraus erhält man durch die oben angezeigte Verwandlung für den Coefficienten von t^x in der Entwickelung von $s^p \varepsilon y_x$ die Formel

$$y_x + \frac{p}{1}\Delta y_x + \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^2 y_x + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_x + \ldots.$$

Nach (2.) iſt nun

$$\varepsilon y_{x+p} = \frac{\varepsilon y_x}{t^p} = s^p \varepsilon y_x\,,$$

und nach der allgemeinen Definition der generirenden Functionen iſt y_{x+p} der Coefficient von t^x in εy_{x+p}, alſo auch in der Entwickelung von $s^p \varepsilon y_x$. Folglich iſt nach dem Obigen

14. $$y_{x+p} = y_x + \frac{p}{1}\Delta y_x + \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^2 y_x + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_x + \ldots,$$

eine auch ſonſt aus der Differenzenrechnung bekannte Formel, die ſich alſo auch mittelſt der Theorie der generirenden Functionen ſehr leicht ergiebt.

5. Denken wir uns jetzt

$$\left(\frac{1}{t^n} - 1\right)^m \varepsilon y_x = \left\{\left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)^n - 1\right\}^m \varepsilon y_x$$

nach Potenzen von $\frac{1}{t} - 1$ entwickelt, und ſetzen zu dem Ende

$$\left(\frac{1}{t^n} - 1\right)^m \varepsilon y_x =$$

$$\left\{\alpha\left(\frac{1}{t}-1\right)^m + \alpha'\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{m+1} + \alpha''\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{m+2} + \ldots\right\} \varepsilon y_x\,;$$

ſo iſt nach (5.)

$$\left(\frac{1}{t^n} - 1\right)^m \varepsilon y_x = \alpha \varepsilon \Delta^m y_x + \alpha' \varepsilon \Delta^{m+1} y_x + \alpha'' \varepsilon \Delta^{m+2} y_x + \ldots,$$

und folglich der Coefficient von t^x in der Entwickelung von $\left(\frac{1}{t^n}-1\right)^m \varepsilon y_x$ nach der Definition der generirenden Functionen

$$\alpha \Delta^m y_x + \alpha' \Delta^{m+1} y_x + \alpha'' \Delta^{m+2} y_x + \ldots..$$

Nun iſt aber, weil nach dem Obigen

$$\left\{\left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)^n - 1\right\}^m =$$

$$\alpha\left(\frac{1}{t} - 1\right)^m + \alpha'\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{m+1} + \alpha''\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{m+2} + \ldots$$

iſt, offenbar

$$\{(1+\Delta y_x)^n - 1\}^m = \alpha(\Delta y_x)^m + \alpha'(\Delta y_x)^{m+1} + \alpha''(\Delta y_x)^{m+2} + \ldots,$$

und man erhält folglich offenbar den Coefficienten von t^x in der Entwickelung von $\left(\frac{1}{t^n} - 1\right)^m \varepsilon y_x$, wenn man

$$\{(1 + \Delta y_x)^n - 1\}^m$$

nach Potenzen von Δy_x entwickelt, und dann allgemein $\Delta^k y_x$ für $(\Delta y_x)^k$ ſchreibt.

Nach (2.) iſt aber

$$\varepsilon y_{x+n} = \frac{\varepsilon y_x}{t^n}\,;$$

alſo

$$\varepsilon y_{x+n} - \varepsilon y_x = \left(\frac{1}{t^n} - 1\right) \varepsilon y_x\,,$$

d. i. nach (3.)

$$15.\quad \varepsilon(y_{x+n} - y_x) = \left(\frac{1}{t^n} - 1\right) \varepsilon y_x\,,$$

oder, wenn wir

$$y_{x+n} - y_x = \Delta_1 y_x$$

ſetzen:

$$16.\quad \varepsilon \Delta_1 y_x = \left(\frac{1}{t^n} - 1\right) \varepsilon y_x\,.$$

Folglich

$$\varepsilon \Delta_1{}^2 y_x =$$

$$\left(\frac{1}{t^n}-1\right) \varepsilon \Delta_1 y_x = \left(\frac{1}{t^n}-1\right)\left(\frac{1}{t^n}-1\right) \varepsilon \Delta_1 y_x = \left(\frac{1}{t^n}-1\right)^2 \varepsilon y_x\,,$$

$$\varepsilon \Delta_1^3 y_x =$$
$$\left(\frac{1}{t^n}-1\right)\varepsilon\Delta_1^2 y_x = \left(\frac{1}{t^n}-1\right)\left(\frac{1}{t^n}-1\right)^2 \varepsilon y_x = \left(\frac{1}{t^n}-1\right)^3 \varepsilon y_x,$$
$$\varepsilon \Delta_1^4 y_x =$$
$$\left(\frac{1}{t^n}-1\right)\varepsilon\Delta_1^3 y_x = \left(\frac{1}{t^n}-1\right)\left(\frac{1}{t^n}-1\right)^3 \varepsilon y_x = \left(\frac{1}{t^n}-1\right)^4 \varepsilon y_x,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

d. i. allgemein

$$17. \quad \varepsilon\Delta_1^m y_x = \left(\frac{1}{t^n}-1\right)^m \varepsilon y_x .$$

Alſo iſt $\Delta^m{}_1 y_x$ der Coefficient von t^x in der Entwickelung von $\left(\frac{1}{t^n}-1\right)^m \varepsilon y_x$, und folglich nach dem Obigen

$$18. \quad \Delta_1^m y_x = \{(1 + \Delta y_x)^n - 1\}^m$$

wenn man nur überall $\Delta^k y_x$ für $(\Delta y_x)^k$ ſetzt.

Auf ähnliche Art könnte man alle in dem Artikel Differenzenrechnung für die Differenzen und Summen entwickelten Formeln mittelſt der Theorie der generirenden Functionen von Neuem beweiſen, welches wir jedoch unterlaſſen, weil dieſe Formeln a. a. O. ſtreng bewieſen worden ſind. Man kann wegen dieſer Beweiſe, die ſich allerdings durch ihre Eleganz ſehr empfehlen, die am Ende dieſes Artikels angeführten Schriften nachſehen.

6. Die Theorie der generirenden Functionen führt auch zu einer ſehr allgemeinen Umformung der Reihen. Sey nämlich

$$y_0 + y_1\alpha + y_2\alpha^2 + y_3\alpha^3 + \ldots + y_x\alpha^x + \ldots.$$

die gegebene Reihe. Da nun

$$\frac{1}{1-\frac{1}{t}} = 1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^4} + \ldots.$$

iſt; ſo iſt

$$\frac{\varepsilon(y_x\alpha^x)}{1-\frac{1}{t}} = \varepsilon(y_x\alpha^x) + \frac{\varepsilon(y_x\alpha^x)}{t} + \frac{\varepsilon(y_x\alpha^x)}{t^2} + \frac{\varepsilon(y_x\alpha^x)}{t^3} + \ldots.;$$

d. i. nach (2.)

$$\frac{\varepsilon(y_x\alpha^x)}{1-\frac{1}{t}} = \varepsilon(y_x\alpha^x) + \varepsilon(y_{x+1}\alpha^{x+1}) + \varepsilon(y_{x+2}\alpha^{x+2}) + \varepsilon(y_{x+3}\alpha^{x+3}) + \ldots.$$

Der Coefficient von t_x in der Entwickelung der Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens iſt nach der Theorie der generirenden Functionen

$$y_x\alpha^x + y_{x+1}\alpha^{x+1} + y_{x+2}\alpha^{x+2} + y_{x+3}\alpha^{x+3} + \ldots\ldots$$

Alſo iſt dies auch der Coefficient von t^x in der Entwickelung von

$$\frac{\varepsilon(y_x \alpha^x)}{1-\frac{1}{t}}.$$

Die generirende Function $\varepsilon(y_x \alpha^x)$ iſt bekanntlich

$$\ldots + y_{-x}\alpha^{-x}t^{-x} + \ldots + y_{-1}\alpha^{-1}t^{-1} + y_0 + y\alpha t + y_2\alpha^2 t^2 + \ldots + y_x \alpha^x t^x + \text{u.\,ſ.\,w.}$$

Da nun

$$\frac{\varepsilon(y_x \alpha^x)}{1-\frac{1}{t}} = \varepsilon(y_x \alpha^x) + \frac{\varepsilon(y_x \alpha^x)}{t} + \frac{\varepsilon(y_x \alpha^x)}{t^2} + \frac{\varepsilon(y_x \alpha^x)}{t^3} + \ldots$$

iſt; ſo iſt, wenn wir

$$u = y_0 + y_1\alpha t + y_2\alpha^2 t^2 + y_3\alpha^3 t^3 + \ldots + y_x \alpha^x t^x + \ldots$$

ſetzen, klar, daß

$$y_x \alpha^x + y_{x+1}\alpha^{x+1} + y_{x+2}\alpha^{x+2} + y_{x+3}\alpha^{x+3} + \ldots$$

auch der Coefficient von t^x in der Entwickelung von

$$\frac{u}{1-\frac{1}{t}}$$

iſt. Setzen wir jetzt

$$a + \frac{b}{\alpha} + \frac{c}{\alpha^2} + \frac{d}{\alpha^3} + \frac{e}{\alpha^4} + \ldots = k,$$

$$a + \frac{b}{\alpha t} + \frac{c}{\alpha^2 t^2} + \frac{d}{\alpha^3 t^3} + \frac{e}{\alpha^4 t^4} + \ldots = z;$$

ſo iſt, wie man leicht findet,

$$\frac{u(k-z)}{1-\frac{1}{t}} = u\left\{\begin{array}{l} \frac{b}{\alpha} + \frac{c}{\alpha^2} + \frac{d}{\alpha^3} + \frac{e}{\alpha^4} + \ldots \\ + \frac{1}{t}\left(\frac{c}{\alpha^2} + \frac{d}{\alpha^3} + \frac{e}{\alpha^4} + \ldots\right) \\ + \frac{1}{t^2}\left(\frac{d}{\alpha^3} + \frac{e}{\alpha^4} + \ldots\right) \\ + \frac{1}{t^3}\left(\frac{e}{\alpha^4} + \ldots\right) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\};$$

alſo, weil

$$\frac{u(k-z)}{\left(1-\frac{1}{t}\right)(k-z)} = \frac{u}{1-\frac{1}{t}},$$

$$\frac{1}{k-z} = \frac{1}{k} + \frac{z}{k^2} + \frac{z^2}{k^3} + \frac{z^3}{k^4} + \ldots$$

iſt:

$$19.\quad \frac{u}{1-\frac{1}{t}} = u\left\{\begin{array}{l} \frac{b}{\alpha}+\frac{c}{\alpha^2}+\frac{d}{\alpha^3}+\frac{e}{\alpha^4}+\ldots \\ +\frac{1}{t}\left(\frac{c}{\alpha^2}+\frac{d}{\alpha^3}+\frac{e}{\alpha^4}+\ldots\right) \\ +\frac{1}{t^2}\left(\frac{d}{\alpha^3}+\frac{e}{\alpha^4}+\ldots\right) \\ +\frac{1}{t^3}\left(\frac{e}{\alpha^4}+\ldots\right) \\ +\;\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\left\{\frac{1}{k}+\frac{z}{k^2}+\frac{z^2}{k^3}+\frac{z^3}{k^4}+\ldots\right\}.$$

Der Coefficient von t^x in der Entwickelung der Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens iſt alſo auch

$$y_x\alpha^x + y_{x+1}\alpha^{x+1} + y_{x+2}\alpha^{x+2} + y_{x+3}\alpha^{x+3} + \ldots.$$

Für

$$a = a,\; a' = \frac{b}{\alpha},\; a'' = \frac{c}{\alpha^2},\; a''' = \frac{d}{\alpha^3},\; \ldots\ldots$$

iſt aber nach (10.)

$$\varepsilon\nabla^p(y_x\alpha^x) = \left\{a+\frac{b}{\alpha t}+\frac{c}{\alpha^2 t^2}+\frac{d}{\alpha^3 t^3}+\ldots\right\}^p \varepsilon(y_x\alpha^x) = z^p\varepsilon(y_x\alpha^x),$$

und nach (2.) iſt

$$\varepsilon\Delta^p(y_{x+n}\alpha^{x+n}) = \frac{\varepsilon\Delta^p(y_x\alpha^x)}{t^n}.$$

Alſo iſt

$$\varepsilon\nabla^p(y_{x+n}\alpha^{x+n}) = \frac{z^p\varepsilon(y_x\alpha^x)}{t^n},$$

und folglich $\nabla^p(y_{x+n}\alpha^{x+n})$ der Coefficient von t^x in der Entwickelung von $\frac{z^p\varepsilon(y_x\alpha^x)}{t^n}$, woraus ſich wie ſchon oben in einem ähnlichen Falle leicht ergiebt, daß $\nabla^p(y_{x+n}\alpha^{x+n})$ auch der Coefficient von t^x in der Entwickelung von $\frac{uz^p}{t^n}$ iſt.

Nun iſt aber bekanntlich

$$\nabla(y_{x+n}\alpha^{x+n}) = a y_{x+n}\alpha^{x+n} + a' y_{x+n+1}\alpha^{x+n+1} + a'' y_{x+n+2}\alpha^{x+n+2} + \ldots$$
$$= \alpha^{x+n}(a y_{x+n} + b y_{x+n+1} + c y_{x+n+2} + d y_{x+n+3} + \ldots),$$

d. i., wenn wir

$$\nabla_1 y_{x+n} = a y_{x+n} + b y_{x+n+1} + c y_{x+n+2} + d y_{x+n+3} + \ldots$$

ſetzen:

$$\nabla(y_{x+n}\alpha^{+xn}) = \alpha^{x+n}\nabla_1 y_{x+n}.$$

Ferner iſt

$$\nabla^2(y_{x+n}\alpha^{+xn}) =$$
$$a\nabla(y_{x+n}\alpha^{x+n}) + a'\nabla(y_{x+n+1}\alpha^{x+n+1}) + a''\nabla(y_{x+n+2}\alpha^{x+n+2}) + \ldots$$
$$= \alpha^{x+n}\{a\nabla_1 y_{x+n} + b\nabla_1 y_{x+n+1} + c\nabla_1 y_{x+n+2} + \ldots\}$$
$$= \alpha^{x+n}\nabla_1{}^2 y_{x+n},$$

$$\nabla^3(y_{x+n}\alpha^{x+n}) =$$

$$a\nabla^2(y_{x+n}\alpha^{x+n}) + a'\nabla^2(y_{x+n+1}\alpha^{x+n+1}) + a''\nabla^2(y_{x+n+2}\alpha^{x+n+2}) + \ldots$$

$$= \alpha^{x+n}\{a\nabla_1{}^2 y_{x+n} + b\nabla_1{}^2 y_{x+n+1} + c\nabla_1{}^2 y_{x+n+2} + \ldots\}$$

$$= \alpha^{x+n}\nabla_1{}^3 y_{x+n};$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Alſo iſt allgemein

$$20.\quad \nabla^p(y_{x+n}\alpha^{x+n}) = \alpha^{x+n}\nabla_1{}^p y_{x+n}.$$

Daher iſt $\alpha^{x+n}\nabla_1{}^p y_{x+n}$ der Coefficient von t^x in der Entwickelung von $\frac{u z^p}{t^n}$, und der Coefficient von t^x in der Entwickelung der Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung (19.) iſt folglich

$$\left\{\frac{b}{\alpha}+\frac{c}{\alpha^2}+\frac{d}{\alpha^3}+\frac{e}{\alpha^4}+\ldots\right\}\alpha^x\left\{\frac{y_x}{k}+\frac{\nabla_1 y_x}{k^2}+\frac{\nabla_1{}^2 y_x}{k^3}+\frac{\nabla_1{}^3 y_x}{k^4}+\ldots\right\}$$
$$+\left\{\frac{c}{\alpha}+\frac{d}{\alpha^2}+\frac{e}{\alpha^3}+\ldots\right\}\alpha^x\left\{\frac{y_{x+1}}{k}+\frac{\nabla_1 y_{x+1}}{k^2}+\frac{\nabla_1{}^2 y_{x+1}}{k^3}+\frac{\nabla_1{}^3 y_{x+1}}{k^4}+\ldots\right\}$$
$$+\left\{\frac{d}{\alpha}+\frac{e}{\alpha^2}+\ldots\right\}\alpha^x\left\{\frac{y_{x+2}}{k}+\frac{\nabla_1 y_{x+2}}{k^2}+\frac{\nabla_1{}^2 y_{x+2}}{k^3}+\frac{\nabla_1{}^3 y_{x+2}}{k^4}+\ldots\right\}$$
$$+\left\{\frac{e}{\alpha}+\ldots\right\}\alpha^x\left\{\frac{y_{x+3}}{k}+\frac{\nabla_1 y_{x+3}}{k^2}+\frac{\nabla_1{}^2 y_{x+3}}{k^3}+\frac{\nabla_1{}^3 y_{x+3}}{k^4}+\ldots\right\}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nach dem Obigen iſt alſo

$$21.\quad y_x\alpha^x + y_{x+1}\alpha^{x+1} + y_{x+2}\alpha^{x+2} + y_{x+3}\alpha^{x+3} + \ldots\ldots$$
$$=\left\{\frac{b}{\alpha}+\frac{c}{\alpha^2}+\frac{d}{\alpha^3}+\frac{e}{\alpha^4}+\ldots\right\}\alpha^x\left\{\frac{y_x}{k}+\frac{\nabla_1 y_x}{k^2}+\frac{\nabla_1{}^2 y_x}{k^3}+\frac{\nabla_1{}^3 y_x}{k^4}+\ldots\right\}$$
$$+\left\{\frac{c}{\alpha}+\frac{d}{\alpha^2}+\frac{e}{\alpha^4}+\ldots\right\}\alpha^x\left\{\frac{y_{x+1}}{k}+\frac{\nabla_1 y_{x+1}}{k^2}+\frac{\nabla_1{}^2 y_{x+1}}{k^3}+\frac{\nabla_1{}^3 y_{x+1}}{k^4}+\ldots\right\}$$
$$+\left\{\frac{d}{\alpha}+\frac{e}{\alpha^2}+\ldots\right\}\alpha^x\left\{\frac{y_{x+2}}{k}+\frac{\nabla_1 y_{x+2}}{k^2}+\frac{\nabla_1{}^2 y_{x+2}}{k^3}+\frac{\nabla_1{}^3 y_{x+2}}{k^4}+\ldots\right\}$$
$$+\left\{\frac{e}{\alpha}+\ldots\right\}\alpha^x\left\{\frac{y_{x+3}}{k}+\frac{\nabla_1 y_{x+3}}{k^2}+\frac{\nabla_1{}^2 y_{x+3}}{k^3}+\frac{\nabla_1{}^3 y_{x+3}}{k^4}+\ldots\right\}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wo

$$\nabla_1 y_x = a y_x + b y_{x+1} + c y_{x+2} + d y_{x+3} + \ldots,$$

welches eine ſehr allgemeine Transformation der Reihe

$$y_x\alpha^x + y_{x+1}\alpha^{x+1} + y_{x+2}\alpha^{x+2} + y_{x+3}\alpha^{x+3} + \ldots$$

iſt, auf welche wir ſchon im Artikel Umformung der Reihen (32.) hingewieſen haben. Setzt man $x = 0$, ſo erhält man die Umformung der gegebenen Reihe

$$y_0 + y_1\alpha + y_2\alpha^2 + y_3\alpha^3 + \ldots + y_x\alpha^x + \ldots\ldots$$

Man könnte dieſe Umformung der Reihen noch allgemeiner machen, worüber man das unten angeführte Werk von Laplace p. 36. nachſehen kann.

7. Die Theorie der erzeugenden Functionen iſt eine Schöpfung des eben genannten großen Geometers. Wir haben hier nur die Grundzüge derſelben entwickeln können. Man kann dieſelbe aber auch auf Functionen mit mehrern veränderlichen Größen ausdehnen, und überhaupt bietet ſie, außer den oben angedeuteten, noch ein reiches Feld der ſchönſten Anwendungen dar, z. B. auch auf die Interpolation der Reihen. Die Quellen, aus denen dieſe Theorie ſtudirt werden muß, ſind eine Abhandlung von Laplace in den Mém. de l'Académie des Sciences. 1779., vorzüglich die Théorie analytique des probabilités. Trois. éd. Paris. 1820. p. 1—88. und Lacroix Traité du calc. diff. et du calc. int. T. III. Chap. IV. Auch ſ. m. einen kurzen Aufſatz von J. W. Herſchel: Consideration of various Points of Analysis in den Philosophical Transactions. 1814. P. II. p. 440.

Euler'ſche Integrale, ſ. den Artikel Beſtimmtes Integral (27.) i. d. Z. und außer den dort angeführten Schriften vorzüglich noch Legendres Traité des fonctions elliptiques. T. II. Paris. 1826. p. 366—530.

Euler's Lehrſatz von den Polyedern, ſ. Vieleckiger Körper (1.).

Evolute, ſ. Evolution (1.).

Evolution. 1. Um die convexe Seite der Curve AB (Fig. 6.) denke man ſich einen völlig biegſamen Faden gelegt und denſelben in B nach der Richtung der Berührenden der Curve ausgeſpannt. Wird nun dieſer Faden, indem man ihn immer geſpannt erhält, nach und nach von der Curve AB abgewickelt, ſo wird ſein Endpunkt C offenbar eine neue Curve CD beſchreiben, welche man die durch Abwickelung der Curve AB Erzeugte oder die Evolvente von AB nennt, indem umgekehrt AB die Evolute von CD heißt. Die Curve AB wird von der Richtung des Fadens ſtets berührt, ſo wie auch auf der Stelle erhellet, daß, wenn P′ und P zwei zuſammengehörende Punkte der Evolute und Evolente ſind, jederzeit $PP' = BP' + BC$ oder, für $BP' = s'$ und $BC = a$, $PP' = a + s'$ iſt. Die Linie PP′ iſt ferner jederzeit auf der Evolvente in dem Punkte P normal, und dem Krümmungshalbmeſſer derſelben in dieſem Punkte gleich, welches wir nun beweiſen wollen.

2. Man bezeichne zu dem Ende die Coordinaten der Punkte P′ und P durch x′, y′ und x, y, und ſetze $PP' = \Theta$; ſo iſt bekanntlich

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = \Theta^2.$$

Die Gleichung der Linie PP′ iſt, weil die Evolute von derſelben in P′ berührt wird, nach dem Artikel Berührung (3.) i. d. Z.

$$Y - y' = \frac{\partial y'}{\partial x'}(X - x');$$

alſo auch

$$y - y' = \frac{\partial y'}{\partial x'}(x - x'),$$

und folglich

$$\left\{1 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x'}\right)^2\right\}(x - x')^2 = \Theta^2;$$

alſo

$$(x - x')^2 = \frac{\Theta^2 \partial x'^2}{\partial x'^2 + \partial y'^2},$$

$$(y - y')^2 = \frac{\Theta^2 \partial y'^2}{\partial x'^2 + \partial y'^2}.$$

Weil aber nach (1.)

$$\Theta = a + s', \ \partial\Theta = \partial s',$$

und bekanntlich $\partial s'^2 = \partial x'^2 + \partial y'^2$ iſt; ſo iſt

$$(x - x')^2 = \frac{\Theta^2 \partial x'^2}{\partial \Theta^2}, \ (y - y')^2 = \frac{\Theta^2 \partial y'^2}{\partial \Theta^2};$$

folglich

$$x - x' = \pm \frac{\Theta \partial x'}{\partial \Theta}, \ y - y' = \pm \frac{\Theta \partial y'}{\partial \Theta},$$

wo die obern und untern Zeichen ſich auf einander beziehen, weil für

$$x - x' = \pm \frac{\Theta \partial x'}{\partial \Theta}, \ y - y' = \mp \frac{\Theta \partial y'}{\partial \Theta}$$

offenbar

$$\frac{y - y'}{x - x'} = -\frac{\Theta \partial y'}{\partial \Theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\Theta \partial x'} = -\frac{\partial y'}{\partial x'}$$

wäre, da doch nach dem Obigen immer

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{\partial y'}{\partial x'}$$

iſt. Es fragt ſich nun bloß noch, ob man die obern oder die untern Zeichen zu nehmen hat. Specialiſiren wir, um dies zu entſcheiden, ein Mal das Coordinatenſyſtem, ſo daß wir BC als Axe, B als Anfang der Abſciſſen und die poſitiven Abſciſſen rechts von B annehmen. Dann iſt für die einander entſprechenden Punkte B und C der Evolute und Evolvente offenbar $x' = 0$, $y' = 0$; $x = -a$, $y = 0$; alſo für dieſe Punkte nach dem Obigen

$$-a = \pm \frac{\Theta \partial x'}{\partial \Theta}.$$

Läßt man aber x' um Etwas wachſen, d. i. nimmt man $\partial x'$ poſitiv, ſo wächſt offenbar auch Θ, indem ſich dann noch ein Theil des Fadens von der Curve abwickelt, und es iſt folglich auch $\partial\Theta$, d. i. der Bruch

$$\frac{\Theta\partial x'}{\partial\Theta}$$

poſitiv. Setzte man nun

$$-a = \frac{\Theta\partial x'}{\partial\Theta},$$

ſo wäre eine negative Größe einer poſitiven gleich, welches ungereimt iſt. Man darf alſo nicht die obern, ſondern muß die untern Zeichen nehmen, und es iſt folglich nach dem Obigen

$$x = x' - \frac{\Theta\partial x'}{\partial\Theta},\ y = y' - \frac{\Theta\partial y'}{\partial\Theta}.$$

Differentiirt man nun nach x', wobei man alſo $\partial x'$ conſtant, $\partial^2 x' = 0$ ſetzt; ſo wird

$$\partial x = \partial x' - \Theta\partial\left(\frac{\partial x'}{\partial\Theta}\right) - \frac{\partial x'}{\partial\Theta}\partial\Theta,$$

d. i.

$$\partial x = -\Theta\partial\left(\frac{\partial x'}{\partial\Theta}\right),$$

oder

$$\partial x = \frac{\Theta\partial x'\partial^2\Theta}{\partial\Theta^2}.$$

Differentiirt man die Gleichung

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 = \Theta^2,$$

ſo wird

$$(x-x')(\partial x - \partial x') + (y-y')(\partial y - \partial y') = \Theta\partial\Theta,$$

d. i.

$$\Theta\partial\Theta = -\frac{\Theta\partial x'}{\partial\Theta}(\partial x - \partial x') - \frac{\Theta\partial y'}{\partial\Theta}(\partial y - \partial y')$$

$$= \frac{\Theta}{\partial\Theta}(\partial x'^2 + \partial y'^2) - \frac{\Theta}{\partial\Theta}(\partial x\partial x' + \partial y\partial y')$$

$$= \Theta\partial\Theta - \frac{\Theta}{\partial\Theta}(\partial x\partial x' + \partial y\partial y'),$$

weil nach dem Obigen

$$\partial x'^2 + \partial y'^2 = \partial s'^2 = \partial\Theta^2$$

iſt. Folglich

$$\partial x\partial x' + \partial y\partial y' = 0,\ \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial x'}{\partial y'},\ \frac{\partial y'}{\partial x'} = -\frac{\partial x}{\partial y}.$$

Nun war

$$Y - y' = \frac{\partial y'}{\partial x'}(X - x'),$$

$$y - y' = \frac{\partial y'}{\partial x'}(x - x');$$

folglich durch Subtraction

$$Y - y = \frac{\partial y'}{\partial x'}(X - x),$$

oder

$$Y - y = -\frac{\partial x}{\partial y}(X - x),$$

welches die Gleichung der Linie PP′, und nach dem Artikel Berührung (6.) i. d. Z. die Gleichung einer Normale der Evolvente in dem Punkte (x, y) iſt. Daher iſt, wie behauptet wurde, PP′ die Normale der Evolvente in dem Punkte (x, y).

Setzen wir ferner

$$p = \frac{\partial y}{\partial x},\ p' = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

und den Krümmungshalbmeſſer der Evolvente in dem Punkte (x, y) = ϱ; ſo iſt bekanntlich nach dem angeführten Artikel (11.) bloß in Bezug auf die abſolute Größe

$$\varrho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p'}.$$

Aber

$$p = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial x'}{\partial y'},\ p^2 = \frac{\partial x'^2}{\partial y'^2};$$

$$1 + p^2 = \frac{\partial x'^2 + \partial y'^2}{\partial y'^2} = \frac{\partial \Theta^2}{\partial y'^2};$$

$$\partial p = -\partial\left(\frac{\partial x'}{\partial y'}\right) = \frac{\partial x' \partial^2 y'}{\partial y'^2},\ \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial x' \partial^2 y'}{\partial x \partial y'^2},$$

d. i., weil nach dem Obigen

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial \Theta^2}{\Theta \partial^2 \Theta}$$

iſt:

$$p' = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \Theta^2 \partial^2 y'}{\Theta \partial^2 \Theta \partial y'^2}.$$

Folglich

$$\varrho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p'} = \frac{\partial \Theta^3}{\partial y'^3} \cdot \frac{\Theta \partial^2 \Theta \partial y'^2}{\partial \Theta^2 \partial^2 y'},$$

d. i.

$$\varrho = \Theta \cdot \frac{\partial \Theta \partial^2 \Theta}{\partial y' \partial^2 y'}.$$

Aber, wenn man die Gleichung

$$\partial \Theta^2 = \partial x'^2 + \partial y'^2$$

differentiirt, da $\partial x'$ conſtant iſt:

$$\partial \Theta \partial^2 \Theta = \partial y' \partial^2 y';$$

folglich $\varrho = \Theta$, wie behauptet wurde.

3. Hieraus folgt nun unmittelbar, daß die Evolute der geometriſche Ort der Mittelpunkte der Krümmungskreiſe aller Punkte der Evolvente iſt. Nach dem Artikel Berührung (11.) i. d. Z. iſt aber, wenn x', y' die Coordinaten des Mittelpunktes des dem Punkte (x, y) der Evolvente entſprechenden Krümmungskreiſes ſind:

$$x' = x - \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial^2 y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x},\ y' = y + \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial^2 y}.$$

Eliminirt man aus dieſen beiden Gleichungen und der Gleichung

$$\varphi(x, y) = 0$$

der Evolvente, welche als gegeben angeſehen wird, die Größen x, y, ſo erhält man eine Gleichung zwiſchen x', y', welches die Gleichung der Evolute iſt.

Man kann auch umgekehrt aus der Evolute die Evolvente ſuchen. Es iſt nämlich

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial^2 y} = \frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x \partial^2 y} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}},$$

oder nach dem Obigen

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial^2 y} = \frac{\varrho \partial x}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}}.$$

Aber

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial x'}{\partial y'},\ \frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{\partial x'^2}{\partial y'^2},\ \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial x^2} = \frac{\partial x'^2 + \partial y'^2}{\partial y'^2},$$

$$\frac{\partial x}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}} = \frac{\partial y'}{\sqrt{\partial x'^2 + \partial y'^2}}.$$

Folglich

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial^2 y} = \frac{\varrho \partial y'}{\sqrt{\partial x'^2 + \partial y'^2}},$$

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial^2 y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\varrho \partial y'}{\sqrt{\partial x'^2 + \partial y'^2}} \cdot \frac{\partial x'}{\partial y'} = -\frac{\varrho \partial x'}{\sqrt{\partial x'^2 + \partial y'^2}}.$$

Alſo

$$x = x' - \frac{\varrho \partial x'}{\sqrt{\partial x'^2 + \partial y'^2}},\ y = y' - \frac{\varrho \partial y'}{\sqrt{\partial x'^2 + \partial y'^2}};$$

oder, weil

$$\varrho = \Theta = s' + a,\ \partial x'^2 + \partial y'^2 = s'^2$$

iſt:

$$x = x' - (s' + a)\frac{\partial x'}{\partial s'},\ y = y' - (s' + a)\frac{\partial y'}{\partial s'}.$$

Eliminirt man aus dieſen Gleichungen und der gegebenen Gleichung

$$\psi(x', y') = 0$$

der Evolute die Größen x', y'; ſo erhält man eine Gleichung zwiſchen x, y, welches die geſuchte Gleichung der Evolvente iſt.

Daß durch Abwickelung einer und derſelben Curve unendlich viele Curven erzeugt werden können, verſteht ſich von ſelbſt, da die conſtante Größe a willkührlich angenommen werden kann.

Beiſpiele zu dieſen und den vorhergehenden allgemeinen Formeln zu geben, iſt hier nicht unſer Zweck, da deren ſchon mehrere in dem entſprechenden Artikel im zweiten Theile vorgekommen ſind. Von der Evolvente des Kreiſes handelt Eytelwein ausführlich in ſeinem Handbuche der Statik feſter Körper. Theil III. Berlin. 1808. S. 50. Einen Aufſatz von A. v. Ettinghauſen über Curven, welche ihren Evoluten ähnlich ſind, ſ. m. in der Zeitschrift für Physik und Mathematik. Bd. IX. Wien 1831. S. 178. Eine mit der Lehre von der Abwickelung zuſammenhängende Eigenſchaft der Cykloide ſ. m. im Art. Cykloide i. d. Z.

4. Bevor wir zu der Theorie der Evolution doppelt gekrümmter Linien übergehen können, müſſen wir zuerſt von der Abwickelung krummer Flächen handeln, und beginnen daher ſogleich mit der ſich auf den erſten Blick als richtig darbietenden Bemerkung, daß nicht alle Flächen ſich abwickeln, d. h. ohne Bruch und Faltung in eine Ebene ausbreiten laſſen, ſondern daß vielmehr die abwickelbaren oder developpablen Flächen eine beſondere ſehr merkwürdige Gattung krummer Flächen bilden. In viele Details über dieſe Flächen einzugehen, geſtattet hier der Raum nicht, und wir müſſen uns daher mit der Entwickelung der allgemeinen Bedingungen der Abwickelbarkeit oder Developpabilität der Flächen begnügen.

Man verſteht unter developpablen Flächen aber überhaupt ſolche, welche durch die Bewegung einer geraden Linie entſtehen, deren je zwei nächſte Lagen immer in einer Ebene ſind, ſo daß alſo je zwei nächſte Lagen der erzeugenden geraden Linie ſich entweder ſchneiden, oder einander parallel ſind. Daß ſolche Flächen ſich abwickeln, d. h. ohne Bruch und Faltung in eine Ebene ausbreiten oder niederlegen laſſen, iſt leicht zu zeigen. Man kann ſich nämlich jede auf die obige Art entſtandene Fläche aus lauter triangulären oder parallelogrammatiſchen Elementen zuſammengeſetzt denken. Läßt man ſich nun das erſte Element um ſeine Durchſchnittslinie mit dem zweiten Element drehen, bis es in die Ebene des letztern fällt, dreht man hierauf das Syſtem dieſer beiden Elemente um die Durchſchnittslinie des zweiten und dritten Elements, bis es in die Ebene des dritten Elements fällt, u. ſ. f.; ſo wird man offenbar durch Fortſetzung dieſes Verfahrens die ganze Fläche nach und nach in eine Ebene niederlegen können. Die cylindriſchen und coniſchen Flächen (ſ. dieſe Artikel) ſind offenbar beſondere Arten dieſer allgemeinen Klaſſe krummer Flächen. Die ſtetige Folge der Durchſchnittspunkte der erzeugenden geraden Linie in ihren verſchiedenen Lagen bildet auf jeder developpablen Fläche eine Curve von doppelter Krümmung, welche Monge arête de rebroussement de la surface pro-

poſée genannt hat, eine Benennung, die von Littrow deutſch durch Wendungscurve, von Brandes durch Knotenkante oder Knotenfurche wiedergegeben worden iſt. (Vergl. Einhüllende Curven und Flächen 11. i. d. Z.). Bei den coniſchen Flächen geht die Wendungscurve in einen Punkt über; bei den cylindriſchen Flächen liegen die Punkte der Wendungscurve ſämmtlich in unendlicher Entfernung, d. i. es giebt im eigentlichen Sinne keine Wendungscurve.

Es iſt klar, daß die erzeugende gerade Linie in allen ihren Lagen die Wendungscurve berühren muß, ſo daß man alſo abwickelbare Flächen auch als ſolche definiren und betrachten kann, die durch eine ſich bewegende gerade Linie beſchrieben werden, welche bei dieſer Bewegung in allen Lagen ſtets eine gegebene Curve von doppelter Krümmung, die dann die Wendungscurve der beſchriebenen Fläche ſeyn wird, berührt. Wäre die gegebene Curve eine Curve von einfacher Krümmung, ſo würde die auf dieſe Weiſe beſchriebene Fläche offenbar die Ebene ſelbſt ſeyn.

Auch wenn man ſich eine Ebene nach einem gewiſſen Geſetze, etwa ſo, daß ſie immer auf einer gegebenen doppelt gekrümmten Curve normal iſt, bewegt denkt, und ſich dann die ſtetige Folge der Durchſchnittslinien der auf einander folgenden verſchiedenen Lagen der ſich bewegenden Ebene vorſtellt, wird man eine deutliche Vorſtellung von einer abwickelbaren Fläche erhalten, und auch aus dieſer Art der Entſtehung ſolcher Flächen eine allgemeine Gleichung derſelben ableiten können, wie wir nachher ſehen werden.

5. Kehren wir jetzt zunächſt zu unſerer vorher zuerſt gegebenen Definition abwickelbarer Flächen zurück, ſo ergiebt ſich aus derſelben unmittelbar als Grundeigenſchaft dieſer Flächen, daß ſie von jeder ſie berührenden Ebene nicht bloß in einem einzigen Punkte, ſondern in einer ſtetigen geradlinigen Folge von Punkten, oder, um uns kürzer auszudrücken, in einer geraden Linie berührt werden, und dieſe Eigenſchaft iſt es, von welcher wir zunächſt bei unſern fernern Unterſuchungen über dieſe Flächen, um ſogleich eine allgemeine Gleichung derſelben zu finden, ausgehen wollen.

Sey daher

$$z = f(x, y)$$

die allgemeine Gleichung einer developpablen Fläche, und (x, y, z) ein beliebiger aber beſtimmter Punkt in derſelben. Die Gleichung der durch dieſen Punkt gehenden berührenden Ebene iſt nach dem Artikel Berührung (22.) i. d. Z.

$$(x' - x)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + (y' - y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - (z' - z) = 0\,,$$

wo wir wohl nicht erſt zu erinnern brauchen, daß die Differentialquotienten partielle Differentialquotienten ſind. Die erzeugende gerade Linie in ihrer durch den Punkt (x, y, z) beſtimmten

Lage wollen wir in der Folge der Kürze wegen durch PQ bezeichnen, und die Gleichung ihrer Projection auf der Ebene der xy mag

$$y' = Px' + Q$$

ſeyn, wo alſo P und Q Functionen von x, y, z, oder, weil z eine Function von x, y iſt, Functionen von x, y ſind. Für ein ganz beliebiges Δx ſey nun

$$(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$$

irgend ein anderer Punkt in der Linie PQ, ſo ſind $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ die Coordinaten der Projection dieſes Punktes auf der Ebene der xy, und es iſt folglich, da dieſe Projection in der Projection der Linien PQ auf derſelben Coordinatenebene liegt, nach dem Vorhergehenden

$$y + \Delta y = P(x + \Delta x) + Q.$$

Weil aber offenbar auch

$$y = Px + Q$$

ſeyn muß; ſo iſt

$$\Delta y = P\Delta x$$

für jedes Δx. Die Gleichung der durch den Punkt

$$(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$$

gehenden Berührungsebene der developpabeln Fläche iſt

$$(x' - x - \Delta x)\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \Delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\} + (y' - y - \Delta y)\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \Delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right\}$$
$$- (z' - z - \Delta z) = 0.$$

Nach der Natur der developpablen Flächen müſſen die beiden durch die Punkte

$$(x, y, z) \text{ und } (x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$$

gehenden Berührungsebenen in eine Ebene zuſammenfallen. Stellt man alſo die obigen Gleichungen dieſer beiden Berührungsebenen auf folgende Art dar:

$$x'\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + y'\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - z' - x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + z = 0$$

und

$$x'\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \Delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\} + y'\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \Delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right\} - z'$$
$$-(x+\Delta x)\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \Delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\} - (y+\Delta y)\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \Delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right\} + (z+\Delta z) = 0;$$

ſo iſt klar, daß für jedes Δx und $\Delta y = P\Delta x$

$$\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,\ \Delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

ſeyn muß. Aber nach dem Taylor'ſchen Lehrſatze, wenn man bloß bei den erſten Gliedern ſtehen bleibt:

$$\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\Delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Delta y + \ldots,$$

$$\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Delta x + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\Delta y + \ldots;$$

folglich für jedes Δx:

$$0 = \left\{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + P\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right\}\Delta x + \ldots,$$

$$0 = \left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + P\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\right\}\Delta x + \ldots;$$

alſo

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + P\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + P\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0;$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = r,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s,\ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = t$$

ſetzen:

$$r + Ps = 0,\ s + Pt = 0.$$

Eliminirt man P, ſo ergiebt ſich:

$$P = -\frac{r}{s} = -\frac{s}{t};$$

folglich

$$s^2 = rt;$$

eine Gleichung, die bei allen developpablen Flächen Statt findet. Da man P hat, und nach dem Obigen

$$y = Px + Q,\ Q = y - Px$$

iſt; ſo iſt hierdurch zugleich auch die Gleichung der Projection der durch den beliebigen Punkt (x, y, z) der krummen Fläche gehenden erzeugenden geraden Linie auf der Ebene der xy, dieſe Linie alſo ſelbſt der Lage nach beſtimmt, weil man natürlich auf dieſelbe Weiſe auch die Gleichungen ihrer Projectionen auf den andern Coordinatenebenen finden kann. Für

$$P = -\frac{r}{s} = -\frac{s}{t}$$

iſt die Gleichung der Projection auf der Ebene der xy:

$$y' = Px' + y - Px,$$

wo immer x, y, z als gegebene Größen angeſehen werden.

6. Für jede developpable Fläche findet alſo, wie wir jetzt geſehen haben, die Gleichung $s^2 = rt$ Statt, und es fragt ſich nun, ob man auch umgekehrt behaupten kann, daß eine Fläche, für welche dieſe Gleichung Statt findet, ſich abwickeln läßt. Um

dieſe Frage genügend beantworten zu können, müſſen wir die folgenden analytiſchen Betrachtungen vorausſchicken. Wir nehmen alſo an, daß $s^2 = rt$ oder, was daſſelbe iſt,

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

ſey, und ſetzen der Kürze wegen die beiden einander gleichen Brüche

$$-\frac{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)}{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}} = -\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)} = p.$$

Weil nun bekanntlich

$$\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\Delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Delta y,$$

$$\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Delta x + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\Delta y$$

iſt, ſo iſt klar, daß

$$\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,\ \partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

iſt, wenn man $\Delta y = p\Delta x$ ſetzt. Ferner iſt

$$\partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)\Delta x^2 + 2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\Delta y^2,$$

$$\partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\Delta x \Delta y + \left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)\Delta y^2,$$

und folglich, wenn man

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = p = -\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)},\ \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} = p^2 = \frac{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)}$$

ſetzt, nach leichter Rechnung:

$$\partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - 2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)}\Delta x^2$$

$$\partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - 2\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)}\Delta x^2.$$

Weil nun für jedes x und y nach der Vorausſetzung

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

iſt; ſo iſt auch, wie man findet, wenn man zuerſt nach x, dann nach y differentiirt:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = 0;$$

folglich, wenn man $\Delta y = p\Delta x$ ſetzt:

$$\partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,\ \partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Man kann hieraus auch ein Paar Relationen ableiten, welche für das Folgende von Wichtigkeit ſind. Differentiiren wir nämlich die Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}p = 0$$

zuerſt nach x, dann nach y; ſo erhalten wir

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}p + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}p + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0;$$

folglich, wenn man die zweite Gleichung mit p multiplicirt und dann beide Gleichungen addirt:

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) + 2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}p + \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}p^2 \\ \quad + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right\}\end{array}\right\} = 0.$$

Aber für $\Delta y = p\Delta x$ nach dem Obigen

$$\partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left\{\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) + 2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}p + \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}p^2\right\}\Delta x^2,$$

und, wie wir ſo eben geſehen haben, für dieſen Werth von Δy:

$$\partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0;$$

alſo

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) + 2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}p + \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}p^2 = 0.$$

Folglich auch

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right\} = 0,$$

und daher, weil offenbar im Allgemeinen nicht

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

iſt, immer

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0.$$

Nun können wir allgemein beweiſen, daß immer

$$\partial^n\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,\ \partial^n\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

iſt, wenn man $\Delta y = p\Delta x$ ſetzt. Wir nehmen dieſes Geſetz für $n - 1$ als richtig an, und ſuchen zu zeigen, daß es auch für n gilt. Denken wir uns $\partial^{n-1}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ nach Principien der Differentialrechnung entwickelt, ſo iſt, wenn wir der Kürze wegen die Binomial-Coefficienten der $(n - 1)$ten und $n$ten Potenz reſpective durch $A, B, C, D, \ldots$ und $A', B', C', D', \ldots$ bezeichnen, nachdem $\Delta y = p\Delta x$ geſetzt worden, offenbar

$$0 = \left(\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right) + A\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}p + B\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}p^2 + C\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-3}\partial y^3}p^3 + \ldots$$

für jedes x und y. Folglich, wenn man zuerſt nach x, dann nach y differentiirt:

$$0 = \left(\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}}\right) + A\left(\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y}\right)p + B\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-1}\partial y^2}p^2 + C\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-2}\partial y^3}p^3 + \ldots$$

$$+ A\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + 2B\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}p\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + 3C\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-3}\partial y^3}p^2\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \ldots$$

$$0 = \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y} + A\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-1}\partial y^2}p + B\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-2}\partial y^3}p^2 + C\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-3}\partial y^4}p^3 + \ldots$$

$$+ A\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + 2B\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + 3C\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-3}\partial y^3}p^2\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \ldots$$

Multiplicirt man nun die zweite Gleichung mit p, und addirt dann beide Gleichungen; ſo erhält man

$$\begin{aligned}
0 = \left(\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}}\right) &+ (1 + A)\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y}p \\
&+ (A + B)\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-1}\partial y^2}p^2 \\
&+ (B + C)\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-2}\partial y^3}p^3 \\
&+ \ldots\ldots \\
&+ A\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right\} \\
&+ 2B\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right\}p \\
&+ 3C\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-3}\partial y^3}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right\}p^2 \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Folglich, weil nach dem Obigen

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0$$

iſt, nach einem bekannten Satze von den Binomial-Coefficienten:

$$0 = \left(\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}}\right) + A' \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y} p + B' \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-1} \partial y^2} p^2 + \ldots .$$

Dieſe Größe iſt aber offenbar der durch Δx^n dividirte Werth von $\partial^n\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ für $\Delta y = p\Delta x$. Alſo iſt

$$\partial^n\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

für $\Delta y = p\Delta x$.

Denkt man ſich ferner $\partial^{n-1}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ nach Principien der Differentialrechnung entwickelt, und dann $\Delta y = p\Delta x$ geſetzt; ſo folgt aus der Vorausſetzung die Gleichung:

$$0 = \left(\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) p^n + A \frac{\partial^n z}{\partial y^{n-1} \partial x} p^{n-1} + B \frac{\partial^n z}{\partial y^{n-2} \partial x^2} p^{n-2} + \ldots$$

Differentiirt man nach y und x, ſo kommt:

$$0 = \left(\frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^{n+1}}\right) p^n + A \frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^n \partial x} p^{n-1} + B \frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^{n-1} \partial x^2} p^{n-2} + \ldots$$
$$+ n\left(\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) p^{n-1}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + (n-1) A \frac{\partial^n z}{\partial y^{n-1} \partial x} p^{n-2}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \ldots$$

$$0 = \frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^n \partial x} p^n + A \frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^{n-1} \partial x^2} p^{n-1} + B \frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^{n-2} \partial x^3} p^{n-2} + \ldots$$
$$+ n\left(\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) p^{n-1}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + (n-1) A \frac{\partial^n z}{\partial y^{n-1} \partial x} p^{n-2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \ldots$$

Multiplicirt man nun die erſte Gleichung mit p und addirt dann, ſo kommt

$$\begin{aligned} 0 = \left(\frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^{n+1}}\right) p^{n+1} & + (1 + A) \frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^n \partial x} p^n \\ & + (A + B) \frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^{n+1} \partial x^2} p^{n-1} \\ & + (B + C) \frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-2} \partial x^3} p^{n-2} \\ & + \ldots\ldots \\ & + n\left(\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right)\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right\} p^{n-1} \\ & + (n-1) A \frac{\partial^n z}{\partial y^{n-1} \partial x}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right\} p^{n-2} \\ & + (n-2) B \frac{\partial^n z}{\partial y^{n-2} \partial x^2}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right\} p^{n-3} \\ & + \ldots\ldots \end{aligned}$$

woraus wieder ganz eben ſo wie vorher

$$\partial^n\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

folgt, für $\Delta y = p\Delta x$.

Nach dem Obigen war aber

$$\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0;\ \partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0;\ \partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,\ \partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

für $\Delta y = p\Delta x$; alſo iſt allgemein

$$\partial^n\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,\ \partial^n\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

für $\Delta y = p\Delta x$.

Weil nun bekanntlich

$$\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{1}+\frac{\partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{1.2}+\frac{\partial^3\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{1.2.3}+\ldots,$$

$$\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{1}+\frac{\partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{1.2}+\frac{\partial^3\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{1.2.3}+\ldots$$

iſt; ſo iſt

$$\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,\ \Delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

für $\Delta y = p\Delta x$.

Ferner iſt bekanntlich

$$\partial z=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Delta y;$$

alſo, da Δx und Δy als conſtant zu betrachten ſind, durch ſucceſſive Differentiation:

$$\partial^2 z=\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).\Delta x+\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).\Delta y;$$

$$\partial^3 z=\partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).\Delta x+\partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).\Delta y;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\partial^n z=\partial^{n-1}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).\Delta x+\partial^{n-1}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).\Delta y;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wobei wir folgende zwei allgemeine Sätze aus der Differential=rechnung in Erinnerung bringen. Iſt nämlich z eine Function zweier veränderlicher Größen und $Z = az$, ſo iſt

$$\partial Z = a\partial_x z + a\partial_y z = a(\partial_x z + \partial_y z);$$

d. i.

$$\partial Z = a\partial Z \,.$$

Sind ferner z und u Functionen von x und y, ſo iſt für $Z = z + u$:

$$\begin{aligned}\partial Z &= \partial_x(z+u) + \partial_y(z+u)\\ &= \partial_x z + \partial_x u + \partial_y z + \partial_y u\\ &= (\partial_x z + \partial_y z) + (\partial_x u + \partial_y u)\,,\end{aligned}$$

d. i.

$$\partial Z = \partial z + \partial u\,.$$

Auf dieſe beiden Sätze gründet ſich die obige Entwickelung von $\partial^n z$. Weil nun

$$\partial^{n-1}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,\ \partial^{n-1}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

für $y = p\Delta x$; ſo iſt auch

$$\partial^n z = 0$$

für $y = p\Delta x$. Nur muß hier, wie aus dem Obigen folgt, $n > 1$ ſeyn. Da nun

$$\Delta z = \frac{\partial z}{1} + \frac{\partial^2 z}{1.2} + \frac{\partial^3 z}{1.2.3} + \frac{\partial^4 z}{1.2.3.4} + \ldots$$

iſt; ſo iſt

$$\Delta z = \partial z$$

für $y = p\Delta x$.

Mit Hülfe dieſer allgemeinen analytiſchen Sätze läßt ſich nun, was von allen Schriftſtellern über analytiſche Geometrie, die uns bekannt geworden ſind, unterlaſſen wird, ſtreng beweiſen, daß jede Fläche, für welche $s^2 = rt$ iſt, developpabel iſt. Daß einen ſolchen Beweis die mathematiſche Strenge und Evidenz fordert, liegt vor Augen.

7. Für eine Fläche, deren Gleichung

$$z = f(x, y)$$

iſt, ſey alſo $s^2 = rt$ oder

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2.$$

Für zwei beliebige Punkte

$$(x, y, z) \text{ und } (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$$

dieſer Fläche ſind die Gleichungen der berührenden Ebenen

$$x'\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + y'\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - z' - x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + z = 0$$

und

$$x'\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\}+y'\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right\}-z'$$
$$-(x+\Delta x)\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\}-(y+\Delta y)\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right\}+(z+\Delta z)=0.$$

Nimmt man aber den zweiten Punkt in der krummen Fläche ſo an, daß $\Delta y = p\Delta x$ iſt, indem wir wieder der Kürze wegen

$$-\frac{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)}{\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}}=-\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)}=-\frac{r}{s}=-\frac{s}{t}=p$$

ſetzen; ſo iſt nach (6.)

$$\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,\ \Delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,\ \Delta z=\partial z;$$

folglich die Gleichung der zweiten berührenden Ebene

$$x'\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+y'\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)-z'$$
$$-(x+\Delta x)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-(y+\Delta y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+z+\partial z=0$$

oder

$$\left.\begin{aligned}x'\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+y'\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)-z'-x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+z\\ -\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Delta x-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Delta y+\partial z\end{aligned}\right\}=0.$$

Aber

$$\partial z=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Delta y;$$

folglich die Gleichung der zweiten berührenden Ebene

$$x'\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+y'\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)-z'-x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+z=0,$$

d. i. mit der Gleichung der erſten berührenden Ebene identiſch, ſo daß alſo dieſe beiden Ebenen ſelbſt in eine Ebene zuſammenfallen. Hieraus folgt alſo, daß alle Punkte der gegebenen krummen Fläche, deren in der Ebene der xy genommene Coordinaten

$$x+\Delta x,\ y+p\Delta x$$

ſind, von einer und derſelben Ebene berührt werden, nämlich ſämmtlich von der Ebene, welche die krumme Fläche in dem Punkte (x, y, z) berührt, ſo daß alſo die krumme Fläche von dieſer Ebene in einer ſtetigen Folge von Punkten, oder, um uns kurz auszudrücken, in einer Linie berührt wird. Die Gleichung der

Projection dieſer Linie auf der Ebene der xy iſt, wenn man den Punkt (x, y) auf dieſer Ebene als Anfang der Coordinaten annimmt, nach dem Vorhergehenden offenbar

$$\Delta y = p\Delta x,$$

wo jetzt Δx und Δy ſelbſt die Coordinaten ſind. Dieſe Projection, und alſo auch die Linie ſelbſt, in welcher die krumme Fläche von der durch den Punkt (x, y, z) gehenden Berührungsebene berührt wird, da dieſe Linie natürlich ganz in dieſer Berührungsebene liegt, iſt folglich eine gerade Linie, ſo daß alſo unſere krumme Fläche von jeder ſie in irgend einem Punkte berührenden Ebene in einer geraden Linie berührt wird, und daher eine abwickelbare Fläche iſt (4.), w. z. b. w.

Für jede developpable Fläche iſt alſo $s^2 = rt$ (5.), und jede Fläche, für welche $s^2 = rt$ iſt, iſt developpabel.

Die Gleichung der Projection der durch den Punkt (x, y, z) gehenden erzeugenden geraden Linie auf der Ebene der xy iſt in (5.) allgemein gefunden worden, und ergiebt ſich auch aus dem unmittelbar Vorhergehenden ſehr leicht auf dieſelbe Weiſe. Iſt nämlich

$$y' = Px' + Q$$

dieſe Gleichung, ſo iſt, da die entſprechende gerade Linie durch den Punkt (x, y) geht:

$$y = Px + Q;$$

alſo

$$y' - y = P(x' - x).$$

Aber offenbar

$$y' - y = \Delta y, \quad x' - x = \Delta x.$$

Folglich $\Delta y = P\Delta x$. Aber nach dem Vorhergehenden $\Delta y = p\Delta x$. Alſo $P = p$ und demnach unſere Gleichung

$$y' - y = p(x' - x),$$

oder

$$y' = px' + y - px,$$

oder

$$y' = Px' + y - Px,$$

indem man für $P = p$ den obigen Werth $-\frac{r}{s} = -\frac{s}{t}$ ſetzt, ganz wie in (5.)

8. Wir wollen nun einmal die coniſchen und cylindriſchen Flächen betrachten. Der allgemeinen Gleichung der coniſchen Flächen (ſ. dieſen Art. i. d. Z.) kann man die Form

$$\frac{z-c}{y-b} = f\left(\frac{x-a}{y-b}\right),$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$\frac{x-a}{y-b} = v$$

ſetzt, die Form

$$z - c = (y-b)\,fv$$

geben. Weil nun

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{y-b},\quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{x-a}{(y-b)^2}$$

iſt; ſo iſt

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (y-b)\frac{\partial fv}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial fv}{\partial v},$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 fv}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{y-b}\,\frac{\partial^2 fv}{\partial v^2} = r,$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (y-b)\frac{\partial fv}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + fv = -\frac{x-a}{y-b}\,\frac{\partial fv}{\partial v} + fv,$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = -\frac{x-a}{y-b}\,\frac{\partial^2 fv}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{x-a}{(y-b)^2}\,\frac{\partial fv}{\partial v} + \frac{\partial fv}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{(x-a)^2}{(y-b)^3}\,\frac{\partial^2 fv}{\partial v^2} = t,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 fv}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{x-a}{(y-b)^2}\,\frac{\partial^2 fv}{\partial v^2} = s,$$

und es iſt folglich offenbar $s^2 = rt$; ſo daß alſo alle coniſche Flächen developpabel ſind, wie ſich auch von ſelbſt verſteht. Weil

$$p = -\frac{r}{s} = \frac{y-b}{x-a}$$

iſt; ſo iſt die Gleichung der Projection der durch den Punkt (x, y, z) der coniſchen Fläche gehenden erzeugenden geraden Linie:

$$y' - y = \frac{y-b}{x-a}(x' - x).$$

Die allgemeine Gleichung der cylindriſchen Flächen (ſ. dieſen Art. i. d. Z.) kann man unter der Form

$$z - by = f(x - ay) = fv;$$

darſtellen. In dieſem Falle iſt alſo

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 1,\quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -a;$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial fv}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial fv}{\partial v},\quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 fv}{\partial v^2} = r;$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = b + \frac{\partial fv}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = b - a\frac{\partial fv}{\partial v},\quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = a^2\frac{\partial^2 fv}{\partial v^2} = t;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 fv}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -a\frac{\partial^2 fv}{\partial v^2} = s.$$

Da nun auch in dieſem Falle offenbar $s^2 = rt$ iſt, ſo ſind alle cylindriſche Flächen developpabel, wie ſich auch von ſelbſt verſteht. Weil

$$p = -\frac{r}{s} = \frac{1}{a}$$

iſt; ſo iſt die Gleichung der Projection der durch den Punkt (x, y, z) gehenden erzeugenden Geraden

$$y' - y = \frac{1}{a}(x' - x).$$

Sind bei den coniſchen Flächen (X, Y, Z) die Coordinaten irgend eines andern Punktes, ſo ſind

$$y' - y = \frac{y - b}{x - a}(x' - a),$$

$$y' - Y = \frac{Y - b}{X - a}(x' - x)$$

die Gleichungen der beiden Projectionen der entſprechenden Erzeugenden auf der Ebene der xy. Beſtimmt man aus dieſen beiden Gleichungen x', y'; ſo erhält man die Coordinaten des Durchſchnittspunktes der beiden Projectionen. Um y' zu eliminiren, erhält man:

$$(x - a)y' = (y - b)x' + bx - ay,$$
$$(X - a)y' = (Y - b)x' + bX - aY;$$

folglich, wenn man dividirt:

$$\frac{x - a}{X - a} = \frac{(y - b)x' + bx - ay}{(Y - b)x' + bX - aY},$$

$$x' = \frac{(bx - ay)(X - a) - (bX - aY)(x - a)}{(x - a)(Y - b) - (X - a)(y - b)}$$

$$= \frac{a\{(xY - yX) - b(x - X) + a(y - Y)\}}{(xY - yX) - b(x - X) + a(y - Y)},$$

d. i. $x' = a$ und folglich

$$(x - a)y' = a(y - b) + bx - ay = b(x - a),$$

d. i. $y' = b$, ſo daß ſich alſo, da x' und y' conſtante Größen ſind, alle Projectionen der erzeugenden Linie in ihren verſchiedenen Lagen, wie es bei den coniſchen Flächen ihrer Natur nach ſeyn muß, in *einem* Punkte ſchneiden.

Iſt ω der Neigungswinkel einer Berührungsebene einer krummen Fläche gegen die Ebene der xy, ſo iſt bekanntlich

$$\tang \omega = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Für die Flächen, deren Berührungsebenen gegen die Ebene der xy ſämmtlich unter gleichen Winkeln geneigt ſind, iſt $\tang \omega = C$, folglich auch

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = C$$

eine conſtante Größe. Differentiirt man die Gleichung

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = c,$$

welche für jedes x und y Statt findet, nach x und nach y; ſo erhält man:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0,$$

oder der Kürze wegen

$$pr + qs = 0,\ ps + qt = 0;\ \frac{p}{q} = -\frac{s}{r} = -\frac{t}{s},\ s^2 = rt,$$

und alle Flächen von der angegebenen Beſchaffenheit ſind alſo developpabel.

9. In dem Artikel Berührung (27.) i. d. Z. iſt für den Halbmeſſer der größten und kleinſten Krümmung in einem beliebigen Punkte einer krummen Fläche die Formel

$$\varrho = \frac{\gamma}{2\alpha}(\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma^2})$$

gefunden worden. Auch iſt in den dortigen Zeichen

$$p'q' - s^2 = \alpha,$$

ſo daß nämlich $p' = r$, $q' = t$, $s = s$, folglich

$$rt - s^2 = \alpha$$

iſt. Für developpable Flächen iſt alſo nach dem Vorhergehenden $\alpha = 0$, und demnach der Halbmeſſer der größten Krümmung in jedem Punkte unendlich groß, ſo daß alſo, wie auch aus der Entſtehung dieſer Flächen unmittelbar folgt, dieſelben die allgemeine Eigenſchaft haben, daß in jedem ihrer Punkte die Curve der größten Krümmung eine gerade Linie iſt. Nimmt man in dem obigen Ausdrucke für ϱ das untere Zeichen, ſo wird

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\gamma\left\{\frac{2\gamma^2}{\beta} + \frac{2\alpha\gamma^4}{\beta^3} - \ldots\right\},$$

und folglich, wenn man $\alpha = 0$ ſetzt, $\varrho = \frac{\gamma^3}{\beta}$, welches der Halbmeſſer der kleinſten Krümmung iſt, und daher auch in jedem Falle leicht gefunden werden kann.

10. Man ſetze der Kürze wegen

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = q', \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q;$$

$$\partial q' = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\partial x + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\partial y = r\partial x + s\partial y,$$

$$\partial q = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\partial x + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\partial y = s\,\partial x + t\partial y.$$

Da nun für jede developpable Fläche

$$s^2 = rt,\ r = \frac{s^2}{t}$$

iſt; ſo iſt für jede ſolche Fläche

$$\partial q' = \frac{s}{t}(s\partial x + t\partial y) = \frac{s}{t}\partial q,$$

woraus ſich alſo unmittelbar ergiebt, daß, wenn fq eine unbeſtimmte Function von q bezeichnet, für jede developpable Fläche $q' = fq$ ſeyn muß.

Es läßt ſich aber auch umgekehrt behaupten, daß jede Fläche, für welche $q' = fq$, d. i. q' eine Function von q iſt, developpabel iſt. Aus dieſer Gleichung folgt nämlich

$$\left(\frac{\partial q'}{\partial x}\right) = r = \frac{\partial fq}{\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) = sf'q,$$

$$\left(\frac{\partial q'}{\partial y}\right) = s = \frac{\partial fq}{\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right) = tf'q;$$

alſo

$$f'q = \frac{r}{s} = \frac{s}{t},\ rt = s^2,$$

und folglich die Fläche nach (7.) developpabel.

Da ferner

$$\partial z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\partial y = q'\partial x + q\partial y$$

iſt; ſo erhält man durch partikuläre Integration

$$z = q'x + qy - \int(x\partial q' + y\partial q)$$

eine Formel, von deren Richtigkeit, wenn ſie nicht anderweitig als bekannt vorausgeſetzt werden ſoll, man ſich leicht durch Differentiation auf folgende Art überzeugt. Es iſt nämlich nach einer im Art. Differentialrechnung (47.) i. d. Z. gebrauchten Bezeichnung:

$$\partial_x z = x\partial_x q' + q'\partial x + y\partial_x q - \partial_x\int(x\partial q' + y\partial q),$$

$$\partial_y z = x\partial_y q' + q\partial y + y\partial_y q - \partial_y\int(x\partial q' + y\partial q);$$

folglich

$$\begin{aligned}\partial z &= \partial_x z + \partial_y z\\ &= x(\partial_x q' + \partial_y q') + y(\partial_x q + \partial_y q)\\ &\quad + q'\partial x + q\partial y - \{\partial_x\int(x\partial q' + y\partial q) + \partial_y\int(x\partial q' + y\partial q)\}\\ &= x\partial q' + y\partial q + q'\partial x + q\partial y - \partial\int(x\partial q' + y\partial q)\\ &= x\partial q' + y\partial q + q'\partial x + q\partial y - x\partial q' - y\partial q\\ &= q'\partial x + q\partial y,\end{aligned}$$

wie es ſeyn muß. Iſt nun die Fläche developpabel, ſo iſt $q' = fq$, folglich

$$\partial q' = \partial_x fq + \partial_y fq = \frac{\partial fq}{\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\partial x + \frac{\partial fq}{\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\partial y$$

$$= \frac{\partial fq}{\partial q}\left\{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\partial y\right\} = f'q . \partial q ;$$

alſo

$$z = q'x + qy - \int (xf'q + y)\partial q$$

$$= xfq + qy - \int (xf'q + y)\partial q ,$$

woraus man, wenn wieder Fq eine willkührliche Function von q bezeichnet, leicht ſchließt, daß für alle developpable Flächen

$$xf'q + y = F'q ,$$

$$z = xfq + qy - Fq$$

ſeyn muß, ein Satz, den man aber auch umkehren kann.

Iſt nämlich für irgend eine Fläche

$$y = - xf'q + F'q ,$$

$$z = xfq + qy - Fq ,$$

ſo läßt ſich jederzeit mit Sicherheit behaupten, daß dieſelbe developpabel iſt. Differentiirt man nämlich die zweite Gleichung in Bezug auf x, ſo erhält man

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = q' = xf'q . \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) + fq + y\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) - F'q . \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$$

$$= fq + \{y + xf'q - F'q\}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) ,$$

d. i., weil wegen der erſten Gleichung

$$y + xf'q - F'q = 0$$

iſt:

$$q' = fq ,$$

folglich die Fläche nach (9.) developpabel. Dieſer Satz leiſtet vortreffliche Dienſte bei Erfindung der Gleichungen developpabler Flächen, wie wir jetzt an ein Paar Beiſpiele zeigen wollen.

Man ſetze z. B.

$$f'q = aq,\ fq = \tfrac{1}{2}aq^2 ;\ F'q = bq^2,\ Fq = \tfrac{1}{3}bq^3 ;$$

ſo iſt

$$y = - axq + bq^2,\ z = \tfrac{1}{2}axq^2 + qy - \tfrac{1}{3}bq^3$$

oder

$$z = \tfrac{2}{3}bq^3 - \tfrac{1}{2}axq^2 .$$

Aus der Formel für y findet man leicht durch Auflöſung einer quadratiſchen Gleichung:

$$q = \frac{ax}{2b} + \frac{\sqrt{4by + a^2x^2}}{2b} ,$$

und folglich

$$z = \frac{ax}{12b^2}(a^2x^2 + 6by) + \frac{1}{12b^2}\sqrt{(4by + a^2x^2)^3}$$

die Gleichung der geſuchten developpablen Fläche, welche, rational gemacht, einer Fläche des fünften Grades entſpricht.

Für

$$F'q = aq,\ fq = \tfrac{1}{2}aq^2;\ F'q = bq,\ Fq = \tfrac{1}{2}bq^2 + C$$

iſt

$$y = bq - axq,\ z = \tfrac{1}{2}axq^2 + qy - \tfrac{1}{2}bq^2 - C$$

oder

$$z = \tfrac{1}{2}(b - ax)q^2 - C,$$

oder, weil

$$q = \frac{y}{b - ax}$$

iſt, die Gleichung der krummen Fläche:

$$z + C = \frac{y^2}{2(b - ax)}.$$

Bringt man dieſe Gleichung auf die Form

$$\frac{z + C}{y} = -\frac{a}{2} : \frac{x - \frac{b}{a}}{y},$$

ſo iſt klar, daß

$$\frac{z + C}{y} = \varphi\left(\frac{x - \frac{b}{a}}{y}\right)$$

iſt, und dieſelbe alſo einer coniſchen Fläche entſpricht (Coniſche Flächen. 1. i. d. Z.). Wir haben dieſe beiden Exempel, deren Zahl ſich leicht vermehren ließe, aus Brandes Lehrbuch der höhern Geometrie. T. II. Leipz. 1823. S. 336. entlehnt.

11. Die Wendungscurve iſt die ſtetige Folge der Durchſchnittspunkte der erzeugenden geraden Linien in ihren verſchiedenen Lagen. Will man alſo die Projection der Wendungscurve auf irgend einer der coordinirten Ebenen finden, ſo muß man die Gleichung der ſtetigen Folge der Durchſchnittspunkte der Projectionen der erzeugenden geraden Linie in ihren verſchiedenen Lagen auf derſelben coordinirten Ebene ſuchen. Zu dem Ende iſt es nöthig, folgende allgemeine Betrachtungen vorauszuſchicken. Sey

$$V = \varphi(x, y, a) = 0$$

die Gleichung einer Curve, wo a eine gewiſſe Größe iſt, die in Bezug auf x, y als conſtant betrachtet wird, welcher man aber doch jeden beliebigen Werth beilegen kann, wodurch, wenn man a ſich ſtetig verändern läßt, offenbar eine Reihe zwar verſchiedener, aber doch unter einander ähnlicher oder einem gemeinſchaftlichen Geſetze unterworfener Curven erhalten wird, die ſich alſo auch in einer ſtetigen Reihe von Punkten ſchneiden werden,

welche wieder eine gewiſſe Curve bilden, deren Gleichung wir jetzt im Allgemeinen aufſuchen wollen. Von der Curve, welcher die Gleichung

$$V = \varphi(x, y, a) = 0$$

entſpricht, geht man zu der nächſtfolgenden Curve über, wenn man a ſich um ∂a verändern läßt. Dadurch geht die Function V in

$$V + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)\partial a$$

über, und die Gleichung der zweiten Curve iſt überhaupt

$$V + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)\partial a = 0.$$

Für die Durchſchnittspunkte der beiden Curven, deren es offenbar in gewiſſen Fällen mehrere geben kann, müſſen x, y den **beiden** Gleichungen

$$V = 0, \; V + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)\partial a = 0,$$

oder

$$V = 0, \; \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)\partial a = 0,$$

oder

$$V = 0, \; \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0$$

genügen, und werden alſo durch Elimination aus dieſen beiden Gleichungen erhalten. Indeß iſt hier gar nicht die Frage nach den abſoluten Werthen der Coordinaten dieſer Durchſchnittspunkte, ſondern bloß nach der zwiſchen den beiden Coordinaten der Durchſchnittspunkte jeder zwei unmittelbar auf einander folgenden Curven Statt findenden allgemeinen Relation, d. i. nach der Gleichung der durch die ſtetige Folge dieſer Durchſchnittspunkte dargeſtellten Curve, und dieſe Gleichung wird offenbar erhalten, wenn man aus den Gleichungen

$$V = 0, \; \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0$$

den conſtanten Parameter a eliminirt.

12. Dieſes Princip wollen wir nun auf unſern gegenwärtigen Fall anwenden. Die allgemeine Gleichung der Projection der durch den Punkt (x, y, z) der developablen Fläche gehenden Erzeugenden auf der Ebene der xy iſt nach dem Obigen

$$y' - y = p(x' - x),$$

und dieſe Gleichung enthält, wie man ſieht, die beiden conſtanten Parameter x, y, welche nur bei dem Uebergange von der einen Projection zu der nächſt folgenden variabel ſind. Nun

denke man ſich aber einmal die durch den Punkt (x, y, z) gehende erzeugende Gerade, ſo gehört dieſe zu einer ganzen ſtetigen Folge von Punkten der developpablen Fläche, und man erhält offenbar die folgende Erzeugende, wenn man, indem y ungeändert bleibt, ſich bloß x um etwas Unendlichkleines verändern läßt, wodurch denn natürlich auch z eine unendlich kleine Aenderung erleidet, u. ſ. w. Man ſieht alſo, daß man die ganze ſtetige Folge der erzeugenden Geraden, und folglich auch die ganze ſtetige Folge ihrer Projectionen auf der Ebene der xy erhalten wird, wenn man, y ungeändert laſſend, x ſich ſtetig verändern läßt, ſo daß man alſo in der Gleichung

$$y' - y = p(x' - x),$$

wenn man auf dieſelbe das Verfahren in (11.) anwendet, bloß x als variabel zu betrachten braucht. Eliminirt man dann x aus den beiden nach dieſem Verfahren erhaltenen Gleichungen, ſo muß y zugleich mit wegfallen, da die Gleichung der Projection der Wendungscurve natürlich von y nicht abhängig ſeyn kann. Daß man auf dieſelbe Weiſe auch umgekehrt x als conſtant, y als variabel betrachten kann, verſteht ſich von ſelbſt. Das allgemeine Verfahren bleibt dann immer daſſelbe. Betrachtet man in obiger Gleichung x als variabel, ſo ſind die beiden Gleichungen, aus denen, um die Projection der Wendungscurve zu erhalten, x eliminirt werden muß:

$$y' - y = p(x' - x),$$

$$p - (x' - x)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0,$$

und y muß dann von ſelbſt mit wegfallen. Betrachtet man y als variabel, ſo muß man y aus den beiden Gleichungen

$$y' - y = p(x' - x),$$

$$1 + (x' - x)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0$$

eliminiren, und x muß dann von ſelbſt mit wegfallen. Man hat zu bemerken, daß die beiden Gleichungen

$$p - (x' - x)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0,$$

$$1 + (x' - x)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0$$

identiſch ſind. Multiplicirt man nämlich die zweite Gleichung mit p, ſo kommt:

$$p + (x' - x)\,p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0.$$

Nach (6.) iſt aber

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0,\ p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right);$$

folglich

$$p - (x' - x)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0,$$

welches die erſte Gleichung iſt.

13. Nach (10.) iſt

$$z = \frac{ax}{12b^2}(a^2x^2 + 6by) + \frac{1}{12b^2}\sqrt{(4by + a^2x^2)^3}$$

die Gleichung einer developpablen Fläche. Aus derſelben findet man

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{ax + \sqrt{4by + a^2x^2}}{2b}, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{4by + a^2x^2}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{a\{ax + \sqrt{4by + a^2x^2}\}}{2b\sqrt{4by + a^2x^2}}.$$

Folglich

$$p = -\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)} = -\frac{a}{2b}\{ax + \sqrt{4by + a^2x^2}\},$$

und demnach die allgemeine Gleichung der Projectionen der erzeugenden Geraden auf der Ebene der xy:

$$y' - y + \frac{a}{2b}\{ax + \sqrt{4by + a^2x^2}\}(x' - x) = 0.$$

Differentiirt man dieſe Gleichung, indem x ungeändert bleibt, in Bezug auf y; ſo erhält man

$$-1 + \frac{a(x' - x)}{\sqrt{4by + a^2x^2}} = 0, \quad \frac{a(x' - x)}{\sqrt{4by + a^2x^2}} = 1,$$

und dieſelbe Gleichung ergiebt ſich nach dem Obigen, wenn man, y ungeändert laſſend, in Bezug auf x differentiirt. Aus den Gleichungen

$$y' - y + \frac{a}{2b}\{ax + \sqrt{4by + a^2x^2}\}(x' - x) = 0,$$

$$a(x' - x) = \sqrt{4by + a^2x^2}$$

muß man nun, um die Projection der Wendungscurve auf der Ebene der xy zu finden, x oder y eliminiren. Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$ax + \sqrt{4by + a^2x^2} = ax'.$$

Dadurch wird die erſte Gleichung

$$y' - y + \frac{a^2}{2b}x'(x' - x) = 0,$$

$$4by' - 4by + 2a^2x'(x' - x) = 0.$$

Aber

$$a^2(x'-x)^2 = 4by + a^2x^2,$$

$$4by = a^2(x'^2 - 2xx').$$

Folglich iſt

$$4by' - a^2(x'^2 - 2xx') + 2a^2x'(x'-x) = 0,$$

d. i.

$$4by' + a^2x'^2 = 0,\ y' = -\frac{a^2}{4b}x'^2$$

die geſuchte Gleichung der Projection der Wendungscurve auf der Ebene der xy.

Um die Projection der Wendungscurve auf der Ebene der xz zu finden, muß man y' aus den Gleichungen

$$z' = \frac{ax'}{12b^3}(a^2x'^2 + \text{[illegible]}) + \frac{1}{12b^2}\sqrt{(4by'+a^2x'^2)^3},$$

$$4by' + a^2x'^2 = 0$$

eliminiren, wie leicht erhellet. Dies giebt für dieſe Projection die Gleichung:

$$z' = -\frac{a^3}{24b^2}x'^3.$$

Die Gleichung der Projection der Wendungscurve auf der Ebene der yz erhält man, wenn man x' aus den beiden Gleichungen

$$y' = -\frac{a^2}{4b}x'^2,\ z' = -\frac{a^3}{24b^2}x'^3$$

eliminirt. Dies giebt

$$-\frac{y'^2}{9b} = z'^2.$$

Wir wollen nun noch die Wendungscurve der coniſchen Flächen ſuchen. Nach (8.) iſt die allgemeine Gleichung der Projectionen der Erzeugenden auf der Ebene der xy:

$$(x-a)(y'-y) - (y-b)(x'-x) = 0.$$

Differentiirt man nach x, ſo erhält man

$$(y'-y) + (y-b) = 0,\ y' = b,$$

welches die geſuchte Gleichung iſt. Differentiirt man nach y, ſo erhält man

$$-(x-a) - (x'-x) = 0,\ x' = a,$$

welches ebenfalls die geſuchte Gleichung iſt. Man ſieht alſo, daß die Projection der Wendungscurve auf der Ebene der xy ein durch die Coordinaten $x' = a$, $y' = b$ beſtimmter Punkt iſt.

14. Man kann die Projectionen der Wendungscurve noch auf eine andere Art finden. Da nämlich nach (5.) und (6.) für jede Lage der erzeugenden Linie

$$\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \partial q = 0$$

iſt; ſo iſt für jede Lage der erzeugenden Linie

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q$$

conſtant, und nach (10.) iſt alſo

$$y = -xf'q + F'q$$

für irgend ein conſtantes q die Gleichung der Projection einer erzeugenden Linie auf der Ebene der xy. Die ſtetige Folge dieſer Projectionen erhält man, wenn man q variiren läßt. Um alſo die Projection der Wendungscurve auf der Ebene der xy zu finden, muß man nach den allgemeinen Principien in (11.) die Gleichung

$$y + xf'q - F'q = 0$$

nach q differentiiren, wodurch man die Gleichung

$$xf''q - F''q = 0$$

erhält. Aus dieſer und der vorhergehenden Gleichung muß man nun q eliminiren, welches die geſuchte Gleichung der Projection der Wendungscurve giebt. Für die in (13.) betrachtete Curve iſt nach (10.)

$$y + axq - bq^2 = 0;$$

folglich, wenn man nach q differentiirt:

$$ax - 2bq = 0, \quad q = \frac{ax}{2b}.$$

Alſo

$$y + \frac{a^2x^2}{2b} - \frac{a^2x^2}{4b} = y + \frac{a^2x^2}{4b} = 0,$$

$$y = -\frac{a^2}{4b}x^2,$$

wie vorher. Eben ſo hat man nach (10.)

$$z = \tfrac{2}{3}bq^3 - \tfrac{1}{2}axq^2;$$

folglich, wenn man nach q differentiirt:

$$2bq^2 - axq = 0, \quad 2bq - ax = 0, \quad q = \frac{ax}{2b};$$

$$z = \frac{a^3x^3}{12b^2} - \frac{a^3x^3}{8b^2} = -\frac{a^3x^3}{24b^2} = -\frac{a^3}{24b^2}x^3,$$

wie vorher.

15. Mehrere der obigen allgemeinen Formeln laſſen ſich noch unter andern Formen darſtellen, welche zum Theil der Aufmerkſamkeit nicht unwerth ſind, und daher hier noch entwickelt werden ſollen. Die Gleichung der Projection der dem Punkte (x, y, z) der developpablen Fläche entſprechenden erzeugenden Geraden iſt nach dem Obigen

$$y' - y = p(x' - x)$$

für

$$p = -\frac{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)}{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}} = -\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)}.$$

Für

$$q' = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ q = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

iſt

$$\partial z = q'\partial x + q\partial y.$$

Aber

$$\partial q' = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\partial x + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\partial y,$$

$$\partial q = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\partial x + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\partial y,$$

oder der Kürze wegen nach einer ſchon oft gebrauchten Bezeichnung:

$$\partial q' = r\partial x + s\partial y,\ \partial q = s\partial x + t\partial y.$$

Folglich

$$\frac{\partial q'}{\partial q} = \frac{r\partial x + s\partial y}{s\partial x + t\partial y} = \frac{rs\partial x + s^2\partial y}{s^2\partial x + st\partial y} = \frac{rs\partial x + rt\partial y}{s^2\partial x + st\partial y},$$

weil bekanntlich $s^2 = rt$ iſt. Folglich

$$\frac{\partial q'}{\partial q} = \frac{r(s\partial x + t\partial y)}{s(s\partial x + t\partial y)} = \frac{r}{s} = -p;$$

alſo

$$y' - y = -\frac{\partial q'}{\partial q}(x' - x)$$

die Gleichung der Projection der durch den Punkt (x, y, z) der developpablen Fläche gehenden erzeugenden Geraden auf der Ebene der xy. Will man die Gleichung der Projection auf der Ebene der xz haben, ſo hat man nach dem Obigen:

$$\partial y = \frac{1}{q}\partial z - \frac{q'}{q}\partial x,$$

und die Gleichung der in Rede ſtehenden Projection iſt alſo:

$$x' - x = -\frac{\partial\left(\frac{1}{q}\right)}{\partial\left(-\frac{q'}{q}\right)}(z' - z) = \frac{\partial\left(\frac{1}{q}\right)}{\partial\left(\frac{q'}{q}\right)}(z' - z).$$

Aber

$$\partial\left(\frac{1}{q}\right) = -\frac{\partial q}{q^2},\ \partial\left(\frac{q'}{q}\right) = \frac{q\partial q' - q'\partial q}{q^2},$$

und folglich vorſtehende Gleichung:

$$x' - x = \frac{\partial q}{q'\partial q - q\partial q'}(z' - z).$$

Um die Gleichung der Projectionen auf der Ebene der yz zu finden hat man:

$$\partial x = \frac{1}{q'}\partial z - \frac{q}{q'}\partial y,$$

$$y' - y = -\frac{\partial\left(\frac{1}{q'}\right)}{\partial\left(-\frac{q}{q'}\right)}(z' - z) = \frac{\partial\left(\frac{1}{q'}\right)}{\partial\left(\frac{q}{q'}\right)}(z' - z),$$

$$\partial\left(\frac{1}{q'}\right) = -\frac{\partial q'}{q'^2},\ \partial\left(\frac{q}{q'}\right) = \frac{q'\partial q - q\partial q'}{q'^2};$$

folglich

$$y' - y = -\frac{\partial q'}{q'\partial q - q\partial q'}(z' - z).$$

Iſt alſo

$$\partial z = q'\partial x + q\partial y,$$

ſo ſind die Gleichungen der Projectionen der durch den Punkt (x, y, z) der developpablen Fläche gehenden erzeugenden Geraden auf der Ebene der xy, xz, yz reſpective:

$$y' - y = -\frac{\partial q'}{\partial q}(x' - x),$$

$$x' - x = \frac{\partial q}{q'\partial q - q\partial q'}(z' - z),$$

$$y' - y = -\frac{\partial q'}{q'\partial q - q\partial q'}(z' - z).$$

Jede dieſer Gleichungen iſt, wie man ſogleich ſieht, eine unmittelbare Folge aus den beiden andern. Ihrer Form wegen ſind dieſelben merkwürdig, zur wirklichen Anwendung ſind aber die frühern Vorſchriften weit bequemer. Das einfache Beiſpiel, welches Lacroix, dem dieſe Gleichungen angehören, im Traité du calcul diff. et int. T. I. p. 645. beibringt, läßt ſich viel einfacher nach unſern frühern Vorſchriften auf folgende Art behandeln. Iſt nämlich α der conſtante Winkel, welchen bei einem geraden Kegel die erzeugende Linie mit der Axe, die wir als Axe der z, die Spitze des Kegels als Anfang der Coordinaten annehmen wollen, einſchließt; ſo iſt offenbar

$$z^2 \operatorname{tang} \alpha^2 = x^2 + y^2$$

oder, für $\cot \alpha = k$:

$$z = k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Folglich

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = kx(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -kxy(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = k(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} - kx^2(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$p = \frac{(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}}{xy(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}},$$

oder, wenn man im Zähler und Nenner mit $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt:

$$p = \frac{1-x^2(x^2+y^2)^{-1}}{xy(x^2+y^2)^{-1}} = \frac{x^2+y^2-x^2}{xy} = \frac{y}{x},$$

und folglich die Gleichung der Projection der erzeugenden Linie auf der Ebene der xy:

$$y' - y = \frac{y}{x}(x' - x),\ xy' = yx'.$$

Auf ganz ähnliche Art findet man die andern Projectionen. Für die Wendungscurve muß man dieſe Gleichung nach x oder y differentiiren. Dies giebt $y' = 0$, $x' = 0$; alſo auch $z' = 0$. Die Wendungscurve iſt folglich ein Punkt, nämlich die Spitze. Lacroix hat a. a. O. mehrere den obigen ähnliche Formeln auch für die Wendungscurve mitgetheilt, die zwar wegen ihrer Form merkwürdig, zur wirklichen Anwendung aber nicht eben bequem ſind.

16. Wir kehren jetzt noch auf einen Augenblick zu den verſchiedenen Arten zurück, wie man ſich nach (4.) die Entſtehung einer developpablen Fläche denken kann, um zu zeigen, daß alle dieſe verſchiedenen Anſichten zu derſelben allgemeinen Gleichung developpabler Flächen führen. Läßt man dieſelben durch die Bewegung einer geraden Linie entſtehen, welche ſtets eine gegebene doppelt gekrümmte Linie berührt; ſo ſeyen

$$x = fz,\ y = Fz$$

die Gleichungen dieſer Curve, und für irgend einen Punkt derſelben $z = a$, alſo

$$x = fa,\ y = Fa.$$

Die Gleichungen der durch dieſen Punkt gehenden Berührenden der gegebenen Curve ſind nach dem Art. Berührung (18.) i. d. Z.

$$x - fa = (z-a)f'a,$$
$$y - Fa = (z-a)F'a,$$

wenn $f'a$, $F'a$ die Differentialquotienten von fa, Fa bezeichnen. Eliminirt man a aus dieſen beiden Gleichungen, ſo iſt das Reſultat der Elimination offenbar die geſuchte Gleichung der developpablen Fläche. Die auf dieſe Weiſe hervorgehende Gleichung iſt eine Gleichung zwiſchen x, y, z, in welcher alſo x, y als unabhängige veränderliche Größen betrachtet werden können. z iſt dann Function von x und y. Um die Elimination von a auszuführen, differentiire man die erſte der beiden obigen Gleichungen nach x, die zweite nach y; ſo kommt:

$$1 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) f'a, \; 1 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) F'a\,;$$

d. i. in der oben eingeführten Bezeichnung:

$$1 = q'f'a, \; 1 = qF'a\,.$$

Denkt man ſich aus dieſen beiden Gleichungen a eliminirt, ſo iſt klar, daß q′ eine Function von q iſt, und folglich

$$q' = \varphi q$$

geſetzt werden kann. Alſo iſt

$$\left(\frac{\partial q'}{\partial x}\right) = \varphi' q \cdot \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right), \; \left(\frac{\partial q'}{\partial y}\right) = \varphi' q \cdot \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right),$$

und folglich durch Diviſion

$$\frac{\left(\frac{\partial q'}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial q'}{\partial y}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)}, \; \frac{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)}{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)},$$

d. i. $\frac{r}{s} = \frac{s}{t}$, $rt = s^2$, welches die ſchon oben gefundene allgemeine Gleichung der developpablen Flächen iſt.

Ganz zu demſelben Reſultat gelangt man, wenn man nach (4.) die developpablen Flächen ſich auf die dort näher bezeichnete Art durch Bewegung einer Ebene beſchrieben denkt. Größerer Deutlichkeit wegen wollen wir, welches offenbar, ohne der Allgemeinheit zu ſchaden, verſtattet iſt, annehmen, daß die Bewegung der in Rede ſtehenden Ebene auf eine ſolche Art gewiſſermaßen regulirt werde, daß dieſelbe bei ihrer Bewegung ſtets auf einer beliebigen gegebenen doppelt gekrümmten Curve normal iſt. Iſt nun überhaupt

$$z = Ax + By + C$$

die Gleichung der ſich bewegenden Ebene, und für irgend einen Punkt der gegebenen Curve

$$z = a, \; x = fa, \; y = Fa\,;$$

ſo iſt die Lage der Ebene durch die doppelte Bedingung, daß ſie durch dieſen Punkt gehen, und auf der gegebenen Curve normal ſeyn ſoll, vollkommen beſtimmt, und A, B, C ſind folglich im Allgemeinen Functionen von a, ſo daß man alſo

$$z = x\varphi a + y\psi a + \chi a$$

ſetzen kann. Weil aber

$$\varphi a = A, \; \psi a = B, \; \chi a = C$$

iſt, ſo erhellet, wenn man ſich nur aus der erſten und dritten, ſo wie aus der zweiten und dritten Gleichung a eliminirt denkt, daß A und B Functionen von C ſind, alſo, wenn wir jetzt Θ für C ſchreiben, die willkührlichen Functionszeichen φ, ψ aber auch hier beibehalten, überhaupt

$$z = x\varphi\Theta + y\psi\Theta + \Theta$$

geſetzt werden kann. Differentiirt man dieſe Gleichung partiell nach x und y, ſo kommt:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = q' = \varphi\Theta, \ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q = \psi\Theta,$$

woraus, wenn man ſich Θ eliminirt denkt, wieder folgt, daß q' Function von p, folglich, ganz wie vorher, $rt = s^2$ iſt. Ferner iſt nach dem Obigen

$$\Theta = z - x\varphi\Theta - y\psi\Theta = z - q'x - qy;$$

folglich für alle developpablen Flächen

$$q' = \varphi(z - q'x - qy),$$
$$q = \psi(z - q'x - qy).$$

17. Mehr Unterſuchungen über abwickelbare Flächen findet man in den Werken von Brandes (Thl. II. S. 331.) und Littrow (S. 263.) über analytiſche Geometrie, und daß auch Monge Application de l'Analyse à la Géométrie vorzüglich hierher gehört, verſteht ſich, wie überall in der analytiſchen Geometrie, von ſelbſt. Die Hauptgleichung $rt = s^2$ entwickelt auch Lagrange in der Théorie des fonctions. p. 225. Die erſten analytiſchen Unterſuchungen verdankt man Euler: Invenire aequationem generalem pro omnibus solidis, quorum superficiem in planum explicare licet. Nov. Comm. Petrop. T. XVI. Vorzüglich gehört auch hierher: Mémoire sur les proprietés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulierement sur celles des surfaces developpables, avec une application à la théorie des ombres et penombres par Monge. Mém. de Mathém. et de Phys. T. IX. p. 382. Von beſonderm Intereſſe iſt die Aufgabe: Die developpable Fläche zu finden, welche zwei ihrer Lage und Geſtalt nach gegebene krumme Flächen berührt. Iſt eine der beiden Flächen leuchtend, die andere dunkel, ſo werden die berührenden developpablen Flächen den Schatten und den Halbſchatten des dunkeln Körpers begränzen, und die Berührungscurven auf den beiden Flächen werden diejenigen ſeyn, welche auf der dunkeln Fläche den beleuchteten Theil von dem dunkeln trennen, und die auf der leuchtenden Fläche denjenigen Theil, welcher ſein Licht auf die dunkle Fläche ſendet, von dem abſondern, deſſen Strahlen die dunkle Fläche nicht mehr erreichen. In dieſer Beziehung iſt das Problem auch in der Aſtronomie von Wichtigkeit. Ueber den Einfluß, welchen die ſphäroidiſche Geſtalt des Jupiters auf die Dauer der durch ihn ſelbſt verurſachten Verfinſterungen ſeiner Monde hat, ſ. m. die Mécanique céleste. T. IV. p. 105. Ein anderes intereſſantes Problem iſt die Aufgabe: Wenn auf einer developpablen Fläche eine Curve verzeichnet iſt, die Geſtalt dieſer Curve zu beſtimmen, nachdem die krumme Fläche in eine Ebene developpirt worden iſt, und umgekehrt: Wenn eine Curve in einer Ebene

verzeichnet iſt, die Geſtalt derſelben zu beſtimmen, wenn die Ebene auf eine gegebene Fläche gewickelt worden iſt. Außer Littrow a. a. O. S. 279. ſ. m. über dieſe Aufgaben vorzüglich Lacroix Traité. T. I. p. 636. und Mémoires présentés à l'Institut de France. T. I. II. Auf ſolche ſpeciellere Unterſuchungen einzugehen, geſtattet hier der Raum nicht, und wir müſſen uns daher begnügen, in dem Obigen, größtentheils auf eigenthümliche Weiſe, die allgemeinen Bedingungen der Developpabilität der Flächen vollſtändig entwickelt und ſtreng bewieſen, nnd Anleitung zur Beſtimmung der Lage der erzeugenden Geraden und der Wendungscurve gegeben zu haben. M. vergl. auch endlich noch Thl. III. S. 338. dieſes Wörterbuchs. Geometriſche Unterſuchungen über developpable Flächen enthalten die Lehrbücher der deſcriptiven Geometrie, wie z. B. Lacroix Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes. éd. 4. Paris. 1812. p. 93.

18. Wir gehen nun zu der allgemeinen Theorie der Abwickelung doppelt gekrümmter Linien über, indem wir uns dabei ganz an Monge anſchließen. Sey in Fig. 7. ab eine beliebige Curve und AA', A'A'', A''A''', u. ſ. f. beliebige auf einander folgende unendlich kleine Elemente derſelben. Durch A, A', A'', A''',.... denke man ſich Ebenen gelegt, welche auf der Curve ab, d. i. auf den durch A, A', A'', A''',.... an dieſelbe gezogenen Berührenden ſenkrecht ſind. Die ſucceſſiven Durchſchnittslinien dieſer normalen Ebenen ſeyen KL, K'L', K''L'', K'''L''', u. ſ. f. Von A denke man ſich jetzt in der Ebene ML auf KL das Perpendikel AO gefällt, und ziehe in der folgenden normalen Ebene M'L' die Linie A'O, ſo iſt, weil AA' auf ML und AO auf KL ſenkrecht iſt, nach einem bekannten ſtereometriſchen Elementarſatze auch A'O auf KL ſenkrecht, und AO iſt $=$ A'O, weil AA' als ein unendlich kleiner Kreisbogen betrachtet werden kann. Nimmt man nun in KL einen willkührlichen Punkt B an, ſo iſt, weil BO auf AO und A'O ſenkrecht, und AO $=$ A'O iſt, auch AB $=$ A'B, und der Winkel ABO iſt dem Winkel A'BO gleich. Dreht man alſo den Winkel ABO um BO als eine Axe herum, ſo wird der Punkt A das Element AA' der Curve ab beſchreiben. Verlängert man jetzt A'B, bis dieſelbe die Durchſchnittslinie K'L' in B' ſchneidet, und zieht A''B', ſo wird durch eine ganz ähnliche Drehung ſich das Element A'A'', und, wenn man A''B' verlängert, bis dieſelbe K''L'' in B'' ſchneidet, dann A'''B'' zieht, wieder auf ganz ähnliche Art ſich das Element A''A''' beſchreiben laſſen, u. ſ. f. Denkt man ſich nun aber eine Ebene ſo bewegt, daß ſie ſtets auf der gegebenen Curve ab ſenkrecht iſt, ſo werden die ſucceſſiven Durchſchnittslinien KL, K'L', K''L'', u. ſ. f. der verſchiedenen auf einander folgenden Lagen dieſer Ebene eine gewiſſe developpable Fläche bilden (4.), und die gebrochene Linie BB'B''B'''.... wird in eine ſtetige auf dieſer developpablen Fläche liegende Curve übergehen, welche nach dem Vorhergehenden offenbar die Eigenſchaft hat, daß, wenn man ſich um die-

ſelbe einen Faden gelegt und dieſen Faden nach und nach von der Curve $BB'B''B'''$.... abgewickelt denkt, von dem Endpunkte dieſes Fadens die gegebene Curve ab beſchrieben werden kann, ſo daß alſo $BB'B''B'''$.... eine Evolute von ab oder $AA'A''A'''$...., dieſe aber in Bezug auf jene die Evolvente iſt. Daß AB, $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$,.... ſämmtlich ſowohl Berührende der Linie $BB'B''B'''$..., als auch der von der ſich bewegenden Ebene beſchriebenen developpablen Fläche ſind, iſt ohne weitere Erinnerung klar. Die Richtung der erſten Berührenden AB iſt völlig willkührlich, woraus alſo erhellet, daß jede Curve eigentlich unendlich viele Evoluten hat, die aber ſämmtlich auf einer developpablen Fläche liegen, welche von einer ſich bewegenden Ebene beſchrieben wird, die bey ihrer Bewegung ſtets auf der gegebenen Curve ſenkrecht iſt, und dieſe developpable Fläche iſt alſo der geometriſche Ort aller Evoluten der gegebenen Curve, auch wird dieſe Fläche von der Linie AB in allen ihren Lagen berührt. Daß alle dieſe Betrachtungen auch für Curven einfacher Krümmung gelten, verſteht ſich von ſelbſt. In dieſem Falle iſt der geometriſche Ort aller Evoluten der gegebenen Curve offenbar eine auf der Ebene, in welcher dieſelbe liegt, ſenkrechte Cylinderfläche, und unter allen Evoluten iſt nur die Durchſchnittslinie dieſer Cylinderfläche mit der Ebene, in welcher die gegebene Curve liegt, eine Curve von einfacher Krümmung; alle übrigen auf der Cylinderfläche liegende Evoluten ſind doppelt gekrümmte Curven.

19. Sind nun

$$x = \varphi z, \quad y = \psi z$$

die Gleichungen einer beliebigen doppelt gekrümmten Curve, ſo wollen wir jetzt zunächſt die Gleichung der developpablen Fläche ſuchen, auf welcher alle Evoluten derſelben liegen. Zu dem Ende ſey für irgend einen beliebigen Punkt unſerer Curve $z = a$, alſo $x = \varphi a$, $y = \psi a$. Die Gleichung der durch dieſen Punkt gehenden Normalebene unſerer Curve iſt nach dem Artikel Berührung (18.) i. d. Z.

$$(x - \varphi a)\varphi' a + (y - \psi a)\psi' a + z - a = 0\,.$$

Die Gleichung der nächſt folgenden Normalebene iſt

$$\{x - \varphi(a + \partial a)\}\varphi'(a + \partial a) + \{y - \psi(a + \partial a)\}\psi'(a + \partial a) + z - (a + \partial a) = 0.$$

Für die Durchſchnittslinie der beiden Normalebenen gelten dieſelben x, y, z in dieſen beiden Gleichungen, oder man muß für dieſe Durchſchnittslinie x, y, z in beiden Gleichungen einander gleich ſetzen, oder dieſe Gleichungen ſind ſelbſt die Gleichungen der in Rede ſtehenden Durchſchnittslinie. Zieht man die erſte Gleichung von der zweiten ab, ſo iſt die Differenz der beiden Functionen auf der linken Seite der Gleichheitszeichen auch $= 0$. Dieſe Differenz iſt aber, da man ſich ∂a unendlich klein denken muß, offenbar das Differential von

$$(x - \varphi a)\varphi' a + (y - \psi a)\psi' a + z - a\,,$$

bloß in Bezug auf a genommen, ſo daß alſo auch dieſes Differential, und folglich auch der Differentialquotient, d. i. das durch ∂a dividirte Differential, $= 0$ iſt. Differentiirt man alſo vorſtehende Function nach a, ſo erhält man als Gleichungen der Durchſchnittslinie jeder zwey nächſten Normalebenen auf der Stelle:

$$(x - \varphi a)\varphi' a + (y - \psi a)\psi' a + z - a = 0\,,$$
$$(x - \varphi a)\varphi'' a + (y - \psi a)\psi'' a - \{1 + (\varphi' a)^2 + (\psi' a)^2\} = 0\,.$$

Die Linie, welcher dieſe beiden Gleichungen entſprechen, liegt ganz in der developpablen Fläche, deren Gleichung geſucht wird, und es werden alſo dieſe Gleichungen offenbar auch für jeden Punkt, deſſen Coordinaten x, y, z ſind, dieſer developpablen Fläche Statt finden. Will man alſo eine Relation zwiſchen den Coordinaten x, y, z jedes Punktes der developpablen Fläche, d. i. die Gleichung dieſer Flächen haben, ſo muß man aus vorſtehenden zwey Gleichungen a eliminiren, wodurch man die geſuchte Gleichung der developpablen Fläche erhält.

Der Punkt, in welchem die Durchſchnittslinie zweier nächſten Normalebenen von der Durchſchnittslinie der beiden folgenden nächſten Normalebenen geſchnitten wird, iſt derjenige Punkt, für welchen x, y, z ungeändert bleiben, wenn a ſich um das unendlich kleine ∂a ändert. Sind alſo x, y, z die Coordinaten dieſes Durchſchnittspunktes, ſo hat man für dieſelben nach dem Obigen die Gleichungen

$$(x - \varphi a)\varphi' a + (y - \psi a)\psi' a + z - a = 0\,,$$
$$(x - \varphi a)\varphi'' a + (y - \psi a)\psi'' a - \{1 + (\varphi' a)^2 + (\psi' a)^2\} = 0$$

und

$$\left.\begin{array}{r}\{x - \varphi(a + \partial a)\}\,\varphi'(a + \partial a) + \{y - \psi(a + \partial a)\}\,\psi'(a + \partial a)\\ + z - (a + \partial a)\end{array}\right\} = 0\,,$$
$$\left.\begin{array}{r}\{x - \varphi(a + \partial a)\}\,\varphi''(a + \partial a) + \{y + \psi(a + \partial a)\}\,\psi''(a + \partial a)\\ - \{1 + [\varphi'(a + \partial a)]^2 + [\psi'(a + \partial a)]^2\end{array}\right\} = 0\,.$$

Durch ein ganz ähnliches Raiſonnement, wie vorher bei der Beſtimmung der Gleichung der developpablen Fläche, die erſte und dritte Gleichung mittelſt Subtraction zu der zweiten führten, führen hier die erſte und dritte, und die zweite und vierte Gleichung mittelſt Subtraction zu folgenden zwei oder, wenn wir mit denſelben die erſte Gleichung verbinden, zu folgenden drei Gleichungen:

$$(x - \varphi a)\varphi' a + (y - \psi a)\psi' a + z - a = 0\,,$$
$$(x - \varphi a)\varphi'' a + (y - \psi a)\psi'' a - \{1 + (\varphi' a)^2 + (\psi' a)^2\} = 0\,,$$
$$(x - \varphi a)\varphi''' a + (y - \psi a)\psi''' a - 3\{\varphi' a . \varphi'' a + \psi' a . \psi'' a\} = 0\,.$$

So wie man nämlich die zweite dieſer drei Gleichungen nach dem oben gebrauchten Raiſonnement aus der erſten erhält, wenn man dieſe nach a differentiirt, ergiebt ſich auch ganz auf dieſelbe Weiſe die dritte aus der zweiten durch Differentiation nach a.

Dieſe drei Gleichungen gehören alſo für die Coordinaten jedes Durchſchnittspunktes zweier nächſten geraden erzeugenden Linien der developpablen Fläche. Die ſucceſſive Folge dieſer Durchſchnittspunkte bildet die Wendungscurve der developpablen Fläche, und man wird alſo allgemeine Relationen zwiſchen den Coordinaten jedes Punktes der Wendungscurve, d. i. die Gleichungen derſelben erhalten, wenn man aus den drei obigen Gleichungen die Größe a eliminirt. Die Wendungscurve iſt keine Evolute der gegebenen Curve, obgleich ſie, wie alle Evoluten, in der developpablen Fläche liegt, weil keine Berührende der Wendungscurve durch die gegebene Curve gehen kann, da alle dieſe Berührenden ihrer ganzen Länge nach in der developpablen Fläche liegen.

20. Seyen nun die Evoluten einer beliebigen durch die Gleichungen

$$x = \varphi z, \quad y = \psi z$$

charakteriſirten doppelt gekrümmten Curve zu finden.

Die Berührende der Evolute in dem beliebigen Punkte (x, y, z) derſelben geht immer durch einen gewiſſen Punkt der gegebenen Curve, deſſen Coordinaten im Allgemeinen φa, ψa, a ſeyn mögen. Auf der Stelle überzeugt man ſich aber auch, daß die Berührende der Projection der Evolute auf einer der coordinirten Ebenen, z. B. der Ebene der xz, in dem Punkte (x, z) dieſer Projection durch den Punkt (φa, a) der Projection der gegebenen Curve auf derſelben coordinirten Ebene gehen muß. Da nun nach dem Art. Berührung (3.) i. d. Z. die Gleichung der in Rede ſtehenden Berührenden der Projection der Evolute

$$z' - z = \frac{\partial z}{\partial x}(x' - x)$$

iſt, und dieſe Berührende durch den Punkt (φa, a) geht; ſo iſt

$$a - z = \frac{\partial z}{\partial x}(\varphi a - x),$$

oder

$$z - a = \frac{\partial z}{\partial x}(x - \varphi a) \ldots\ldots\ldots (1)$$

Weil aber die Evolute auf der in (19.) beſtimmten developpablen Fläche liegt, ſo finden zwiſchen den Coordinaten x, y, z eines jeden Punktes derſelben und zwiſchen a auch die beiden folgenden dort gefundenen Gleichungen Statt:

$$(x - \varphi a)\varphi' a + (y - \psi a)\psi' a + z - a = 0 \ldots\ldots (2),$$

$$(x - \varphi a)\varphi'' a + (y - \psi a)\psi'' a - \{1 + (\varphi' a)^2 + (\psi' a)^2\} = 0 \ldots (3),$$

und man wird folglich die beiden geſuchten Gleichungen der Evolute erhalten, wenn man a aus den Gleichungen (1), (2), (3) eliminirt. Da die Gleichung (1) den Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}$ enthält, ſo wird, wenn man a aus (2) und (3), dann aus (1)

und (2) oder (1) und (3) eliminirt, die eine der beiden Gleichungen der Evolute jederzeit eine Differentialgleichung der erſten Ordnung ſeyn, durch deren Integration alſo eine willkührliche Conſtante eingeführt wird. Die verſchiedenen Werthe, welche ſich derſelben beilegen laſſen, führen dann zu den unendlich vielen Evoluten, welche die gegebene Curve haben kann. Daß man ſtatt der Gleichung (1) auch eine der beiden Gleichungen

$$z - a = \frac{\partial z}{\partial y}(y - \psi a),$$

$$y - \psi a = \frac{\partial y}{\partial x}(x - \varphi a)$$

ſetzen kann, erhellet aus dem Obigen und aus Berührung (3.).

Die bisherige allgemeine Theorie auf ſpecielle Fälle anzuwenden, erlaubt der Raum nicht, und wir bemerken nur noch, daß ſich die Theorie der Evolution noch bedeutend erweitern und verallgemeinern läßt, indem man z. B., um hier bloß von Curven einfacher Krümmung zu reden, ſich durch alle Punkte einer ſolchen Curve gerade Linien gezogen denken kann, welche dieſelbe ſämmtlich unter einem gegebenen Winkel Θ ſchneiden, und nun die Gleichung der Curve zu beſtimmen ſucht, welche von der ſtetigen Folge der Durchſchnittspunkte dieſer geraden Linien gebildet wird, wobei man ſogleich bemerkt, daß alle dieſe geraden Linien Berührende der auf dieſe Weiſe entſtehenden Curve, welche zuweilen die Evolutoide der gegebenen Curve genannt wird, ſind. Die Evolutoide geht in die Evolute der gegebenen Curve über, wenn man $\Theta = 90°$ ſetzt, und die Theorie der Evoluten iſt alſo hiernach ein bloß ſpecieller Fall der Theorie der Evolutoiden. Wir müſſen uns jedoch hier mit dieſer allgemeinen Notiz begnügen, und verweiſen u. A. auf Littrows ſchon angeführte Analytiſche Geometrie S. 299. Vorzüglich ſ. m. aber auch den Artikel Cauſtiſche Flächen und Linien (32. ff.) i. d. Z.

Evolutoide, ſ. Evolution (20.) i. d. Z.

Evolvente, ſ. Evolution (1.) i. d. Z.

Exponential=Gleichung. Ueber die Gleichung $e^x - x = 0$ ſ. m. Cauchy Leçons sur le calcul différentiel. Paris. 1829. p. 167. 288. Folgende in theoretiſcher Rückſicht bemerkenswerthe Auflöſung der Gleichung

$$a^x + b^{x-n} = c$$

iſt mir vom Herrn Hofrath Nürnberger mitgetheilt worden. Multiplicirt man mit b^n, ſo wird dieſelbe

$$a^x b^n + b^x = cb^n,$$

und folglich, wenn man $b^x = a^z$ ſetzt,

$$a^x b^n + a^z = cb^n.$$

Aber $x \log b = z \log a$, folglich

$$z = \frac{x \log b}{\log a},$$

und daher, wenn man

$$a^x = y, \ \frac{\log b}{\log a} = m$$

ſetzt:

$$y^m + b^n y = cb^n,$$

wodurch alſo die Auflöſung der gegebenen Exponential=Gleichung auf die Auflöſung einer gewöhnlichen algebraiſchen Gleichung zurückgeführt iſt. Hat man nämlich y mittelſt dieſer Gleichung gefunden, ſo iſt

$$x = \frac{\log y}{\log a}.$$

Für die Gleichung $2^x + 4^x = 20$ iſt z. B. $a = 2$, $b = 4$, $n = 0$, $c = 20$, $m = 2$, und folglich die aufzulöſende algebraiſche Gleichung

$$y^2 + y = 20;$$

woraus $y = 4$ und $y = -5$. Für den erſten Werth von y erhält man

$$x = \frac{\log 4}{\log 2} = 2.$$

Der zweite Werth von y giebt einen imaginären Werth von x. Daß die wirkliche Auflöſung der gegebenen Gleichung nach dieſer Methode meiſtens die Kräfte der Algebra überſteigt, erhellet leicht, wenn man nur die Größe

$$m = \frac{\log b}{\log a},$$

durch welche der Grad der aufzulöſenden algebraiſchen Gleichung beſtimmt wird, betrachtet, und namentlich auch darauf Rückſicht nimmt, daß dieſe Größe, wenn b keine ganze Potenz von a iſt, jederzeit ein Bruch iſt, in allen ſolchen Fällen alſo die erhaltene algebraiſche Gleichung erſt rational gemacht werden muß. Auf die gegebene Exponential=Gleichung kann auch die allgemeinere Gleichung

$$a^{x-p} + b^{x-n} = 0$$

leicht reducirt werden.

Exponential=Größe. Ueber die Entwickelung der Exponentialgrößen in Reihen ſ. m. die Artikel Binomiſcher Lehrſatz (29.), Differentialrechnung (33.), Function (12.) i. d. Z. Auch vergl. man die Artikel Taylors Lehrſatz (14. 15. 16. 19—25.), Unbeſtimmte Coefficienten (21.) und den Artikel Differenzen=Rechnung (5. 10. 11.) i. d. Z. Auch den Artikel Convergenz der Reihen (4. 22.) kann man wegen der Convergenz der Reihen für die Exponential=Größen nachſehen.

Exponential=Rechnung. Gruson, calcul d'exposition inventé par lui. Mém. de Berlin. 1798. p. 151. 1799. et 1800. p. 157.

F.

Facultät. Die Theorie der Facultäten hat in den Fällen, wo der Exponent eine poſitive ganze Zahl iſt, nicht die mindeſte Schwierigkeit. In den Fällen aber, wo der Exponent eine gebrochene oder eine negative Zahl iſt, gerieth ſchon Kramp auf Folgerungen, die ihn ſelbſt befremdeten, denen zu Gefallen er aber doch andere, als ausgemacht anerkannte, Lehren aufopfern wollte. Der Grund dieſer Erſcheinung liegt, wie es uns ſcheint, nicht gar fern, und iſt bloß in der zu eingeſchränkten, nur auf den Fall eines poſitiven ganzen Exponenten paſſenden, Definition zu ſuchen, von welcher man bei dieſer wichtigen Lehre ausging. In neueſter Zeit hat ſich unſtreitig Crelle das meiſte Verdienſt um deren beſſere Begründung erworben, wie ſein **Versuch einer allgemeinen Theorie der analytischen Facultäten nach einer neuen Entwickelungsmethode. Berl. 1823**, und ſein treffliches **Mémoire sur la théorie des puissances, des fonctions angulaires et des facultés analytiques. Berl. 1831.** bezeugen. Crelle iſt in der letztern Schrift, die wir hier vorzüglich vor Augen haben, höchſt zweckmäßig von einer ſehr allgemeinen Definition ausgegangen, über die wir, um ihr beſſeres Verſtändniß vorzubereiten, einige einleitende Worte vorausſchicken. Jede Function hat nämlich gewiſſe allgemeine Grundeigenſchaften, aus denen ſich alle übrigen Eigenſchaften derſelben ableiten laſſen, und die man daher zur Erklärung der in Rede ſtehenden Function benutzen muß. Dieſe Eigenſchaften müſſen aber völlig allgemein ſeyn, und dürfen den betreffenden Functionen nicht bloß in ſpeciellen Fällen zukommen. Zwei ſolche ganz allgemeine Eigenſchaften der Potenzen, aus denen alle übrigen abgeleitet werden können, ſind z. B. in den beiden folgenden allgemeinen Gleichungen ausgeſprochen:

$$z^x . z^y = z^{x+y}, \quad (z^x)^y = z^{xy} .$$

Man könnte und ſollte daher, wie auch Crelle in der angeführten trefflichen Schrift gethan hat, in der Analyſis die Potenzen ganz allgemein auf folgende Art definiren:

Jede Function $f(z\,x)$ der beiden veränderlichen Größen z, x, welche für jedes z, x, y den beiden Gleichungen

$$f(z, x) . f(z, y) = f(z, x + y), \quad f\{f(z, x), y\} = f(z, xy)$$

genügt, heißt eine Potenz von z; x heißt der Exponent und z nennt man die Wurzel.

Giebt man die Bezeichnung durch das Functionszeichen auf, und bezeichnet die Potenzen kürzer durch z^x, ſo daß man nämlich dem Symbol der Wurzel das Symbol des Exponenten bloß oben zur rechten Hand beifügt; ſo nehmen die beiden obigen Bedingungsgleichungen die folgende einfachere Geſtalt an:

$$z^x . z^y = z^{x+y}, \ (z^x)^y = z^{xy} .$$

Aus dieſer Definition läßt ſich die ganze Theorie der Potenzen mit poſitiven und negativen, ganzen und gebrochenen Exponenten mit der größten Leichtigkeit und Strenge ableiten, welches aber jetzt natürlich nicht zu unſerm Zwecke gehört. Von einer ähnlichen allgemeinen Definition wollen wir mit Crelle nun auch bei der Theorie der Facultäten ausgehen.

1. Jede Function $f(z, x, y)$ der drei veränderlichen Größen z, x, y, welche für jedes z, x, y, k den drei Gleichungen

1. $f(z, x, y + k) = f(z, x, y) . f(z + yx, x, k)$
2. $f(kz, kx, y) = k^y f(z, x, y)$,
3. $f(z, x, 1) = z$

genügt, heißt eine analytiſche Facultät. z heißt die Baſis oder die Grundzahl, x die Differenz und y der Exponent der Facultät. Der Kürze wegen wollen wir, wie auch Crelle thut, die Facultät $f(z, x, y)$ durch

$$(z, + x)^y$$

bezeichnen, da uns dieſe Bezeichnung vor den übrigen, die man wohl gebraucht hat, manche Vorzüge zu haben ſcheint. Dann erhalten die drei obigen Bedingungsgleichungen die folgende einfachere Geſtalt:

4. $(z, + x)^{y+k} = (z, + x)^y (z + yx, + x)^k$,
5. $(kz, + kx)^y = k^y (z, + x)^y$,
6. $(z, + x)^1 = z$.

2. Setzt man in der Gleichung (4.)

$$y=1, \ k=1; \ y = 2, \ k=1; \ y=3, \ k=1; \ \ldots\ldots ;$$

ſo erhält man, weil natürlich auch $(z, + x)^1 = (z, + x)^1$ iſt, nach und nach:

$$(z, + x)^1 = (z, + x)^1 ,$$
$$(z, + x)^2 = (z, + x)^1 (z + x, + x)^1 ,$$
$$(z, + x)^3 = (z, + x)^1 (z + x, + x)^1 (z + 2x, + x)^1 ,$$
$$(z, + x)^4 = (z, + x)^1 (z + x, + x)^1 (z + 2x, + x)^1 (z + 3x, + x)^1 ,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Folglich allgemein

$$(z, + x)^n = (z, + x)^1 (z + x, + x)^1 (z + 2x, + x)^1 \ldots (z + (n-1)x, + x)^1 .$$

Aber nach der Gleichung (6.) für jedes z und x

$$(z, + x)^1 = z .$$

Folglich

$$(z, + x)^n = z(z + x)(z + 2x)(z + 3x) \ldots (z + (n-1)x) ,$$

und daher für jedes ganze poſitive y:

7. $(z, + x)^y = z(z + x)(z + 2x)(z + 3x) \ \ldots \ (z + (y-1)x)$.

Für $x = 0$ iſt, wie hieraus unmittelbar folgt,

$$8.\quad (z, +0)^y = z^y,$$

wenn nämlich y eine poſitive ganze Zahl iſt.

Unter derſelben Vorausſetzung wird die Gleichung (5.) nach (7.)

$$kz(kz+kx)(kz+2kx)\ldots(kz+(y-1)kx)$$
$$= k^y z(z+x)(z+2x)\ldots(z+(y-1)x),$$

d. i. eine identiſche Gleichung, ſo daß alſo, wenn y eine poſitive ganze Zahl iſt, durch

$$(z, +x)^y = z(z+x)(z+2x)\ldots\ldots(z+(y-1)x)$$

in der That allen drei Bedingungsgleichungen genügt wird, wie es erforderlich iſt.

Setzt man in der Gleichung (4.) $y = 0$, $k = 1$; ſo erhält man

$$(z, +x)^1 = (z, +x)^0.(z, +x)^1,$$

d. i., weil nach der Gleichung (6.)

$$(z, +x)^1 = z$$

iſt:

$$z = (z, +x)^0.z.$$

Folglich

$$9.\quad (z, +x)^0 = 1.$$

Setzt man in der Gleichung (4.) $y = -y$, $k = y$; ſo erhält man

$$(z, +x)^0 = (z, +x)^{-y}(z-yx, +x)^y.$$

Alſo nach (9.)

$$10.\quad (z, +x)^{-y} = \frac{1}{(z-yx, +x)^y},$$

und folglich nach (7.), wenn y eine poſitive ganze Zahl iſt:

$$11.\quad (z, +x)^{-y} = \frac{1}{(z-x)(z-2x)(z-3x)\ldots(z-yx)}.$$

Folglich für $y = 1$:

$$12.\quad (z, +x)^{-1} = \frac{1}{z-x},$$

und, wenn man $-x$ für x ſetzt:

$$13.\quad (z, -x)^{-1} = \frac{1}{z+x}.$$

In dem Falle eines negativen ganzen Exponenten wird die Gleichung (5.) nach (11.):

$$\frac{1}{(kz-kx)(kz-2kx)(kz-3kx)\ldots(kz-ykx)}$$
$$= \frac{1}{k^y(z-x)(z-2x)(z-3x)\ldots(z-yx)},$$

d. i. ebenfalls identiſch.

Für $x = 0$ ergiebt ſich aus (11.)

$$14.\quad (z, + 0)^{-y} = \frac{1}{z^y} = z^{-y}.$$

Für $z = 0$ erhält man aus (11.)

$$15.\quad (0, + x)^{-y} = \frac{(-1)^y}{x.2x.3x.4x.....yx}.$$

Sey jetzt $\frac{p}{q}$ ein beliebiger Bruch, wo aber p und q immer ganze Zahlen bezeichnen ſollen und q offenbar als poſitiv angenommen werden kann; ſo erhält man aus (4.) leicht nach und nach:

$$(z, + x)^{\frac{p}{q}} (z + \frac{p}{q}x, + x)^{\frac{p}{q}} = (z, + x)^{\frac{2p}{q}}$$

$$(z, + x)^{\frac{p}{q}} (z + \frac{p}{q}x, + x)^{\frac{p}{q}} (z + \frac{2p}{q}x, + x)^{\frac{p}{q}} = (z, + x)^{\frac{3p}{q}},$$

$$(z, + x)^{\frac{p}{q}} (z + \frac{p}{q}x, + x)^{\frac{p}{q}} (z + \frac{2p}{q}x, + x)^{\frac{p}{q}} (z + \frac{3p}{q}x, + x)^{\frac{p}{q}}$$
$$= (z, + x)^{\frac{4p}{q}},$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Alſo iſt allgemein für jedes ganze poſitive n

$$16.\quad (z, + x)^{\frac{np}{q}} =$$
$$(z, + x)^{\frac{p}{q}} (z + \frac{p}{q}x, + x)^{\frac{p}{q}} (z + \frac{2p}{q}x, + x)^{\frac{p}{q}} \ldots (z + \frac{(n-1)p}{q}x, + x)^{\frac{p}{q}},$$

und folglich, wenn wir $n = q$ ſetzen:

$$17.\quad (z, + x)^p =$$
$$(z, + x)^{\frac{p}{q}} (z + \frac{p}{q}x, + x)^{\frac{p}{q}} (z + \frac{2p}{q}x, + x)^{\frac{p}{q}} .. (z + \frac{(q-1)p}{q}, + x)^{\frac{p}{q}}.$$

Für $x = 0$ iſt folglich

$$(z, + 0)^p = \left\{(z, + 0)^{\frac{p}{q}}\right\}^q.$$

Aber nach (8.) und (14.)

$$(z, + 0)^p = z^p.$$

Alſo

$$z^p = \left\{(z, + 0)^{\frac{p}{q}}\right\}^q,$$

und folglich

$$18.\quad (z, + 0)^{\frac{p}{q}} = z^{\frac{p}{q}},$$

ſo daß alſo nun nach (8.), (14.) und (18.) für jedes poſitive oder negative, ganze oder gebrochene y immer

$$19.\quad (z, + 0)^y = z^y$$

iſt.

Wenn man in (4.) y und k gegen einander vertauſcht, ſo erhält man

$$(z, + x)^{y+k} = (z, + x)^k (z + kx, + x)^y.$$

Alſo iſt immer

$$(z, + x)^y (z + yx, + x)^k = (z, + x)^k (z + kx, + x)^y,$$

oder

$$20.\quad \frac{(z + kx, + x)^y}{(z, + x)^y} = \frac{(z + yx, + x)^k}{(z, + x)^k}.$$

Setzt man in der Gleichung (5.) zuerſt $k = \frac{1}{z}$, dann $k = \frac{1}{x}$; ſo wird dieſelbe

$$\left(1, + \frac{x}{z}\right)^y = \frac{1}{z^y}(z, + x)^y,$$

$$\left(\frac{z}{x}, + 1\right)^y = \frac{1}{x^y}(z, + x)^y.$$

Alſo iſt

$$21.\quad (z, + x)^y = z^y\left(1, + \frac{x}{z}\right)^y.$$

$$22.\quad (z, + x)^y = x^y\left(\frac{z}{x}, + 1\right)^y.$$

Setzt man in der Gleichung (5.) $-x$ ſtatt x, ſo wird dieſelbe

$$(kz, - kx)^y = k^y (z, - x)^y.$$

Setzt man nun in dieſer Gleichung zuerſt $k = \frac{1}{z}$, dann $k = \frac{1}{x}$; ſo wird dieſelbe

$$\left(1, - \frac{x}{z}\right)^y = \frac{1}{z^y}(z, - x)^y,$$

$$\left(\frac{z}{x}, - 1\right)^y = \frac{1}{x^y}(z, - x)^y.$$

Folglich

$$21^*.\quad (z, - x)^y = z^y\left(1, - \frac{x}{z}\right)^y,$$

$$22^*.\quad (z, - x)^y = x^y\left(\frac{z}{x}, - 1\right)^y.$$

Aus der Gleichung (22.) folgt

$$(z, + x)^y = x^y \frac{(1, + 1)^{\frac{z}{x}-1} \left(\frac{z}{x}, + 1\right)^y}{(1, + 1)^{\frac{z}{x}-1}}.$$

Setzt man aber in der Gleichung (4.)

$$z = 1,\ x = 1,\ y = \frac{z}{x} - 1,\ k = y;$$

ſo wird dieſelbe

$$(1, + 1)^{\frac{z}{x}-1+y} =$$

$$(1, + 1)^{\frac{z}{x}-1} \left(1 + \frac{z}{x} - 1, + 1\right)^y = (1, + 1)^{\frac{z}{x}-1} \left(\frac{z}{x}, + 1\right)^y.$$

Alſo iſt

$$23.\quad (z, + x)^y = x^y . \frac{(1, + 1)^{\frac{z}{x}-1+y}}{(1, + 1)^{\frac{z}{x}-1}}.$$

Dieſe merkwürdige und wichtige Gleichung zeigt, daß jede Facultät mit einer beliebigen Baſis und Differenz jederzeit durch zwei andere Facultäten ausgedrückt werden kann, deren Grundzahlen und Differenzen die Einheit ſind.

Setzt man in der Gleichung (4.)

$$z = 1,\ x = 1,\ k = \frac{z}{x} - 1;$$

ſo wird dieſelbe

$$(1, + 1)^{\frac{z}{x}-1+y} = (1, + 1)^y\ (1 + y, + 1)^{\frac{z}{x}-1}.$$

Aber nach der Gleichung (5.) für

$$z = \frac{1}{y} + 1,\ x = \frac{1}{y},\ k = y,\ y = \frac{z}{x} - 1:$$

$$(1 + y, + 1)^{\frac{z}{x}-1} = y^{\frac{z}{x}-1} . \left(\frac{1}{y} + 1, + \frac{1}{y}\right)^{\frac{z}{x}-1}.$$

Folglich nach (23.)

$$24.\quad (z, + x)^y = \frac{(1, + 1)^y \left(\frac{1}{y} + 1, + \frac{1}{y}\right)^{\frac{z}{x}-1} . y^{\frac{z}{x}-1} . x^y}{(1, + 1)^{\frac{z}{x}-1}}.$$

Für $y = \infty$ folgt hieraus

$$(z, + x)^y = \frac{(1, + 1)^y (1, + 0)^{\frac{z}{x}-1} . y^{\frac{z}{x}-1} x^y}{(1, + 1)^{\frac{z}{x}-1}},$$

d. i. nach (19.)

$$25.\quad (z, + x)^y = \frac{(1, + 1)^y\, y^{\frac{z}{x}-1}\, x^y}{(1, + 1)^{\frac{z}{x}-1}},$$

und für $x = 1$:

$$26.\quad (z, + 1)^y = \frac{(1, + 1)^y\, y^{z-1}}{(1, + 1)^{z-1}},$$

wobei man aber nicht aus den Augen verlieren darf, daß die beiden vorigen Gleichungen nur für $y = \infty$ gelten.

Setzt man in der erſten Fundamentalgleichung $yx = u$; ſo wird dieſelbe

$$27.\quad (z + u, + x)^k = \frac{(z, + x)^{\frac{u}{x}+k}}{(z, + x)^{\frac{u}{x}}},$$

eine Gleichung, mittelſt welcher durch zwei Facultäten von gleicher Baſis und Differenz jede Facultät von derſelben Differenz, aber beliebiger Baſis, ausgedrückt werden kann.

Setzt man in der Gleichung (5.) $k = \frac{w}{x}$; ſo wird dieſelbe

$$\left(\frac{wz}{x}, + w\right)^y = \left(\frac{w}{x}\right)^y (z, + x)^y.$$

Aber wegen der Gleichung (4.)

$$(v, + w)^{\frac{z}{x}-\frac{v}{w}+y} = (v, + w)^{\frac{z}{x}-\frac{v}{w}}\left(v + w\left(\frac{z}{x}-\frac{v}{w}\right), + w\right)^y$$

$$= (v, + w)^{\frac{z}{x}-\frac{v}{w}}\left(\frac{wz}{x}, + w\right)^y.$$

Folglich nach dem Vorhergehenden

$$\left(\frac{w}{x}\right)^y (z, + x)^y = \frac{(v, + w)^{\frac{z}{x}-\frac{v}{w}+y}}{(v, + w)^{\frac{z}{x}-\frac{v}{w}}},$$

und daher

$$28.\quad (z, + x)^y = \left(\frac{x}{w}\right)^y \frac{(v, + w)^{\frac{z}{x}-\frac{v}{w}+y}}{(v, + w)^{\frac{z}{x}-\frac{v}{w}}},$$

mittelſt welcher Gleichung man jede Facultät auf zwei andere Facultäten von gleichen aber beliebigen Grundzahlen und Differenzen reduciren kann.

Setzt man in der vorigen Gleichung $v = z$, $x = w + 1$ ſo wird dieſelbe

$$(z, + w + k)^y = \left(\frac{w + k}{w}\right)^y \cdot \frac{(z, + w)^{\frac{z}{w+k} - \frac{z}{w} + y}}{(z, + w)^{\frac{z}{w+k} - \frac{z}{w}}},$$

und, wenn man x für w ſetzt:

$$29. \quad (z, + x + k)^y = \left(1 + \frac{k}{x}\right)^y \cdot \frac{(z, + x)^{-\frac{zk}{x(x+k)} + y}}{(z, + x)^{-\frac{zk}{x(x+k)}}},$$

oder, wenn man x = 1 und k — 1 für k ſetzt:

$$(z, + k)^y = k^y \cdot \frac{(z, + 1)^{\frac{z}{k} - z + y}}{(z + 1)^{\frac{z}{k} - z}},$$

und wenn man jetzt wieder x für k ſetzt:

$$30. \quad (z, + x)^y = x^y \cdot \frac{(z, + 1)^{\frac{z}{x} - z + y}}{(z, + 1)^{\frac{z}{x} - z}}.$$

Mittelſt der Formeln (29.) und (30.) kann man jede Facultät durch zwei andere von gleichen Grundzahlen und Differenzen, welche zugleich die Grundzahl mit der gegebenen Facultät gemein haben, ausdrücken.

3. Bevor wir weiter gehen, wollen wir zuerſt die Facultäten mit poſitiven ganzen Exponenten noch etwas näher betrachten. Weil aber nach (22.*) jede Facultät

$$(z, - x)^y = x^y \left(\frac{z}{x}, - 1\right)^y$$

iſt; ſo iſt es verſtattet, dieſe Unterſuchung der Kürze wegen auf die Facultäten von der Form $(z, - 1)^y$ zu beſchränken, welche Lacroix nach Vandermonde durch $[z]^y$ bezeichnet, ſo daß alſo nach (7.), wenn n eine poſitive ganze Zahl bezeichnet,

$$[z]^n = z(z-1)(z-2) \ldots (z - n + 1)$$

iſt. Wir wollen der Einfachheit wegen dieſe Bezeichnung von Vandermonde bei der jetzigen ſpeciellen Unterſuchung beibehalten, und verſuchen nun zuerſt, die Potenz z^n durch Größen von der Form $[z]^n$ auszudrücken.

I. Man ſetze zu dem Ende

$$z^n = A_0 + A_1 [z-1]^1 + A_2 [z-1]^2 + A_3 [z-1]^3 + \ldots + A_n [z-1]^n,$$

wo es alſo jetzt auf die Beſtimmung der Coefficienten A_0, A_1, A_2, ... A_n ankommt.

Setzt man nach und nach $z = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$; ſo erhält man

$$1^n = A_0\,,$$
$$2^n = A_0 + 1.A_1\,,$$
$$3^n = A_0 + 2.A_1 + 2.1A_2\,;$$
$$4^n = A_0 + 3.A_1 + 3.2A_2 + 3.2.1A_3\,,$$
$$5^n = A_0 + 4.A_1 + 4.3A_2 + 4.3.2A_3 + 4.3.2.1A_4\,,$$
$$\text{u. ſ. w.} \qquad\qquad \text{u. ſ. w.}$$

Wir wollen nun bloß zeigen, wie man A_4 auf eine ſehr leichte Art beſtimmen kann, weil daraus ſich auch unmittelbar das Verfahren, im Allgemeinen A_k zu beſtimmen, ergeben wird. Man multiplicire nämlich die oben ſtehenden fünf Gleichungen von der letzten an nach der Reihe mit

$$1,\, -\frac{4}{1},\, \frac{4.3}{1.2},\, -\frac{4.3.2}{1.2.3},\, \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}$$

und addire die Producte; ſo wird die Größe auf der linken Seite des Gleichheitszeichens, wenn wir der Kürze wegen Thibauts Bezeichnung der Binomial-Coefficienten gebrauchen,

$$5^n - {}^4\overset{1}{\mathfrak{B}}.4^n + {}^4\overset{2}{\mathfrak{B}}.3^n - {}^4\overset{3}{\mathfrak{B}}.2^n + {}^4\overset{4}{\mathfrak{B}}.1^n\,.$$

Der Coefficient von A_0 auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens iſt

$$1 - \frac{4}{1} + \frac{4.3}{1.2} - \frac{4.3.2}{1.2.3} + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} = (1-1)^4 = 0\,.$$

Der Coefficient von A_1 iſt

$$1.4 - \frac{4}{1}.3 + \frac{4.3}{1.2}.2 - \frac{4.3.2}{1.2.3}.1$$
$$= 4\left\{1 - \frac{3}{1} + \frac{3.2}{1.2} - \frac{3.2.1}{1.2.3}\right\} = 4.(1-1)^3 = 0\,.$$

Der Coefficient von A_2 iſt

$$1.4.3 - \frac{4}{1}.3.2 + \frac{4.3}{1.2}.2.1$$
$$= 4.3\left\{1 - \frac{2}{1} + \frac{2.1}{1.2}\right\} = 4.3.(1-1)^2 = 0\,.$$

Der Coefficient von A_3 iſt

$$1.4.3.2 - \frac{4}{1}.3.2.1 = 4.3.2\left\{1 - \frac{1}{1}\right\} = 4.3.2.(1-1)^1 = 0\,.$$

Der Coefficient von A_4 iſt $= 4.\,3.\,2.\,1.$ Alſo iſt

$$4.3.2.1A_4 = \overset{4}{[4]}.A_4$$
$$= 5^n - {}^4\overset{1}{\mathfrak{B}}.4^n + {}^4\overset{2}{\mathfrak{B}}.3^n - {}^4\overset{3}{\mathfrak{B}}.2^n + {}^4\overset{4}{\mathfrak{B}}.1^n\,.$$

Ganz auf dieſelbe Weiſe ergiebt ſich ſehr leicht, daß allgemein

$$31.\quad \overset{k}{[k]}.A_k =$$

$$(k+1)^n - {}^k\overset{1}{\mathfrak{B}}.k^n + {}^k\overset{2}{\mathfrak{B}}.(k-1)^n - {}^k\overset{3}{\mathfrak{B}}.(k-2)^n + \ldots.$$

$$\ldots. + (-1)^{k-1}.{}^k\overset{k-1}{\mathfrak{B}}.2^n + (-1)^k.{}^k\overset{k}{\mathfrak{B}}.1^n$$

iſt, wodurch alſo die Aufgabe, die wir uns vorlegten, vollſtändig aufgelöſt iſt. Daß $A_0 = 1$ iſt, ergiebt ſich aus dem Obigen unmittelbar.

II. Man kann aber auch

$$z^n = B_1\overset{1}{[z]} + B_2\overset{2}{[z]} + B_3\overset{3}{[z]} + B_4\overset{4}{[z]} + \ldots + B_n\overset{n}{[z]}$$

ſetzen. Setzt man wieder $z = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots.$; ſo ergiebt ſich:

$$1^n = 1.B_1\,,$$
$$2^n = 2.B_1 + 2.1B_2\,,$$
$$3^n = 3.B_1 + 3.2B_2 + 3.2.1B_3\,,$$
$$4^n = 4.B_1 + 4.3B_2 + 4.3.2B_3 + 4.3.2.1B_4\,,$$
$$5^n = 5.B_1 + 5.4B_2 + 5.4.3B_3 + 5.4.3.2B_4 + 5.4.3.2.1B_5\,,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Multiplicirt man nun dieſe Gleichungen, um B_5 zu finden, von der letzten an nach der Reihe mit

$$1, -\frac{5}{1}, \frac{5.4}{1.2}, -\frac{5.4.3}{1.2.3}, \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4},$$

und addirt die Producte; ſo wird die Größe auf der linken Seite des Gleichheitszeichens

$$5^n - {}^5\overset{1}{\mathfrak{B}}.4^n + {}^5\overset{2}{\mathfrak{B}}.3^n - {}^5\overset{3}{\mathfrak{B}}.2^n + {}^5\overset{4}{\mathfrak{B}}.1^n\,.$$

Der Coefficient von B_1 wird

$$1.5 - \frac{5}{1}.4 + \frac{5.4}{1.2}.3 - \frac{5.4.3}{1.2.3}.2 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4.}.1$$

$$= 5\left\{1 - \frac{4}{1} + \frac{4.3}{1.2} - \frac{4.3.2}{1.2.3} + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}\right\} = 5.(1-1)^4 = 0\,.$$

Der Coefficient von B_2 wird

$$1.5.4 - \frac{5}{1}.4.3 + \frac{5.4}{1.2}.3.2 - \frac{5.4.3}{1.2.3}.2.1$$

$$= 5.4\left\{1 - \frac{3}{1} + \frac{3.2}{1.2} - \frac{3.2.1}{1.2.3}\right\} = 5.4.(1-1)^3 = 0\,.$$

Der Coefficient von B_3 wird

$$1.5.4.3 - \frac{5}{1}.4.3.2 + \frac{5.4}{1.2}.3.2.1$$

$$= 5.4.3\left\{1 - \frac{2}{1} + \frac{2.1}{1.2}\right\} = 5.4.3.(1-1)^2 = 0\,.$$

Der Coefficient von B_4 wird

$$.5.4.3.2 - \frac{5}{1}.4.3.2.1 = 5.4.3.2\left\{1 - \frac{1}{1}\right\} = 5.4.3.2.(1-1)^1 = 0.$$

Der Coefficient von B_5 iſt 5. 4. 3. 2. 1. Alſo iſt

$$5.4.3.2.1\,B_5 = [5]^{5}.B_5$$

$$= 5^n - {}^5\overset{1}{\mathfrak{B}}.4^n + {}^5\overset{2}{\mathfrak{B}}.3^n - {}^5\overset{3}{\mathfrak{B}}.2^n + {}^5\overset{4}{\mathfrak{B}}.1^n,$$

und auf dieſe Weiſe allgemein

$$32.\quad [k]^{k}.B_k =$$

$$k^n - {}^k\overset{1}{\mathfrak{B}}.(k-1)^n + {}^k\overset{2}{\mathfrak{B}}.(k-2)^n - {}^k\overset{3}{\mathfrak{B}}.(k-3)^n + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{k-2}.{}^k\overset{k-2}{\mathfrak{B}}.2^n + (-1)^{k-1}.{}^k\overset{k-1}{\mathfrak{B}}.1^n,$$

wodurch alſo auch unſere zweite Aufgabe vollſtändig aufgelöſt iſt.

III. Es iſt allgemein

$$[z+y]^{n+1} = [z+y]^{n}.(z+y-n)$$

$$= [z+y]^{n}.(z-n) + [z+y]^{n}.y\,.$$

Aber offenbar

$$[z+y]^{1} = [z]^{1} + [y]^{1}.$$

Alſo

$$[z+y]^{2} = [z]^{1}.(z-1) + [y]^{1}.(z-1)$$

$$+ [z]^{1}.y \quad + [y]^{1}.y$$

$$= [z]^{1}.(z-1) + z.[y]^{1}$$

$$+ [z]^{1}.y + [y]^{1}.(y-1)$$

$$= [z]^{2} + 2[z]^{1}[y]^{1} + [y]^{2}.$$

Folglich

$$[z+y]^{3} = [z]^{2}.(z-2) + 2[z]^{1}[y]^{1}.(z-2) + [y]^{2}.(z-2)$$

$$+ [z]^{2}.y + 2[z]^{1}[y]^{1}.y + [y]^{2}.y$$

$$= [z]^{2}.(z-2) + 2[z]^{1}[y]^{1}.(z-1) + [y]^{2}.z$$

$$+ [z]^{2}.y + 2[z]^{1}[y]^{1}.(y-1) + [y]^{2}.(y-2)$$

$$= [z]^{3} + 3[z]^{2}[y]^{1} + 3[z]^{1}[y]^{2} + [y]^{3}.$$

Sey nun nach dem Geſetze, welches man hier ſchon bemerkt, allgemein

$$[z+y]^{n} =$$

$$C_0[z]^{n} + C_1[z]^{n-1}[y]^{1} + C_2[z]^{n-2}[y]^{2} + \ldots + C_{n-1}[z]^{1}[y]^{n-1} + C_n[y]^{n};$$

ſo wird nach der obigen allgemeinen Relation:

$$\begin{aligned}[z+y]^{n+1} = \; & C_0[z]^{n}.(z-n) \\ & + C_1[z]^{n-1}[y]^{1}.(z-n) + C_0[z]^{n}.y \\ & + C_2[z]^{n-2}[y]^{2}.(z-n) + C_1[z]^{n-1}[y]^{1}.y \\ & + C_3[z]^{n-3}[y]^{3}.(z-n) + C_2[z]^{n-2}[y]^{2}.y \\ & \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + C_{n-1}[z]^{1}[y]^{n-1}.(z-n) + C_{n-2}[z]^{2}[y]^{n-2}.y \\ & + C_{n}[y]^{n}.(z-n) + C_{n-1}[z]^{1}[y]^{n-1}.y \\ & + C_{n}[y]^{n}.y.\end{aligned}$$

Setzt man nun nach und nach

$$\begin{aligned} z-n & = z-n \\ & = (z-n+1)-1 \\ & = (z-n+2)-2 \\ & = (z-n+3)-3 \\ & \quad \cdots\cdots\cdots \\ & = (z-n+(n-1))-(n-1) \\ & = (z-n+n)-n\,;\end{aligned}$$

ſo wird

$$\begin{aligned}[z+y]^{n+1} = \; & C_0[z]^{n}.(z-n) \\ & + C_1[z]^{n-1}[y]^{1}.(z-n+1) + C_0[z]^{n}.y \\ & + C_2[z]^{n-2}[y]^{2}.(z-n+2) + C_1[z]^{n-1}[y]^{1}.(y-1) \\ & + C_3[z]^{n-3}[y]^{3}.(z-n+3) + C_2[z]^{n-2}[y]^{2}.(y-2) \\ & \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + C_{n-1}[z]^{1}[y]^{n-1}.(z-1) + C_{n-2}[z]^{2}[y]^{n-2}.(y-n+2) \\ & + C_{n}[y]^{n}.z \qquad + C_{n-1}[z]^{1}[y]^{n-1}.(y-n+1) \\ & \qquad\qquad + C_{n}[y]^{n}.(y-n) \\ = \; & C_0[z]^{n+1} \\ & + C_1[z]^{n}[y]^{1} + C_0[z]^{n}[y]^{1} \\ & + C_2[z]^{n-1}[y]^{2} + C_1[z]^{n-1}[y]^{2} \\ & + C_3[z]^{n-2}[y]^{3} + C_2[z]^{n-2}[y]^{3} \\ & \quad \cdots\cdots\cdots \\ & + C_{n-1}[z]^{2}[y]^{n-1} + C_{n-2}[z]^{2}[y]^{n-1} \\ & + C_{n}[z]^{1}[y]^{n} + C_{n-1}[z]^{1}[y]^{n} \\ & + C_{n}[y]^{n+1},\end{aligned}$$

d. i.

$$[z+y]^{n+1} =$$

$$C_0[z]^{n+1} + (C_0+C_1)[z]^n[y]^1 + (C_1+C_2)[z]^{n-1}[y]^2 + \ldots$$

$$\ldots + (C_{n-1}+C_n)[z]^1[y]^n + C_n[y]^{n+1}.$$

Die numeriſchen Coefficienten der einzelnen Glieder von $[z+y]^1$ ſind 1, 1, und es erhellet alſo aus dem Vorhergehenden, daß die numeriſchen Coefficienten der einzelnen Glieder von

$$[z+y]^1,\ [z+y]^2,\ [z+y]^3,\ [z+y]^4,\ \ldots.$$

aus den numeriſchen Coefficienten 1, 1 ganz eben ſo nach und nach entſtehen, wie die Binomial-Coefficienten. Daher iſt allgemein für jedes ganze poſitive n:

$$33.\quad [z+y]^n = [z]^n + {}^n\mathfrak{B}^1[z]^{n-1}[y]^1 + {}^n\mathfrak{B}^2[z]^{n-2}[y]^2 + \ldots$$

$$\ldots + {}^n\mathfrak{B}^{n-1}[z]^1[y]^{n-1} + {}^n\mathfrak{B}^n[y]^n,$$

eine Formel, welche wegen ihrer Analogie mit dem binomiſchen Lehrſatze ſehr merkwürdig iſt.

4. Wir wollen nun auch die Sinus und Coſinus durch Facultäten auszudrücken ſuchen, bedienen uns dabei aber wieder der gleich zu Anfange dieſes Artikels nach Crelle eingeführten allgemeinen Bezeichnung der Facultäten. Nach den im Artikel Cyklometrie (42.) i. d. Z. und auf andere Art Thl. I. S. 633. bewieſenen merkwürdigen Ausdrücken iſt

$$\sin x = x.\frac{(\pi-x)(2\pi-x)(3\pi-x)\ldots(\pi+x)(2\pi+x)(3\pi+x)\ldots\ldots}{\pi.2\pi.3\pi\ldots\pi.2\pi.3\pi\ldots.},$$

$$\cos x = \frac{(\pi-2x)(3\pi-2x)(5\pi-2x)\ldots(\pi+2x)(3\pi+2x)5\pi+2x)\ldots}{\pi.3\pi.5\pi\ldots\pi.3\pi.5\pi\ldots.}.$$

Alſo in der bekannten Bezeichnung der Facultäten:

$$\left.\begin{array}{ll} 34. & \sin x = x.\dfrac{(\pi-x,+\pi)^n(\pi+x,+\pi)^n}{(\pi,+\pi)^n(\pi,+\pi)^n} \\ 35. & \cos x = \dfrac{(\pi-2x,+2\pi)^n(\pi+2x,+2\pi)^n}{(\pi,+2\pi)^n(\pi,+2\pi)^n} \end{array}\right\} \text{für } n = \infty.$$

Nun iſt aber nach den beiden Gleichungen (25.) und (5.)

$$(\pi-x,+\pi)^n = \frac{(1,+1)^n n^{-\frac{x}{\pi}}\pi^n}{(1,+1)^{-\frac{x}{\pi}}},\quad (\pi+x,+\pi)^n = \frac{(1,+1)^n n^{\frac{x}{\pi}}\pi^n}{(1,+1)^{\frac{x}{\pi}}};$$

$$(\pi-2x,+2\pi)^n=\frac{(1,+1)^n n^{-\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}.(2\pi)^n}{(1,+1)^{-\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}},\quad(\pi+2x,+2\pi)^n=\frac{(1,+1)^n n^{\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}.(2\pi)^n}{(1,+1)^{\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}};$$

$$(\pi,+\pi)^n=\pi^n(1,+1)^n,\quad(\pi,+2\pi)^n=\frac{(1,+1)^n n^{-\frac{1}{2}}.(2\pi)^n}{(1,+1)^{-\frac{1}{2}}}.$$

Folglich nach gehöriger Subſtitution:

$$36.\quad \sin x=\frac{x}{(1,+1)^{-\frac{x}{\pi}}(1,+1)^{\frac{x}{\pi}}},$$

$$37.\quad \cos x=\frac{(1,+1)^{-\frac{1}{2}}(1,+1)^{-\frac{1}{2}}}{(1,+1)^{-\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}(1,+1)^{\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}}.$$

Nach der Gleichung (4.) iſt auch

$$36^*.\quad (1,+1)^{-\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}=(1,+1)^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2},+1)^{-\frac{x}{\pi}},$$

$$37^*.\quad (1,+1)^{\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}=(1,+1)^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2},+1)^{\frac{x}{\pi}}.$$

Folglich auch

$$38.\quad \cos x=\frac{1}{(\frac{1}{2},+1)^{-\frac{x}{\pi}}(\frac{1}{2},+1)^{\frac{x}{\pi}}}.$$

Weil ferner bekanntlich $\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}$ iſt; ſo folgt aus (36.)

$$39.\quad \cos x=\frac{(1,+1)^{-\frac{x}{\pi}}(1,+1)^{\frac{x}{\pi}}}{(1,+1)^{-\frac{2x}{\pi}}(1,+1)^{\frac{2x}{\pi}}}.$$

Weil ferner $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ iſt, ſo folgt aus (36.) und (38.)

$$40.\quad \mathrm{tang}\,x=x.\frac{(\frac{1}{2},+1)^{-\frac{x}{\pi}}(\frac{1}{2},+1)^{\frac{x}{\pi}}}{(1,+1)^{-\frac{x}{\pi}}(1,+1)^{\frac{x}{\pi}}}.$$

Für $x=\frac{1}{2}\pi$ iſt $\sin x=1$; alſo nach (36.)

$$1=\frac{\frac{1}{2}\pi}{(1,+1)^{-\frac{1}{2}}(1,+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

olglich

$$41.\quad \tfrac{1}{2}\pi=(1,+1)^{-\frac{1}{2}}(1,+1)^{\frac{1}{2}}.$$

Aber nach (4.) und (6.)

$$(1, +1)^{\frac{1}{2}} = (1, +1)^{-\frac{1}{2}+1} = (1, +1)^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}, +1)^{1} = \tfrac{1}{2}(1, +1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Folglich nach (41.)

$$\pi = 4\{(1, +1)^{\frac{1}{2}}\}^2 = \{(1, +1)^{-\frac{1}{2}}\}^2 .$$

Alſo

$$42.\quad \pi^{\frac{1}{2}} = 2(1, +1)^{\frac{1}{2}} = (1, +1)^{-\frac{1}{2}}.$$

5. Setzt man in (36.) πx für x, ſo erhält man

$$\sin \pi x = \frac{\pi x}{(1, +1)^{-x}(1, +1)^{x}} .$$

Aber nach (4.)

$$(1, +1)^{x-1} = (1, +1)^{x}(1 + x, +1)^{-1} ,$$

und nach (12.)

$$(1 + x, +1)^{-1} = \frac{1}{1 + x - 1} = \frac{1}{x} .$$

Alſo

$$(1, +1)^{x-1} = \frac{(1, +1)^{x}}{x},\ (1, +1)^{x} = x(1, +1)^{x-1} .$$

Folglich

$$43.\quad \sin \pi x = \frac{\pi}{(1, +1)^{x-1}(1, +1)^{-x}} ,$$

$$44.\quad (1, +1)^{x-1}(1, +1)^{-x} = \frac{\pi}{\sin \pi x} .$$

Folglich für $x = \frac{1}{y}, \frac{2}{y}, \frac{3}{y}, \ldots :$

$$(1, +1)^{-\frac{1}{y}}(1, +1)^{-\frac{y-1}{y}} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{y}} ,$$

$$(1, +1)^{-\frac{2}{y}}(1, +1)^{-\frac{y-2}{y}} = \frac{\pi}{\sin \frac{2\pi}{y}} ,$$

$$(1, +1)^{-\frac{3}{y}}(1, +1)^{-\frac{y-3}{y}} = \frac{\pi}{\sin \frac{3\pi}{y}} ,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Iſt nun y ungerade, ſo ſind $\frac{y-1}{2}$ und $\frac{y+1}{2}$ ganze Zahlen, und $\frac{y+1}{2}$ iſt $= \frac{y-1}{2} + 1$. Setzt man in dieſem Falle die obigen Gleichungen bis zu der Gleichung

$$(1, +1)^{-\frac{y-1}{2y}} (1, +1)^{-\frac{y+1}{2y}} = \frac{\pi}{\sin\frac{(y-1)\pi}{2y}}$$

fort, und multiplicirt ſämmtliche Gleichungen in einander, ſo erhält man

$$45.\ (1, +1)^{-\frac{1}{y}} (1, +1)^{-\frac{2}{y}} (1, +1)^{-\frac{3}{y}} \ldots (1, +1)^{-\frac{y-1}{y}}$$

$$= \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{y}} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{y}} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{y}} \cdots \frac{\pi}{\sin\frac{(y-1)\pi}{2y}},$$

vorausgeſetzt, daß y eine ungerade Zahl iſt.

Iſt aber y eine gerade Zahl, ſo ſind $\frac{y-2}{2}$ und $\frac{y+2}{2}$ ganze Zahlen, und $\frac{y+2}{2}$ iſt $= \frac{y-2}{2} + 2$. Setzt man nun in dieſem Falle die obigen Gleichungen bis zur Gleichung

$$(1, +1)^{-\frac{y-2}{2y}} (1, +1)^{-\frac{y+2}{2y}} = \frac{\pi}{\sin\frac{(y-2)\pi}{2y}},$$

fort, fügt noch die Gleichung $(1, +1)^{-\frac{y}{2y}} = (1, +1)^{-\frac{1}{2}} = \pi^{\frac{1}{2}}$ (42.), indem man bemerkt, daß $\frac{y}{2} = \frac{y-2}{2} + 1$ iſt, hinzu, und multiplicirt dann die ſämmtlichen Gleichungen in einander, ſo erhält man:

$$46.\ (1, +1)^{-\frac{1}{y}} (1, +1)^{-\frac{2}{y}} (1, +1)^{-\frac{3}{y}} \ldots (1, +1)^{-\frac{y-1}{y}}$$

$$= \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{y}} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{y}} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{y}} \cdots \frac{\pi}{\sin\frac{(y-2)\pi}{2y}} \pi^{\frac{1}{2}},$$

vorausgeſetzt, daß y eine gerade Zahl iſt.

Nach dem Coteſiſchen Lehrſatze iſt aber

$$x^{2n+1} - a^{2n+1} = (x-a)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{2n+1} + a^2\right)$$
$$\times \left(x^2 - 2ax\cos\frac{4\pi}{2n+1} + a^2\right)$$
$$\times \left(x^2 - 2ax\cos\frac{6\pi}{2n+1} + a^2\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\times \left(x^2 - 2ax\cos\frac{2n\pi}{2n+1} + a^2\right)$$

$$x^{2n} - a^{2n} = (x^2 - a^2)(x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{2n} + a^2)$$
$$\times (x^2 - 2ax\cos\frac{4\pi}{2n} + a^2)$$
$$\times (x^2 - 2ax\cos\frac{6\pi}{2n} + a^2)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\times (x^2 - 2ax\cos\frac{(2n-2)\pi}{2n} + a^2).$$

Alſo, wenn man reſpective mit $x - a$ und $x^2 - a^2$ dividirt:

$$x^{2n} + x^{2n-1}a + x^{2n-2}a^2 + \ldots + xa^{2n-1} + a^{2n}$$
$$= (x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{2n+1} + a^2)$$
$$\times (x^2 - 2ax\cos\frac{4\pi}{2n+1} + a^2)$$
$$\times (x^2 - 2ax\cos\frac{6\pi}{2n+1} + a^2)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\times (x^2 - 2ax\cos\frac{2n\pi}{2n+1} + a^2)$$

$$x^{2n-2} + x^{2n-4}a^2 + x^{2n-6}a^4 + \ldots + x^2a^{2n-4} + a^{2n-2}$$
$$= (x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{2n} + a^2)$$
$$\times (x^2 - 2ax\cos\frac{4\pi}{2n} + a^2)$$
$$\times (x^2 - 2ax\cos\frac{6\pi}{2n} + a^2)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\times (x^2 - 2ax\cos\frac{(2n-2)\pi}{2n} + a^2),$$

und folglich, wenn man $a = x = 1$ ſetzt:

$$2n + 1 = 2^n\left(1 - \cos\frac{2\pi}{2n+1}\right), \quad n = 2^{n-1}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{2n}\right)$$
$$\times\left(1 - \cos\frac{4\pi}{2n+1}\right) \qquad \left(1 - \cos\frac{4\pi}{2n}\right)$$
$$\times\left(1 - \cos\frac{6\pi}{2n+1}\right) \qquad \left(1 - \cos\frac{6\pi}{2n}\right)$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$\times\left(1 - \cos\frac{2n\pi}{2n+1}\right) \qquad \left(1 - \cos\frac{(2n-2)\pi}{2n}\right),$$

woraus ſogleich

$$\frac{(2n+1)^{\frac{1}{2}}}{2^n} = \sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{3\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{n\pi}{2n+1},$$

$$\frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^{n-1}} = \sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}$$

folgt. Setzen wir nun $2n+1=y$, ſo iſt $n=\frac{y-1}{2}$, alſo

$$47.\quad \sin\frac{\pi}{y}\sin\frac{2\pi}{y}\sin\frac{3\pi}{y}\ldots\sin\frac{(y-1)\pi}{2y} = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{y-1}{2}}},$$

vorausgeſetzt, daß y eine ungerade Zahl iſt. Für $2n=y$, $n=\frac{1}{2}y$, $n-1=\frac{y-2}{2}$ folgt eben ſo leicht

$$48.\quad \sin\frac{\pi}{y}\sin\frac{2\pi}{y}\sin\frac{3\pi}{y}\ldots\sin\frac{(y-2)\pi}{2y} = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{y-1}{2}}},$$

wenn y eine gerade Zahl iſt. Nach (45.) und (46.) iſt alſo

$$(1,+1)^{-\frac{1}{y}}(1,+1)^{-\frac{2}{y}}(1,+1)^{-\frac{3}{y}}\ldots(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}}$$
$$= \frac{\pi^{\frac{y-1}{2}}\,2^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}},$$

wenn y ungerade iſt, und

$$(1,+1)^{-\frac{1}{y}}(1,+1)^{-\frac{2}{y}}(1,+1)^{-\frac{3}{y}}\ldots(1,+1)^{-\frac{y-1}{2}}$$
$$= \frac{\pi^{\frac{y-2}{2}}\,\pi^{\frac{1}{2}}\,2^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}},$$

wenn y gerade iſt, d. i. für jedes gerade oder ungerade y

$$49.\quad (1,+1)^{-\frac{1}{y}}(1,+1)^{-\frac{2}{y}}(1,+1)^{-\frac{3}{y}}\ldots(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}}$$
$$= \frac{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}.$$

6. Hieraus leitet Crelle a. a. O. p. 118 — p. 120. noch einen andern merkwürdigen Satz auf folgende Art ab. Nach (4.) iſt nämlich

$$(1,+1)^{k-1} = (1,+1)^{k}(1+k,+1)^{-1},$$

und nach (12.)

$$(1+k,+1)^{-1} = \frac{1}{1+k-1} = \frac{1}{k};$$

alſo

$$(1, +1)^{k-1} = \frac{(1, +1)^k}{k},$$

und, wenn man yk für k ſetzt,

$$(1, +1)^{yk-1} = \frac{(1, +1)^{yk}}{yk};$$

alſo durch Diviſion

$$\frac{(1, +1)^{k-1}}{(1, +1)^{yk-1}} = \frac{(1, +1)^k y}{(1, +1)^{yk}},$$

oder

$$50. \quad \frac{(1, +1)^k}{(1, +1)^{k-1}} = \frac{(1, +1)^{yk} y^{-1}}{(1, +1)^{yk-1}},$$

und folglich auch, da man

$$(1, +1)^{k-1} = (1, +1)^{k-\frac{y}{y}}$$

ſetzen kann:

$$\frac{(1, +1)^k (1, +1)^{k-\frac{1}{y}} (1, +1)^{k-\frac{2}{y}} \ldots (1,+1)^{k-\frac{y-1}{y}}}{(1, +1)^{k-\frac{1}{y}} (1, +1)^{k-\frac{2}{y}} (1, +1)^{k-\frac{3}{y}} \ldots (1,+1)^{k-\frac{y}{y}}}$$

$$= \frac{(1, +1)^{yk} y^{-1}}{(1, +1)^{yk-1}} = \frac{(1,+1)^{yk} y^{-yk-1}}{(1,+1)^{yk-1} y^{-yk}},$$

wobei aber zu bemerken iſt, daß dieſe Gleichung, ſo wie die Gleichung (50.), für $k = 0$ im Allgemeinen nicht gilt, indem ſonſt nach (50.), wenn man $k = 0$ ſetzt, im Allgemeinen $1 = y^{-1}$ ſeyn müßte. Bezeichnen wir nun die Nenner der beiden Brüche auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens in vorſtehender Gleichung durch $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$; ſo iſt, wie leicht erhellet,

$$\frac{f(k + \frac{1}{y}, y)}{f(k, y)} = \frac{\varphi(k + \frac{1}{y}, y)}{\varphi(k, y)}, \quad \frac{f(k, y)}{\varphi(k, y)} = \frac{f(k + \frac{1}{y}, y)}{\varphi(k + \frac{1}{y}, y)},$$

oder, wenn wir den Bruch auf der linken Seite des Gleichheitszeichens durch $F(k, y)$ bezeichnen,

$$F(k, y) = F(k + \frac{1}{y}, y)$$

für jedes k, nur nicht für $k = 0$, wie aus dem Obigen folgt. Hieraus ſchließt Crelle, daß

$$F(k, y) = A,$$

alſo

$$f(k, y) = A\varphi(k, y),$$

d. i.

$$(1, +1)^{k-\frac{1}{y}}(1, +1)^{k-\frac{2}{y}}(1, +1)^{k-\frac{3}{y}}\ldots(1, +1)^{k-\frac{y}{y}}$$

$$= A.(1, +1)^{yk-1}y^{-yk},$$

ſeyn müſſe, wo A eine von k unabhängige Größe bezeichnet, für jedes k, nur nicht für $k = 0$, wie aus dem Obigen folgt. Für $k = \frac{1}{y}$ erhält man hieraus leicht nach (9.)

$$(1, +1)^{-\frac{1}{y}}(1, +1)^{-\frac{2}{y}}(1, +1)^{-\frac{3}{y}}\ldots(1, +1)^{-\frac{y-1}{y}} = Ay^{-1},$$

d. i. nach (49.)

$$Ay^{-1} = \frac{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}},\ A = (2\pi)^{\frac{y-1}{2}}y^{\frac{1}{2}}.$$

Folglich nach dem Obigen

$$(1, +1)^{k-\frac{1}{y}}(1, +1)^{k-\frac{2}{y}}(1, +1)^{k-\frac{3}{y}}\ldots(1, +1)^{k-\frac{y}{y}}$$

$$= (1, +1)^{yk-1}y^{-yk+\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{y-1}{2}},$$

oder, wenn man $k + \frac{1}{y}$ für k ſetzt:

$$51.\ (1, +1)^{k}(1, +1)^{k-\frac{1}{y}}(1, +1)^{k-\frac{2}{y}}\ldots(1, +1)^{k-\frac{y-1}{y}}$$

$$= (1, +1)^{yk}y^{-yk-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{y-1}{2}},$$

oder

$$52.\ (1, +1)^{yk} =$$

$$\frac{y^{yk+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}(1, +1)^{k}(1, +1)^{k-\frac{1}{y}}(1, +1)^{k-\frac{2}{y}}\ldots(1, +1)^{k-\frac{y-1}{y}},$$

welches nach (49.) auch für $k = 0$ gilt.

Setzt man $k = x - \frac{1}{y}$, ſo wird

$$(1, + 1)^{yx-1} =$$

$$\frac{y^{yx-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}(1, + 1)^{x-\frac{1}{y}}(1, + 1)^{x-\frac{2}{y}}(1, + 1)^{x-\frac{3}{y}}\ldots(1, + 1)^{x-1},$$

oder, wenn man n für y ſetzt und die Ordnung der Factoren umkehrt:

$$(1, + 1)^{x-1}(1, + 1)^{x-1+\frac{1}{n}}(1, + 1)^{x-1+\frac{2}{n}}\ldots(1, + 1)^{x-1+\frac{n-1}{n}}$$
$$= (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-nx+\frac{1}{2}}(1, + 1)^{nx-1}.$$

Nun erhellet aber aus der Gleichung (76.) in dem Artikel Beſtimmtes Integral und dem Obigen leicht, daß für jedes x das dortige

$$\Gamma(x) = (1, + 1)^{x-1},$$

und folglich nach dem obigen Satze

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-nx+\frac{1}{2}}\Gamma(nx)$$

iſt, welches der a. a. O. (96.) nach Cauchy bewieſene, von Legendre gefundene, ſchöne Satz iſt. M. ſ. über dieſen Satz auch noch Legendre Traité des fonctions elliptiques. T. II. Paris 1826. p. 444.

7. Wir gehen nun zur numeriſchen Berechnung der Facultäten über, und folgen dabei vorzüglich einem ſchönen Aufſatze von Beſſel, welcher im Königsberger Archiv für Naturwiſſenſchaften St. III. S. 241. abgedruckt iſt. Dabei iſt zuerſt aus den oben bewieſenen Gleichungen noch folgende Gleichung zu entwickeln. Aus der Gleichung (20.) erhält man leicht:

$$(z, + x)^y = \frac{(z, + x)^k}{(z + yx, + x)^k}(z + kx, + x)^y.$$

Aber nach (21.)

$$(z + kx, + x)^y = (z + kx)^y \cdot \left(1, + \frac{x}{z + kx}\right)^y.$$

Läßt man nun k zunehmen, indem alles Uebrige ungeändert bleibt, ſo wird ſich $\frac{x}{z+kx}$ immer mehr und mehr der Gränze Null, die Facultät

$$\left(1, + \frac{x}{z + kx}\right)^y$$

ſich alſo immer mehr und mehr der Facultät $(1, + 0)^y$, d. i., weil nach (19.)

$$(1, +0)^y = 1$$

iſt, der Einheit nähern. Bezeichnen wir nun im Folgenden durch n immer eine unendlich große Zahl; ſo iſt

$$53.\quad (z + nx, + x)^y = (z + nx)^y\,,$$

und folglich nach dem Obigen, immer unter der Vorausſetzung, daß $n = \infty$ iſt:

$$54.\quad (z, + x)^y = \frac{(z, + x)^n}{(z + yx, + x)^n}(z + nx)^y\,.$$

Nimmt man nun auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen, ſo kommt, weil

$$l\{(z+nx)^y\} = y\,l(z + nx) = y\,lx + y.l\left(n + \frac{z}{x}\right)$$

$$= y\,lx + y\,ln + y\,l\left(1 + \frac{z}{nx}\right) = y\,lx + y\,ln$$

iſt:

$$55.\quad l\{(z, + x)^y\} = ylx + yln + l\{(z, + x)^n\} - l\{(z + yx, + x)^n\}\,.$$

Aber nach (7.)

$$(z, + x)^n = z(z + x)(z + 2x)(z + 3x)\,..\,(z + (n-1)x)$$

$$= x^n.\frac{z}{x}\left(\frac{z}{x} + 1\right)\left(\frac{z}{x} + 2\right)\cdots\left(\frac{z}{x} + n - 1\right),$$

$$(z + yx, + x)^n = (z + yx)(z + yx + x)(z + yx + 2x)\,..\,(z + yx + (n-1)x)$$

$$= x^n\left(\frac{z}{x} + y\right)\left(\frac{z}{x} + y + 1\right)\left(\frac{z}{x} + y + 2\right)\cdot\cdot\left(\frac{z}{x} + y + n - 1\right).$$

Folglich

$$56\quad l\{(z, + x)^y\} = ylx + yln + l\frac{z}{x} + l\left(\frac{z}{x} + 1\right) + \cdot\cdot + l\left(\frac{z}{x} + n - 1\right)$$

$$- l\left(\frac{z}{x} + y\right) - l\left(\frac{z}{x} + y + 1\right) - \ldots - l\left(\frac{z}{x} + y + n - 1\right).$$

Setzen wir nun allgemein

$$(x + n - \tfrac{1}{2})\,ln - n - lx - l(x + 1) - \,.\,.\, - l(x + n - 1) = \Omega x\,;$$

ſo iſt

$$l\frac{z}{x} + l\left(\frac{z}{x} + 1\right) + l\left(\frac{z}{x} + 2\right) + \cdot\cdot + l\left(\frac{z}{x} + n - 1\right)$$

$$= \left(\frac{z}{x} + n - \tfrac{1}{2}\right)ln - n - \Omega\frac{z}{x}\,,$$

$$\left(\frac{z}{x} + y\right) + l\left(\frac{z}{x} + y + 1\right) + l\left(\frac{z}{x} + y + 2\right) + \cdot\cdot + l\left(\frac{z}{x} + y + n - 1\right)$$

$$= \left(\frac{z}{x} + y + n - \tfrac{1}{2}\right)ln - n - \Omega\left(\frac{z}{x} + y\right),$$

und folglich nach gehöriger Subſtitution:

$$57.\quad l\{(z, + x)^y\} = ylx + \Omega\left(\frac{z}{x} + y\right) - \Omega\frac{z}{x}.$$

8. Man ſieht hieraus, daß es bei der Berechnung der Facultäten lediglich auf die Berechnung der durch Ω bezeichneten Functionen ankommt, worüber Folgendes zu bemerken iſt. Aus dem allgemeinen Ausdrucke von Ωx folgt für $x = 1$:

$$\Omega 1 = (n + \tfrac{1}{2})\ln - n - l\{1.2.3\ldots n\}.$$

Aber, weil n eine unendlich große Zahl bezeichnet, nach dem im Artikel Beſtimmtes Integral (36.) i. d. Z. bewieſenen Satze

$$l\{1.2.3\ldots n\} = n\ln + \tfrac{1}{2}l(2\pi n) - n$$
$$= n\ln + \tfrac{1}{2}l(2\pi) + \tfrac{1}{2}\ln - n.$$

Folglich nach gehöriger Subſtitution:

$$58.\quad \Omega 1 = -\tfrac{1}{2}l(2\pi).$$

Aus der Gleichung (57.) folgt für $x = 1$:

$$59.\quad \Omega(z + y) = \Omega z + l\{(z, + 1)^y\}.$$

Setzt man nun $z = 1$ und für y die ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, ...; ſo ergiebt ſich mit Hülfe der Gleichung (58.):

$$60.\quad \Omega 2 = -\tfrac{1}{2}l(2\pi)$$
$$\Omega 3 = -\tfrac{1}{2}l(2\pi) + l(1.2)$$
$$\Omega 4 = -\tfrac{1}{2}l(2\pi) + l(1.2.3)$$
$$\Omega 5 = -\tfrac{1}{2}l(2\pi) + l(1.2.3.4)$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

$\Omega\frac{1}{2}$ kann man auf folgende Art finden. Nach (57.) iſt, wenn man $-y$ für y und $x = 1$ ſetzt;

$$\Omega(z - y) = \Omega z + l\{(z, + 1)^{-y}\}.$$

Aber nach (10.)

$$(z, + 1)^{-y} = \frac{1}{(z - y, + 1)^y}.$$

Alſo

$$61.\quad \Omega(z - y) = \Omega z - l\{(z - y, + 1)^y\}.$$

Folglich, wenn man $z = 1$, $y = \frac{1}{2}$ ſetzt:

$$62.\quad \Omega\tfrac{1}{2} = \Omega 1 - l\{(\tfrac{1}{2}, + 1)^{\frac{1}{2}}\}.$$

Setzt man nun in (37*.) $x = \frac{1}{2}\pi$; ſo erhält man

$$(1, + 1)^0 = (1, + 1)^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}, + 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Aber nach (9.) und (42.)

$$(1, + 1)^0 = 1,\ (1 + 1)^{-\frac{1}{2}} = \pi^{\frac{1}{2}}.$$

Alſo

$$63.\quad (\tfrac{1}{2}, + 1)^{\frac{1}{2}} = \pi^{-\frac{1}{2}}.$$

Folglich nach (58.) und (62.)

$$64.\quad \Omega\tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2}l(2\pi) + \tfrac{1}{2}l\pi = -\tfrac{1}{2}l2.$$

Setzt man nun in (59.) $z = \frac{1}{2}$ und $y = 1, 2, 3, 4, \ldots$; ſo erhält man:

$$65.\quad \Omega\tfrac{3}{2} = -\tfrac{1}{2}l2 + l\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Omega\tfrac{5}{2} = -\tfrac{1}{2}l2 + l\left(\frac{1.3}{2.2}\right)$$

$$\Omega\tfrac{7}{2} = -\tfrac{1}{2}l2 + l\left(\frac{1.3.5}{2.2.2}\right)$$

$$\Omega\tfrac{9}{2} = -\tfrac{1}{2}l2 + l\left(\frac{1.3.5.7}{2.2.2.2}\right)$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Setzt man in der Gleichung (61.) $z = \frac{1}{2}$ und $y = 1, 2, 3, 4, \ldots$; ſo erhält man:

$$66.\quad \Omega(-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{2}l2 - l\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Omega(-\tfrac{3}{2}) = -\tfrac{1}{2}l2 - l\left(\frac{1.3}{2.2}\right)$$

$$\Omega(-\tfrac{5}{2}) = -\tfrac{1}{2}l2 - l\left(-\frac{1.3.5}{2.2.2}\right)$$

$$\Omega(-\tfrac{7}{2}) = -\tfrac{1}{2}l2 - l\left(\frac{1.3.5.7}{2.2.2.2}\right)$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Alſo iſt auch

$$67.\quad \Omega\tfrac{5}{2} + \Omega(-\tfrac{3}{2}) = -l2,$$

$$\Omega\tfrac{9}{2} + \Omega(-\tfrac{7}{2}) = -l2,$$

$$\Omega\tfrac{13}{2} + \Omega(-\tfrac{11}{2}) = -l2,$$

$$\Omega\tfrac{17}{2} + \Omega(-\tfrac{15}{2}) = -l2,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Iſt y eine poſitive ganze Zahl, ſo werden die Gleichungen (59.) und (61.)

$$68.\quad \Omega(z+y) = \Omega z + l\{z(z+1)(z+2)\ldots(z+y-1)\}$$

$$69.\quad \Omega(z-y) = \Omega z - l\{(z-1)(z-2)\ldots(z-y)\}.$$

Mittelſt dieſer Formeln findet man aus Ωz ſehr leicht $\Omega(z \pm y)$, wenn y eine poſitive ganze Zahl iſt. z iſt ganz beliebig.

Nach (4.) iſt, wenn wir reſpective $1, 1, -x, -1$, für z, x, y, k ſetzen:

$$(1, +1)^{-x-1} = (1, +1)^{-x}(1-x, +1)^{-1}.$$

Aber nach (12.)

$$(1-x, +1)^{-1} = \frac{1}{1-x-1} = -\frac{1}{x}.$$

Alſo

$$(1, +1)^{-x-1} = -\frac{(1, +1)^{-x}}{x}, (1,+1)^{-x} = -x(1,+1)^{-x-1}.$$

Folglich nach (43.)

$$70.\quad \sin\pi x = -\frac{\pi}{x(1, +1)^{x-1}(1, +1)^{-x-1}}.$$

Alſo

$$l(-2x\sin\pi x) = l(2\pi) - l\{(1,+1)^{x-1}\} - l\{(1, +1)^{-x-1}\}.$$

Aber nach (57.)

$$l\{(1, +1)^{x-1}\} = (x-1)l1 + \Omega(1+x-1) - \Omega 1$$
$$= \Omega x - \Omega 1$$
$$l\{(1, +1)^{-x-1}\} = -(x+1)l1 + \Omega(1-x-1) - \Omega 1$$
$$= \Omega(-x) - \Omega 1.$$

Folglich

$$l(-2x\sin\pi x) = l(2\pi) - \Omega x - \Omega(-x) + 2\Omega 1,$$

d. i. nach (58.)

$$71.\quad \Omega x + \Omega(-x) = -l(-2x\sin\pi x).$$

Hat man alſo Ωx, ſo kann man mittelſt dieſer Gleichung leicht $\Omega(-x)$ finden.

Nach (36.) und (38.) iſt, wenn man πx für x ſetzt:

$$\sin\pi x = \frac{\pi x}{(1,+1)^{-x}(1,+1)^{x}},$$

$$\cos\pi x = \frac{1}{(\tfrac{1}{2}, +1)^{-x}(\tfrac{1}{2},+1)^{x}}.$$

Folglich nach (57.) und (58.)

$$l\frac{\sin\pi x}{x} = l\pi - l\{(1, +1)^{-x}\} - l\{(1, +1)^{x}\}$$
$$= l\pi - \Omega(1-x) + \Omega 1 - \Omega(1+x) + \Omega 1$$
$$= -\Omega(1+x) - \Omega(1-x) - l2,$$

und nach (57.) und (64.)

$$l\cos\pi x = -l\{(\tfrac{1}{2}, +1)^{-x}\} - l\{(\tfrac{1}{2}, +1)^{x}\}$$
$$= -\Omega(\tfrac{1}{2}-x) + \Omega\tfrac{1}{2} - \Omega(\tfrac{1}{2}+x) + \Omega\tfrac{1}{2}$$
$$= -\Omega(\tfrac{1}{2}+x) - \Omega(\tfrac{1}{2}-x) - l2.$$

Alſo

$$72.\quad \Omega(1+x) + \Omega(1-x) = l\frac{x}{2\sin\pi x},$$

$$73.\quad \Omega(\tfrac{1}{2}+x) + \Omega(\tfrac{1}{2}-x) = -l(2\cos\pi x).$$

Folglich auch

74. $\Omega(1+x) = \frac{1}{2} l \frac{x}{2\sin\pi x} + \frac{1}{2}\{\Omega(1+x) - \Omega(1-x)\}$,

75. $\Omega(1-x) = \frac{1}{2} l \frac{x}{2\sin\pi x} - \frac{1}{2}\{\Omega(1+x) - \Omega(1-x)\}$,

76. $\Omega(\frac{1}{2}+x) = -\frac{1}{2} l(2\cos\pi x) - \frac{1}{2}\{\Omega(\frac{1}{2}-x) - \Omega(\frac{1}{2}+x)\}$,

77. $\Omega(\frac{1}{2}-x) = -\frac{1}{2} l(2\cos\pi x) + \frac{1}{2}\{\Omega(\frac{1}{2}-x) - \Omega(\frac{1}{2}+x)\}$,

d. i., wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{1}{2}\{\Omega(1+x) - \Omega(1-x)\} = U$$
$$\frac{1}{2}\{\Omega(\frac{1}{2}-x) - \Omega(\frac{1}{2}+x)\} = U'$$

ſetzen:

78. $\Omega(1+x) = \frac{1}{2} l \frac{x}{2\sin\pi x} + U$,

79. $\Omega(1-x) = \frac{1}{2} l \frac{x}{2\sin\pi x} - U$,

80. $\Omega(\frac{1}{2}+x) = -\frac{1}{2} l(2\cos\pi x) - U'$,

81. $\Omega(\frac{1}{2}-x) = -\frac{1}{2} l(2\cos\pi x) + U'$.

9. Nach dem Taylorſchen Lehrſatze erhält man ſehr leicht

$$U = \frac{\partial\Omega x}{\partial x}\cdot\frac{x}{1} + \frac{\partial^3\Omega x}{\partial x^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3} + \frac{\partial^5\Omega x}{\partial x^5}\cdot\frac{x^5}{1..5} + \frac{\partial^7\Omega x}{\partial x^7}\cdot\frac{x^7}{1..7} + \dots,$$

$$U' = -\frac{\partial\Omega x}{\partial x}\cdot\frac{x}{1} - \frac{\partial^3\Omega x}{\partial x^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3} - \frac{\partial^5\Omega x}{\partial x^5}\cdot\frac{x^5}{1..5} - \frac{\partial^7\Omega x}{\partial x^7}\cdot\frac{x^7}{1..7} - \dots,$$

wenn man in den Differentialquotienten der erſten Reihe $x = 1$, in den Differentialquotienten der zweiten Reihe dagegen $x = \frac{1}{2}$ ſetzt. Weil nun nach dem Obigen

$$\Omega x = (x+n-\tfrac{1}{2}) ln - n - lx - l(x+1) - \dots - l(x+n-1)$$

iſt; ſo folgt

$$\frac{\partial\Omega x}{\partial x} = ln - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \dots - \frac{1}{x+n-1},$$

$$\frac{\partial^3\Omega x}{1.2\,\partial x^3} = -\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x+2)^3} - \dots - \frac{1}{(x+n-1)^3},$$

$$\frac{\partial^5\Omega x}{1..4\,\partial x^5} = -\frac{1}{x^5} - \frac{1}{(x+1)^5} - \frac{1}{(x+2)^5} - \dots - \frac{1}{(x+n-1)^5},$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Alſo

82. $$U = \frac{1}{1}x\left\{ln - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{n}\right\}$$
$$-\frac{1}{3}x^3\left\{1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3}\right\}$$
$$-\frac{1}{5}x^5\left\{1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} + \dots + \frac{1}{n^5}\right\}$$
$$-\frac{1}{7}x^7\left\{1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \frac{1}{5^7} + \dots + \frac{1}{n^7}\right\}$$
$$- \dots\dots\dots\dots\dots$$

und

83. $U' = \frac{1}{1} x \left\{ -\ln + 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right)\right\}$

$$+ \frac{1}{3}(2x)^3 \left\{1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^3}\right\}$$
$$+ \frac{1}{5}(2x)^5 \left\{1 + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^5}\right\}$$
$$+ \frac{1}{7}(2x)^7 \left\{1 + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{7^7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^7}\right\}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Um die Convergenz dieſer Reihen für U und U' zu beurtheilen, ſetze man der Kürze wegen $\Omega x = f(x)$ und bezeichne die Differentialquotienten nach Lagrange; ſo iſt allgemein

$$\frac{f^{(2\alpha+1)}(x)}{1.2.3..2\alpha} = -\frac{1}{x^{2\alpha+1}} - \frac{1}{(x+1)^{2\alpha+1}} - \frac{1}{(x+2)^{2\alpha+1}} - \ldots - \frac{1}{(x+n-1)^{2\alpha+1}},$$

und folglich

$$\frac{x^{2\alpha+1}}{1.2.3.\ldots(2\alpha+1)} f^{(2\alpha+1)}(1+ix) =$$
$$-\frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\left\{\frac{1}{(1+ix)^{2\alpha+1}} + \frac{1}{(2+ix)^{2\alpha+1}} + \frac{1}{(3+ix)^{2\alpha+1}} + \ldots + \frac{1}{(n+ix)^{2\alpha+1}}\right\},$$
$$\frac{x^{2\alpha+1}}{1.2.3..(2\alpha+1)} f^{(2\alpha+1)}(\tfrac{1}{2}+ix) =$$
$$-\frac{(2x)^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\left\{\frac{1}{(1+2ix)^{2\alpha+1}} + \frac{1}{(3+2ix)^{2\alpha+1}} + \frac{1}{(5+2ix)^{2\alpha+1}} + \ldots + \frac{1}{(2n-1+2ix)^{2\alpha+1}}\right\},$$

wo im erſten Falle $1 + ix$ eine Mittelgröße (ſ. Mittel i. d. Z.) zwiſchen 1 und $1 + x$, im zweiten Falle dagegen $\frac{1}{2} + ix$ eine Mittelgröße zwiſchen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2} + x$ bezeichnet.

Iſt nun im erſten Falle x poſitiv und $\overline{\gtrless}\,1$, ſo iſt $1 + ix > 1$, und es iſt klar, daß

$$\frac{x^{2\alpha+1}}{1.2.3..(2\alpha+1)} f^{(2\alpha+1)}(1+ix)$$

ſich der Null nähert, wenn α wächſt, auch der Null beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur α groß genug annimmt, ſo daß alſo die für U gefundene Reihe jederzeit convergirt, wenn x poſitiv und $\overline{\gtrless}\,1$ iſt, wobei der Artikel Differentialrechnung (32.) i. d. Z. zu vergleichen iſt. Iſt aber in demſelben Falle x negativ und ſein abſoluter Werth $\overline{\gtrless}\,1$, ſo iſt $1 + ix$ zwar $> 1 + x$, aber < 1. Da alſo in dieſem Falle ſich nicht behaupten läßt, daß die Reihe

$$\frac{1}{(1+ix)^{2\alpha+1}} + \frac{1}{(2+ix)^{2\alpha+1}} + \frac{1}{(3+ix)^{2\alpha+1}} + \ldots + \frac{1}{(n+ix)^{2\alpha+1}}$$

abnimmt, wenn α wächſt; ſo läßt ſich auch nicht behaupten, daß

$$\frac{x^{2\alpha+1}}{1.2.3\ldots(2\alpha+1)} f^{(2\alpha+1)}(1+ix)$$

ſich der Null nähert und derſelben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man α wachſen läßt. Alſo läßt ſich in dieſem Falle auch nicht im Allgemeinen die Convergenz der für U gefundenen Reihe behaupten.

Im zweiten Falle ſey zuerſt $x \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}$ und poſitiv, ſo iſt $2x \overline{\overline{<}} 1$, und

$$\tfrac{1}{2} + ix > \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2} + ix < \tfrac{1}{2} + x;$$

alſo $1 + 2ix > 1$, woraus man alſo ſieht, daß unter der Vorausſetzung, daß x poſitiv und $\overline{\overline{<}} \frac{1}{2}$ iſt,

$$\frac{x^{2\alpha+1}}{1.2.3..(2\alpha+1)} f^{(2\alpha+1)}(\tfrac{1}{2} + ix)$$

ſich der Null nähert, und derſelben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man α wachſen läßt, die für U' gefundene Reihe alſo convergirt. Unter der Vorausſetzung daß x negativ und ſein abſoluter Werth $\overline{\overline{<}} \frac{1}{2}$ iſt, iſt zwar der abſolute Werth von 2x nicht größer als die Einheit, aber

$$\tfrac{1}{2} + ix > \tfrac{1}{2} + x,\ \tfrac{1}{2} + ix < \tfrac{1}{2},$$

folglich $1 + 2ix < 1$, ſo daß man alſo in dieſem Falle nicht allgemein die Convergenz der für U' gefundenen Reihe behaupten kann. Man darf alſo in der für U gefundenen Reihe bloß x poſitiv und $\overline{\overline{<}} 1$, in der für U' gefundenen Reihe dagegen bloß x poſitiv und $\overline{\overline{<}} \frac{1}{2}$ ſetzen, wenn man von der Convergenz der in Rede ſtehenden Reihen völlig verſichert ſeyn will. Es iſt aber auch nicht nöthig, x negativ zu ſetzen, weil man in einem ſolchem Falle nicht die Formeln (78.) und (80.) zur Berechnung von $\Omega(1 + x)$ und $\Omega(\frac{1}{2} + x)$, ſondern die Formeln (79.) und (81.) anwendet, durch welche man $\Omega(1 - x)$ und $\Omega(\frac{1}{2} - x)$ auch durch U und U' ausgedrückt erhält, in denen nun aber x poſitiv iſt.

10. Bezeichnet man nun die Summen der negativen Potenzen der natürlichen Zahlen für $n = \infty$ durch S_1, S_2, S_3, S_4, ...; ſo iſt

$$\begin{aligned} U &= \tfrac{1}{1}x\{\ln - (S_1 - 1) - 1\} - \tfrac{1}{3}x^3\{(S_3 - 1) + 1\} \\ &\quad - \tfrac{1}{5}x^5\{(S_5 - 1) + 1\} - \tfrac{1}{7}x^7\{(S_7 - 1) + 1\} - .... \\ &= -\tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 - .... \\ &\quad + \tfrac{1}{1}x\{\ln - (S_1 - 1)\} - \tfrac{1}{3}x^3(S_3 - 1) - \tfrac{1}{5}x^5(S_5 - 1) - ...... \end{aligned}$$

Aber, wie aus der bekannten logarithmiſchen Reihe (Differentialrechnung. 39. i. d. Z.) leicht folgt:

$$\tfrac{1}{2}l\frac{1-x}{1+x} = -\tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 - .....$$

für jedes x, deſſen abſoluter Werth < 1 iſt. Folglich iſt

84. $U = \frac{1}{2} l \frac{1-x}{1+x} + \frac{1}{1} x \{ln - (S_1 - 1)\} - \frac{1}{3} x^3 (S_3 - 1)$

$$- \frac{1}{5} x^5 (S_5 - 1) - \frac{1}{7} x^7 (S_7 - 1) - \ldots\ldots$$

für jedes poſitive x, welches < 1 iſt.

Nach dem Artikel Beſtimmtes Integral (41.) i. d. Z. iſt aber

$$S_1 = C' + ln,$$

wo

$$C' = 0,\ 57721\ 56649\ 02$$

iſt. Alſo iſt

$$- C' = ln - S_1,\ 1 - C' = ln - (S_1 - 1).$$

Folglich

85. $U = \frac{1}{2} l \frac{1-x}{1+x} + \frac{1}{1} x (1 - C') - \frac{1}{3} x^3 (S_3 - 1)$

$$- \frac{1}{5} x^5 (S_5 - 1) - \frac{1}{7} x^7 (S_7 - 1) - \ldots\ldots$$

Setzt man nun aus dem Artikel Beſtimmtes Integral (41.) i. d. Z. für $S_3, S_5, S_7, \ldots.$ ihre numeriſchen Werthe; ſo erhält man für jedes poſitive x, welches < 1 iſt:

86. $U = \frac{1}{2} l \frac{1-x}{1+x} + x.\ 0{,}42278\ 43350\ 98$

$$\begin{aligned} &- x^3.\ 0{,}06735\ 23010\ 53 \\ &- x^5.\ 0{,}00738\ 55510\ 11 \\ &- x^7.\ 0{,}00119\ 27539\ 12 \\ &- x^9.\ 0{,}00022\ 31547\ 58 \\ &- x^{11}.\ 0{,}00004\ 49262\ 37 \\ &- x^{13}.\ 0{,}00000\ 94402\ 57 \\ &- x^{15}.\ 0{,}00000\ 20392\ 16 \\ &- \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Was nun ferner die Reihe für U' betrifft, ſo wollen wir zuerſt einen andern Ausdruck für den Coefficienten

$$- ln + 2\left(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right)$$

ihres erſten Gliedes ſuchen. Derſelbe iſt

$$= - ln + 2\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$- \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n}\right),$$

d. i. nach dem Obigen oder nach dem Artikel Beſtimmtes Integral (41.) i. d. Z.

$$= - ln + 2\{C' + l(2n)\} - C' - ln$$

$$= - 2ln + C' + 2l2 + 2ln = C' + 2l2,$$

wo die Conſtante C' den oben angegebenen Werth hat. Nun erhellet ferner leicht, daß

$$2^\alpha\left\{1+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}+\ldots\right\}=(2^\alpha-1)\,S_\alpha$$

iſt, wofür Beſſel, wie offenbar verſtattet iſt, um die Reihe ſchneller convergirend zu machen,

$$(2^\alpha-1)(S_\alpha-1-2^{-\alpha})+2^\alpha-2^{-\alpha}$$

ſetzt. Dies giebt nach (83.)

$$\begin{aligned}
U' = {} & \frac{1}{1}x\left\{C'+2l2-\tfrac{3}{2}+2-\tfrac{1}{2}\right\} \\
& +\frac{1}{3}x^3\left\{(2^3-1)\left(S_3-1-\frac{1}{2^3}\right)+2^3-\frac{1}{2^3}\right\} \\
& +\frac{1}{5}x^5\left\{(2^5-1)\left(S_5-1-\frac{1}{2^5}\right)+2^5-\frac{1}{2^5}\right\} \\
& +\frac{1}{7}x^7\left\{(2^7-1)\left(S_7-1-\frac{1}{2^7}\right)+2^7-\frac{1}{2^7}\right\} \\
& +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
= {} & \frac{2x}{1}+\frac{(2x)^3}{3}+\frac{(2x)^5}{5}+\frac{(2x)^7}{7}+\ldots \\
& -\frac{1}{1}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3-\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{x}{2}\right)^7-\ldots\ldots \\
& +\frac{1}{1}x\left(C'+2l2-\frac{3}{2}\right)+\frac{7}{3}x^3\left(S_3-\frac{9}{8}\right) \\
& +\frac{31}{5}x^5\left(S_5-\frac{33}{32}\right)+\frac{127}{7}x^7\left(S_7-\frac{129}{128}\right)+\ldots
\end{aligned}$$

Die Summe der beiden erſten Reihen iſt

$$=-\tfrac{1}{2}l\frac{1-2x}{1+2x}+\tfrac{1}{2}l\frac{1-\frac{x}{2}}{1+\frac{x}{2}}=\tfrac{1}{2}l\frac{1+2x}{1-2x}+\tfrac{1}{2}l\frac{2-x}{2+x}=\tfrac{1}{2}l\frac{(1+2x)(2-x)}{(1-2x)(2+x)},$$

für jedes x, deſſen abſoluter Werth $<\frac{1}{2}$ iſt (Differentialrechnung. 39. i. d. Z.). Alſo iſt

$$87.\quad U'=\tfrac{1}{2}l\frac{(1+2x)(2-x)}{(1-2x)(2+x)}+\tfrac{1}{1}x\left(C'+2l2-\tfrac{3}{2}\right)+\tfrac{7}{3}x^3\left(S_3-\tfrac{9}{8}\right)$$
$$+\frac{31}{5}x^5\left(S_5-\frac{33}{32}\right)+\frac{127}{7}x^7\left(S_7-\frac{129}{128}\right)+\ldots.,$$

für jedes poſitive x, welches $<\frac{1}{2}$ iſt.

Setzt man nun für C', S_3, S_5, ... ihre aus dem Obigen bekannten numeriſchen Werthe, ſo erhält man:

88. $U' = \frac{1}{2} l \frac{(1+2x)(2-x)}{(1-2x)(2+x)} + x.\ 0{,}46351\ 00260\ 21$
$+ x^3.\ 0{,}17979\ 94407\ 06$
$+ x^5.\ 0{,}03520\ 20816\ 63$
$+ x^7.\ 0{,}00973\ 86754\ 43$
$+ x^9.\ 0{,}00313\ 79843\ 47$
$+ x^{11}.\ 0{,}00109\ 93049\ 02$
$+ x^{13}.\ 0{,}00041\ 14623\ 37$
$+ x^{15}.\ 0{,}00015\ 43504\ 29$
$+ \ldots\ldots$

für jedes poſitive x, welches $< \frac{1}{2}$ iſt.

Iſt M der Modulus des Briggiſchen Syſtems, ſo hat man zur unmittelbaren Berechnung der Briggiſchen Logarithmen der Facultäten:

89. $MU = \frac{1}{2} \log \frac{1-x}{1+x} + x.\ 0{,}18361\ 29037\ 68$
$- x^3.\ 0{,}02925\ 07326\ 91$
$- x^5.\ 0{,}00320\ 75040\ 54$
$- x^7.\ 0{,}00051\ 80063\ 42$
$- x^9.\ 0{,}00009\ 69148\ 80$
$- x^{11}.\ 0{,}00001\ 95112\ 17$
$- x^{13}.\ 0{,}00000\ 40998\ 52$
$- x^{15}.\ 0{,}00000\ 08856\ 20$
$- \ldots\ldots$

für jedes poſitive x, welches < 1 iſt, und

90. $MU' = \frac{1}{2} \log \frac{(1+2x)(2-x)}{(1-2x)(2+x)} + x.\ 0{,}20129\ 98466\ 08$
$+ x^3.\ 0{,}07808\ 59049\ 48$
$+ x^5.\ 0{,}01528\ 80598\ 18$
$+ x^7.\ 0{,}00422\ 94530\ 06$
$+ x^9.\ 0{,}00136\ 28092\ 86$
$+ x^{11}.\ 0{,}00047\ 74220\ 53$
$+ x^{13}\ 0{,}00017\ 86958\ 23$
$+ x^{15}.\ 0{,}00006\ 70335\ 40$
$+ \ldots\ldots$

für jedes poſitive x, welches $< \frac{1}{2}$ iſt.

11. Für alle x von beträchtlicher Größe findet man die Omegas am beſten auf folgende Art. Nach dem Obigen iſt

$$\Omega x = (x+n-\tfrac{1}{2}) l n - n - l x - l(x+1) - \ldots - l(x+n-1),$$

wo n unendlich groß iſt. Nach dem Artikel Beſtimmtes Integral (37.) i. d. Z. iſt aber

$$l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots + lx =$$

$$l\sqrt{2\pi} + (x+\tfrac{1}{2})lx - x + \frac{\overset{1}{B}}{1.2x} - \frac{\overset{3}{B}}{3.4x^3} + \frac{\overset{5}{B}}{5.6.x^5} - \ldots,$$

$$l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots + l(x+n-1) =$$

$$l\sqrt{2\pi} + (x+n-\tfrac{1}{2})l(x+n-1) - (x+n-1),$$

da n und alſo auch $x + n - 1$ unendlich groß iſt. Die durch $\overset{1}{B}, \overset{3}{B}, \overset{5}{B}, \ldots$ bezeichneten Größen ſind die Bernoulliſchen Zahlen. Alſo iſt

$$l(x+1) + l(x+2) + l(x+3) + \ldots + l(x+n-1)$$

$$(x+n-\tfrac{1}{2})l(x+n-1) - (x+n-1) - (x+\tfrac{1}{2})lx + x$$

$$-\frac{\overset{1}{B}}{1.2x} + \frac{\overset{3}{B}}{3.4x^3} - \frac{\overset{5}{B}}{5.6x^5} + \frac{\overset{7}{B}}{7.8x^7} - \ldots,$$

und folglich

$$\Omega x = (x+n-\tfrac{1}{2})ln - n - lx - (x+n-\tfrac{1}{2})l(x+n-1)$$

$$+ (x+n-1) + (x+\tfrac{1}{2})lx - x + \Sigma,$$

wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{\overset{1}{B}}{1.2x} - \frac{\overset{3}{B}}{3.4x^3} + \frac{\overset{5}{B}}{5.6x^5} - \frac{\overset{7}{B}}{7.8x^7} + \ldots = \Sigma$$

ſetzen. Alſo auch, da

$$l(x+n-1) = ln + l\left(1 + \frac{x-1}{n}\right)$$

iſt:

$$\Omega x = x - 1 - (x+n-\tfrac{1}{2})l\left(1 + \frac{x-1}{n}\right) + (x-\tfrac{1}{2})lx$$

$$- x + \Sigma.$$

Aber

$$l\left(1 + \frac{x-1}{n}\right) = \frac{x-1}{n} - \frac{(x-1)^2}{2n^2} + \frac{(x-1)^3}{3n^3} - \ldots,$$

und folglich, weil $n^2, n^3, n^4, \ldots$ gegen $x + n - \frac{1}{2}$ unendlich groß, alſo die Größen

$$\frac{(x+n-\frac{1}{2})(x-1)^2}{2n^2},\ \frac{(x+n-\frac{1}{2})(x-1)^3}{3n^3},\ \frac{(x+n-\frac{1}{2})(x-1)^4}{4n^4}, \ldots$$

als verſchwindend zu betrachten ſind:

$$\Omega x = x - 1 - \frac{(x+n-\frac{1}{2})(x-1)}{n} + (x-\tfrac{1}{2})lx - x + \Sigma.$$

Aber

$$\frac{(x+n-\frac{1}{2})(x-1)}{n} = (x-1)\left\{1+\frac{2x-1}{2n}\right\} = x-1,$$

da n unendlich groß iſt. Alſo, wenn man für Σ wieder ſeinen obigen Ausdruck ſetzt:

$$91.\quad \Omega x = (x-\tfrac{1}{2})\,l\,x - x + \frac{\overset{1}{B}}{1.2x} - \frac{\overset{3}{B}}{3.4x^3} + \frac{\overset{5}{B}}{5.6x^5} - \ldots,$$

eine Formel, die zur Berechnung von Ωx ſehr bequem iſt, wenn x nur einigermaßen groß iſt.

12. Nach (57.) iſt

$$l\{(1, +1)^{x-1}\} = (x-1)\,l\,1 + \Omega(1+x-1) - \Omega 1;$$

folglich nach (58.)

$$l\{(1, +1)^{x-1}\} = \Omega x + \tfrac{1}{2}\,l(2\pi);$$

alſo

$$92.\quad \Omega x = l\left\{\frac{(1, +1)^{x-1}}{\sqrt{2\pi}}\right\}$$

und, wenn M wie oben den Modulus des briggiſchen Syſtems bezeichnet:

$$93.\quad M\Omega x = \log\left\{\frac{(1, +1)^{x-1}}{\sqrt{2\pi}}\right\}.$$

Beſſel hat a. a. O. eine Tafel für $M\Omega x$ oder der Briggiſchen Logarithmen von $(1+1)^{x-1}.(2\pi)^{-\frac{1}{2}}$ für alle Hunderttheile zwiſchen $x=1$ und $x=2$, nebſt den erſten, zweiten und dritten Differenzen geliefert, welche nach den oben gegebenen Formeln berechnet iſt. Da dieſe ſchöne Tafel ſich an einem Orte befindet, wo ſie nicht gleich Jedem zugänglich ſeyn möchte, ſo wird es gewiß den meiſten Leſern angenehm ſeyn, wenn ich dieſelbe am Ende dieſes Artikels mittheile, da die Function Ωx überhaupt in der Analyſis, beſonders aber für die Berechnung der Facultäten von der größten Wichtigkeit iſt.

Außer den oben und Thl. II. S. 175. angeführten Schriften über die Facultäten ſ. m. noch Kramp Arithmétique universelle. Cologne. 1808. Chap. XXV., Arbogast Calcul des derivations. p. 364., und eine Abhandlung von Kramp in den Annales de Mathématiques. T. III.; auch einen kurzen Aufſatz von Clauſen in Crelles Journal. B. VII. S. 234. Beitrag zur Theorie der Facultäten von Müller daſ. B. XI. S. 361.

Tafel der tranſcendenten Function
MΩx.

x	MΩx	Differ. I.	II.	III.
1,00	— 0,39908 99342	— 247 12693	+ 7 04106	— 10030
1,01	— 0,40156 12035	— 240 08587	6 94076	— 9770
1,02	— 0,40396 20622	— 233 14511	6 84306	— 9517
1,03	— 0,40629 35133	— 226 30205	6 74789	— 9275
1,04	— 0,40855 65338	— 219 55416	6 65514	— 9042
1,05	— 0,41075 20754	— 212 89902	6 56472	— 8813
1,06	— 0,41288 10656	— 206 33450	6 47659	— 8597
1,07	— 0,41494 44086	— 199 85771	6 39062	— 8389
1,08	— 0,41694 29857	— 193 46709	6 30673	— 8183
1,09	— 0,41887 76566	— 187 16036	6 22490	— 7987
1,10	— 0,42074 92602	— 180 93546	6 14503	— 7799
1,11	— 0,42255 86148	— 174 79043	6 06704	— 7616
1,12	— 0,42430 65191	— 168 72339	5 99088	— 7438
1,13	— 0,42599 37530	— 162 73251	5 91650	— 7267
1,14	— 0,42762 10781	— 156 81601	5 84383	— 7102
1,15	— 0,42918 92382	— 150 97218	5 77281	— 6940
1,16	— 0,43069 89600	— 145 19737	5 70341	— 6789
1,17	— 0,43215 09537	— 139 49596	5 63552	— 6635
1,18	— 0,43354 59133	— 133 86044	5 56917	— 6489
1,19	— 0,43488 45177	— 128 29127	5 50428	— 6352
1,20	— 0,43616 74304	— 122 78699	5 44076	— 6212
1,21	— 0,43739 53003	— 117 34623	5 37864	— 6080
1,22	— 0,43856 87626	— 111 96759	5 31784	— 5954
1,23	— 0,43968 84385	— 106 64975	5 25830	— 5825
1,24	— 0,44075 49360	— 101 39145	5 20005	— 5709
1,25	— 0,44176 88505	— 96 19140	5 14296	— 5589
1,26	— 0,44273 07645	— 91 04844	5 08707	— 5476
1,27	— 0,44364 12389	— 85 96137	5 03231	— 5363
1,28	— 0,44450 08626	— 80 92906	4 97868	— 5260
1,29	— 0,44531 01532	— 75 95038	4 92608	— 5153
1,30	— 0,44606 96570	— 71 02430	4 87455	— 5052
1,31	— 0,44677 99000	— 66 14975	4 82403	— 4953
1,32	— 0,44744 13975	— 61 32572	4 77450	— 4859
1,33	— 0,44805 46547	— 56 55122	4 72591	— 4764
1,34	— 0,44862 01669	— 51 82531	4 67827	— 4674
1,35	— 0,44913 84200	— 47 14704	4 63153	— 4587
1,36	— 0,44960 98904	— 42 51551	4 58566	— 4499
1,37	— 0,45003 50455	— 37 92985	4 54067	— 4419
1,38	— 0,45041 43440	— 33 38918	4 49648	— 4334
1,39	— 0,45074 82358	— 28 89270	4 45314	— 4258
1,40	— 0,45103 71628	— 24 43956	4 41056	— 4179
1,41	— 0,45128 15584	— 20 02900	4 36877	— 4104
1,42	— 0,45148 18484	— 15 66028	4 32773	— 4033
1,43	— 0,45163 84507	— 11 33250	4 38740	— 3961
1,44	— 0,45175 17757	— 7 04510	4 24779	— 3889
1,45	— 0,45182 22267	— 2 79731	4 20890	— 3824
1,46	— 0,45185 01998	+ 1 41159	4 17066	— 3759
1,47	— 0,45183 60839	5 58225	4 13307	— 3692
1,48	— 0,45178 02614	9 71532	4 09615	— 3630
1,49	— 0,45168 31082	13 81149	4 05985	— 3570
1,50	— 0,45154 49935			

x	MΩx	Differr. I.	II.	III.
1,50	— 0,45154 49935	+ 17 87132	+ 4 02415	— 3509
1,51	— 0,45136 62803	21 89547	3 98906	— 3451
1,52	— 0,45114 73256	25 88453	3 95455	— 3396
1,53	— 0,45088 84803	29 83908	3 92059	— 3336
1,54	— 0,45059 00895	33 75967	3 88723	— 3286
1,55	— 0,45025 24928	37 64690	3 85437	— 3232
1,56	— 0,44987 60238	41 50127	3 82205	— 3179
1,57	— 0,44946 10111	45 32332	3 79026	— 3130
1,58	— 0,44900 77779	49 11358	3 75896	— 3080
1,59	— 0,44851 66421	52 87254	3 72816	— 3031
1,60	— 0,44798 79167	56 60070	3 69785	— 2986
1,61	— 0,44742 19097	60 29855	3 66799	— 2937
1,62	— 0,44681 89242	63 96654	3 63862	— 2894
1,63	— 0,44617 92588	67 60516	3 60968	— 2849
1,64	— 0,44550 32072	71 21484	3 58119	— 2806
1,65	— 0,44479 10588	74 79603	3 55313	— 2767
1,66	— 0,44404 30985	78 34916	3 52547	— 2721
1,67	— 0,44325 96069	81 87463	3 49826	— 2683
1,88	— 0,44244 08606	85 37289	3 47143	— 2643
1,69	— 0,44158 71317	88 84432	3 44500	— 2605
1,70	— 0,44069 96885	92 28932	3 41895	— 2566
1,71	— 0,43977 57953	95 70827	3 39329	— 2529
1,72	— 0,43881 87126	99 10156	3 36800	— 2495
1,73	— 0,43782 76970	102 46956	3 34305	— 2457
1,74	— 0,43680 30014	105 81261	3 31848	— 2421
1,75	— 0,43574 48753	109 13109	3 29427	— 2393
1,76	— 0,43465 35644	112 42536	3 27034	— 2354
1,77	— 0,43352 93108	115 69570	3 24680	— 2321
1,78	— 0,43237 23539	118 94250	3 22359	— 2294
1,79	— 0,43118 29288	122 16609	3 20065	— 2257
1,80	— 0,42996 12679	125 36674	3 17808	— 2231
1,81	— 0,42870 76005	128 54482	3 15577	— 2197
1,82	— 0,42742 21523	131 70059	3 13380	— 2170
1,83	— 0,42610 51464	134 83439	3 11210	— 2140
1,84	— 0,42475 68025	137 94649	3 09070	— 2112
1,85	— 0,42337 73376	141 03719	3 06958	— 2083
1,86	— 0,42196 69657	144 10677	3 04875	— 2058
1,87	— 0,42052 58980	147 15552	3 02817	— 2028
1,88	— 0,41905 43428	150 18369	3 00789	— 2005
1,89	— 0,41755 25059	153 19158	2 98784	— 1977
1,90	— 0,41602 05901	156 17942	2 96807	— 1952
1,91	— 0,41445 87959	159 14749	2 94855	— 1928
1,92	— 0,41286 73210	162 09604	2 92927	— 1903
1,93	— 0,41124 63606	165 02531	2 91024	— 1879
1,94	— 0,40959 61075	167 93555	2 89145	— 1856
1,95	— 0,40791 67520	170 82700	2 87289	— 1832
1,96	— 0,40620 84820	173 69989	2 85457	— 1811
1,97	— 0,40447 14831	176 55446	2 83646	— 1787
1,98	— 0,40270 59385	179 39092	2 81859	— 1765
1,99	— 0,40091 20293	182 20951	2 80094	— 1746
2,00	— 0,39908 99342	185 01045	2 78348	— 1723
2,01	— 0,39723 98297	187 79393	2 76625	— 1702
2,02	— 0,39536 18904	190 56018	2 74923	— 1682
2,03	— 0,39345 62886	193 30941	2 73241	— 1664
2,04	— 0,39152 31945	196 04182	2 71577	— 1641
2,05	— 0,38956 27763			

Fermats Lehrſätze, ſ. den Artikel Zahl III. IV. 3. 20. VI. 2. 6. VIII. 4. X.

Figur. M. ſ. den Artikel Vieleck und die Artikel Reciprocität und Verwandtſchaft i. d. Z.

Fluens. Spehr de quantitate fluente tractatus, in quo explicantur fundamenta calculi differentialis nonnisi ex notione fluentis deducta. Bruns. 1824.

Folgen der Zeichen in einer Gleichung ſ. den Art. Gleichung (16.) i. d. Z.

Function. Die meiſten und wichtigſten Zuſätze bedarf dieſer Artikel in der Lehre von der Zerlegung der gebrochenen rationalen Functionen in einfache Brüche, wozu wir alſo zunächſt übergehen, und nachher noch einiges Andere zur Vervollſtändigung dieſes wichtigen Artikels beifügen wollen.

I. Zerlegung der gebrochenen rationalen Functionen in einfache Brüche.

1. Jede gebrochene rationale Function läßt ſich, wenn $f(x)$ und $F(x)$ zwei beliebige ganze rationale Functionen von x bezeichnen, unter der Form

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

darſtellen. Iſt der höchſte Exponent von x in $f(x)$ kleiner wie der höchſte Exponent von x in $F(x)$, ſo heißt der vorſtehende Bruch eine ächte gebrochene rationale Function von x; ſonſt eine unächte. Jede unächte gebrochene rationale Function läßt ſich durch gemeine Diviſion jederzeit in eine ganze rationale Function und in eine ächte gebrochene rationale Function zerlegen, ſo daß wir alſo bloß die letztern zu betrachten brauchen und folglich immer annehmen können, daß $f(x)$ von einem niedrigern Grade ſey wie $F(x)$.

In der Algebra (ſ. den Artikel Gleichung i. d. Z.) wird gezeigt, daß $F(x)$ ſich immer als ein Product von der Form

$$(x-x_1)^m (x-x_2)^{m'} (x-x_3)^{m''} (x-x_4)^{m'''} \ldots .$$

darſtellen läßt, wo die Summe

$$m + m' + m'' + m''' + m'''' + \ldots .$$

dem Grade der Function $F(x)$ gleich iſt, und x_1, x_2, x_3, x_4, ... ſämmtlich unter einander ungleich ſind. Zugleich iſt der Einfachheit wegen angenommen worden, daß der Coefficient der höchſten Potenz von x in $F(x)$ die Einheit ſey, welches offenbar verſtattet iſt, da man, wenn a der Coefficient dieſer Potenz von x in $F(x)$ wäre, Zähler und Nenner des Bruchs

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

mit a dividiren könnte, wodurch F(x) unter der verlangten Form dargeſtellt werden würde.

2. Zunächſt wollen wir nun den Fall einer nähern Betrachtung unterwerfen, wenn

$$F(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots.(x-x_n),$$

alſo vom nten Grade iſt, und $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$ ſämmtlich unter einander ungleich ſind. Zu dem Ende ſey

$$F(x) = (x-x_1)F_1(x),$$

wo alſo

$$F_1(x) = (x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots.(x-x_n)$$

iſt, und folglich für $x = x_1$ nicht $= 0$ wird, weil nach der Vorausſetzung $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots. x_n$ ſämmtlich unter einander ungleich ſind. Setzen wir nun

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{f_1(x)}{F_1(x)},$$

ſo wird, wenn wir auf beiden Seiten mit

$$F(x) = (x-x_1)F_1(x)$$

multipliciren:

$$f(x) = A_1F_1(x) + (x-x_1)f_1(x);$$

folglich für $x = x_1$:

$$f(x_1) = A_1F_1(x_1),\ A_1 = \frac{f(x_1)}{F_1(x_1)},$$

wodurch die Conſtante A_1 vollſtändig beſtimmt iſt, da $F_1(x_1)$ nicht $= 0$ iſt. Hat man auf dieſe Weiſe A_1 beſtimmt, ſo erhält man ferner aus der obigen Gleichung

$$f_1(x) = \frac{f(x) - A_1F_1(x)}{x-x_1},$$

wodurch alſo auch $f_1(x)$ beſtimmt iſt. Ueber dieſe Function ſind nun aber noch folgende Bemerkungen zu machen. Setzt man nämlich im Zähler des vorſtehenden Bruchs $x = x_1$, ſo wird derſelbe

$$= f(x_1) - A_1F_1(x_1) = f(x_1) - \frac{f(x_1)}{F_1(x_1)}F_1(x_1) = 0;$$

folglich iſt, wie in der Lehre von den Gleichungen gezeigt wird, die Function

$$f(x) - A_1F_1(x)$$

durch $x - x_1$, ohne Reſt theilbar, alſo $f_1(x)$ eine ganze rationale Function. Was den Grad dieſer Function betrifft, ſo iſt dieſelbe, weil $f(x)$ höchſtens vom $(n-1)$ten, $F_1(x)$ vom $(n-1)$ten, alſo

$$f(x) - A_1F_1(x)$$

vom (n — 1)ten Grade iſt, offenbar nur vom (n — 2)ten Grade, und man ſieht alſo, daß man immer

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{f_1(x)}{F_1(x)}$$

ſetzen kann, ſo daß nämlich A_1 eine conſtante Größe, $f_1(x)$ eine ganze rationale Function vom (n — 2)ten, $F_1(x)$ eine ganze rationale Function vom (n — 1)ten Grade iſt. Setzen wir alſo jetzt

$$F(x) = (x - x_1) F_1(x),$$
$$F_1(x) = (x - x_2) F_2(x),$$
$$F_2(x) = (x - x_3) F_3(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$F_{n-2}(x) = (x - x_{n-1}) F_{n-1} x,$$
$$F_{n-1}(x) = x - x_n,$$

wo

$$F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x), \ldots F_{n-1}(x)$$

reſpective ganze rationale Functionen vom

(n — 1)ten, (n — 2)ten, (n — 3)ten, ... 1ſten

Grade ſind; ſo kann man, mittelſt mehrfacher Anwendung des obigen allgemeinen Verfahrens, ſetzen:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{f_1(x)}{F_1(x)},$$
$$\frac{f_1(x)}{F_1(x)} = \frac{A_2}{x - x_2} + \frac{f_2(x)}{F_2(x)},$$
$$\frac{f_2(x)}{F_2(x)} = \frac{A_3}{x - x_3} + \frac{f_3(x)}{F_3(x)},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{f_{n-3}(x)}{F_{n-3}(x)} = \frac{A_{n-2}}{x - x_{n-2}} + \frac{f_{n-2}(x)}{F_{n-2}(x)},$$
$$\frac{f_{n-2}(x)}{F_{n-2}(x)} = \frac{A_{n-1}}{x - x_{n-1}} + \frac{f_{n-1}(x)}{F_{n-1}(x)},$$

ſo daß nämlich

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x), \ldots f_{n-1}(x)$$

reſpective ganze rationale Functionen des

(n — 2)ten, (n — 3)ten, (n — 4)ten, ... 0ten

Grades, und

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4, \ldots A_{n-1}$$

conſtante Größen ſind. $f_{n-1}(x)$ iſt als eine Function des 0ten Grades natürlich eine conſtante Größe, und kann folglich $= A_n$ geſetzt werden, ſo daß alſo, weil $F_{n-1}(x) = x - x_n$ iſt, die gebrochene Function

$$\frac{f_{n-1}(x)}{F_{n-1}(x)} = \frac{A_n}{x - x_n}$$

iſt. Addirt man nun, dies vorausgeſetzt, die obigen Gleichungen

zu einander, und hebt auf beiden Seiten auf, was ſich aufheben läßt; ſo erhält man

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \frac{A_3}{x-x_3} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n},$$

und es iſt alſo hierdurch in aller Strenge erwieſen, daß ſich unter den obigen Vorausſetzungen die gebrochene rationale Function

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

jederzeit als ein Aggregat einfacher Brüche von der Form

$$\frac{A_k}{x-x_k}$$

darſtellen läßt.

Nachdem wir ſo die Möglichkeit der Zerlegung der Function

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

in einfache Brüche von der obigen Form völlig ſtreng und allgemein nachgewieſen haben, kommt es nun darauf an, die conſtanten Zähler $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ ſelbſt zu beſtimmen. Zu dem Ende ſey allgemein

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_k}{x-x_k} + \frac{f_k(x)}{F_k(x)},$$

wo wir jetzt

$$F(x) = (x-x_k)F_k(x)$$

ſetzen wollen. Multipliciren wir nun auf beiden Seiten mit $F(x)$; ſo ergiebt ſich

$$f(x) = A_k F_k(x) + (x-x_k) f_k(x);$$

alſo für $x = x_k$:

$$f(x_k) = A_k F_k(x_k),$$

und folglich

$$A_k = \frac{f(x_k)}{F_k(x_k)}.$$

Differentiiren wir aber die Gleichung

$$F(x) = (x-x_k)F_k(x),$$

ſo erhalten wir, bei Anwendung der Bezeichnung der Differentialquotienten von Lagrange:

$$F'(x) = (x-x_k)F'_k(x) + F_k(x),$$

und folglich für $x = x_k$:

$$F_k(x_k) = F'(x_k);$$

alſo

$$A_k = \frac{f(x_k)}{F'(x_k)}.$$

Daß $F_k(x_k)$, und folglich auch $F'(x_k)$, nicht $= 0$ iſt, iſt

klar, weil nach der Vorausſetzung $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ ſämmtlich unter einander ungleich ſind. Nach dieſen Beſtimmungen erhält man alſo in dem, hier in Betrachtung gezogenen, Falle zur Zerlegung der gebrochenen rationalen Functionen in einfache Brüche folgende ganz allgemeine Formel:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x_1)}{F'(x_1).(x-x_1)}$$
$$+ \frac{f(x_2)}{F'(x_2).(x-x_2)}$$
$$+ \frac{f(x_3)}{F'(x_3).(x-x_3)}$$
$$\cdots\cdots$$
$$+ \frac{f(x_n)}{F'(x_n).(x-x_n)},$$

vorausgeſetzt, daß

$$F(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)$$

iſt, und $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$ ſämmtlich unter einander ungleich ſind. Die Anwendung dieſer Formel iſt ganz leicht, und braucht hier nicht an ſpeciellen Fällen erläutert zu werden.

3. Wir wollen vielmehr ſogleich zu dem Falle übergehen, wo die ganze rationale Function des $n$ten Grades

$$F(x) = (x-x_1)^m (x-x_2)^{m'} (x-x_3)^{m''} (x-x_4)^{m'''} \ldots.$$

iſt, und $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots.$ alle unter einander ungleich ſind. Auch iſt, wie ſich von ſelbſt verſteht, immer

$$n = m + m' + m'' + m''' + \ldots.$$

Setzen wir

$$F(x) = (x-x_1)^m F_1(x),$$

ſo iſt nach der Vorausſetzung $F_1(x)$ eine Function von x, welche für $x = x_1$ nicht $= 0$ wird. Ferner ſetze man

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)^m} + \frac{f_1(x)}{(x-x_1)^{m-1} F_1(x)};$$

ſo wird, wenn man auf beiden Seiten mit $F(x)$ multiplicirt:

$$f(x) = A_1 F_1(x) + (x-x_1) f_1(x),$$

und folglich für $x = x_1$:

$$f(x_1) = A_1 F_1(x_1),\ A_1 = \frac{f(x_1)}{F_1(x_1)},$$

wodurch, weil $F_1(x_1)$ nicht $= 0$ iſt, die Conſtante A_1 völlig beſtimmt iſt. Hat man auf dieſe Weiſe A_1 gefunden, ſo ergiebt ſich zur Beſtimmung von $f_1(x)$ die Gleichung:

$$f_1(x) = \frac{f(x) - A_1 F_1(x)}{x-x_1}.$$

Da

$$f(x_1) - A_1 F_1(x_1) = f(x_1) - \frac{f(x_1)}{F_1(x_1)} \cdot F_1(x_1) = 0$$

iſt; ſo iſt $f_1(x)$, wie aus der Theorie der Gleichungen folgt, eine ganze rationale Function von x, und zugleich erhellet, daß dieſe Function höchſtens vom Grade n — 2 iſt. Man kann alſo die Conſtante A_1 und die ganze rationale Function $f_1(x)$ immer ſo beſtimmen, daß der obigen Gleichung genügt wird, und dieſelbe alſo jederzeit zuläſſig iſt. Durch ſucceſſive Anwendung dieſes Verfahrens erhält man nun nach und nach:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)^m} + \frac{f_1(x)}{(x-x_1)^{m-1}F_1(x)}$$

$$= \frac{A_1}{(x-x_1)^m} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{m-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-x_1)^{m-2}F_1(x)}$$

$$= \frac{A_1}{(x-x_1)^m} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{m-1}} + \frac{A_3}{(x-x_1)^{m-2}} + \frac{f_3(x)}{(x-x_1)^{m-3}F_1(x)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \frac{A_1}{(x-x_1)^m} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{m-1}} + \frac{A_3}{(x-x_1)^{m-2}} + \ldots + \frac{A_m}{x-x_1} + \frac{f_m(x)}{F_1(x)},$$

wo die ganzen rationalen Functionen

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots\ f_m(x)$$

reſpective höchſtens vom

$$(n-2)\text{ten},\ (n-3)\text{ten},\ (n-4)\text{ten},\ \ldots\ (n-m-1)\text{ten}$$

Grade ſind. $F_1(x)$ iſt vom $(n-m)$ten Grade, alſo, weil $f_m(x)$ höchſtens vom $(n-m-1)$ten Grade iſt, jederzeit

$$\frac{f_m(x)}{F_1(x)}$$

eine ächte gebrochene rationale Function. Setzen wir der Kürze wegen

$$\frac{A_1}{(x-x_1)^m} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{m-1}} + \frac{A_3}{(x-x_1)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_m}{x-x_1} = \Sigma\frac{A_m}{x-x_1};$$

ſo iſt

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \Sigma\frac{A_m}{x-x_1} + \frac{f_m(x)}{F_1(x)},$$

und der letzte Bruch jederzeit eine ächte gebrochene rationale Function.

Wäre $F_1(x) = 1$, alſo

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{(x-x_1)^m};$$

ſo würde man wie vorher erhalten

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)^m} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{m-1}} + \frac{A_3}{(x-x_1)^{m-2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{A_{m-1}}{(x-x_1)^2} + \frac{f_{m-1}(x)}{x-x_1},$$

wo $f_{m-1}(x)$ höchſtens vom $\{n-(m-1)-1\}$ten, d. i., weil in dieſem Falle $n=m$ iſt, höchſtens vom 0ten Grade, folglich eine Conſtante, und alſo, wenn wir $f_{m-1}(x) = A_m$ ſetzen,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \Sigma \frac{A_m}{x-x_1}$$

iſt.

Der Kürze wegen wollen wir nun

$$F(x) = (x-x_1)^a (x-x_2)^b (x-x_3)^c \ldots (x-x_k)^q$$

und

$$F(x) = (x-x_1)^a F_1(x),$$
$$F_1(x) = (x-x_2)^b F_2(x),$$
$$F_2(x) = (x-x_3)^c F_3(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$F_{k-2}(x) = (x-x_{k-1})^p F_{k-1}(x),$$
$$F_{k-1}(x) = (x-x_k)^q$$

ſetzen; ſo iſt nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \Sigma \frac{A_a}{x-x_1} + \frac{f_a(x)}{F_1(x)},$$
$$\frac{f_a(x)}{F_1(x)} = \Sigma \frac{B_b}{x-x_2} + \frac{f_b(x)}{F_2(x)};$$
$$\frac{f_b(x)}{F_2(x)} = \Sigma \frac{C_c}{x-x_3} + \frac{f_c(x)}{F_3(x)},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{f_o(x)}{F_{k-2}(x)} = \Sigma \frac{P_p}{x-x_{k-1}} + \frac{f_p(x)}{F_{k-1}(x)},$$
$$\frac{f_p(x)}{F_{k-1}(x)} = \Sigma \frac{Q_q}{x-x_k}.$$

Folglich iſt in dieſem Falle

$$\frac{f(x)}{F(x)} =$$

$$\Sigma \frac{A_a}{x-x_1} + \Sigma \frac{B_b}{x-x_2} + \Sigma \frac{C_c}{x-x_3} + \ldots + \Sigma \frac{Q_q}{x-x_k}.$$

4. Nachdem wir nun die Möglichkeit der Zerlegung der Function

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

völlig ſtreng und allgemein bewieſen haben, gehen wir zur Beſtimmung der conſtanten Zähler der einzelnen Brüche über. Wenn wir wieder

$$F_1(x) = (x-x_2)^b (x-x_3)^c (x-x_4)^d \ldots (x-x_k)^q$$

ſetzen; ſo iſt, wie wir vorher geſehen haben,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \Sigma \frac{A_a}{x-x_1} + \frac{X}{F_1(x)},$$

wo X bekanntlich eine ganze rationale Function von x, und der letzte Bruch eine ächte gebrochene rationale Function von x iſt. Bezeichnen wir nun der Kürze wegen die Reihe

$$A_1 + A_2(x-x_1) + A_3(x-x_1)^2 + \ldots + A_a(x-x_1)^{a-1}$$

durch

$$S\{A_1 A_2 A_3 \ldots A_a\},$$

wobei man zu bemerken hat, daß für $x = x_1$ dieſe Reihe ſich auf ihr erſtes Glied reducirt; ſo iſt offenbar

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{S\{A_1 A_2 A_3 \ldots A_a\}}{(x-x_1)^a} + \frac{X}{F_1(x)},$$

und folglich

$$\frac{f(x)}{F_1(x)} = S\{A_1 A_2 A_3 \ldots A_a\} + \frac{X(x-x_1)^a}{F_1(x)}.$$

Alſo, wenn wir $x = x_1$ ſetzen:

$$A_1 = \frac{f(x_1)}{F_1(x_1)},$$

wobei man immer zu bemerken hat, daß $F_1(x_1)$ nicht $= 0$ iſt.

Weil nun

$$f(x_1) - A_1 F_1(x_1) = 0$$

iſt; ſo iſt

$$\frac{f(x) - A_1 F_1(x)}{x-x_1} = \varphi_1(x)$$

eine ganze rationale Function, und man findet leicht aus dem Vorhergehenden

$$\frac{\varphi_1(x)}{F_1(x)} = S\{A_2 A_3 A_4 \ldots A_a\} + \frac{X(x-x_1)^{a-1}}{F_1(x)};$$

alſo, wenn man $x = x_1$ ſetzt, und nie aus den Augen läßt, daß $F_1(x_1)$ nicht $= 0$ iſt:

$$A_2 = \frac{\varphi_1(x_1)}{F_1(x_1)}.$$

Weil alſo

$$\varphi_1(x_1) - A_2 F_1(x_1) = 0$$

iſt; ſo iſt

$$\frac{\varphi_1(x_1) - A_2 F_1(x)}{x-x_1} = \varphi_2(x)$$

wieder eine ganze rationale Function, und aus dem Obigen folgt leicht

$$\frac{\varphi_2(x)}{F_1(x)} = S\{A_3 A_4 A_5 \ldots A_a\} + \frac{X(x-x_1)^{a-2}}{F_1(x)};$$

alſo, wenn man $x = x_1$ ſetzt:

$$A_3 = \frac{\varphi_2(x_1)}{F_1(x_1)}.$$

Wie man auf dieſe Art weiter gehen kann, iſt klar. Endlich kommt man auf

$$\frac{\varphi_{a-3}(x) - A_{a-2} F_1(x)}{x - x_1} = \varphi_{a-2}(x),$$

wo $\varphi_{a-2}(x)$ eine ganze rationale Function iſt, und

$$\frac{\varphi_{a-2}(x)}{F_1(x)} = S\{A_{a-1} A_a\} + \frac{X(x-x_1)^2}{F_1(x)};$$

alſo für $x = x_1$:

$$A_{a-1} = \frac{\varphi_{a-2}(x_1)}{F_1(x_1)}.$$

Weil nun

$$\varphi_{a-2}(x_1) - A_{a-1} F_1(x_1) = 0$$

iſt; ſo iſt

$$\frac{\varphi_{a-2}(x) - A_{a-1} F_1(x)}{x - x_1} = \varphi_{a-1}(x)$$

eine ganze rationale Function, und aus dem Obigen folgt leicht:

$$\frac{\varphi_{a-1}(x)}{F_1(x)} = S\{A_a\} + \frac{X(x-x_1)}{F_1(x)};$$

alſo, weil $S\{A_a\} = A_a$ iſt, für $x = x_1$:

$$A_a = \frac{\varphi_{a-1}(x_1)}{F_1(x_1)}.$$

Hierdurch erhält man alſo zur Beſtimmung von A_1, A_2, A_3, ... A_a folgende Gleichungen:

$$A_1 = \frac{f(x_1)}{F_1(x_1)},\ \frac{f(x) - A_1 F_1(x)}{x - x_1} = \varphi_1(x);$$

$$A_2 = \frac{\varphi_1(x_1)}{F_1(x_1)},\ \frac{\varphi_1(x) - A_2 F_1(x)}{x - x_1} = \varphi_2(x);$$

$$A_3 = \frac{\varphi_2(x_1)}{F_1(x_1)},\ \frac{\varphi_2(x) - A_3 F_1(x)}{x - x_1} = \varphi_3(x);$$

$$A_4 = \frac{\varphi_3(x_1)}{F_1(x_1)},\ \frac{\varphi_3(x) - A_4 F_1(x)}{x - x_1} = \varphi_4(x);$$

. . . .

$$A_{a-1} = \frac{\varphi_{a-2}(x_1)}{F_1(x_1)},\ \frac{\varphi_{a-2}(x) - A_{a-1} F_1(x)}{x - x_1} = \varphi_{a-1}(x);$$

$$A_a = \frac{\varphi_{a-1}(x_1)}{F_1(x_1)}.$$

Die Functionen

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \ldots\ \varphi_{\alpha-1}(x)$$

ſind ſämmtlich ganze rationale Functionen, und müſſen durch gemeine algebraiſche Diviſion ſucceſſive berechnet werden.

Die Differentialrechnung läßt ſich bei dieſem Problem auf folgende Art anwenden. Es iſt allgemein

$$\varphi_\varrho(x) = \frac{\varphi_{\varrho-1}(x) - A_\varrho F_1(x)}{x - x_1}.$$

Folglich

$$A_\varrho + (x-x_1)\frac{\varphi_\varrho(x)}{F_1(x)} = \frac{\varphi_{\varrho-1}(x)}{F_1(x)}.$$

Alſo, wenn man differentiirt:

$$\frac{x-x_1}{1.\partial x}\partial.\frac{\varphi_\varrho(x)}{F_1(x)} + \frac{\varphi_\varrho(x)}{F_1(x)} = \frac{1}{1.\partial x}\partial.\frac{\varphi_{\varrho-1}(x)}{F_1(x)}.$$

Differentiirt man nun dieſe Gleichung von Neuem und mehrere Male hinter einander; ſo erhält man mit der größten Leichtigkeit:

$$\frac{x-x_1}{1.\partial x}\partial.\frac{\varphi_\varrho(x)}{F_1(x)} + \frac{\varphi_\varrho(x)}{F_1(x)} = \frac{1}{1.\partial x}\partial.\frac{\varphi_{\varrho-1}(x)}{F_1(x)},$$

$$\frac{x-x_1}{1.2\partial x^2}\partial^2.\frac{\varphi_\varrho(x)}{F_1(x)} + \frac{1}{1.\partial x}\partial.\frac{\varphi_\varrho(x)}{F_1(x)} = \frac{1}{1.2\partial x^2}\partial^2.\frac{\varphi_{\varrho-1}(x)}{F_1(x)},$$

$$\frac{x-x_1}{1.2.3\partial x^3}\partial^3.\frac{\varphi_\varrho(x)}{F_1(x)} + \frac{1}{1.2\partial x^2}\partial^2.\frac{\varphi_\varrho(x)}{F_1(x)} = \frac{1}{1.2.3\partial x^3}\partial^3.\frac{\varphi_{\varrho-1}(x)}{F_1(x)},$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Folglich iſt allgemein, wenn man nach der Differentiation $x=x_1$ ſetzt:

$$\frac{1}{1\ldots(\alpha-1)\partial x^{\alpha-1}}\partial^{\alpha-1}.\frac{\varphi_\varrho(x)}{F_1(x)} = \frac{1}{1\ldots\alpha\,\partial x^\alpha}\partial^\alpha.\frac{\varphi_{\varrho-1}(x)}{F_1(x)},$$

und folglich, immer nach der Differentiation $x = x_1$ geſetzt:

$$\begin{aligned} A_\varrho &= \frac{\varphi_{\varrho-1}(x)}{F_1(x)} \\ &= \frac{1}{1.\partial x}\partial.\frac{\varphi_{\varrho-2}(x)}{F_1(x)} \\ &= \frac{1}{1.2\,\partial x^2.}\partial^2.\frac{\varphi_{\varrho-3}(x)}{F_1(x)} \\ &= \frac{1}{1.2.3\,\partial x^3}\partial^3.\frac{\varphi_{\varrho-4}(x)}{F_1(x)} \\ &\ldots\ldots \\ &= \frac{1}{1\ldots(\varrho-2)\partial x^{\varrho-2}}\partial^{\varrho-2}.\frac{\varphi_1(x)}{F_1(x)} \\ &= \frac{1}{1\ldots(\varrho-1)\partial x^{\varrho-1}}\partial^{\varrho-1}.\frac{f(x)}{F_1(x)}. \end{aligned}$$

Iſt alſo

$$F(x) = (x - x_1)^a . F_1(x) ,$$

wo $F_1(x)$ nicht $= 0$ iſt für $x = x_1$; ſo iſt der Zähler des Bruchs

$$\frac{A_\varrho}{(x - x_1)^{a-\varrho+1}}$$

in der Zerlegung der gebrochenen Function $\frac{f(x)}{F(x)}$ nach dem Obigen:

$$A_\varrho = \frac{1}{1.2..(\varrho-1)\,\partial x^{\varrho-1}}\,\partial^{\varrho-1} . \frac{f(x)}{F_1(x)} ,$$

wenn man nach der Differentiation $x = x_1$ ſetzt.

5. Eine neue Methode zur Beſtimmung der conſtanten Zähler der Partialbrüche ergiebt ſich auf folgende Art. Nach dem Vorhergehenden iſt nämlich allgemein

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)^a} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{a-1}} + .. + \frac{A_a}{x-x_1} + \frac{\varphi(x)}{F_1(x)} ,$$

wo $\frac{\varphi(x)}{F_1(x)}$ eine ächte gebrochene rationale Function von x iſt. Setzen wir nun $x + \Theta$ für x, entwickeln f(x) nach Potenzen von Θ, und ſetzen dann x_1 für x, ſo erhält man für $f(x_1 + \Theta)$ einen Ausdruck von der Form

$$\alpha_1 + \alpha_2\Theta + \alpha_3\Theta^2 + \alpha_4\Theta^3 + ... ,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, ...$ Functionen von x_1 ſind. Setzt man ferner auch $x + \Theta$ für x in dem Nenner F(x), entwickelt F(x) nach Potenzen von Θ, und ſetzt dann x_1 für x; ſo erhält man, weil

$$F(x) = (x - x_1)^a . F_1(x) ,$$

alſo

$$F(x + \Theta) = (x + \Theta - x_1)^a . F_1(x + \Theta) ,$$

und folglich

$$F(x_1 + \Theta) = \Theta^a . F_1(x_1 + \Theta)$$

iſt, für $F(x_1 + \Theta)$ offenbar einen Ausdruck von der Form

$$\beta_1\Theta^a + \beta_2\Theta^{a+1} + \beta_3\Theta^{a+2} + \beta_4\Theta^{a+3} + ... ,$$

wo $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, ...$ Functionen von x_1 ſind. Setzt man alſo in der obigen Gleichung $x_1 + \Theta$ für x, ſo wird dieſelbe

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2\Theta + \alpha_3\Theta^2 + \alpha_4\Theta^3 + ...}{\beta_1\Theta^a + \beta_2\Theta^{a+1} + \beta_3\Theta^{a+2} + \beta_4\Theta^{a+3} + ...}$$

$$= \frac{A_1}{\Theta^a} + \frac{A_2}{\Theta^{a-1}} + \frac{A_3}{\Theta^{a-2}} + ... + \frac{A_a}{\Theta} + \frac{\varphi(x_1+\Theta)}{F_1(x_1+\Theta)} ,$$

oder

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2\Theta + \alpha_3\Theta^2 + \alpha_4\Theta^3 + ...}{\beta_1 + \beta_2\Theta + \beta_3\Theta^2 + \beta_4\Theta^3 + ...}$$

$$= A_1 + A_2\Theta + A_3\Theta^2 + A_4\Theta^3 + ... + A_a\Theta^{a-1} + \Theta^a . \frac{\varphi(x_1+\Theta)}{F_1(x_1+\Theta)} ,$$

woraus ferner leicht folgt:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + \alpha_2\Theta + \alpha_3\Theta^2 + \alpha_4\Theta^3 + \ldots\ldots \\ &= \left.\begin{array}{l} \beta_1 A_1 + \beta_1 A_2\Theta + \beta_1 A_3\Theta^2 + \ldots + \beta_1 A_a\Theta^{a-1} \\ \quad + \beta_2 A_1 + \beta_2 A_2 + \ldots + \beta_2 A_{a-1} \\ \qquad + \beta_3 A_1 + \ldots + \beta_3 A_{a-2} \\ \qquad\quad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad + \beta^a A_1 \end{array}\right\} + X_1\Theta^a, \end{aligned}$$

wo X_1 eine gewiſſe von x_1 und Θ abhängende Größe bezeichnet, die, wie leicht erhellet, für $\Theta = 0$ nicht unendlich wird. Setzt man nun in dieſer für jedes Θ geltenden Gleichung $\Theta = 0$, ſo erhält man $\alpha_1 = \beta_1 A_1$. Hebt man dann die gleichen Größen auf beiden Seiten auf, dividirt auf beiden Seiten durch Θ, und ſetzt dann wieder $\Theta = 0$, ſo erhält man $\alpha_2 = \beta_1 A_2 + \beta_2 A_1$. Auch iſt klar, wie man nach dieſer Schlußweiſe, die in der Analyſis oft angewandt wird, und hier als bekannt vorausgeſetzt werden kann, weiter gehen kann. Man erhält dadurch überhaupt folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1 A_1 \\ \alpha_2 &= \beta_1 A_2 + \beta_2 A_1 \\ \alpha_3 &= \beta_1 A_3 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_1 \\ \alpha_4 &= \beta_1 A_4 + \beta_2 A_3 + \beta_3 A_2 + \beta_4 A_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_a &= \beta_1 A_a + \beta_2 A_{a-1} + \beta_3 A_{a-2} + \beta_4 A_{a-3} + \ldots + \beta_a A_1 \end{aligned}$$

und dieſe Gleichungen reichen zur Beſtimmung der Zähler

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots, A_a$$

völlig hin. Wie die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots\ldots; \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots\ldots$ ſich beſtimmen laſſen, erhellet aus dem Obigen.

6. Die vorigen Gleichungen laſſen ſich aber vermittelſt der Differentialquotienten, welche wir wieder nach Lagrange bezeichnen wollen, noch auf einen andern merkwürdigen Ausdruck bringen. Aus dem Taylorſchen Lehrſatze erhellet nämlich auf der Stelle die Richtigkeit folgender Ausdrücke:

$$\alpha_1 = f(x_1),\ \alpha_2 = \frac{f'(x_1)}{1},\ \alpha_3 = \frac{f''(x_1)}{1.2},\ \alpha_4 = \frac{f'''(x_1)}{1.2.3}, \ldots\ldots;$$

$$\beta_1 = \frac{F^{(a)}(x_1)}{1\ldots\ldots a},\ \beta_2 = \frac{F^{(a+1)}(x_1)}{1\ldots(a+1)},\ \beta_3 = \frac{F^{(a+2)}(x_1)}{1\ldots(a+2)}, \ldots\ldots$$

Setzt man dieſe Ausdrücke in die in (5.) bewieſenen Gleichungen; ſo werden dieſelben:

$$f(x_1) = \frac{A_1 F^{(a)}(x_1)}{1\ldots a}$$

$$\frac{f'(x_1)}{1} = \frac{A_2 F^{(a)}(x_1)}{1\ldots a} + \frac{A_1 F^{(a+1)}(x_1)}{1\ldots(a+1)}$$

$$\frac{f''(x_1)}{1.2} = \frac{A_3 F^{(a)}(x_1)}{1\ldots\ldots a} + \frac{A_2 F^{(a+1)}(x_1)}{1\ldots(a+1)} + \frac{A_1 F^{(a+2)}(x_1)}{1\ldots(a+2)}$$

$$\frac{f'''(x_1)}{1.2.3} = \frac{A_4 F^{(a)}(x_1)}{1\ldots a} + \frac{A_3 F^{(a+1)}(x_1)}{1\ldots(a+1)} + \frac{A_2 F^{(a+2)}(x_1)}{1\ldots(a+2)} + \frac{A_1 F^{(a+3)}(x_1)}{1\ldots(a+3)}$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Dieſe Gleichungen ſind deshalb vorzüglich bemerkenswerth, weil man mittelſt derſelben die Zähler $A_1, A_2, A_3, \ldots A_a$ durch unmittelbare Differentiation des Zählers und des Nenners der gegebenen gebrochenen Function finden kann. Sie würden ſich zur Berechnung noch etwas bequemer einrichten laſſen, wenn man auf beiden Seiten mit $1 \ldots a$ multiplicirte.

7. Wir wollen nun die vorigen Zerlegungen aus einem noch allgemeinern Geſichtspunkte betrachten, und gebrauchen bei dieſer Unterſuchung eine Bezeichnung, die zuerſt von Crelle in ſeinem trefflichen Mémoire sur la decomposition des fractions algébriques. Berlin 1832. mit großem Vortheil angewandt worden iſt. Bezeichnet nämlich X eine beliebige ganze rationale Function von x, und iſt der Grad dieſer Function $= n$; ſo ſoll dies in der Folge immer durch ${}^nX$ angezeigt werden, ſo daß man nämlich den höchſten Exponenten von x dem Functionszeichen oben links beifügt, wenn nämlich überhaupt die Beſtimmung des Grades der Function auf die Unterſuchung Einfluß hat. y, z, X, Y, Z ſollen beliebige ganze rationale Functionen von x bezeichnen; jedoch ſollen z und Z keinen gemeinſchaftlichen Factor haben. Auch wollen wir annehmen, daß

$$\frac{X}{{}^rz^\varrho . {}^sZ}$$

ſtets eine ächte gebrochene rationale Function von x ſey, und werden daher die beſondere Andeutung des Grades der Function X der Kürze wegen in der Folge unterlaſſen. Endlich ſoll immer $n = r\varrho + s$ geſetzt werden, ſo daß alſo, für $\varrho = 1$, $n = r + s$ iſt. Unter dieſen Vorausſetzungen können wir nun behaupten und mittelſt des Vorhergehenden ſtreng beweiſen, daß ſich immer

$$\frac{X}{{}^rz^\varrho . {}^sZ} = \frac{{}^{r-1}y}{{}^rz^\varrho} + \frac{{}^{n-r-1}Y}{{}^rz^{\varrho-1} . {}^sZ}$$

ſetzen läßt. Zu dem Ende ſetzen wir

$${}^rz = (x - x_1)^a (x - x_2)^b (x - x_3)^c \ldots (x - x_k)^q,$$

wo alſo

$$a + b + c + d + \ldots + q = r$$

iſt, und nehmen an, daß $x_1, x_2, x_3, \ldots x_k$ ſämmtlich unter einander ungleich ſeyen. Z wird nach der Vorausſetzung nicht $= 0$, wenn man

$$x = x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_k$$

ſetzt. Zuerſt wollen wir annehmen, daß $\varrho = 1$, folglich

$$n = a + b + c + d + \ldots + q + s$$

ſey. Setzen wir der Kürze wegen

$$P_a = (x-x_1)^a (x-x_2)^b (x-x_3)^c (x-x_4)^d \ldots (x-x_k)^q,$$
$$P_b = (x-x_2)^b (x-x_3)^c (x-x_4)^d \ldots (x-x_k)^q,$$
$$P_c = (x-x_3)^c (x-x_4)^d \ldots (x-x_k)^q,$$
$$P_d = (x-x_4)^d \ldots (x-x_k)^q,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

ſo folgt aus unſern frühern Unterſuchungen in völliger Allgemeinheit, daß immer

$$\frac{X}{{}^rz.{}^sZ} = \frac{A_1}{(x-x_1)^a} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{a-1}} + \ldots + \frac{A_a}{x-x_1} + \frac{{}^{n-a-1}Y_1}{P_b.{}^sZ},$$

oder, wie leicht erhellet:

$$\frac{X}{{}^rz.{}^sZ} = \frac{{}^{a-1}V_1}{(x-x_1)^a} + \frac{{}^{n-a-1}Y_1}{P_b.{}^sZ}$$

iſt. Wendet man dies mehrere Mal hinter einander an, ſo erhält man:

$$\frac{X}{{}^rz.{}^sZ} = \frac{{}^{a-1}V_1}{(x-x_1)^a} + \frac{{}^{n-a-1}Y_1}{P_b.{}^sZ}$$
$$= \frac{{}^{a-1}V_1}{(x-x_1)^a} + \frac{{}^{b-1}V_2}{(x-x_2)^b} + \frac{{}^{n-a-b-1}Y_2}{P_c.{}^sZ}$$
$$= \frac{{}^{a-1}V_1}{(x-x_1)^a} + \frac{{}^{b-1}V_2}{(x-x_2)^b} + \frac{{}^{c-1}V_3}{(x-x_3)^c} + \frac{{}^{n-a-b-c-1}Y_3}{P_d.{}^sZ}$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

und folglich, weil

$$n-a-b-c-\ldots-q-1 = s-1$$

iſt, endlich

$$\frac{X}{{}^rz.{}^sZ} =$$
$$\frac{{}^{a-1}V_1}{(x-x_1)^a} + \frac{{}^{b-1}V_2}{(x-x_2)^b} + \frac{{}^{c-1}V_3}{(x-x_3)^c} + \ldots + \frac{{}^{q-1}V_k}{(x-x_k)^q} + \frac{{}^{s-1}Y_k}{{}^sZ},$$

woraus, wenn man ſich die Brüche auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ohne den letzten zu einander addirt denkt, auf der Stelle

$$\frac{X}{{}^rz.{}^sZ} = \frac{{}^{r-1}y}{{}^rz} + \frac{{}^{s-1}Y}{{}^sZ},$$

wo Y ſtatt Y_k geſetzt iſt, folgt. Dividiren wir nun auf beiden Seiten durch ${}^rz^{\varrho-1}$; ſo erhalten wir auf der Stelle

$$\frac{X}{{}^rz^{\varrho}.{}^sZ} = \frac{{}^{r-1}y}{{}^rz^{\varrho}} + \frac{{}^{s-1}Y}{{}^rz^{\varrho-1}.{}^sZ},$$

wobei aber die Vorausſetzung zum Grunde liegt, daß der Exponent der höchſten Potenz von x in der Function X, d. i. der Grad dieſer Function, kleiner wie r + s iſt. Da nun in dieſem Falle

$$n = r + s,\; s - 1 = n - r - 1$$

iſt, ſo iſt, wenn der Grad der Function X kleiner wie $r + s$ iſt, immer

$$\frac{X}{{}^{r}z^{\varrho} \, . \, {}^{s}Z} = \frac{{}^{r-1}y}{{}^{r}z^{\varrho}} + \frac{{}^{n-r-1}Y}{{}^{r}z^{\varrho-1} \, . \, {}^{s}Z} \, .$$

Iſt aber, wenn wir den Grad von X jetzt durch m bezeichnen, $m \geqq r + s$, aber $m < r\varrho + s$, d. i. $m < n$; ſo kann man offenbar

$$\frac{X}{{}^{r}z \, . \, {}^{s}Z} = {}^{m-r-s}X_1 + \frac{{}^{r+s-1}X_2}{{}^{r}z \, . \, {}^{s}Z} \, ;$$

folglich

$$\frac{X}{{}^{r}z^{\varrho} \, . \, {}^{s}Z} = \frac{{}^{m-r-s}X_1}{{}^{r}z^{\varrho-1}} + \frac{{}^{r+s-1}X_2}{{}^{r}z^{\varrho} \, . \, {}^{s}Z} \, ,$$

und nach dem Vorhergehenden

$$\frac{{}^{r+s-1}X_2}{{}^{r}z^{\varrho} \, . \, {}^{s}Z} = \frac{{}^{r-1}y}{{}^{r}z^{\varrho}} + \frac{{}^{s-1}X_3}{{}^{r}z^{\varrho-1} \, . \, {}^{s}Z} \, ;$$

alſo

$$\frac{X}{{}^{r}z^{\varrho} \, . \, {}^{s}Z} = \frac{{}^{r-1}y}{{}^{r}z^{\varrho}} + \frac{{}^{m-r-s}X_1}{{}^{r}z^{\varrho-1}} + \frac{{}^{s-1}X_3}{{}^{r}z^{\varrho-1} \, . \, {}^{s}Z}$$

$$= \frac{{}^{r-1}y}{{}^{r}z^{\varrho}} + \frac{{}^{m-r-s}X_1 \, . \, {}^{s}Z + {}^{s-1}X_3}{{}^{s}z^{\varrho-1} \, . \, {}^{s}Z} \, ,$$

und folglich, weil

$$m \geqq r + s,\; m - r \geqq s,\; m - r > s - 1$$

iſt,

$$\frac{X}{{}^{r}z^{\varrho} \, . \, {}^{s}Z} = \frac{{}^{r-1}y}{{}^{r}z^{\varrho}} + \frac{{}^{m-r}Y}{{}^{r}z^{\varrho-1} \, . \, {}^{s}Z}$$

ſetzen. Weil aber $m < n$ iſt, ſo iſt

$$m - r < n - r,\; m - r \leqq n - r - 1 \, ;$$

und folglich immer

$$\frac{X}{{}^{r}z^{\varrho} \, . \, {}^{s}Z} = \frac{{}^{r-1}y}{{}^{r}z^{\varrho}} + \frac{{}^{n-r-1}Y}{{}^{r}z^{\varrho-1} \, . \, {}^{s}Z} \, ,$$

da $n - r - 1$ der höchſte Grad iſt, bis zu welchem der Zähler des letzten Bruchs ſteigen kann; und auf dieſen höchſten Grad kommt es bei der gegenwärtigen Unterſuchung immer bloß an. Daß der letzte Bruch in obiger Gleichung eine ächte gebrochene rationale Function iſt, iſt klar. Der Grad des Nenners iſt nämlich

$$r(\varrho - 1) + s = r\varrho + s - r = n - r \, ,$$

und alſo

$$n - r - 1 < r(\varrho - 1) + s \, .$$

Es iſt alſo in allen Fällen

$$\frac{X}{{}^{r}z^{\varrho} \, . \, {}^{s}Z} = \frac{{}^{r-1}y}{{}^{r}z^{\varrho}} + \frac{{}^{n-r-1}Y}{{}^{r}z^{\varrho-1} \, . \, {}^{s}Z} \, ,$$

wie bewieſen werden ſollte.

Durch mehrfache Anwendung dieſer Zerlegung erhält man:

$$\frac{X}{{}^{r}z^{\varrho}\,.\,{}^{s}Z} = \frac{{}^{r-1}y}{{}^{r}z^{\varrho}} + \frac{{}^{n-r-1}Y}{{}^{r}z^{\varrho-1}\,.\,{}^{s}Z},$$

$$\frac{{}^{n-r-1}Y}{{}^{r}z^{\varrho-1}\,.\,{}^{s}Z} = \frac{{}^{r-1}y_1}{{}^{r}z^{\varrho-1}} + \frac{{}^{n-2r-1}Y_1}{{}^{r}z^{\varrho-2}\,.\,{}^{s}Z},$$

$$\frac{{}^{n-2r-1}Y_1}{{}^{r}z^{\varrho-2}\,.\,{}^{s}Z} = \frac{{}^{r-1}y_2}{{}^{r}z^{\varrho-2}} + \frac{{}^{n-3r-1}Y_2}{{}^{r}z^{\varrho-3}\,.\,{}^{s}Z},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\frac{{}^{n-(\varrho-1)r-1}Y_{\varrho-2}}{{}^{r}z\,.\,{}^{s}Z} = \frac{{}^{r-1}y_{\varrho-1}}{{}^{r}z} + \frac{{}^{n-\varrho r-1}Y_{\varrho-1}}{{}^{s}Z},$$

d. i., weil

$$n - \varrho r - 1 = r\varrho + s - \varrho r - 1 = s - 1$$

iſt, wenn man auf beide Seiten addirt, und aufhebt, was ſich aufheben läßt:

$$\frac{X}{{}^{r}z^{\varrho}\,.\,{}^{s}Z} =$$

$$\frac{{}^{r-1}y}{{}^{r}z^{\varrho}} + \frac{{}^{r-1}y_1}{{}^{r}z^{\varrho-1}} + \frac{{}^{r-1}y_1}{{}^{r}z^{\varrho-1}} + \frac{{}^{r-1}y_2}{{}^{r}z^{\varrho-2}} + \ldots + \frac{{}^{r-1}y_{\varrho-1}}{{}^{r}z} + \frac{{}^{s-1}Y_{\varrho-1}}{{}^{s}Z},$$

wo alſo der letzte Bruch immer eine ächte gebrochene rationale Function von x iſt.

8. Dieſe Gleichungen führen zu der folgenden ganz elementaren und ſehr allgemeinen Methode zur Zerlegung der gebrochenen Functionen, welche von Crelle a. a. O. p. 62. gegeben worden iſt. Da nämlich nach dem Vorhergehenden

$$\frac{X - {}^{r-1}y\,.\,{}^{s}Z}{{}^{r}z} = {}^{n-r-1}Y$$

und ${}^{n-r-1}Y$ eine ganze rationale Function von x iſt, ſo muß ${}^{r}z$ in dem Zähler des erſten Bruchs aufgehen. ${}^{r-1}y$ iſt eine ganze rationale Function des (r—1)ten Grades, und wir können alſo

$${}^{r-1}y = \alpha_1 x^{r-1} + \alpha_2 x^{r-2} + \alpha_3 x^{r-3} + \ldots + \alpha_r$$

ſetzen, wo α_1, α_2, α_3, … α_r conſtante, aber noch unbeſtimmte Coefficienten ſind. Multiplicirt man nun dieſen allgemeinen Ausdruck von ${}^{r-1}y$ mit der gegebenen Function ${}^{s}Z$, zieht das Product von der ebenfalls gegebenen Function X ab, und dividirt in die erhaltene Differenz mit ${}^{r}z$ hinein; ſo wird man eine gewiſſe ganze rationale Function als Quotient, und eine eben ſolche Function als Reſt erhalten, wobei ſich von ſelbſt verſteht, daß dieſe beiden Functionen von α_1, α_2, α_3, … α_r abhängen. Auch erhellet auf der Stelle, daß, weil der Diviſor vom rten Grade iſt, der Reſt vom (r—1)ten Grade ſeyn muß, und daher durch ${}^{r-1}R$ bezeichnet werden kann. Weil nun aber ${}^{r}z$ in $X - {}^{r-1}y.\,{}^{s}Z$ aufgeht, ſo muß für jedes x oder identiſch

$${}^{r-1}R = 0$$

ſeyn. Alſo ſind die Coefficienten aller Potenzen von x in dieſem Reſte = 0 zu ſetzen, wodurch man, da der Reſt aus r Gliedern beſteht und alle in Rede ſtehenden Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_r$ enthalten, zwiſchen dieſen Größen r Gleichungen erhält, aus denen ſich dieſelben alſo beſtimmen laſſen, wodurch ${}^{r-1}y$ gefunden wird. Der durch die Diviſion von $X - {}^{r-1}y \,.\, {}^sZ$ durch ${}^rz$ gefundene Quotient iſt die Function ${}^{n-r-1}Y$. Führt man alſo in dieſen Quotienten für $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_r$ ihre vorher gefundenen Werthe ein, ſo erhält man ${}^{n-r-1}Y$, und hat nun in der Gleichung

$$\frac{X}{{}^rz^\varrho \,.\, {}^sZ} = \frac{{}^{r-1}y}{{}^rz^\varrho} + \frac{{}^{n-r-1}Y}{{}^rz^{\varrho-1} \,.\, {}^sZ}$$

die unbekannten Größen vollſtändig beſtimmt. Daſſelbe Verfahren, auf die bekannte Function

$$\frac{{}^{n-r-1}Y}{{}^rz^{\varrho-1} \,.\, {}^sZ}$$

angewandt, führt ferner zu der Zerlegung

$$\frac{X}{{}^rz^\varrho \,.\, {}^sZ} = \frac{{}^{r-1}y}{{}^rz^\varrho} + \frac{{}^{r-1}y_1}{{}^rz^{\varrho-1}} + \frac{{}^{n-2r-1}Y_1}{{}^rz^{\varrho-2} \,.\, {}^sZ},$$

und, wenn man dieſes Verfahren nun wieder auf die bekannte Function

$$\frac{{}^{n-2r-1}Y_1}{{}^rz^{\varrho-2} \,.\, {}^sZ}$$

anwendet, ſo erhält man die Zerlegung

$$\frac{X}{{}^rz \,.\, {}^sZ} = \frac{{}^{r-1}y}{{}^rz^\varrho} + \frac{{}^{r-1}y_1}{{}^rz^{\varrho-1}} + \frac{{}^{r-1}y_2}{{}^rz^{\varrho-2}} + \frac{{}^{n-3r-1}Y_2}{{}^rz^{\varrho-3} \,.\, {}^sZ}.$$

Wie man ſo weiter gehen, und endlich zu der Zerlegung

$$\frac{X}{{}^rz^\varrho \,.\, {}^sZ} = \frac{{}^{r-1}y}{{}^rz^\varrho} + \frac{{}^{r-1}y_1}{{}^rz^{\varrho-1}} + \frac{{}^{r-1}y_2}{{}^rz^{\varrho-2}} + \ldots + \frac{{}^{r-1}y_{\varrho-1}}{{}^rz} + \frac{{}^{s-1}Y_{\varrho-1}}{{}^sZ},$$

die das eigentliche Reſultat iſt, welches man ſucht, gelangen kann, iſt klar. Dabei bietet ſich aber eine wohl zu beachtende Abkürzung der Rechnung dar. Weil nämlich bei allen Diviſionen, die man zu verrichten hat, das Product ${}^{r-1}y_\mu \,.\, {}^sZ$ ſtets daſſelbe bleibt, indem man immer

$${}^{r-1}y_\mu \,.\, {}^sZ = (\alpha_1 x^{r-1} + \alpha_2 x^{r-2} + \alpha_3 x^{r-3} + \ldots + \alpha_r) \,.\, {}^sZ$$

zu ſetzen hat; ſo genügt es, den Bruch

$$\frac{(\alpha_1 x^{r-1} + \alpha_2 x^{r-2} + \alpha_3 x^{r-3} + \ldots + \alpha_r) \,.\, {}^sZ}{{}^rz}$$

ein für alle Mal durch Diviſion in die in ihm enthaltene ganze und ächte gebrochene Function zu zerlegen, daſſelbe Geſchäft bei den einzelnen Diviſionen dann bloß bei den Brüchen

$$\frac{X}{{}^rz}, \frac{{}^{n-r-1}Y}{{}^rz}, \frac{{}^{n-2r-1}Y_1}{{}^rz}, \frac{{}^{n-3r-1}Y_2}{{}^rz}, \ldots$$

zu verrichten, und daraus dann, welches immer leicht möglich

ſeyn wird, die geſuchten Quotienten und Reſte abzuleiten. Dieſe Methode iſt, wie Crelle ſehr richtig bemerkt, ganz elementar, gewährt eine leichte Rechnung, und verdient allerdings ſehr, in die Elemente aufgenommen zu werden, da dieſelbe ſich auch leicht auf eine ganz elementare Weiſe darſtellen laſſen würde.

Wir wollen dieſe Methode nur auf ein einziges Exempel anwenden. Die gegebene gebrochene Function ſey

$$\frac{x - x^3}{(1+x^2)^4(1+x^4)}.$$

Da nun hier

$$X = x - x^3,\ {}^rz = 1 + x^2,\ r = 2,\ {}^sZ = 1 + x^4,\ s = 4$$

iſt; ſo hat man

$${}^{r-1}y = \alpha_1 x + \alpha_2$$

zu ſetzen, wodurch man

$${}^{r-1}y\,.\,{}^sZ = \alpha_1 x^5 + \alpha_2 x^4 + \alpha_1 x + \alpha_2$$

erhält, und muß nun ein für alle Mal mit

$${}^rz = x^2 + 1$$

in

$$\alpha_1 x^5 + \alpha_2 x^4 + \alpha_1 x + \alpha_2$$

dividiren. Dies giebt den Quotienten

$$\alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 - \alpha_1 x - \alpha_2$$

und den Reſt

$$2\alpha_1 x + 2\alpha_2\,,$$

zwei Größen, die bei der folgenden Rechnung fortwährend gebraucht werden. Dividirt man jetzt zunächſt mit

$${}^rz = x^2 + 1 \text{ in } X = -x^3 + x\,;$$

ſo ergiebt ſich als Quotient $-x$ und als Reſt $2x$. Dividirt man alſo mit

$${}^rz \text{ in } X - {}^{r-1}y\,.\,{}^sZ\,;$$

ſo erhält man als Quotient

$$-\alpha_1 x^3 - \alpha_2 x^2 + (\alpha_1 - 1)\,x + \alpha_2\,,$$

und als Reſt

$$-2(\alpha_1 - 1)x - 2\alpha_2\,.$$

Folglich hat man zur Beſtimmung von α_1 und α_2 die Gleichungen

$$-2(\alpha_1 - 1) = 0,\ -2\alpha_2 = 0\,,$$

woraus $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$.

Führt man dieſe Werthe in den obigen Quotienten ein, ſo wird derſelbe $= -x^3$, und man hat folglich

$$\frac{x - x^3}{(1+x^2)^4(1+x^4)} = \frac{x}{(1+x^2)^4} + \frac{-x^3}{(1+x^2)^3(1+x^4)}.$$

Nun dividirt man mit $x^2 + 1$ in $-x^3$. Dies giebt als Quotient $-x$ und als Reſt x.

Folglich hat man jetzt den Quotienten

$$-\alpha_1 x^3 - \alpha_2 x^2 + (\alpha_1 - 1)x + \alpha_2$$

und den Reſt

$$-(2\alpha_1 - 1)x - 2\alpha_2 .$$

Alſo

$$-(2\alpha_1 - 1) = 0, \; -2\alpha_2 = 0 ,$$

woraus $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 0$. Führt man dieſe Werthe in den obigen Quotienten ein, ſo wird derſelbe:

$$-\tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{2}x = -\tfrac{1}{2}(x^3 + x)$$

und es iſt folglich

$$\frac{x - x^3}{(1 + x^2)^4 (1 + x^4)} = \frac{x}{(1 + x^2)^4} + \frac{x}{2(1 + x^2)^3} + \frac{-x^3 - x}{2(1 + x^2)^2 (1 + x^4)}$$

Dividirt man nun wieder mit $x^2 + 1$ in $-x^3 - x$, ſo erhält man als Quotient $-x$ und als Reſt 0. Folglich hat man jetzt den Quotienten

$$-\alpha_1 x^3 - \alpha_2 x^2 + (\alpha_1 - 1)x + \alpha_2$$

und den Reſt

$$-2\alpha_1 x - 2\alpha_2 .$$

Alſo

$$-2\alpha_1 = 0, \; -2\alpha_2 = 0; \; \alpha_1 = 0, \; \alpha_2 = 0 .$$

Führt man dieſe Werthe in den obigen Quotienten ein, ſo wird derſelbe $-x$, und folglich

$$\frac{x - x^3}{(1 + x^2)^4 (1 + x^4)} = \frac{x}{(1 + x^2)^4} + \frac{x}{2(1 + x^2)^3} + \frac{-x}{2(1 + x^2)(1 + x^4)}$$

Dividirt man jetzt endlich mit $x^2 + 1$ in x, ſo iſt der Quotient 0 und der Reſt $-x$. Folglich hat man jetzt den Quotienten

$$-\alpha_1 x^3 - \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$$

und den Reſt

$$-(2\alpha_1 + 1)x - 2\alpha_2 .$$

Alſo

$$-(2\alpha_1 + 1) = 0, \; -2\alpha_2 = 0 ,$$

woraus $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 0$. Führt man dies in den obigen Quotienten ein, ſo wird derſelbe

$$\tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}(x^3 - x) .$$

Folglich

$$\frac{x - x^3}{(1 + x^2)^4 (1 + x^4)} =$$

$$\frac{x}{(1 + x^2)^4} + \frac{x}{2(1 + x^2)^3} - \frac{x}{4(1 + x^2)} + \frac{x^3 - x}{4(1 + x^4)} ,$$

ganz eben ſo, wie auch Euler in der Introd. in Anal. inf. T. I. p. 174. findet. Man ſieht aus dieſem Exempel, wie leicht die obige Methode zum Zweck führt.

9. Leibnitz hat zuerſt die Zerlegung der gebrochenen Functionen in einfache Brüche und deren Gebrauch in der Integralrechnung gelehrt. Seine Methode beruhet auf ganz allgemeinen Formeln und findet ſich in den Act. Erud. 1702. p. 210—19. und 1703. p. 19—26., ſcheint aber wenig bekannt zu ſeyn, und mag daher in etwas veränderter Darſtellung hier noch einen Platz finden. Uebrigens iſt Leibnitz ſchon lange vor der Bekanntmachung in den Actis Erud. im Beſitz ſeiner Methode geweſen, wie aus einem ſeiner an Joh. Bernoulli geſchriebenen Briefe (Commercium epistol. Leibn. et Joh. Bern. T. II. Epist. CLXV. Leibn. ad Bern. 1706. Oct.) erhellet, wo er ſagt: Quod de rationalibus Quadraturis nuper edidi, iam tum habui; reductione enim fractionum compositarum ad simplices pro seriebus numericis inventa, pronum fuit idem adhibere figurarum Quadraturis. Eoque omnia iam triginta annorum aetatem habent.

I. Wir wollen annehmen, daß die Größen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots x_n$$

ſämmtlich unter einander ungleich ſeyen, und wollen das Product, welches man erhält, wenn man von der Größe x_k alle Größen der obigen Reihe, die Größe x_k ſelbſt ausgenommen, abzieht, und ſämmtliche ſo erhaltene Differenzen in einander multiplicirt, durch $\varphi(k, n)$ bezeichnen. Dann iſt immer

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)} =$$

$$\frac{1}{\varphi(1,n).(x-x_1)} + \frac{1}{\varphi(2,n).(x-x_2)} + \frac{1}{\varphi(3,n).(x-x_3)} + \dots + \frac{1}{\varphi(n,n).(x-x_n)}.$$

Es iſt nämlich

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{x-x_2-(x-x_1)}{(x_1-x_2)(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$= \frac{1}{(x_1-x_2)(x-x_1)} + \frac{1}{(x_2-x_1)(x-x_2)}$$

$$= \frac{1}{\varphi(1,2).(x-x_1)} + \frac{1}{\varphi(2,2).(x-x_2)}.$$

Folglich

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} = \frac{1}{\varphi(1,2).(x-x_1)(x-x_3)} + \frac{1}{\varphi(2,2).(x-x_2)(x-x_3)}$$

$$= \frac{1}{\varphi(1,2).(x_1-x_3)(x-x_1)} + \frac{1}{\varphi(1,2).(x_3-x_1)(x-x_3)}$$

$$+ \frac{1}{\varphi(2,2).(x_2-x_3)(x-x_2)} + \frac{1}{\varphi(2,2).(x_3-x_2)(x-x_3)}$$

$$= \frac{1}{\varphi(1,3).(x-x_1)} + \frac{1}{\varphi(2,3).(x-x_2)} + \frac{1}{\varphi(3,3).(x-x_3)}$$

weil offenbar

$$\varphi(1,2).(x_1-x_3)=\varphi(1,3),\ \varphi(2,2).(x_2-x_3)=\varphi(2,3)$$

und nach dem Vorhergehenden, wenn man $x=x_3$ ſetzt, offenbar

$$\frac{1}{\varphi(1,2).(x_3-x_1)}+\frac{1}{\varphi(2,2).(x_3-x_2)}=\frac{1}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{1}{\varphi(3,3)}$$

iſt.

Ferner iſt nun

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}$$

$$=\frac{1}{\varphi(1,3).(x-x_1)(x-x_4)}+\frac{1}{\varphi(2,3).(x-x_2)(x-x_4)}+\frac{1}{\varphi(3,3).(x-x_3)(x-x_4)}$$

$$=\frac{1}{\varphi(1,3).(x_1-x_4)(x-x_1)}+\frac{1}{\varphi(1,3).(x_4-x_1)(x-x_4)}$$

$$+\frac{1}{\varphi(2,3).(x_2-x_4)(x-x_2)}+\frac{1}{\varphi(2,3).(x_4-x_2)(x-x_4)}$$

$$+\frac{1}{\varphi(3,3).(x_3-x_4)(x-x_3)}+\frac{1}{\varphi(3,3).(x_4-x_3)(x-x_4)}$$

$$=\frac{1}{\varphi(1,4).(x-x_1)}+\frac{1}{\varphi(2,4).(x-x_2)}+\frac{1}{\varphi(3,4).(x-x_3)}+\frac{1}{\varphi(4,4).(x-x_4)},$$

weil offenbar

$$\varphi(1,3).(x_1-x_4)=\varphi(1,4),\varphi(2,3).(x_2-x_4)=\varphi(2,4),\varphi(3,3).(x_3-x_4)=\varphi(3,4),$$

und, wenn man $x=x_4$ ſetzt, nach dem Vorhergehenden

$$\frac{1}{\varphi(1,3).(x_4-x_1)}+\frac{1}{\varphi(2,3).(x_4-x_2)}+\frac{1}{\varphi(3,3).(x_4-x_3)}$$

$$=\frac{1}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}=\frac{1}{\varphi(4,4)}$$

iſt.

Wie man auf dieſe Art weiter gehen kann, iſt klar, und Leibnitzens Satz iſt alſo hierdurch allgemein bewieſen.

Sind alſo $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ ſämmtlich unter einander ungleich, ſo läßt ſich, wenn C eine conſtante Größe bezeichnet, der Bruch

$$\frac{C}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}$$

ſtets in einfache Brüche von der Form

$$\frac{c_k}{x-x_k}$$

zerlegen.

II. Bezeichnen wir den kten Binomial-Coefficienten der nten Potenz durch $^n\overset{k}{\mathfrak{B}}$; ſo iſt immer

$$\frac{1}{(x-x_1)^a\,(x-x_2)^b}=$$

$$\frac{1}{(x_1-x_2)^b.(x-x_1)^a}-\frac{\overset{1}{{}^{b}\mathfrak{B}}}{(x_1-x_2)^{b+1}.(x-x_1)^{a-1}}+\frac{\overset{2}{{}^{b+1}\mathfrak{B}}}{(x_1-x_2)^{b+2}.(x-x_1)^{a-2}}-\ldots.$$

$$\ldots.+(-1)^{a-1}.\frac{\overset{a-1}{{}^{b+a-2}\mathfrak{B}}}{(x_1-x_2)^{b+a-1}.(x-x_1)}$$

$$+\frac{1}{(x_2-x_1)^a.(x-x_2)^b}-\frac{\overset{1}{{}^{a}\mathfrak{B}}}{(x_2-x_1)^{a+1}.(x-x_2)^{b-1}}+\frac{\overset{2}{{}^{a+1}\mathfrak{B}}}{(x_2-x_1)^{a+2}.(x-x_2)^{b-2}}-\ldots$$

$$\ldots.+(-1)^{b-1}.\frac{\overset{b-1}{{}^{a+b-2}\mathfrak{B}}}{(x_2-x_1)^{a+b-1}.(x-x_2)}.$$

Der Beweis dieſes Satzes hat keine Schwierigkeit. Es iſt nämlich nach I.

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{1}{(x_1-x_2)(x-x_1)}+\frac{1}{(x_2-x_1)(x-x_2)}.$$

Folglich

$$\frac{1}{(x-x_1)^2(x-x_2)}=\frac{1}{(x_1-x_2)(x-x_1)^2}+\frac{1}{(x_2-x_1)(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$=\frac{1}{(x_1-x_2)(x-x_1)^2}-\frac{1}{(x_1-x_2)^2(x-x_1)}+\frac{1}{(x_2-x_1)^2(x-x_2)}.$$

Folglich

$$\frac{1}{(x-x_1)^3(x-x_2)}=$$

$$\frac{1}{(x_1-x_2)(x-x_1)^3}-\frac{1}{(x_1-x_2)^2(x-x_1)^2}+\frac{1}{(x_2-x_1)^2(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$=\frac{1}{(x_1-x_2)(x-x_1)^3}-\frac{1}{(x_1-x_2)^2(x-x_1)^2}+\frac{1}{(x_1-x_2)^3(x-x_1)}$$

$$+\frac{1}{(x_2-x_1)^3(x-x_2)}.$$

Wie man ſo weiter gehen kann, iſt klar. Die letzten Brüche werden immer nach I. zerlegt. Man ſieht alſo, daß der zu beweiſende Satz für

$$a=1,\ b=1;$$
$$a=2,\ b=1;$$
$$a=3,\ b=1;$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$a=a,\ b=1$$

gilt. Alſo iſt

$$\frac{1}{(x-x_1)^a(x-x_2)}=$$

$$\frac{1}{(x_1-x_2)(x-x_1)^a}-\frac{1}{(x_1-x_2)^2.(x-x_1)^{a-1}}+\frac{1}{(x_1-x_2)^3.(x-x_1)^{a-2}}-\ldots.$$

$$\ldots.+(-1)^{a-1}.\frac{1}{(x_1-x_2)^a.(x-x_1)}+\frac{1}{(x_2-x_1)^a.(x-x_2)}.$$

Hieraus leitet man nun ferner mit Hülfe einiger ſehr bekannten Sätze von den Binomial-Coefficienten leicht ab, daß der Satz für

$$a = a,\ b = 2;$$
$$a = a,\ b = 3;$$
$$a = a,\ b = 4;$$
$$\cdots\cdots$$
$$a = a,\ b = b,$$

d. i. allgemein gilt. Die Rechnung hat gar keine Schwierigkeit, würde aber, wenn wir ſie hier ausführen wollten, zu viel Raum wegnehmen.

Weil nun

$$\frac{1}{(x-x_1)^a (x-x_2)^b (x-x_3)^c} = \frac{1}{(x-x_1)^a (x-x_2)^b} \cdot \frac{1}{(x-x_3)^c}$$

iſt, und die Function

$$\frac{1}{(x-x_1)^a (x-x_1)^b}$$

nach dem Vorigen ſich in Brüche von der Form

$$\frac{C}{(x-\alpha)^\mu}$$

zerlegen läßt, ſo läßt

$$\frac{1}{(x-x_1)^a (x-x_2)^b (x-x_3)^c}$$

ſich in Brüche von der Form

$$\frac{C}{(x-\alpha)^\mu (x-\beta)^\nu},$$

folglich nach dem Vorigen auch in Brüche von der Form

$$\frac{C}{(x-\alpha)^\mu}$$

zerlegen, und ſo überzeugt man ſich leicht, daß ſich **überhaupt die gebrochene Function**

$$\frac{C}{(x-x_1)^a (x-x_2)^b (x-x_3)^c \ldots}$$

in einfache Brüche von der Form

$$\frac{k}{(x-\alpha)^\mu}$$

zerlegen läßt.

III. Wir wollen jetzt die erſte, zweite, dritte, u. ſ. w. Klaſſe der Combinationen mit Wiederholungen durch

$$\overset{1}{K}, \overset{2}{K}, \overset{3}{K}, \overset{4}{K}, \ldots$$

bezeichnen, und die Elemente, auf welche ſich dieſe Combinationsklaſſen beziehen, unter die obigen Symbole derſelben ſchreiben.

Iſt dann $\alpha < n$, ſo iſt immer, die Größen $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$ mögen alle oder zum Theil unter einander gleich, oder alle unter einander ungleich ſeyn:

$$\frac{x^\alpha}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}$$

$$= \frac{1}{(x-x_{\alpha+1})\ldots(x-x_n)}$$

$$- \frac{1}{(x-x_\alpha)\ldots(x-x_n)}.\overset{1}{K}(-x_1, -x_2, \ldots -x_\alpha)$$

$$+ \frac{1}{(x-x_{\alpha-1})\ldots(x-x_n)}.\overset{2}{K}(-x_1, -x_2, \ldots -x_{\alpha-1})$$

$$- \frac{1}{(x-x_{\alpha-2})\ldots(x-x_n)}.\overset{3}{K}(-x_1, -x_2, \ldots -x_{\alpha-2})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{\alpha-1}.\frac{1}{(x-x_2)\ldots(x-x_n)}.\overset{\alpha-1}{K}(-x_1, -x_2)$$

$$+ (-1)^\alpha.\frac{1}{(x-x_1)\ldots(x-x_n)}.\overset{\alpha}{K}(-x_1).$$

Wir überlaſſen dem Leſer, den Beweis dieſes Satzes, der auf einigen ſehr bekannten combinatoriſchen Hülfsſätzen beruhet, ſelbſt zu ſuchen.

IV. Da ſich nun jede ächte gebrochene rationale Function in lauter Brüche von der Form

$$\frac{Cx^\alpha}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)},$$

wo $\alpha < n$ iſt, und $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ alle oder zum Theil einander gleich, oder alle unter einander ungleich ſeyn können; ſo folgt aus I, II, III unmittelbar, daß jede ächte gebrochene rationale Function ſich in lauter Brüche von der Form

$$\frac{k}{(x-\alpha)^\mu}$$

zerlegen läßt.

Man ſieht alſo, daß ſich aus Leibnitzens Sätzen ein ſehr ſtrenger und allgemeiner Beweis für die Möglichkeit der Zerlegbarkeit jeder ächten gebrochenen Function in Brüche von der obigen Form ergiebt. Auch ſind dieſe Sätze an ſich nicht ohne Intereſſe. Daß ſich jede ächte gebrochene Function in Brüche von der angegebenen Form zerlegen läßt, iſt freilich auch ſchon oben von uns, wie wir glauben, völlig ſtreng und allgemein bewieſen worden.

Für die Literatur dieſes Gegenſtandes iſt die ſchon oben angeführte Schrift von Crelle, die ſich auch in dem Journal für

reine u. angew. Math. T. IX. X. befindet, beſonders wichtig, weil dieſelbe nicht bloß eine ſehr gründliche Darſtellung dieſes Gegenſtandes überhaupt, ſondern auch, neben verſchiedenen Methoden anderer Mathematiker, die ſehr einfache und elementare dem Verfaſſer eigenthümliche Methode enthält, von welcher oben ausführlich die Rede geweſen iſt. Auch behandelt Crelle in dieſer Abhandlung die in vieler Beziehung wichtige und merkwürdige Methode von Euler ſehr ausführlich, welche in den Mémoires de l'Académie des sc. de Petersbourg. T. I. 1809. p. 3. mitgetheilt iſt. Die Methoden von Dirkſen und Clauſen ſ. m. in Crelles Journal. T. I. S. 53. T. VIII. S. 142. Einige Bemerkungen von Beyer ebendaſ. Thl. VII. S. 222. Mit verwandten Unterſuchungen beſchäftigen ſich: C. G. J. Jacobi Disquisitiones analyticae de fractionibus simplicibus. Berol. 1825. Auch ſ. m. Crelles Journal T. V. S. 344.

II. Beſtimmung der Form der Functionen aus gegebenen Bedingungsgleichungen.

10. Wir wollen uns, um den Sinn der Unterſuchungen, mit denen wir es hier zu thun haben werden, in recht helles Licht zu ſetzen, ſogleich folgende Aufgabe vorlegen.

Die Function $\varphi(x)$, eigentlich die Form dieſer Function, ſo zu beſtimmen, daß dieſelbe zwiſchen jeden zwei beliebigen reellen Gränzen der veränderlichen Größe x ſtetig bleibt, und für alle reelle Werthe der veränderlichen Größen x und y der Gleichung

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

genügt.

Man ſieht, daß bei dieſer Aufgabe, von deren Art alle Aufgaben ſind, welche hier aufgelöſt werden ſollen, die Form der Function $\varphi(x)$ ganz unbekannt iſt, und ſo beſtimmt werden ſoll, daß die Function zwiſchen jeden zwei beliebigen reellen Gränzen von x ſtetig iſt, und für jede zwei reelle Werthe von x und y der Gleichung

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

genügt. Aufgaben dieſer Art ſind, wie man leicht überſieht, oft unbeſtimmt, und die Beſtimmung, ob es nur eine, oder eine beſtimmte Anzahl, oder eine ganz unbeſtimmte Anzahl den Bedingungen der Aufgabe genügende Functionen giebt, iſt daher bei der Auflöſung ſolcher Probleme jederzeit ein Hauptpunkt. Sollte z. B. die Function $\psi(x)$ ſo beſtimmt werden, daß für jedes x

$$\psi(\psi(x)) = x$$

iſt; ſo könnte man z. B.

$$\psi(x) = \frac{a - bx}{b + cx}$$

ſetzen, weil, wie man leicht findet,

$$\psi(\psi(x)) = \frac{a - b\,\dfrac{a - bx}{b + cx}}{b + c\,\dfrac{a - bx}{b + cx}} = x$$

iſt. Man könnte aber auch

$$\psi(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

ſetzen, weil ebenfalls für diese Function

$$\psi(\psi(x)) = \sqrt{1 - (\sqrt{1 - x^2})^2} = x$$

iſt. Eben ſo könnte man auch

$$\psi(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

ſetzen, weil, wie man leicht findet, für dieſe Function wieder

$$\psi(\psi(x)) = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{\sqrt{\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)^2 - 1}} = x$$

iſt. Außer dieſen Werthen von $\psi(x)$ würde es noch viele andere der Gleichung

$$\psi(\psi(x)) = x$$

genügende Functionen geben. Nach dieſen Bemerkungen, welche bloß zur nähern Erläuterung des Sinnes der Unterſuchungen, welche wir hier vor haben, dienen ſollen, kehren wir nun wieder zu der Aufgabe, von welcher wir oben ausgingen, zurück.

Setzt man in der für jedes x und y geltenden Bedingungsgleichung

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$y + z$ für y; ſo erhält man

$$\begin{aligned}\varphi(x + y + z) &= \varphi(x) + \varphi(y + z)\\ &= \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z).\end{aligned}$$

In dieſer Gleichung $z + u$ für z geſetzt, erhält man:

$$\begin{aligned}\varphi(x + y + z + u) &= \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z + u)\\ &= \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) + \varphi(u).\end{aligned}$$

Wie man ſo weiter gehen kann, iſt klar. Man hat alſo für jede beliebige Anzahl der veränderlichen Größen x, y, z, u, ... die Gleichung

$$\varphi(x + y + z + u + \ldots) = \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) + \varphi(u) + \ldots.$$

Setzt man nun alle veränderliche Größen einander gleich, nämlich alle = x, und bezeichnet ihre Anzahl durch n, wo alſo

n ſeiner Natur nach eine poſitive ganze Zahl iſt; ſo erhält man die für jedes ganze poſitive n und jedes beliebige x gültige Gleichung

$$\varphi(nx) = n\varphi(x) .$$

Setzt man in dieſer Gleichung $x = 0$, ſo wird dieſelbe

$$\varphi(0) = n\varphi(0) ,$$

Alſo

$$0 = n\varphi(0) - \varphi(0) = (n-1)\varphi(0) ;$$

eine für jedes poſitive ganze n gültige Gleichung. Folglich offenbar

$$\varphi(0) = 0 .$$

Setzt man ferner in der für jedes x und y gültigen Gleichung

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$y = -x$, ſo wird dieſelbe

$$\varphi(x) + \varphi(-x) = \varphi(0) = 0 ;$$

und es iſt folglich für jedes x

$$\varphi(-x) = -\varphi(x) .$$

Daher iſt auch

$$\varphi(-nx) = -\varphi(nx) .$$

Nun iſt aber für jedes ganze poſitive n

$$\varphi(nx) = n\varphi(x) .$$

Alſo iſt für jedes ganze poſitive n

$$\varphi(-nx) = -n\varphi(x) ,$$

und es iſt folglich für jedes ganze poſitive oder negative n

$$\varphi(nx) = n\varphi(x) .$$

Setzen wir nun $nx = y$, ſo iſt $x = \frac{y}{n}$. Alſo iſt für jedes ganze poſitive oder negative n

$$\varphi(y) = n\varphi\left(\frac{y}{n}\right) ,$$

oder

$$\varphi\left(\frac{y}{n}\right) = \frac{1}{n}\varphi(y) ,$$

und, wenn wir wieder x für y ſchreiben, für jedes ganze poſitive oder negative n

$$\varphi\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}\varphi(x) .$$

Hieraus ergiebt ſich nun ferner, wenn $\frac{n}{m}$ einen beliebigen poſitiven oder negativen rationalen Bruch bezeichnet, deſſen Zähler und Nenner ganze Zahlen ſind:

$$\varphi\left(\frac{n}{m}x\right) = \varphi\left(n\frac{x}{m}\right) = n\varphi\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{n}{m}\varphi(x),$$

ſo daß alſo für jedes poſitive oder negative, ganze oder gebrochene n, und für jedes x ſtets

$$\varphi(nx) = n\varphi(x)$$

iſt. Setzt man in dieſer Gleichung $x = 1$, ſo erhält man die für jedes n geltende Gleichung

$$\varphi(n) = n\varphi(1),$$

in der man nun wieder, da n ganz beliebig iſt, x für n ſetzen kann, wodurch man die für jedes x geltende Gleichung

$$\varphi(x) = x\varphi(1)$$

erhält. Da $\varphi(1)$ eine Conſtante iſt, ſo iſt alſo die geſuchte Function jederzeit von der Form

$$\varphi(x) = ax.$$

Man ſieht alſo, daß nur die einzige Function $\varphi(x) = ax$ den Bedingungen unſerer Aufgabe genügt. Daß die Conſtante a ganz willkührlich iſt, iſt klar, da für jedes a und jedes x und y immer

$$a(x + y) = ax + ay,$$

d. i.

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

iſt. Aber auch keine andere Function, wie die Function $\varphi(x) = ax$, genügt, wie geſagt, der vorſtehenden Gleichung. Daß die Function $\varphi(x) = ax$ zwiſchen jeden zwei reellen Gränzen von x ſtetig iſt, iſt klar.

11. Eine andere hierher gehörende Aufgabe, die ſich mittelſt der vorhergehenden leicht auflöſen läßt, iſt folgende:

Man ſoll die Function $\varphi(x)$ ſo beſtimmen, daß dieſelbe zwiſchen jeden zwei reellen Gränzen von x ſtetig iſt, und daß für alle reelle Werthe von x und y der Gleichung

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

genügt wird.

Aus der gegebenen Bedingungsgleichung folgt auf der Stelle, wenn man auf beiden Seiten die Logarithmen in Bezug auf ein willkührliches Syſtem nimmt:

$$\log\varphi(x + y) = \log\varphi(x) + \log\varphi(y).$$

Setzen wir nun

$$\log\varphi(x) = \psi(x),$$

ſo iſt natürlich

$$\log\varphi(y) = \psi(y),\ \log\varphi(x + y) = \psi(x + y),$$

und die Function $\psi(x)$ iſt alſo von der Art, daß immer

$$\psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y)$$

iſt. Daher iſt nach (10.)

$$\psi(x) = x\psi(1).$$

Aber $\psi(x) = \log\varphi(x)$. Alſo

$$\psi(1) = \log\varphi(1),$$

und folglich für jedes x

$$\log\varphi(x) = x\log\varphi(1).$$

Aber

$$x\log\varphi(1) = \log\{\varphi(1)\}^x.$$

Folglich

$$\log\varphi(x) = \log\{\varphi(1)\}^x,$$

und daher

$$\varphi(x) = \{\varphi(1)\}^x,$$

ſo daß alſo, da $\varphi(1)$ eine Conſtante iſt, die Function $\varphi(x)$ jederzeit von der Form

$$\varphi(x) = a^x$$

iſt, wenn durch dieſelbe der Gleichung

$$\varphi(x+y) = \varphi(x).\varphi(y)$$

im Allgemeinen genügt werden ſoll. a iſt eine ganze willkührliche Conſtante, da für jedes a bekanntlich

$$a^{x+y} = a^x.a^y$$

iſt. Auch iſt a^x offenbar zwiſchen jeden zwei reellen Gränzen von x eine ſtetige Function. Es giebt folglich auch in dieſem Falle nur die einzige Form a^x der Function $\varphi(x)$, welche den Bedingungen der vorgelegten Aufgabe genügt. Man könnte dieſe Aufgabe auch unabhängig von der in (10.) aufgelöſten Aufgabe, aber auf eine ähnliche Art, wie jene, auflöſen.

12. Aus dem vorhergehenden Satze kann man auch einen, wie es uns ſcheint, ſehr ſtrengen Beweis der bekannten Entwickelung von e^x, wo e die Baſis der natürlichen Logarithmen bezeichnet, in eine Reihe herleiten. In dem Artikel Convergenz der Reihen (22.) i. d. Z. iſt aus einem allgemeinern Satze hergeleitet worden, daß die Reihe

$$1, \frac{x}{1}, \frac{x^2}{1.2}, \frac{x^3}{1.2.3}, \frac{x^4}{1\ldots4}, \frac{x^5}{1\ldots5}, \ldots$$

für jedes reelle poſitive und negative x convergirt, und daher für jedes x eine Summe hat, welche wir durch $\varphi(x)$ bezeichnen wollen, da dieſelbe offenbar eine Function von x ſeyn muß. Ganz eben ſo convergirt auch die Reihe

$$1, \frac{y}{1}, \frac{y^2}{1.2}, \frac{y^3}{1.2.3}, \frac{y^4}{1..4}, \frac{y^5}{1\ldots5}, \ldots$$

für jedes reelle poſitive und negative y, und hat die Summe $\varphi(y)$. Daher iſt nach dem in dem angeführten Artikel (20.) bewieſenen allgemeinen Satze auch die Reihe

$$1\,,$$
$$\frac{x}{1}+\frac{y}{1}\,,$$
$$\frac{x^2}{1.2}+\frac{x}{1}.\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}\,,$$
$$\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^2}{1.2.}.\frac{y}{1}+\frac{x}{1}.\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}\,,$$
$$\frac{x^4}{1\ldots4}+\frac{x^3}{1.2.3}.\frac{y}{1}+\frac{x^2}{1.2}.\frac{y^2}{1.2}+\frac{x}{1}.\frac{y^3}{1.2.3}+\frac{y^4}{1\ldots4}\,,$$
u. ſ. w. u. ſ. w.

ſtets convergent, und $\varphi(x).\varphi(y)$ iſt nach dem in Rede ſtehenden Satze die Summe dieſer Reihe, deren Glieder ſich auch leicht unter folgender Form darſtellen laſſen:

$$1\,,$$
$$\frac{1}{1}(x+y)\,,$$
$$\frac{1}{1.2}(x^2+2xy+y^2)\,,$$
$$\frac{1}{1.2.3}(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)\,,$$
$$\frac{1}{1\ldots4}(x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4)$$
u. ſ. w. u. ſ. w.

Nach dem binomiſchen Lehrſatze für poſitive ganze Exponenten bringt man dieſe Reihe aber ferner ſehr leicht auf die Form

$$1,\ \frac{x+y}{1},\ \frac{(x+y)^2}{1.2},\ \frac{(x+y)^3}{1.2.3},\ \frac{(x+y)^4}{1\ldots4},\ \frac{(x+y)^5}{1\ldots5},\ \ldots.,$$

welches alſo auch eine ſtets convergirende Reihe iſt, deren Summe, übereinſtimmend mit dem Obigen, durch $\varphi(x+y)$ bezeichnet werden muß. Dieſe Summe war aber nach dem Vorhergehenden $\varphi(x).\varphi(y)$. Alſo iſt für jedes reelle x und y

$$\varphi(x).\varphi(y)=\varphi(x+y)\,,$$

und folglich nach (11.)

$$\varphi(x)=\{\varphi(1)\}^x.$$

Aber

$$\varphi(1)=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1\ldots4}+\frac{1}{1\ldots5}+\ldots$$

Bezeichnen wir alſo der Kürze wegen die Summe der convergirenden Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens durch e, wo e eine bekannte Größe iſt, deren Werth ſich mittelſt der obigen convergirenden Reihe ſtets mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit berechnen läßt; ſo iſt für jedes reelle x

$$\varphi(x)=e^x\,,$$

d. i.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1\ldots4} + \frac{x^5}{1\ldots5} + \ldots\ldots$$

Die Logarithmen, deren Baſis die bekannte Zahl e iſt, nennt man natürliche oder hyperboliſche Logarithmen. Bezeichnen wir dieſe Logarithmen durch l, ſo iſt

$$a = e^{la},\ a^x = e^{xla},$$

und folglich

$$a^x = 1 + \frac{xla}{1} + \frac{(xla)^2}{1.2} + \frac{(xla)^3}{1.2.3} + \frac{(xla)^4}{1\ldots4} + \ldots.$$

Wir halten dieſen Beweis für völlig ſtreng und elementar, und würden rathen, ihn in die Elemente der ſogenannten Analyſis endlicher Größen aufzunehmen, vorausgeſetzt, daß man, wie jetzt nicht mehr unterlaſſen werden darf, die Lehre von den ſogenannten unendlichen Reihen in dieſem Theile der Analyſis mit der Lehre von der Convergenz der Reihen beginnt. Uebrigens läßt ſich die Convergenz der Reihe

$$1,\ \frac{x}{1},\ \frac{x^2}{1.2},\ \frac{x^3}{1.2.3},\ \frac{x^4}{1\ldots4},\ \frac{x^5}{1\ldots5},\ \ldots\ldots$$

auch leicht unabhängig von dem allgemeinen Satze (21.) in dem Artikel Convergenz der Reihen durch eine ſehr einfache Vergleichung mit der geometriſchen Reihe in dem Falle, wo letztere convergirt, beweiſen.

13. Die Function $\varphi(x)$ ſo zu beſtimmen, daß dieſelbe zwiſchen jeden zwei poſitiven Gränzen von x ſtetig iſt, und daß für alle poſitiven Werthe von x und y der Gleichung

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

genügt wird.

Da x und y poſitiv ſind; ſo hat man, wenn die Logarithmen dieſer Größen in Bezug auf die Baſis b durch log x und log y bezeichnet werden:

$$x = b^{\log x},\ y = b^{\log y}.$$

Alſo nach der Bedingung der Aufgabe

$$\varphi(b^{\log x + \log y}) = \varphi(b^{\log x}) + \varphi(b^{\log y}).$$

Da nun log x und log y alle reellen poſitiven und negativen Werthe haben können; ſo hat man für jedes reelle x und y offenbar

$$\varphi(b^{x+y}) = \varphi(b^x) + \varphi(b^y),$$

oder, wenn wir

$$\varphi(b^x) = \psi(x)$$

ſetzen:

$$\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y),$$

für jedes reelle x und y. Alſo iſt nach (10.)

$$\psi(x) = x\psi(1)\ ,$$

d. i.

$$\varphi(b^x) = x\varphi(b)\ ,$$

oder, wenn wir log x ſtatt x ſetzen, welches offenbar verſtattet iſt, da log x jeden reellen Werth haben kann:

$$\varphi(b^{\log x}) = \varphi(b).\log x\ ,$$

d. i.

$$\varphi(x) = \varphi(b).\log x\ ,$$

oder $\varphi(x) = a \log x$, wo, wie man ſich leicht überzeugt, a eine willkührliche Conſtante iſt.

14. Die Function $\varphi(x)$ ſo zu beſtimmen, daß dieſelbe zwiſchen jeden zwei poſitiven Gränzen von x ſtetig iſt, und daß für jedes poſitive x und y der Gleichung

$$\varphi(xy) = \varphi(x).\varphi(y)$$

genügt wird.

Man ſetze wieder, wie bei der vorigen Aufgabe

$$x = b^{\log x},\ y = b^{\log y}\ ;$$

ſo erhält man die Bedingungsgleichung

$$\varphi(b^{\log x + \log y}) = \varphi(b^{\log x}).\varphi(b^{\log y})\ ,$$

oder, da log x und log y alle reellen Werthe haben können,

$$\varphi(b^{x+y}) = \varphi(b^x).\varphi(b^y)\ ,$$

für jedes reelle x und y. Alſo, wenn wir

$$\varphi(b^x) = \psi(x)$$

ſetzen, für jedes reelle x und y:

$$\psi(x+y) = \psi(x).\psi(y)\ .$$

Folglich nach (11.)

$$\psi(x) = \{\psi(1)\}^x\ ;$$

d. i.

$$\varphi(b^x) = \{\varphi(b)\}^x\ ,$$

und, wenn wir log x für x ſetzen

$$\varphi(b^{\log x}) = \{\varphi(b)\}^{\log x}\ ,$$

oder

$$\varphi(x) = \{\varphi(b)\}^{\log x}\ .$$

Es iſt aber allgemein

$$a^{\log x} = x^{\log a}\ ,$$

weil

$$\log(a^{\log x}) = \log x.\log a,\ \log(x^{\log a}) = \log a.\log x\ ;$$

alſo

$$\log(a^{\log x}) = \log(x^{\log a})$$

iſt. Folglich iſt auch

$$\{\varphi(b)\}^{\log x} = x^{\log \varphi(b)},$$

und daher nach dem Obigen

$$\varphi(x) = x^{\log \varphi(b)},$$

d. i. $\varphi(x) = x^a$, wo man ſich wieder leicht überzeugt, daß a eine ganz willkührliche Conſtante iſt.

15. Die Function $\varphi(x)$ ſo zu beſtimmen, daß ſie zwiſchen jeden zwei reellen Gränzen von x ſtetig iſt, und für alle reelle Werthe von x und y der Gleichung

$$\varphi(x+y) + \varphi(x-y) = 2\varphi(x).\varphi(y)$$

genügt wird.

Für $x = y = 0$ erhält man aus dieſer Gleichung auf der Stelle

$$2\varphi(0) = 2\varphi(0).\varphi(0),\ \varphi(0) = \{\varphi(0)\}^2.$$

Alſo

$$\varphi(0) = 1.$$

Setzt man in der allgemeinen Bedingungsgleichung bloß $x = 0$, ſo erhält man

$$\varphi(y) + \varphi(-y) = 2\varphi(0).\varphi(y).$$

Aber $\varphi(0) = 1$. Alſo

$$\varphi(y) + \varphi(-y) = 2\varphi(y),\ \varphi(-y) = \varphi(y),$$

oder für jedes x

$$\varphi(-x) = \varphi(x).$$

Weil nach dem Obigen $\varphi(0) = 1$ iſt und die Function $\varphi(x)$ zwiſchen jeden zwei reellen Gränzen von x als ſtetig angenommen wird; ſo wird man offenbar immer den Werth α von x ſo nahe bei Null annehmen können, daß $\varphi(x)$ zwiſchen den Gränzen $x = 0$, $x = \alpha$ ſtets poſitiv bleibt. Dies vorausgeſetzt wird nun aber $\varphi(\alpha)$ entweder zwiſchen den Gränzen 0 und 1 enthalten, oder größer als die Einheit ſeyn.

Im erſten Falle kann man ſich offenbar $\varphi(\alpha)$ durch einen Coſinus eines gewiſſen zwiſchen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ enthaltenen Bogens Θ dargeſtellt denken, und kann folglich

$$\varphi(\alpha) = \cos\Theta$$

ſetzen. Setzt man nun in der zu erfüllenden Bedingungsgleichung

$$\varphi(x+y) = 2\varphi(x).\varphi(y) - \varphi(x-y)$$

nach und nach

$$x = \alpha,\ y = \alpha;$$
$$x = 2\alpha,\ y = \alpha;$$
$$x = 3\alpha,\ y = \alpha;$$
u. ſ. w. u. ſ. w.

ſo erhält man:

$$\varphi(2\alpha) = 2\varphi(\alpha).\varphi(\alpha) - \varphi(0),$$
$$\varphi(3\alpha) = 2\varphi(2\alpha).\varphi(\alpha) - \varphi(\alpha),$$
$$\varphi(4\alpha) = 2\varphi(3\alpha).\varphi(\alpha) - \varphi(2\alpha),$$
$$\varphi(5\alpha) = 2\varphi(4\alpha).\varphi(\alpha) - \varphi(3\alpha),$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

d. i. nach dem Obigen und nach bekannten goniometriſchen Formeln:

$$\varphi(2\alpha) = 2\cos\Theta\cos\Theta - 1 = \cos 2\Theta,$$
$$\varphi(3\alpha) = 2\cos 2\Theta\cos\Theta - \cos\Theta = \cos 3\Theta,$$
$$\varphi(4\alpha) = 2\cos 3\Theta\cos\Theta - \cos 2\Theta = \cos 4\Theta,$$
$$\varphi(5\alpha) = 2\cos 4\Theta\cos\Theta - \cos 3\Theta = \cos 5\Theta,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

ſo daß alſo für jedes poſitive ganze n

$$\varphi(n\alpha) = \cos n\Theta$$

iſt.

Giebt man ferner der Bedingungsgleichung die Form

$$\varphi(x).\varphi(y) = \frac{\varphi(x-y) + \varphi(x+y)}{2},$$

und ſetzt zuerſt

$$x = y = \tfrac{1}{2}\alpha;$$

ſo erhält man

$$\{\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 = \frac{\varphi(0) + \varphi(\alpha)}{2} = \frac{1 + \cos\Theta}{2} = \cos\tfrac{1}{2}\Theta^2.$$

Alſo, weil nach dem Obigen $\varphi(\frac{1}{2}\alpha)$ und $\cos\frac{1}{2}\Theta$ poſitiv ſind:

$$\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = \cos\tfrac{1}{2}\Theta.$$

Setzt man ferner

$$x = y = \tfrac{1}{4}\alpha;$$

ſo erhält man

$$\{\varphi(\tfrac{1}{4}\alpha)\}^2 = \frac{\varphi(0) + \varphi(\frac{1}{2}\alpha)}{2} = \frac{1 + \cos\frac{1}{2}\Theta}{2} = \cos\tfrac{1}{4}\Theta^2.$$

Alſo, weil nach dem Obigen $\varphi(\frac{1}{4}\alpha)$ und $\cos\frac{1}{4}\Theta$ poſitiv ſind:

$$\varphi(\tfrac{1}{4}\alpha) = \cos\tfrac{1}{4}\Theta.$$

Setzt man ferner

$$x = y = \tfrac{1}{8}\alpha;$$

ſo wird

$$\{\varphi(\tfrac{1}{8}\alpha)\}^2 = \frac{\varphi(0) + \varphi(\frac{1}{4}\alpha)}{2} = \frac{1 + \cos\frac{1}{4}\Theta}{2} = \cos\tfrac{1}{8}\Theta^2.$$

Folglich wie vorher

$$\varphi(\tfrac{1}{8}\alpha) = \cos\tfrac{1}{8}\Theta.$$

Wie man auf dieſe Art weiter gehen kann, iſt klar. Es iſt folglich allgemein für jedes poſitive ganze k:

$$\varphi\left(\frac{1}{2^k}\right) = \cos\frac{1}{2^k}\Theta,$$

und folglich nach dem Obigen für jedes poſitive ganze n und k:

$$\varphi\left(\frac{n}{2^k}\alpha\right) = \cos\frac{n}{2^k}\Theta.$$

Iſt nun μ eine beliebige poſitive Größe, ſo kann man die poſitiven ganzen Zahlen n, k immer ſich ſo verändern laſſen, daß der Bruch $\frac{n}{2^k}$ der Größe μ ſich immer mehr und mehr nähert, und zugleich läßt ſich zeigen, daß dieſer Bruch der Größe μ beliebig nahe gebracht werden kann. Bezeichnet nämlich ν eine gegebene aber beliebig kleine poſitive Größe; ſo beſtimme man, welches offenbar immer möglich iſt, die poſitive ganze Zahl k ſo, daß

$$2^k > \frac{1}{\nu}$$

iſt. Iſt dann g die poſitive ganze Zahl, welche zunächſt kleiner als $2^k.(\mu-\nu)$ oder, wenn $2^k.(\mu-\nu)$ eine ganze Zahl ſeyn ſollte, dieſe ganze Zahl ſelbſt iſt, wobei man zu bemerken hat, daß es offenbar immer verſtattet iſt, ν kleiner als μ anzunehmen; ſo ſetze man $n = g + 1$, und es wird dann immer

$$\mu - \frac{n}{2^k} < \nu$$

ſeyn, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann. Da nämlich g die poſitive ganze Zahl iſt, welche zunächſt kleiner als $2^k.(\mu-\nu)$ oder, wenn $2^k.(\mu-\nu)$ eine ganze Zahl ſeyn ſollte, dieſe ganze Zahl ſelbſt iſt; ſo iſt

$$g \overline{\overline{<}} 2^k.(\mu-\nu), \quad g + 1 > 2^k.(\mu-\nu).$$

Aber $n = g + 1$. Alſo

$$n - 1 \overline{\overline{<}} 2^k.(\mu-\nu), \quad n > 2^k.(\mu-\nu).$$

Nun iſt aber auch $1 < 2^k.\nu$. Alſo

$$(n-1) + 1 < 2^k.(\mu-\nu) + 2^k.\nu,$$

d. i.

$$n < 2^k.\mu, \quad \frac{n}{2^k} < \mu.$$

Aber

$$n > 2^k.\mu - 2^k.\nu, \quad n + 2^k.\nu > 2^k.\mu,$$

oder

$$\frac{n}{2^k} + \nu > \mu,$$

und folglich, weil $\frac{n}{2^k} < \mu$ iſt:

$$\mu - \frac{n}{2^k} < \nu.$$

wie behauptet wurde. Man ſieht alſo, daß man n und k ſich immer ſo verändern laſſen kann, daß $\frac{n}{2^k}$ ſich der beliebigen poſitiven Größe μ immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert. Läßt man ſich nun in der oben bewieſenen Gleichung

$$\varphi\left(\frac{n}{2^k}\alpha\right) = \cos\frac{n}{2^k}\Theta$$

die poſitiven ganzen Zahlen n und k auf dieſe Weiſe ändern und geht dann zu den Gränzen über; ſo iſt klar, daß für jedes beliebige poſitive μ immer

$$\varphi(\mu\alpha) = \cos\mu\Theta$$

iſt. Nach dem Obigen iſt aber

$$\varphi(-\mu\alpha) = \varphi(\mu\alpha),$$

und bekanntlich iſt auch

$$\cos(-\mu\Theta) = \cos\mu\Theta.$$

Alſo iſt auch

$$\varphi(-\mu\alpha) = \cos(-\mu\Theta),$$

ſo daß folglich für jedes beliebige poſitive oder negative μ immer

$$\varphi(\mu\alpha) = \cos\mu\Theta$$

iſt. Weil nun offenbar x für μ zu ſetzen verſtattet iſt; ſo iſt für jedes x

$$\varphi(\alpha x) = \cos\Theta x,$$

oder, wenn man $\frac{x}{\alpha}$ für x ſetzt, für jedes x:

$$\varphi(x) = \cos\left(\frac{\Theta}{\alpha}x\right) = \cos\left(-\frac{\Theta}{\alpha}x\right).$$

Soll alſo die Function $\varphi(x)$ zwiſchen jeden zwei beliebigen reellen Gränzen ſtetig ſeyn und der Gleichung

$$\varphi(x+y) + \varphi(x-y) = 2\varphi(x).\varphi(y)$$

genügen, und ſoll zugleich die poſitive Größe $\varphi(\alpha)$ zwiſchen den Gränzen 0 nnd 1 enthalten ſeyn; ſo iſt

$$\varphi(x) = \cos ax,$$

wo a eine Conſtante, und zwar, wie leicht erhellet, eine willkührliche Conſtante bezeichnet.

Soll nun aber die poſitive Größe $\varphi(\alpha)$ größer als die Einheit ſeyn; ſo kann man, wenn r eine poſitive Größe bezeichnet,

$$\varphi(\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$$

ſetzen, indem dieſer Gleichung offenbar durch den reellen Werth

$$r = \varphi(\alpha) + \sqrt{\{\varphi(\alpha)\}^2 - 1},$$

wo man die Quadratwurzel poſitiv zu nehmen hat, genügt wird.

Man findet dieſen Werth von r leicht durch Auflöſung der quadratiſchen Gleichung

$$2r\varphi(\alpha) = r^2 + 1 .$$

Setzt man nun in der zum Grunde gelegten Bedingungsgleichung nach und nach

$$x = \alpha,\ y = \alpha;$$
$$x = 2\alpha,\ y = \alpha;$$
$$x = 3\alpha,\ y = \alpha;$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

ſo erhält man, weil $\varphi(0) = 1$ iſt:

$$\varphi(2\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - 1 = \tfrac{1}{2}\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right),$$

$$\varphi(3\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right) - \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) = \tfrac{1}{2}\left(r^3 + \frac{1}{r^3}\right),$$

$$\varphi(4\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\left(r^3 + \frac{1}{r^3}\right) - \tfrac{1}{2}\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right) = \tfrac{1}{2}\left(r^4 + \frac{1}{r^4}\right),$$

$$\varphi(5\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\left(r^4 + \frac{1}{r^4}\right) - \tfrac{1}{2}\left(r^3 + \frac{1}{r^3}\right) = \tfrac{1}{2}\left(r^5 + \frac{1}{r^5}\right),$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

und es iſt alſo für jedes poſitive ganze n:

$$\varphi(n\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(r^n + \frac{1}{r^n}\right) = \tfrac{1}{2}(r^n + r^{-n}) .$$

Setzt man ferner auf ähnliche Art wie oben nach und nach

$$x = y = \tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$x = y = \tfrac{1}{4}\alpha,$$
$$x = y = \tfrac{1}{8}\alpha,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

ſo erhält man

$$\{\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 = \frac{\varphi(0) + \varphi(\alpha)}{2} = \frac{1 + \frac{1}{2}(r + r^{-1})}{2} = \tfrac{1}{4}(r^{\frac{1}{2}} + r^{-\frac{1}{2}})^2,$$

$$\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = \tfrac{1}{2}(r^{\frac{1}{2}} + r^{-\frac{1}{2}});$$

$$\{\varphi(\tfrac{1}{4}\alpha)\}^2 = \frac{\varphi(0) + \varphi(\frac{1}{2}\alpha)}{2} = \frac{1 + (r^{\frac{1}{2}} + r^{-\frac{1}{2}})}{2} = \tfrac{1}{4}(r^{\frac{1}{4}} + r^{-\frac{1}{4}})^2,$$

$$\varphi(\tfrac{1}{4}\alpha) = \tfrac{1}{2}(r^{\frac{1}{4}} + r^{-\frac{1}{4}})^2;$$

$$\{\varphi(\tfrac{1}{8}\alpha)\}^2 = \frac{\varphi(0) + \varphi(\frac{1}{4}\alpha)}{2} = \frac{1 + \frac{1}{2}(r^{\frac{1}{4}} + r^{-\frac{1}{4}})}{2} = \tfrac{1}{4}(r^{\frac{1}{8}} + r^{-\frac{1}{8}})^2,$$

$$\varphi(\tfrac{1}{8}\alpha) = \tfrac{1}{2}(r^{\frac{1}{8}} + r^{-\frac{1}{8}});$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Alſo iſt für jedes poſitive k:

$$\varphi\left(\frac{1}{2^k}\alpha\right) = \tfrac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{2^k}} + r^{-\frac{1}{2^k}}\right),$$

und daher nach dem Vorhergehenden für jedes poſitive ganze n und k:

$$\varphi\left(\frac{n}{2^k}\alpha\right) = \tfrac{1}{2}\left(r^{\frac{n}{2^k}} + r^{-\frac{n}{2^k}}\right).$$

Läßt man nun wieder $\frac{n}{2^k}$ ſich der poſitiven Größe μ immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähern, und geht dann zu den Gränzen über; ſo erhält man

$$\varphi(\mu\alpha) = \tfrac{1}{2}(r^{\mu} + r^{-\mu}),$$

für jedes poſitive μ. Es iſt aber

$$\varphi(-\mu\alpha) = \varphi(\mu\alpha),$$

und

$$\tfrac{1}{2}(r^{-\mu} + r^{\mu}) = \tfrac{1}{2}(r^{\mu} + r^{-\mu}).$$

Alſo iſt offenbar für jedes beliebige poſitive und negative μ

$$\varphi(\mu\alpha) = \tfrac{1}{2}(r^{\mu} + r^{-\mu}),$$

oder, wenn man x für μ ſetzt:

$$\varphi(\alpha x) = \tfrac{1}{2}(r^{x} + r^{-x}),$$

und, wenn man $\frac{x}{\alpha}$ für x ſetzt:

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}\{r^{\frac{x}{\alpha}} + r^{-\frac{x}{\alpha}}\},$$

oder, für $r^{\pm\frac{1}{\alpha}} = A$:

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}\{A^{x} + A^{-x}\}.$$

Von dieſer Form iſt alſo die den Bedingungen der Aufgabe genügende Function $\varphi(x)$, wenn die poſitive Größe $\varphi(\alpha)$ größer als die Einheit iſt. A iſt eine willkührliche Conſtante, jedoch, wie leicht aus dem Obigen erhellet, immer poſitiv.

Dieſe, ſo wie alle obigen höchſt inſtructiven Aufgaben haben wir aus **Cauchy** cours d'Analyse de l'école royale polytechnique. T. I. Paris. 1821. p. 103—122 entlehnt. Von imaginären Functionen, die gewiſſen Bedingungen entſprechen, handelt Cauchy p. 261—273.

16. Aus der vorigen Aufgabe kann man auch einen ſehr ſtrengen und allgemeinen Beweis der bekannten Reihen für cos x und sin x herleiten. Aus dem im Artikel Convergenz der Reihen (21.) bewieſenen Lehrſatze folgt leicht, daß die Reihe

$$1, -\frac{x^2}{1.2}, \frac{x^4}{1\ldots4}, -\frac{x^6}{1\ldots6}, \ldots$$

für jedes x convergirt, und convergent bleibt, wenn man jedes Glied auf ſeinen numeriſchen Werth reducirt. Folglich hat die Reihe

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + \ldots$$

für jedes x eine Summe, welche wir durch $\varphi(x)$ bezeichnen, und alſo

$$\varphi(x) = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + \ldots,$$

ſo wie auf ganz gleiche Art

$$\varphi(y) = 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1\ldots4} - \frac{y^6}{1\ldots6} + \ldots$$

ſetzen wollen. Beide Reihen ſind für jedes x und y convergent und bleiben convergent, wenn man für jedes Glied ſeinen numeriſchen Werth ſetzt. Alſo iſt nach dem a. a. O. (20.) bewieſenen Satze auch die Reihe

$$\begin{aligned}
&1\\
&-\frac{1}{1.2}(x^2+y^2)\\
&+\frac{1}{1\ldots4}(x^4+6x^2y^2+y^4)\\
&-\frac{1}{1\ldots6}(x^6+15x^4y^2+15x^2y^4+y^6)\\
&+\frac{1}{1\ldots8}(x^8+28x^6y^2+70x^4y^4+28x^2y^6+y^8)
\end{aligned}$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

convergent, und die Summe derſelben iſt $= \varphi(x).\varphi(y)$.

Ferner iſt

$$\varphi(x+y) = 1 - \frac{(x+y)^2}{1.2} + \frac{(x+y)^4}{1\ldots4} - \frac{(x+y)^6}{1\ldots6} + \ldots,$$

$$\varphi(x-y) = 1 - \frac{(x-y)^2}{1.2} + \frac{(x-y)^4}{1\ldots4} - \frac{(x-y)^6}{1\ldots6} + \ldots.$$

Alſo nach dem Artikel Convergenz der Reihen (19.)

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\{\varphi(x+y) + \varphi(x-y)\} =\\
&1\\
&-\frac{1}{1.2}(x^2+y^2)\\
&+\frac{1}{1\ldots4}(x^4+6x^2y^2+y^4)\\
&-\frac{1}{1\ldots6}(x^6+15x^4y^2+15x^2y^4+y^6)\\
&+\frac{1}{1\ldots8}(x^8+28x^6y^2+70x^4y^4+28x^2y^6+y^8)
\end{aligned}$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Folglich

$$\varphi(x+y) + \varphi(x-y) = 2\varphi(x).\varphi(y).$$

Man findet ſehr leicht

$$\varphi(0) = 1,\ \varphi(-x) = \varphi(x)\,.$$

Für Werthe von x ſehr nahe bei Null iſt alſo $\varphi(x)$ poſitiv. Bezeichnet nun α, das man offenbar als poſitiv betrachten kann, einen ſolchen Werth von x; ſo läßt ſich offenbar $\alpha < 1$ ſetzen. Da nun

$$\varphi(\alpha) = 1 - \left\{\frac{\alpha^2}{1.2} - \frac{\alpha^4}{1..4}\right\} - \left\{\frac{\alpha^6}{1..6} - \frac{\alpha^8}{1..8}\right\} - \ldots$$

iſt; ſo iſt offenbar $\varphi(\alpha)$ zwiſchen 0 und 1 enthalten, und folglich nach (15.) $\varphi(x) = \cos ax$, d. i.

$$\cos ax = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - \frac{x^6}{1..6} + \ldots,$$

wo a eine conſtante Größe bezeichnet, für jedes x.

Die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens convergirt für jedes x und bleibt convergent, wenn man für jedes Glied ſeinen numeriſchen Werth ſetzt. Alſo iſt nach dem Artikel Convergenz der Reihen (20.) auch

$$\begin{aligned}
&1\\
&- x^2\left\{\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2}\right\}\\
&+ x^4\left\{\frac{1}{1..4} + \frac{1}{1.2.1.2} + \frac{1}{1..4}\right\}\\
&- x^6\left\{\frac{1}{1..6} + \frac{1}{1..4.1.2} + \frac{1}{1.2.1..4} + \frac{1}{1..6}\right\}\\
&+ x^8\left\{\frac{1}{1..8} + \frac{1}{1..6.1..2} + \frac{1}{1..4.1..4} + \frac{1}{1.2.1..6} + \frac{1}{1..8}\right\}\\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

eine für jedes x convergirende Reihe, und

$$\cos ax\,.\cos ax = \cos ax^2$$

iſt die Summe derſelben.

Aus dem Artikel Convergenz der Reihen (21.) folgt nun ferner leicht, daß auch

$$x,\ -\frac{x^3}{1.2.3},\ \frac{x^5}{1..5},\ -\frac{x^7}{1..7},\ \ldots$$

eine für jedes x convergirende Reihe iſt, und convergent bleibt, wenn man für jedes Glied ſeinen numeriſchen Werth ſetzt. Dieſe Reihe hat alſo eine Summe, die wir durch $\psi(x)$ bezeichnen, und folglich

$$\psi(x) = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1..5} - \frac{x^7}{1..7} + \frac{x^9}{1..9} - \ldots$$

ſetzen wollen. Nach dem Artikel Convergenz der Reihen (20.) iſt auch

$$x^2$$
$$-x^4\left\{\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3}\right\}$$
$$+x^6\left\{\frac{1}{1..5}+\frac{1}{1.2.3.1.2.3}+\frac{1}{1..5}\right\}$$
$$-x^8\left\{\frac{1}{1..7}+\frac{1}{1..5.1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.1..5}+\frac{1}{1..7}\right\}$$
$$+x^{10}\left\{\frac{1}{1..9}+\frac{1}{1..7.1.2.3}+\frac{1}{1..5.1..5}+\frac{1}{1.2.3.1..7}+\frac{1}{1..9}\right\}$$
u. ſ. w. u. ſ. w.

eine convergente Reihe, und

$$\psi(x).\psi(x) = \{\psi(x)\}^2$$

iſt die Summe dieſer Reihe.

Nach dem mehrmals angeführten Artikel (19.) iſt nun auch

$$1$$
$$-x^2\left\{\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.2}\right\}$$
$$+x^4\left\{\frac{1}{1..4}-\frac{1}{1..3.1}+\frac{1}{1.2.1.2}-\frac{1}{1.1..3}+\frac{1}{1..4}\right\}$$
$$-x^6\left\{\frac{1}{1..6}-\frac{1}{1..5.1}+\frac{1}{1..4.1.2}-\frac{1}{1..3.1..3}+\frac{1}{1.2.1..4}-\frac{1}{1.1..5}+\frac{1}{1..6}\right\}$$
$$+x^8\left\{\frac{1}{1..8}-\frac{1}{1..7.1}+\frac{1}{1..6.1.2}-\ldots+\frac{1}{1.2.1..6}-\frac{1}{1.1..7}+\frac{1}{1..8}\right\}$$
u. ſ. w. u. ſ. w.

eine für jedes x convergirende Reihe, und

$$\cos ax^2 + \{\psi(x)\}^2$$

iſt die Summe dieſer Reihe. Nach dem binomiſchen Lehrſatze für poſitive ganze Exponenten iſt aber für jedes n

$$(1-1)^{2n} = 0 =$$
$$1-\frac{2n}{1}+\frac{2n(2n-1)}{1.2}-\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3}+\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{2n(2n-1)}{1.2}-\frac{2n}{1}+1,$$

oder, wenn man auf beiden Seiten mit 1.2.3 ... 2n dividirt:

$$0=\frac{1}{1\ldots2n}-\frac{1}{1..(2n-1).1}+\frac{1}{1..(2n-2).1.2}-\frac{1}{..(2n-3).1.2.3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{1.2.1..(2n-2)}-\frac{1}{1.1..(2n-1)}+\frac{1}{1..2n}.$$

Folglich ſind, das erſte ausgenommen, alle Glieder der obigen Reihe = 0, und die Summe derſelben iſt alſo offenbar ihrem erſten Gliede gleich, d. i. = 1, ſo daß alſo

$$\cos ax^2 + \{\psi(x)\}^2 = 1,$$

und folglich

$$\sqrt{1 - \cos a x^2} = \pm \psi(x) ,$$

d. i.

$$\sin a x = \pm x \mp \frac{x^3}{1.2.3} \pm \frac{x^5}{1..5} \mp \frac{x^7}{1..7} \pm \ldots$$

iſt. Es iſt alſo auch

$$\frac{\sin a x}{x} = \pm 1 \mp \frac{x^2}{1.2.3} \pm \frac{x^4}{1..5} \mp \frac{x^6}{1..7} \pm \ldots$$

Die für jedes x convergirende Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nähert ſich aber, wenn x ſich der Null nähert, immer mehr und mehr der Gränze ± 1, und kann dieſer Gränze offenbar beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x nahe genug bei Null annimmt, welches man auch auf folgende Art beweiſen kann. Die Reihe

$$\frac{1}{1.2.3}, -\frac{x^2}{1..5}, +\frac{x^4}{1..7}, -\frac{x^6}{1..9}, \ldots$$

convergirt für jedes x (Convergenz der Reihen. 21.) und hat alſo eine gewiſſe endliche beſtimmte Summe, die wir durch f(x) bezeichnen wollen, ſo daß alſo

$$\frac{\sin a x}{x} = \pm 1 \mp x^2 f(x)$$

iſt. Eben ſo convergirt auch die Reihe

$$\frac{1}{1.2.3}, \frac{x^2}{1..5}, \frac{x^4}{1..7}, \frac{x^6}{1..9}, \ldots$$

und hat eine gewiſſe endliche beſtimmte Summe, die wir durch F(x) bezeichnen wollen. Nimmt nun x ab, ſo nimmt offenbar auch F(x) ab, und $x^2 F(x)$ nähert ſich der Null, kann auch offenbar der Null beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x klein genug annimmt. Der abſolute Werth von $x^2 f(x)$ iſt aber offenbar nie größer als $x^2 F(x)$, ſo daß alſo auch $x^2 f(x)$ der Null beliebig nahe gebracht, oder $\pm 1 \mp x^2 f(x)$ die Gränze ± 1 bis zu jedem beliebigen Grade genähert werden kann, wenn man nur x nahe genug bei Null annimmt, welches bewieſen werden ſollte. Alſo nähert ſich auch $\frac{\sin a x}{x}$, wenn x ſich der Null nähert, immer mehr und mehr der Gränze ± 1, und kann dieſer Gränze beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x nahe genug bei Null annimmt. Der Bruch $\frac{\sin a x}{a x}$ nähert ſich aber, wenn x ſich der Null nähert, immer mehr und mehr der Einheit, und kann derſelben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x nahe genug bei Null annimmt, welches ſich, wie man im Artikel Differentialrechnung (10.) i. d. Z. nachſehen kann, leicht ganz elementariſch in völliger Strenge beweiſen läßt. Alſo nähert ſich, wenn x ſich der Null nähert, $\frac{\sin a x}{a x} a$ der Gränze $1 . a = a$, und kann dieſer Gränze beliebig nahe gebracht wer-

den, wenn man nur x nahe genug bei Null annimmt. Weil nun

$$\frac{\sin ax}{ax}a = \frac{\sin ax}{x}$$

iſt, und der letztere Bruch, wie vorher gezeigt worden iſt, ſich immer mehr und mehr der Gränze ± 1 nähert, wenn x ſich der Null nähert, auch dieſer Gränze beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur x nahe genug bei Null annimmt; ſo iſt $a = \pm 1$, und folglich nach dem Obigen

$$\sin(\pm x) = \pm x \mp \frac{x^3}{1.2.3} \pm \frac{x^5}{1\,..\,5} \mp \frac{x^7}{1\,..\,7} \pm \ldots.$$

$$\cos(\pm x) = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\,..\,4} - \frac{x^6}{1\,..\,6} + \ldots.$$

Weil nun bekanntlich immer

$$\sin(\pm x) = \pm \sin x,\ \cos(\pm x) = \cos x$$

iſt; ſo folgt hieraus auf der Stelle, daß für jedes x

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\,..\,5} - \frac{x^2}{1\,..\,7} + \ldots.,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\,..\,4} - \frac{x^6}{1\,..\,6} + \ldots..$$

iſt.

Wir halten den obigen Beweis dieſer beiden überaus wichtigen Reihen, auf die wir in dieſem Wörterbuche nun ſchon öfters zurückgekommen ſind, für völlig ſtreng und zugleich auch für ganz elementar, weshalb wir demſelben wohl die Aufnahme in die Elemente der analytiſchen Trigonometrie wünſchen möchten, da uns in der That kein anderer Beweis ſo viele Strenge mit ſo vieler Einfachheit zu vereinigen ſcheint. Der zweite Theil ſtimmt mit dem in unſern mathematiſchen Abhandlungen (Altona. 1822. S. 17.) für die Reihe für den Coſinus gegebenen Beweiſe überein. Auch hat der obige Beweis vor dem im Artikel Unmögliche Größe (40.) nach Cauchy geführten Beweiſe den höchſt weſentlichen Vorzug, daß er nicht die Betrachtung der unmöglichen Größen erfordert, obgleich allerdings auch dieſer Beweis ſehr einfach und leicht zum Zweck führt. Der zweite Theil der Aufgabe in (15.) iſt bei dem obigen Beweiſe der Reihen für sin x und cos x, wie ſich von ſelbſt verſteht, ganz entbehrlich.

17. Wir haben hier bloß einige einfache, aber, wie es uns ſcheint, auch zugleich ſehr inſtructive Aufgaben über die Beſtimmung der Form der Functionen aus gegebenen Bedingungen behandelt, und verweiſen weiterer Ausführung wegen vorzüglich auf drei Abhandlungen von Babbage in den Philosophical Transactions. 1815. p. 389. 1816. p. 180. 1817. p. 197., ſo wie auf einen Aufſatz von J. F. W. Herſchel ebendaſ. 1814. p. 458. Auch ſ. m. eine Abhandlung von Collins in den Mém. de

Petersb. 1831, zwei Abhandlungen von **Abel** in **Crelles** Journal I. S. 11. II. S. 386., und einen Aufſatz von **Magnus** ebendaſ. V. S. 365.; auch **Lacroix** Traité du calcul diff. et int. T. III. p. 223. 225., und den Artikel Periodiſche Functionen i. d. Z. In dem Obigen haben wir uns auch angelegen ſeyn laſſen, die Anwendung ſolcher Unterſuchungen auf die Entwickelung der Functionen in convergirende Reihen an einigen Beiſpielen (12. 16.) zu zeigen, und müſſen nochmals bekennen, daß wir die obigen Beweiſe der Entwickelungen von e^x, a^x, $\sin x$, $\cos x$ für ſehr ſtreng und elementar halten.

III. Ueber die Werthe der Functionen, welche ſich unter der unbeſtimmten Form $\frac{0}{0}$ darſtellen, und einige andere ähnliche Unterſuchungen.

18. Sey $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, und für den beſtimmten Werth x' von x werde $y = \frac{0}{0}$, d. i. $f(x') = 0$, $\varphi(x') = 0$. Läßt man x ſich um Δx verändern, ſo gehen $f(x)$ und $\varphi(x)$ reſpective in

$$f(x) + \Delta f(x) \text{ und } \varphi(x) + \Delta\varphi(x)$$

über, und die Function y iſt offenbar die Gränze, welcher ſich

$$\frac{f(x) + \Delta f(x)}{\varphi(x) + \Delta\varphi(x)}$$

nähert, wenn Δx ſich der Null nähert. Da nun aber $f(x') = 0$, $\varphi(x') = 0$ iſt, ſo iſt für den ſpeciellen Werth $x = x'$ der entſprechende Werth der Function y offenbar die Gränze, welcher

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta\varphi(x)}$$

ſich nähert, wenn Δx ſich der Null nähert, in dieſer Gränze, die im Allgemeinen eine Function von x iſt, ebenfalls $x = x'$ geſetzt. Da aber

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta\varphi(x)} = \frac{\Delta f(x) : \Delta x}{\Delta\varphi(x) : \Delta x}$$

iſt; ſo iſt der Werth von y für $x = x'$ auch die Gränze, welcher

$$\frac{\Delta f(x) : \Delta x}{\Delta\varphi(x) : \Delta x}$$

ſich nähert, indem Δx ſich der Null nähert, wenn man in dieſer Gränze $x = x'$ ſetzt. Die Gränzen, welchen ſich

$$\Delta f(x) : \Delta x = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}, \quad \Delta\varphi(x) : \Delta x = \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}$$

nähern, wenn Δx ſich der Null nähert, ſind aber bekanntlich die Differentialquotienten

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f'(x), \quad \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \varphi'(x).$$

Alſo iſt die Gränze, welcher

$$\frac{\Delta f(x) : \Delta x}{\Delta \varphi(x) : \Delta x}$$

ſich nähert, wenn Δx ſich der Null nähert, $= \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, und folglich nach dem Obigen, wenn wir $y = F(x)$ ſetzen,

$$F(x') = \frac{f'(x')}{\varphi'(x')}.$$

Wäre auch $f'(x') = 0$, $\varphi'(x') = 0$, ſo wäre ganz eben ſo

$$\frac{f'(x')}{\varphi'(x')} = \frac{f''(x')}{\varphi''(x')},$$

wenn wir uns immer der von Lagrange gebrauchten Bezeichnung der Differentialquotienten bedienen. Alſo in dem obigen Falle

$$F(x') = \frac{f''(x')}{\varphi''(x')}.$$

Wäre nun auch $f''(x') = 0$, $\varphi''(x') = 0$; ſo wäre wieder auf dieſelbe Weiſe wie vorher

$$\frac{f''(x')}{\varphi''(x')} = \frac{f'''(x')}{\varphi'''(x')};$$

folglich in dieſem Falle

$$F(x') = \frac{f'''(x')}{\varphi'''(x')}.$$

Wie man auf dieſe Art weiter gehen kann, iſt klar.

Iſt z. B.

$$y = \frac{lx}{x-1},$$

ſo iſt $y = \frac{0}{0}$ für $x = 1$. Aber

$$\frac{\partial lx}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial (x-1)}{\partial x} = 1.$$

Alſo für $x = 1$

$$y = \frac{1}{x} = 1.$$

Iſt $y = \frac{x-1}{x^n - 1}$, ſo iſt ebenfalls $y = \frac{0}{0}$ für $x = 1$. Aber

$$\frac{\partial (x-1)}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial (x^n - 1)}{\partial x} = nx^{n-1}.$$

Alſo für $x = 1$

$$y = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n}.$$

Für $y = \frac{\sin x}{x}$ iſt für $x = 0$

$$y = \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Für $y = \frac{l(1+x)}{x}$ iſt für $x = 0$

$$y = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Einige Fälle, in denen man mehr als ein Mal hinter einander differentiiren muß, ſ. m. Thl. II. S. 305. ff.

19. In dem Artikel Convergenz der Reihen (7.) i. d. Z. iſt folgender Satz bewieſen worden:

I. Wenn die Function f(x) für ſehr große Werthe von x ſtets poſitiv bleibt, und das Verhältniß

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

ſich fortwährend und bis zu jedem beliebigen Grade der Größe L nähert, wenn x wächſt; ſo nähert die Größe

$$\{f(x)\}^{\frac{1}{x}}$$

für wachſende x ſich derſelben Gränze.

Setzen wir nun, wenn a eine beliebige poſitive Größe bezeichnet,

$$f(x) = a^{\varphi(x)}, \quad f(x+1) = a^{\varphi(x+1)};$$

ſo iſt

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = a^{\varphi(x+1) - \varphi(x)}$$

ſtets poſitiv. Nähert nun für wachſende x die Differenz

$$\varphi(x+1) - \varphi(x)$$

ſich der Gränze L; ſo nähert für wachſende x der Bruch

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} \text{ ſich der Gränze } a^L.$$

Nach I. nähert alſo auch

$$\{f(x)\}^{\frac{1}{x}} \text{ ſich der Gränze } a^L$$

für wachſende x. Nun iſt aber

$$\{f(x)\}^{\frac{1}{x}} = \{a^{\varphi(x)}\}^{\frac{1}{x}} = a^{\frac{\varphi(x)}{x}}.$$

Alſo nähert für wachſende x auch

$$a^{\frac{\varphi(x)}{x}} \text{ ſich der Gränze } a^L,$$

woraus unmittelbar folgt, daß für wachſende x der Bruch $\frac{\varphi(x)}{x}$ ſich der Gränze L nähert. Dies führt zu dem folgenden Lehrſatze:

II. Wenn für wachſende x die Differenz

$$\varphi(x+1) - \varphi(x)$$

ſich der Gränze L nähert; ſo nähert für wachſende x der Bruch $\frac{\varphi(x)}{x}$ ſich derſelben Gränze.

20. Die beiden vorigen Lehrſätze werden oft mit Vortheil gebraucht, wenn es darauf ankommt, unbeſtimmt ſcheinende Werthe gewiſſer Functionen zu beſtimmen, wie wir jetzt an einigen Beiſpielen zeigen wollen.

Man ſoll z. B. den Werth der Function $x^{\frac{1}{x}}$ für $x = \infty$ beſtimmen. Zu dem Ende ſetze man $f(x) = x$; ſo iſt

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Für wachſende x nähert ſich dieſer Bruch alſo der Gränze 1. Derſelben Gränze nähert ſich nach 19. I. die Function

$$\{f(x)\}^{\frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{x}}$$

für wachſende x. Alſo iſt

$$\infty^{\frac{1}{\infty}} = \infty^0 = 1.$$

Für $f(x) = \log x$ iſt

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{\log(x+1)}{\log x} = \frac{\log x + \log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\log x} = 1 + \frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\log x}.$$

Für wachſende x nähert ſich alſo dieſer Bruch immer mehr und mehr der Gränze 1, und es iſt folglich nach 19. I.

$$(\log\infty)^{\frac{1}{\infty}} = (\log\infty)^0 = 1.$$

Für $\varphi(x) = \log x$ iſt

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = \log(x+1) - \log x = \log\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Für wachſende x nähert folglich dieſe Differenz ſich der Gränze 0. Derſelben Gränze nähert ſich alſo $\frac{\varphi(x)}{x}$ für wachſende x nach 19. II. Alſo iſt

$$\frac{\log\infty}{\infty} = 0.$$

Für $\varphi(x) = a^x$, wenn a eine Zahl bezeichnet, die größer als die Einheit iſt, iſt

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = a^{x+1} - a^x = a^x(a-1),$$

Wächſt nun x, ſo nähert ſich dieſe Differenz offenbar der Gränze ∞. Derſelben Gränze nähert ſich nach 19. II. auch $\frac{l\varphi(x)}{x} = \frac{a^x}{x}$, wenn x wächſt, und es iſt alſo

$$\frac{a^\infty}{\infty} = \infty.$$

Hieraus folgt auch, daß, wenn $a > 1$ iſt, die Potenz a^x immer endlich einmal ſchneller wachſen wird wie x.

Ueber die Entwickelung der Functionen in Reihen, die nach den Sinuſſen und Coſinuſſen der unabhängigen veränderlichen Größen der Functionen fortſchreiten, findet man alles Nöthige in dem Art. Beſtimmtes Integral (51. ff.) i. d. Z.

Fundamentalebene und Fundamentallinie ſ. Perſpectiv (6.).

G.

Geometrie, deſcriptive, (Géométrie descriptive), beſchreibende Geometrie, iſt ein neuer Anbau der Geometrie, welcher ſeine Entſtehung und ſeine vollſtändige Ausbildung ganz dem berühmten Monge und ſeinen Schülern verdankt. Sie hängt genau mit der Theorie der Projectionen zuſammen und hat den Zweck, Gegenſtände dreier Dimenſionen auf einer Ebene ſo darzuſtellen, daß man aus der Zeichnung ſogleich die gegenſeitige Lage der einzelnen Theile und die wahren Dimenſionen der dargeſtellten körperlichen Gegenſtände genau erkennen kann, weshalb ſie für die Kriegs- und bürgerliche Baukunſt, für das Maſchinenweſen, überhaupt für alle die Künſte, bei denen Darſtellungen körperlicher Gegenſtände in genauen Zeichnungen auf einer Ebene häufig in Anwendung gebracht werden müſſen, von der größten Wichtigkeit iſt. Die ſogenannten Bauriſſe, nämlich Grundriſſe, Durchſchnitte u. dergl. ſind einfache der Praxis entnommene Beiſpiele ſolcher Zeichnungen, wie ſie die deſcriptive Geometrie ausführen lehrt, und können zugleich zu einer hier genügenden Andeutung dienen, daß man dieſelben durchaus nicht mit der Perſpectiv, der eigentlichen mathematiſchen Zeichnenkunſt, verwechſeln darf. Das eigentliche Weſen der deſcriptiven Geometrie kann, wie dies immer der Fall zu ſeyn pflegt, nur erſt durch ihr Studium ſelbſt gehörig erkannt werden. Sie beſteht aus zwei Theilen: aus gewiſſen Elementar-Aufgaben, die bei allen Conſtructionen in Anwendung kommen, und aus deren Anwendung zur Ausführung zuſammengeſetzterer Conſtructionen, wie z. B. zu der bei der Lehre von den Gewölben in der Baukunſt ſehr nützlichen Conſtruction der Durchſchnitte krummer Flächen. Mit den erwähnten Elementar-Aufgaben haben wir es in dieſem Artikel, welcher nur kurz ſeyn kann, vorzüglich zu thun, und dieſe Aufgaben ſind

auch in der That hinreichend, um die Methode, durch welche die deſcriptive Geometrie ihre Zwecke zu erreichen ſucht, im Allgemeinen kennen zu lehren. Bevor wir aber zu der Auflöſung der in Rede ſtehenden Elementar-Aufgaben übergehen, wollen wir einige andere Probleme vorausſchicken, weil uns dieſelben zu einer vorläufigen Einführung in unſere Wiſſenſchaft ſehr geeignet ſcheinen, wenn wir auch darin von dem gewöhnlichen Wege, welcher erſt ſpäter zu dieſen Problemen führt, abweichen. Der Kürze wegen werden wir im Folgenden die drei Winkel, deren Ebenen eine dreiſeitige körperliche Ecke bilden, die Seiten, die drei Winkel dagegen, unter denen dieſe Ebenen gegen einander geneigt ſind, die Winkel der Ecke nennen.

1. Die drei Seiten einer dreiſeitigen körperlichen Ecke ſind gegeben; man ſoll die Winkel derſelben durch eine Conſtruction in der Ebene, eine ſogenannte graphiſche Conſtruction, finden.

A (Fig. 8.) ſey die Spitze der Ecke, deren Seiten gegeben ſind, deren Winkel wir finden ſollen. Von dem beliebigen Punkte E in der Kante AB fälle man auf die Ebene des Winkels CAD das Perpendikel EF, und von F in dieſer Ebene auf die Kanten AC, AD die Perpendikel FG, FH. Zieht man nun EG, EH; ſo ſind EGF, EHF die den Kanten AC, AD entſprechenden Winkel der Ecke, die alſo aus den Datis der Aufgabe durch eine graphiſche Conſtruction gefunden werden ſollen.

Zu dem Ende zeichne man in der Ebene des Papiers die drei gegebenen Winkel BAC, CAD, BAD in der erforderlichen Lage neben einander, wie Fig. 8*. zeigt, und ſchneide auf den beiden in der Figur durch AB bezeichneten Linien zwei beliebige aber gleiche, in der Figur beide durch AE bezeichnete Stücke ab. Dächte man ſich nun in Fig. 8. die Ebenen der Winkel BAC, BAD um AC, AD als Axen gedreht und in die Ebene des Winkels CAD niedergelegt; ſo würden in dieſer Ebene FG, EG und FH, EH offenbar gerade Linien bilden, die auf AC und AD ſenkrecht ſtehen. Man wird alſo den dem Punkte F (Fig. 8.) enſprechenden Punkt in Fig. 8*. erhalten, wenn man von den beiden durch E bezeichneten Punkten auf AC und AD Perpendikel fällt, deren Durchſchnittspunkt offenbar der geſuchte Punkt F ſeyn wird. Die beiden geſuchten Winkel EGF, EHF (Fig. 8.) ſind Winkel der beiden bei F rechtwinkligen Dreiecke EGF, EHF (Fig. 8.). Könnte man alſo letztere conſtruiren, ſo würden auch erſtere gefunden ſeyn. Nun ſind aber in Fig. 8*. von dieſen rechtwinkligen Dreiecken die Hypotenuſen EG, EH und die Catheten FG, FH gegeben; alſo laſſen ſich dieſelben conſtruiren, und unſere Aufgabe iſt folglich als aufgelöſt zu betrachten. Man errichte nämlich in Fig. 8*. durch den Punkt F auf FG und FH Perpendikel, und beſchreibe aus G und H als Mittelpunkten mit GE und HE als Halbmeſſern Kreiſe, von denen die errichteten Perpendikel in den beiden in der Figur

durch **E** bezeichneten Punkten geſchnitten werden; ſo ſind **EGF**, **EHF** die beiden geſuchten rechtwinkligen Dreiecke, die durch dieſelben Buchſtaben bezeichneten Winkel alſo die beiden geſuchten Winkel der gegebenen körperlichen Ecke, die folglich, wie verlangt wurde, mittelſt des obigen Verfahrens jederzeit durch eine bloße Conſtruction in der Ebene, oder eine ſogenannte graphiſche Conſtruction, gefunden werden können. Daß man den an der Kante **AB** (**Fig. 8.**) liegenden Winkel der gegebenen körperlichen Ecke durch eine ganz ähnliche Conſtruction finden kann, bedarf wohl nicht erſt noch einer beſondern Erinnerung. Dächte man ſich **Fig. 8.** aus Pappe oder Kartenpapier verfertigt, und dann die einzelnen Theile dieſer Figur aus einander geklappt, bis Alles in einer Ebene liegt; ſo würde man offenbar **Fig. 8*.** erhalten, eine Vorſtellung, welche zur Erläuterung und dem leichtern Verſtehen des Vorhergehenden und Folgenden ſehr dienlich iſt.

2. Es ſeyen zwei Seiten und der eingeſchloſſene Winkel einer dreiſeitigen körperlichen Ecke gegeben; man ſoll die dritte Seite und die beiden andern Winkel derſelben durch eine graphiſche Conſtruction finden.

Könnte man aus den Datis nur die dritte Seite durch eine graphiſche Conſtruction finden, ſo würden alle drei Seiten der körperlichen Ecke gegeben, das Problem folglich auf die in (1.) aufgelöſte Aufgabe zurückgeführt ſeyn. In der in **Fig. 9.** verzeichneten körperlichen Ecke ſeyen die beiden Seiten **BAC**, **BAD** und der an der Kante **AB** liegende Winkel gegeben. Letzterer wird ſehr leicht conſtruirt, wenn man von einem beliebigen Punkte **E** der Kante **AD** auf **AB** das Perpendikel **EF** fällt, und dann in der Ebene **BAC** durch den Punkt **F** das Perpendikel **FG** errichtet, indem dann der ebene Winkel **EFG** der an der Seite **AB** liegende Winkel unſerer körperlichen Ecke ſeyn wird. Denkt man ſich den Winkel **BAD** um **AB** wie um eine Axe gedreht und in die Ebene des Winkels **BAC** niedergelegt, ſo werden in dieſer Ebene die Linien **FE**, **FG** offenbar in einer auf **AB** ſenkrechten geraden Linie liegen, und man kann nun den geſuchten Winkel **CAD**, nämlich die dritte Seite der gegebenen körperlichen Ecke, durch eine graphiſche Conſtruction leicht auf folgende Art finden. In **Fig. 9*.** zeichne man in der Ebene des Papiers die beiden gegebenen Winkel **BAC**, **BAD** neben einander, nehme in dem Schenkel **AD** des Winkels **BAD** einen beliebigen Punkt **E** an, fälle von ſelbigem auf **AB** das Perpendikel **EF**, und verlängere dieſes, bis der Schenkel **AC** des Winkels **BAC** in **G** geſchnitten wird; ſo iſt der Durchſchnittspunkt **G** offenbar der dem eben ſo bezeichneten Punkte in **Fig. 9.** entſprechende Punkt. Der geſuchte Winkel **CAD** (**Fig. 9.**) iſt ein Winkel des Dreiecks **EAG** und würde alſo gefunden ſeyn, wenn man dieſes Dreieck conſtruiren könnte. Von dieſem Dreieck ſind aber die Seiten **AE**, **AG** (**Fig. 9*.**) gegeben, ſo daß ſich alſo dieſes Dreieck con-

ſtruiren ließe, wenn auch noch ſeine dritte Seite **EG** (**Fig. 9.**) bekannt wäre. Letztere findet man aber ſehr leicht, wenn man in **Fig. 9*.** an **FG** den gegebenen Winkel **EFG** anlegt, die beiden durch **EF** bezeichneten Linien einander gleich macht und **EG** zieht. Conſtruirt man nun mit **AG, AE, EG** als Seiten über **AG** das Dreieck **AEG**, ſo iſt **GAE** oder der entſprechende Winkel **CAD** die geſuchte dritte Seite der gegebenen körperlichen Ecke, welche gefunden werden mußte, um das Problem als auf die in (1.) aufgelöſte Aufgabe reducirt anſehen zu können.

3. Es ſeyen eine Seite und die beiden daran liegenden Winkel einer dreiſeitigen körperlichen Ecke gegeben; man ſoll die beiden andern Seiten und den dritten Winkel derſelben durch eine graphiſche Conſtruction finden.

Man führt dieſe Aufgabe wieder auf (1.) zurück, wenn man die beiden unbekannten Seiten der körperlichen Ecke ſucht, welches auf folgende Art ohne Schwierigkeit geſchehen kann. Sind nämlich in der in **Fig. 8.** verzeichneten Ecke die Seite **CAD** und die beiden daran liegenden Winkel **EGF, EHF** gegeben; ſo trage man, um die Seiten **BAC, BAD** zu finden, die beiden gegebenen Winkel an eine beliebige Grundlinie **GH** (**Fig. 10.**) an, wodurch man das Dreieck **EGH** erhält, und fälle von deſſen Spitze **E** auf die Grundlinie **GH** das Perpendikel **EF.** Nun ſey **CAD** (**Fig. 11.**) die gegebene Seite der körperlichen Ecke. Mit den Schenkeln dieſes Winkels ziehe man in den Entfernungen **FG** und **FH** (**Fig. 10**) zwei Parallelen, welche ſich in **F** (**Fig. 11.**) ſchneiden mögen, und fälle von **F** auf die Schenkel **AC** und **AD** die Perpendikel **FG** und **FH.** Hierauf trage man an **FG** und **FH** die beiden gegebenen Winkel der körperlichen Ecke an, wodurch man die rechtwinkligen Dreiecke **EFG** und **EFH** erhält. Verlängert man nun **FG** und **FH** über **G** und **H** hinaus, macht die beiden in der Figur durch **EG**, ſo wie die beiden durch **EH** bezeichneten Linien einander gleich, und zieht nun die beiden durch **AE** oder **AB** bezeichneten Linien; ſo ſind **BAC, BAD** offenbar die beiden geſuchten Seiten der körperlichen Ecke, welche hier durch eine graphiſche Conſtruction gefunden worden ſind, ſo daß alſo nun die Aufgabe wieder auf das in (1.) aufgelöſte Problem zurückgeführt iſt.

4. Wenn zwei Ebenen in einer geraden Linie zuſammenſtoßen, und durch einen Punkt **A** dieſer Linie außerhalb des von den beiden Ebenen eingeſchloſſenen Winkels auf dieſelben die Perpendikel **AB, AC** errichtet werden; ſo ſchließen dieſe beiden Perpendikel einen Winkel ein, welcher den Neigungswinkel der beiden Ebenen gegen einander zu zwei rechten Winkeln ergänzt.

Durch die beiden Perpendikel **AB, AC** lege man eine Ebene, ſo wird dieſelbe auf der geraden Linie, in welcher die beiden Ebenen zuſammenſtoßen, ſenkrecht ſeyn, und ihre Durchſchnitte mit den beiden Ebenen werden deren Neigungswinkel bilden.

Sey nun in **Fig. 12.** die Ebene des Papiers die durch die beiden Perpendikel **AB, AC** gelegte Ebene, und **AD, AE** ſeyen die Durchſchnitte derſelben mit den beiden gegebenen Ebenen, ſo daß alſo **DAE** der Neigungswinkel dieſer Ebenen gegen einander iſt. **BAC, BAD, DAE, CAE** machen zuſammen vier rechte Winkel aus, und **BAD, CAE** ſind rechte Winkel; alſo ſind auch die Winkel **BAC, DAE** zuſammen zwei rechten Winkeln gleich, wie behauptet wurde.

5. Wenn man durch die Spitze einer dreiſeitigen körperlichen Ecke, außerhalb derſelben, auf die Ebenen, welche ſie einſchließen, Perpendikel errichtet; ſo ſind dieſe Perpendikel die Kanten einer dreiſeitigen körperlichen Ecke, welche zu der erſtern in einer ſolchen Beziehung ſteht, daß die Seiten und Winkel beider ſich gegenſeitig zu zwei rechten Winkeln ergänzen.

In **Fig. 13.** ſey **AB′** ſenkrecht auf **CAD, AC′** ſenkrecht auf **BAD, AD′** ſenkrecht auf **BAC**; ſo iſt

$$AB' \text{ ſenkrecht auf } \left\{\begin{matrix} AC \\ AD \end{matrix}\right.$$

$$AC' \text{ ſenkrecht auf } \left\{\begin{matrix} AB \\ AD \end{matrix}\right.$$

$$AD' \text{ ſenkrecht auf } \left\{\begin{matrix} AB \\ AC \end{matrix}\right.$$

und daher auch umgekehrt

$$AB \text{ ſenkrecht auf } \left\{\begin{matrix} AC' \\ AD' \end{matrix}\right.$$

$$AC \text{ ſenkrecht auf } \left\{\begin{matrix} AB' \\ AD' \end{matrix}\right.$$

$$AD \text{ ſenkrecht auf } \left\{\begin{matrix} AB' \\ AC' \end{matrix}\right.$$

ſo daß alſo **AB, AC, AD** reſpective auf den Ebenen **C′AD′, B′AD′, B′AC′** ſenkrecht ſind. Folglich iſt

$$\left.\begin{matrix} AB \\ AC \end{matrix}\right\} \text{ ſenkrecht auf } \left\{\begin{matrix} C'AD' \\ B'AD' \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} AB \\ AD \end{matrix}\right\} \text{ ſenkrecht auf } \left\{\begin{matrix} C'AD' \\ B'AC' \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} AC \\ AD \end{matrix}\right\} \text{ ſenkrecht auf } \left\{\begin{matrix} B'AD' \\ B'AC' \end{matrix}\right.$$

und

$$\left.\begin{matrix} AB' \\ AC' \end{matrix}\right\} \text{ ſenkrecht auf } \left\{\begin{matrix} CAD \\ BAD \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} AB' \\ AD' \end{matrix}\right\} \text{ ſenkrecht auf } \left\{\begin{matrix} CAD \\ BAC \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} AC' \\ AD' \end{matrix}\right\} \text{ ſenkrecht auf } \left\{\begin{matrix} BAD \\ BAC \end{matrix}\right. .$$

Bezeichnen wir nun die an den Kanten AB, AC, AD liegenden Winkel der körperlichen Ecke ABCD durch β, γ, δ, die an den Kanten AB', AC', AD' liegenden Winkel der körperlichen Ecke AB'C'D' dagegen durch β', γ', δ'; ſo iſt nach (4.)

$$BAC + \delta' = 180^\circ, \quad B'AC' + \delta = 180^\circ;$$
$$BAD + \gamma' = 180^\circ, \quad B'AD' + \gamma = 180^\circ;$$
$$CAD + \beta' = 180^\circ, \quad C'AD' + \beta = 180^\circ;$$

wodurch alſo unſer Satz bewieſen iſt.

6. Sind nun die drei Winkel einer dreiſeitigen körperlichen Ecke gegeben, ſo kann man aus denſelben die drei Seiten der Ecke jederzeit auf folgende Art durch eine graphiſche Conſtruction finden. Man denke ſich, wenn β, γ, δ die gegebenen Winkel der Ecke bezeichnen, wie in (5.) durch ihre Spitze auf die Ebenen, welche ſie einſchließen, Perpendikel errichtet; ſo ſchließen dieſe Perpendikel als Kanten eine dreiſeitige körperliche Ecke ein, deren Seiten $180^\circ - \beta$, $180^\circ - \gamma$, $180^\circ - \delta$, und daher bekannt ſind (5.). Aus dieſen Winkeln, als Seiten einer Ecke betrachtet, ſuche man nun nach (1.) mittelſt einer graphiſchen Conſtruction die Winkel β', γ', δ' dieſer Ecke; ſo ſind nach (5.) $180^\circ - \beta'$, $180^\circ - \gamma'$, $180^\circ - \delta'$ die geſuchten Seiten der Ecke, deren Winkel gegeben waren, ſo daß ſich alſo auch jederzeit die Seiten einer dreiſeitigen körperlichen aus ihren Winkeln durch eine Conſtruction in der Ebene finden laſſen.

7. Die vorhergehenden vier Aufgaben, welche, wie man auf der Stelle überſehen wird, eigentlich die vollſtändige graphiſche Auflöſung der Hauptaufgaben der ſphäriſchen Trigonometrie enthalten, ſollen, wie wir oben ſchon erinnert haben, bloß zu einer vorläufigen Einführung in die deſcriptive Geometrie dienen. Indem wir uns nun zu einer nähern Darlegung der Methoden wenden, durch welche dieſe Wiſſenſchaft ihre Zwecke zu erreichen ſucht, müſſen wir zuerſt zeigen, wie man in derſelben die Lage von Punkten, Linien und Ebenen im Raume zu beſtimmen pflegt. Zu dem Ende nehmen wir zwei beliebige auf einander ſenkrechte Ebenen im Raume an, welche die coordinirten Ebenen oder die Projectionsebenen, die eine gewöhnlich die Horizontalebene, die andere die Vertikalebene, genannt werden. Denken wir uns nun von einem beliebigen Punkte im Raume auf die beiden Projectionsebenen Perpendikel gefällt, ſo heißen die beiden Punkte, in denen die Projectionsebenen von dieſen Perpendikeln geſchnitten werden, die Projectionen des in Rede ſtehenden Punktes, und zwar die eine, nämlich die auf der Horizontalebene liegende, die horizontale, die andere, nämlich die auf der Vertikalebene liegende, die vertikale Projection. Durch die beiden Projectionen eines Punktes iſt aber deſſen Lage im Raum offenbar vollſtändig beſtimmt. Fällt man nämlich von der vertikalen Projection eines Punktes in der Ver-

tikalebene auf die Durchſchnittslinie der beiden Projectionsebenen ein Perpendikel, errichtet dann durch die horizontale Projection deſſelben auf die Horizontalebene auf derſelben Seite dieſer Ebene, auf welcher die vertikale Projection liegt, ein Perpendikel, und macht ſelbiges dem vorher von der vertikalen Projection auf die Durchſchnittslinie der Projectionsebenen gefällten Perpendikel gleich; ſo iſt der Endpunkt dieſes auf die Horizontalebene durch die horizontale Projection errichteten Perpendikels offenbar der Punkt im Raume, deſſen beide Projectionen gegeben waren, und kann alſo aus denſelben immer gefunden werden.

Die ſtetige Folge der Projectionen aller Punkte einer beliebigen geraden Linie im Raume bildet auf jeder der beiden Projectionsebenen offenbar eine gerade Linie, die nur in dem einen Falle, wenn die gerade Linie im Raume auf der entſprechenden Projectionsebene ſenkrecht ſteht, in einen Punkt übergeht. Die ſtetigen Folgen der Projectionen aller Punkte einer geraden Linie im Raume auf beiden Projectionsebenen heißen die Projectionen dieſer geraden Linie, und zwar die eine, nämlich die auf der Horizontalebene liegende, wieder die horizontale, die andere dagegen, nämlich die auf der Vertikalebene liegende, die vertikale Projection. Auch erhellet ſehr leicht, daß die Lage einer geraden Linie im Raume im Allgemeinen durch ihre beiden Projectionen jederzeit vollſtändig beſtimmt iſt, indem man nur durch jede der beiden Projectionen auf die entſprechende Projectionsebene eine ſenkrechte Ebene zu errichten, und die Durchſchnittslinie dieſer beiden ſenkrechten Ebenen zu beſtimmen braucht, welche offenbar die durch ihre Projectionen gegebene gerade Linie im Raume ſeyn wird. Nur in dem einen Falle, wenn beide Projectionen einer geraden Linie im Raume auf der Durchſchnittslinie der beiden Projectionsebenen ſenkrecht ſtehen, wird die Lage derſelben durch ihre beiden Projectionen nicht vollſtändig beſtimmt, weil in dieſem Falle die beiden durch die beiden Projectionen gelegten auf den Projectionsebenen ſenkrecht ſtehenden Ebenen in eine Ebene zuſammenfallen, und es alſo keine Durchſchnittslinie derſelben giebt.

Punkte und gerade Linien im Raume heißen im Folgenden gegeben, wenn ihre beiden Projectionen auf den beiden angenommenen Projectionsebenen gegeben ſind, und die Lage einer Ebene im Raume ſieht man als bekannt an, wenn ihre Durchſchnittslinien mit den beiden Projectionsebenen gegeben ſind. Soll alſo die Lage einer Ebene im Raume beſtimmt werden, ſo kommt es immer bloß darauf an, ihre Durchſchnittslinien mit den beiden Projectionsebenen zu finden.

8. Die Durchſchnittslinie der beiden Projectionsebenen ſoll im Folgenden ſtets durch **AB** bezeichnet werden, und wir werden nun immer von der folgenden wohl zu merkenden Vorſtellungsart Gebrauch machen. Wir denken uns nämlich immer die Vertikalebene um **AB** gedreht und mit der Horizontalebene in eine

Ebene, welche in den folgenden Figuren jederzeit die Ebene des Papiers ſeyn ſoll, niedergelegt, wobei wir zugleich ein für alle Mal feſtſetzen wollen, daß in den Figuren der unterhalb AB liegende Theil der Ebene des Papiers jederzeit die Horizontalebene, der oberhalb AB liegende Theil der Ebene des Papiers dagegen die Vertikalebene vorſtellen ſoll. Alle Projectionen von Punkten und Linien auf den beiden Projectionsebenen, ſo wie auch die Durchſchnitte aller Ebenen im Raume mit den beiden Projectionsebenen, werden dann auch bloß in der Ebene des Papiers gegeben, und überhaupt alle Conſtructionen bloß in dieſer Ebene ausgeführt. Sind M′ und M″ die horizontale und vertikale Projection eines und deſſelben Punktes M im Raume auf der Ebene des Papiers; ſo erhellet ſehr leicht, daß, wenn man in dieſer Ebene die Punkte M′ und M″ durch die gerade Linie M′M″ mit einander verbindet, dieſe Linie jederzeit auf der Durchſchnittslinie AB der beiden Projectionsebenen ſenkrecht ſtehen muß, eine Bemerkung, von der wir im Folgenden vielfachen Gebrauch zu machen Gelegenheit finden werden.

9. Seyen jetzt zwei Punkte M, N im Raume durch ihre horizontalen und vertikalen Projectionen gegeben; man ſoll die Projectionen der durch dieſe beiden Punkte gehenden geraden Linie finden, und zugleich die Entfernung der beiden Punkte M, N von einander beſtimmen.

Es erhellet auf der Stelle, daß, wenn in Fig. 14. M′, N′ und M″, N″ die horizontalen und vertikalen Projectionen der beiden Punkte M, N im Raume ſind, die geſuchten Projectionen der durch dieſe beiden Punkte gehenden geraden Linie im Raume erhalten werden, wenn man die Punkte M′, N′ und M″, N″ in unſerer Figur durch die Linien M′N′ und M″N′ mit einander verbindet. Um nun aber auch die Entfernung der beiden Punkte M, N im Raume von einander zu finden, ziehe man die beiden nach (8.) auf AB ſenkrechten Linien M′M″, N′N″, errichte auf M′N′ durch M′ und N′ die Perpendikel MM′ = KM″, NN′ = LN″, und ziehe MN; ſo iſt MN die geſuchte Entfernung der beiden gegebenen Punkte im Raume von einander, wie auf der Stelle erhellet, wenn man ſich nur die auf der Horizontalebene ſenkrechte Ebene MM′NN′ im Raume um M′N′ gedreht und auf die Horizontalebene, d. h. hier die Ebene des Papiers, niedergelegt denkt.

10. Durch einen durch ſeine Projectionen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche einer ebenfalls durch ihre Projectionen gegebenen geraden Linie im Raume parallel iſt.

Es erhellet auf der Stelle, daß ſowohl die horizontalen, als auch die vertikalen Projectionen zweier einander parallelen geraden Linien jederzeit einander parallel ſind, und daß die Projectionen einer durch einen beliebigen Punkt im Raume gehenden geraden Linie jederzeit durch die entſprechenden Projectionen dieſes

Punktes gehen müſſen, woraus ſich auf der Stelle die folgende höchſt einfache Auflöſung unſerer Aufgabe ergiebt. Durch die horizontale und vertikale Projection des gegebenen Punktes ziehe man zwei reſpective der horizontalen und vertikalen Projection der gegebenen Linie parallele gerade Linien; ſo ſind dieſe Linien die geſuchten Projectionen der durch den gegebenen Punkt gehenden, der gegebenen Linie parallelen geraden Linie.

11. Zwei ſich ſchneidende gerade Linien im Raume ſind durch ihre Projectionen gegeben; man ſoll den von dieſen Linien eingeſchloſſenen Winkel finden.

Die beiden gegebenen Linien im Raume ſeyen **MN**, **KL**, und **G** ſey ihr gemeinſchaftlicher Duchſchnittspunkt im Raume. In **Fig. 15.** ſeyen **M'N'**, **K'L'** und **M''N''**, **K''L''** die horizontalen und vertikalen Projectionen der beiden gegebenen Linien; ſo ſind die Durchſchnittspunkte **G'**, **G''** dieſer Projectionen die beiden Projectionen des Durchſchnittspunktes **G** der beiden gegebenen Linien im Raume, und die Linie **G'G''** iſt alſo auf der Durchſchnittslinie **AB** der beiden Projectionsebenen ſenkrecht. Verlängert man nun die vertikalen Projectionen der beiden gegebenen Linien, bis dieſelben die Linie **AB** in den Punkten **C**, **D** ſchneiden, und errichtet durch dieſe Punkte auf **AB** zwei Perpendikel, welche die horizontalen Projectionen der beiden gegebenen Linien in **E** und **F** ſchneiden; ſo ſind **E** und **F** offenbar die Punkte, in denen die Horizontalebene von den beiden gegebenen Linien im Raume getroffen wird. Denkt man ſich nun von dem Durchſchnittspunkte **G** dieſer beiden Linien im Raume nach **E** und **F** die Linien **GE**, **GF** gezogen, und das Dreieck **GEF**, indem man daſſelbe um die Linie **EF** wie um eine Axe dreht, in die Horizontalebene niedergelegt; ſo muß das von **G** auf **EF** gefällte Perpendikel **GI** offenbar durch den Punkt **G'** gehen, und dieſes Perpendikel iſt, wie eben ſo leicht erhellet, die Hypotenuſe eines rechtwinkligen Dreiecks, deſſen Catheten die Linie **G'I** und eine der Linie **G''H** gleiche Linie ſind. Der Winkel **EGF** iſt der geſuchte von den beiden geraden Linien im Raume eingeſchloſſene Winkel. Um alſo dieſen Winkel zu finden, fälle man, nachdem die Linie **EF** nach dem Vorhergehenden gefunden iſt, auf dieſe Linie von **G'** ein Perpendikel **G'I**, verlängere ſelbiges über den Punkt **G'** hinaus, mache **HO** = **G'I**, ziehe **G''O**, und mache dieſer Linie die durch den Punkt **G'** auf **EF** ſenkrecht gezogene Linie **GI** gleich; ſo iſt, wenn man nun die Linien **GE** und **GF** zieht, **EGF** der geſuchte von den beiden gegebenen geraden Linien im Raume eingeſchloſſene Winkel, welcher ſich alſo nach dem Vorhergehenden immer durch eine bloße Conſtruction in der Ebene finden läßt.

12. Die Projectionen des Durchſchnitts zweier Ebenen zu finden, deren Durchſchnitte mit den beiden Projectionsebenen gegeben ſind.

Dieſe Aufgabe bietet mehrere Fälle dar, von denen wir die wichtigſten hier durchgehen wollen. Wenn zunächſt, wie in **Fig. 16.**, die Durchſchnitte **KL**, **MN** und **K′L**, **M′N** der beiden Ebenen mit den Projectionsebenen auf beiden Projectionsebenen ſich in **O** und **O′** ſchneiden, ſo ſind offenbar **O** und **O′** zwei Punkte der Durchſchnittslinie der beiden gegebenen Ebenen, nämlich die Durchſchnittspunkte derſelben mit den beiden Projectionsebenen, und man wird alſo offenbar die beiden Projectionen dieſer Durchſchnittslinie erhalten, wenn man von **O′** und **O** auf **AB** die Perpendikel **O′P** und **OP′** fällt, und dann die Linien **OP**, **O′P′** zieht, welche die geſuchten Projectionen auf der Horizontal- und Vertikalebene ſeyn werden.

Wenn die Durchſchnitte der gegebenen Ebenen mit den Projectionsebenen ſich nur auf der einen Projectionsebene, etwa auf der Vertikalebene ſchneiden, auf der Horizontalebene dagegen einander parallel ſind; ſo iſt die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie der beiden gegebenen Ebenen offenbar eine der Horizontalebene parallele gerade Linie, und ihre Projection auf der Horizontalebene folglich den Durchſchnitten der gegebenen Ebenen mit der Horizontalebene parallel. Iſt nun **O′** der Durchſchnittspunkt der Durchſchnitte der gegebenen Ebenen mit der Vertikalebene; ſo braucht man von **O′** auf **AB** nur ein Perpendikel **O′P** zu fällen, und durch **P** mit den Durchſchnitten der gegebenen Ebenen mit der Horizontalebene eine Parallele zu ziehen, welche die Projection des Durchſchnitts der beiden gegebenen Ebenen auf der Horizontalebene ſeyn wird. Die Projection dieſes Durchſchnitts auf der Vertikalebene iſt offenbar eine durch **O′** gehende der Linie **AB** parallele gerade Linie.

Wenn die Durchſchnitte der gegebenen Ebenen einander und zugleich dem gemeinſchaftlichen Durchſchnitt **AB** der beiden Projectionsebenen parallel ſind; ſo können die beiden gegebenen Ebenen offenbar einander parallel ſeyn, oder dieſelben ſchneiden ſich in einer der Linie **AB** parallelen Linie. In einem ſolchen Falle kann man auf folgende Art verfahren. In **Fig. 17.** ſeyen **MM**, **M′M′** und **NN**, **N′N′** die Durchſchnitte der beiden gegebenen Ebenen mit den Projectionsebenen, und alſo nach der Vorausſetzung einander und der Linie **AB** parallel. In **AB** nehme man nun einen beliebigen Punkt **a** an, und errichte durch denſelben auf **AB** ein Perpendikel, welches die Linien **MM**, **M′M′**, **NN**, **N′N′** in **m**, **m′**, **n**, **n′**, ſchneiden mag. Von dem angenommenen Punkte **a** an ſchneide man auf der Linie **AB** zwei den Perpendikeln **am′** **an′** gleiche Stücke ab, wie die Figur zeigt, und ziehe die Linien **mm′**, **nn′**, welche ſich in **p** ſchneiden mögen, wobei indeß zu bemerken iſt, daß, wenn die Linien **mm′**, **nn′** ſich nicht ſchnitten, alſo einander parallel wären, auch die beiden gegebenen Ebenen ſich nicht ſchneiden, ſondern einander parallel ſeyn würden. Durch den Punkt **p** ziehe man nun mit **AB** die Parallele **QQ**, welche die horizontale Projection der Durchſchnittslinie der beiden gege-

benen Ebenen ſeyn wird. Um die vertikale Projection dieſer Linie zu finden, ſchneide man auf dem durch a auf AB errichteten Perpendikel von dem Punkte a aus das Stück aq′ = pq ab, und ziehe durch den ſo beſtimmten Punkt q′ mit AB die Parallele Q′Q′; ſo wird dieſe Linie die geſuchte vertikale Projection der Durchſchnittslinie der beiden gegebenen Ebenen ſeyn. Der Grund und die Richtigkeit dieſer Conſtruction wird auf der Stelle erhellen, wenn man in Fig. 17. die in der Ebene ausgeführte Zeichnung mit der entſprechenden perſpectiviſchen Darſtellung vergleicht.

Wenn die Durchſchnitte der gegebenen Ebenen mit den Projectionsebenen auf beiden Projectionsebenen einander parallel ſind, ohne der Durchſchnittslinie AB der beiden Projectionsebenen parallel zu ſeyn; ſo ſind die beiden gegebenen Ebenen jederzeit einander parallel, wie aus bekannten einfachen ſtereometriſchen Sätzen auf der Stelle folgt.

13. Den Durchſchnittspunkt einer gegebenen Ebene und einer gegebenen geraden Linie zu finden.

In Fig. 18. ſeyen MN, M′N die Durchſchnitte der gegebenen Ebene mit den Projectionsebenen, und KL, K′L′ ſeyen die Projectionen der gegebenen geraden Linie. Errichtet man durch den Punkt K, in welchem die horizontale Projection der gegebenen Linie die Linie AB ſchneidet, auf dieſe Linie ein Perpendikel KO′; ſo ſind KL, KO′ die Durchſchnitte einer durch die gegebene Linie gelegten auf der Horizontalebene ſenkrechten Ebene mit den Projectionsebenen, wie auf der Stelle erhellet. Fällt man nun von O auf AB das Perpendikel OG und zieht O′G; ſo ſind nach (12.) KO und GO′ die horizontale und vertikale Projection der Durchſchnittslinie der Ebenen MNM′ und LKO′, d. i. der gegebenen und der durch die gegebene gerade Linie gelegten auf der Horizontalebene ſenkrechten Ebene. Der Durchſchnittspunkt der Durchſchnittslinie dieſer beiden Ebenen mit der gegebenen geraden Linie iſt aber offenbar der geſuchte Durchſchnittspunkt dieſer Linie mit der gegebenen Ebene. Alſo iſt der Punkt Q′, in welchem die beiden vertikalen Projectionen K′L′ und GO′ ſich ſchneiden, die vertikale Projection des Durchſchnittspunktes der gegebenen geraden Linie und der gegebenen Ebene, und die horizontale Projection dieſes Punktes erhält man, wie ſogleich in die Augen fällt, ſehr leicht, wenn man von Q′ auf AB ein Perpendikel fällt, und den Durchſchnittspunkt Q dieſes Perpendikels mit der horizontalen Projection KL der gegebenen geraden Linie beſtimmt.

14. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche einer gegebenen Ebene parallel iſt.

Daß die Durchſchnitte der geſuchten Ebene auf beiden Projectionsebenen mit den Durchſchnitten der gegebenen Ebene parallel ſeyn müſſen, erhellet aus den einfachſten Lehrſätzen der Stereometrie. Daher kommt es nur darauf an, auf jeder der beiden

Projectionsebenen Punkte zu finden, durch welche die geſuchten Durchſchnitte gehen müſſen. Denkt man ſich nun durch den gegebenen Punkt im Raume eine Linie gezogen, welche dem Durchſchnitte der gegebenen Ebene mit der Horizontalebene parallel iſt; ſo liegt dieſe Linie offenbar ganz in der geſuchten Ebene und ihr Durchſchnittspunkt mit der Vertikalebene wird ein Punkt ſeyn, durch welchen die Durchſchnittslinie der geſuchten Ebene mit der Vertikalebene gehen muß, ſo daß es alſo jetzt zunächſt darauf ankommt, dieſen Punkt zu finden, welches ſehr leicht iſt, wenn man nur bedenkt, daß dieſer Punkt mit dem gegebenen Punkte in gleicher Höhe über der Horizontalebene liegt, und daß die horizontale Projection der durch den gegebenen Punkt im Raume mit der Durchſchnittslinie der gegebenen Ebene mit der Horizontalebene parallel gezogenen Linie eben dieſer Durchſchnittslinie parallel ſeyn muß. Sind nämlich in **Fig. 19. MN, M'N** die Durchſchnitte der gegebenen Ebene mit den beiden Projectionsebenen und **K, K'** die Projectionen des gegebenen Punktes; ſo ziehe man durch **K** die Linie **KL** der horizontalen Projection **MN** parallel, errichte durch **L** auf **AB** ein Perpendikel und ziehe durch **K'** mit **AB** eine Parallele, welche jenes Perpendikel in **G** ſchneide; ſo iſt **G** der mehr erwähnte Punkt, durch welchen der Durchſchnitt der geſuchten Ebene mit der Vertikalebene gehen muß, und man wird alſo dieſen Durchſchnitt erhalten, wenn man durch **G** mit **M'N** eine Parallele zieht. Schneidet nun dieſe Parallele die Linie **AB** in **F**, ſo braucht man durch **F** bloß eine Parallele **FH** mit **MN** zu ziehen, um auch den Durchſchnitt der geſuchten Ebene mit der Horizontalebene zu finden. Sind die Durchſchnitte der gegebenen Ebene mit den Projectionsebenen beide der Linie **AB** parallel, ſo iſt das vorhergehende Verfahren nicht mehr anwendbar und man kann ſich dann folgender Conſtruction bedienen, deren Grund auch ohne beſondere Erläuterung leicht erhellen wird. Wenn (**Fig. 20.**) **MN, M'N'** die der Linie **AB** parallelen Durchſchnitte der gegebenen Ebene mit den Projectionsebenen und **K, K'** die Projectionen des gegebenen Punktes ſind; ſo ziehe man die bekanntlich auf **AB** ſenkrechte Linie **KK'** und verlängere dieſelbe, bis **MN** und **M'N'** von ihr in **L** und **L'** geſchnitten werden. Hierauf nehme man **CF = CL**, ziehe **FL'**, nehme **CD = CK**, beſtimme den Punkt **E**, wie die Figur zeigt, ziehe durch **E** mit **FL'** die Parallele **HG'**, nehme **CG = CH**, und ziehe durch **G, G'** mit **AB** die Parallelen **PQ, P'Q'**; ſo ſind dieſe Linien die Durchſchnitte der geſuchten Ebene mit den Projectionsebenen.

15. Wenn eine gerade Linie im Raume auf einer Ebene ſenkrecht ſteht; ſo ſind die Projectionen der Linie jederzeit auf den Durchſchnitten der Ebene mit den entſprechenden Projectionsebenen ſenkrecht.

Die gegebene Linie im Raume ſey **AB** und **A'B'** ſey ihre horizontale Projection. **A'B'** liegt in einer durch **AB** gelegten

auf der Horizontalebene ſenkrechten Ebene; dieſelbe Ebene iſt aber wegen der Vorausſetzung nach einem bekannten ſtereometriſchen Satze auch auf der gegebenen Ebene ſenkrecht; folglich ſind die gegebene Ebene und die Horizontalebene, alſo auch ihr gemeinſchaftlicher Durchſchnitt, beide auf der durch **AB** gelegten Ebene, in welcher die Projection **A′B′** liegt, ſenkrecht. **A′B′** iſt aber der Durchſchnitt dieſer Ebene mit der Horizontalebene; folglich iſt offenbar der Durchſchnitt der gegebenen Ebene mit der Horizontalebene auch auf **A′B′** ſenkrecht. Ganz eben ſo zeigt man, daß der Durchſchnitt der gegebenen Ebene mit der Vertikalebene auf der vertikalen Projection der gegebenen auf der gegebenen Ebene ſenkrechten geraden Linie perpendikular iſt. Dieſer Lehrſatz führt unmittelbar zu der Auflöſung folgender Aufgabe.

16. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche auf einer gegebenen Ebene ſenkrecht ſteht.

In **Fig. 21.** ſeyen **MN**, **M′N** die Durchſchnitte der gegebenen Ebene mit den Projectionsebenen; **K** und **K′** ſeyen die Projectionen des gegebenen Punktes. Da die Projectionen der geſuchten geraden Linie offenbar durch die entſprechenden Projectionen des gegebenen Punktes gehen, und nach (15.) auf den Durchſchnitten der gegebenen Ebene mit den entſprechenden Projectionsebenen ſenkrecht ſtehen müſſen; ſo braucht man, um die Projectionen der geſuchten Linie zu finden, durch **K**, **K′** bloß zwei auf **MN**, **M′N** ſenkrecht ſtehende gerade Linien **GH**, **G′H′** zu ziehen.

17. Unter denſelben Vorausſetzungen, wie vorher, die Projectionen des Punktes zu finden, in welchem das Perpendikel die gegebene Ebene trifft.

Nach (13.) braucht man bloß durch den Punkt **H**, wo die horizontale Projection **GH** die Linie **AB** ſchneidet, auf **AB** ein Perpendikel zu errichten, welches die Linie **M′N** in **O′** ſchneidet. Fällt man dann von **O** auf **AB** das Perpendikel **OP** und zieht **PO′**; ſo iſt der Punkt **Q′**, in welchem **G′H′** von **PO′** geſchnitten wird, die vertikale Projection des geſuchten Punktes, deſſen horizontale Projection dann ferner der Punkt **Q** iſt, in welchem die Linie **GH** von einem von **Q′** auf **AB** gefällten Perpendikel geſchnitten wird.

18. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche auf einer gegebenen Linie ſenkrecht ſteht.

Die Durchſchnitte der geſuchten Ebene mit den beiden Projectionsebenen müſſen nach (15.) auf den Projectionen der gegebenen geraden Linie ſenkrecht ſtehen, und es kommt daher bloß darauf an, Punkte zu finden, durch welche die Durchſchnitte der geſuchten Ebene mit den beiden Projectionsebenen gehen müſſen. Sind nun in **Fig. 22.** **GH**, **G′H′** die Projectionen der gegebenen geraden Linie, **K** und **K′** die Projectionen des gegebenen Punktes; ſo erhellet leicht, daß, wenn man durch **K** eine auf **GH**

ſenkrechte Linie FL zieht, dieſe Linie die horizontale Projection einer durch den gegebenen Punkt in der geſuchten Ebene mit deren Durchſchnitt mit der Horizontalebene parallel gezogenen Linie iſt. Den Punkt, in welchem dieſe Linie die Vertikalebene ſchneidet, erhält man leicht, wenn man durch F auf AB ein Perpendikel errichtet, durch K′ eine Parallele mit AB zieht, und den Durchſchnittspunkt E dieſer beiden Linien beſtimmt. Da nun die Durchſchnittslinie der geſuchten Ebene mit der Vertikalebene offenbar durch den Punkt E gehen muß; ſo braucht man, um dieſe Durchſchnittslinie zu erhalten, durch E bloß eine auf G′H′ ſenkrechte Linie M′N zu ziehen. Iſt dann ferner N der Punkt, in welchem AB von dieſem Perpendikel geſchnitten wird; ſo iſt eine durch N auf GH ſenkrecht gezogene Linie MN die Durchſchnittslinie der geſuchten Ebene mit der Horizontalebene. Die Projectionen des Durchſchnittspunktes der geſuchten Ebene mit der gegebenen geraden Linie findet man nun wie in (17.) mittelſt der in (13.) aufgelöſten Aufgabe.

19. Den Neigungswinkel zweier Ebenen gegen einander zu finden, deren Durchſchnitte mit den beiden Projectionsebenen gegeben ſind.

Wir wollen der Kürze wegen hier bloß den allgemeinſten Fall betrachten, wenn die Durchſchnittslinien der beiden Ebenen mit den Projectionsebenen auf beiden Projectionsebenen ſich ſchneiden, indem die Unterſuchung der übrigen möglichen Fälle dann keine Schwierigkeit haben wird. In Fig. 23. ſeyen MN, M′N und KL, K′L die Durchſchnitte der beiden gegebenen Ebenen mit den Projectionsebenen. Fällt man von O′ auf AB das Perpendikel O′C und zieht OC, ſo iſt OC offenbar die horizontale Projection des Durchſchnitts der beiden gegebenen Ebenen. Errichtet man nun durch C auf OC ein Perpendikel, macht ſelbiges dem Perpendikel O′C gleich und zieht die Linie OO′; ſo entſpricht der Triangel OCO′ einem rechtwinkligen Triangel im Raume, deſſen Hypotenuſe die Durchſchnittslinie der beiden gegebenen Ebenen iſt, wenn man ſich dieſen Triangel um OC gedreht und in die Horizontalebene niedergelegt vorſtellt. Denkt man ſich nun durch einen beliebigen Punkt G der Linie OO′ im Raume eine auf dieſer Linie ſenkrechte Ebene gelegt, ſo iſt dieſe Ebene offenbar die Ebene des geſuchten Neigungswinkels der beiden gegebenen Ebenen gegen einander. Da ſowohl dieſe Ebene als auch die Horizontalebene, auf der Ebene OCO′ im Raume ſenkrecht iſt; ſo iſt auch die Durchſchnittslinie der beiden erſtern Ebenen auf der Ebene OCO′, alſo auch auf der Linie OC, ſenkrecht. Errichten wir alſo durch den beliebigen Punkt G der Linie OO′ ein Perpendikel auf dieſelbe, welches die Linie OC in H ſchneidet, errichten durch H auf OC das Perpendikel EF, machen HI = HG, und ziehen EI, FI; ſo iſt EIF offenbar der Neigungswinkel der beiden gegebenen Ebenen gegen einander.

20. Die Durchſchnitte einer Ebene mit den beiden Projectionsebenen ſind gegeben; man ſoll die Durchſchnitte einer andern Ebene mit den beiden Projectionsebenen finden, welche gegen die gegebene Ebene unter einem gegebenen Winkel geneigt iſt.

Um dieſe Aufgabe aufzulöſen, braucht man das bei der vorhergehenden Aufgabe angewandte Verfahren bloß umzukehren. Sind nämlich in Fig. 23. **MN, M'N** die Durchſchnitte der gegebenen Ebene mit den Projectionsebenen, ſo nehme man in denſelben zwei beliebige Punkte **O, O'** an, fälle von **O'** auf **AB** das Perpendikel **O'C**, ziehe **OC**, und beſchreibe über **OC** das rechtwinklige Dreieck **OCO'**. Hierauf nehme man in **OC** einen beliebigen Punkt **H** an, fälle von demſelben auf **OO'** das Perpendikel **HG**, mache **HI = HG**, errichte durch **H** auf **OC** ein Perpendikel, welches die Linie **MN** in **E** ſchneidet, ziehe **EI**, trage an **EI** einen dem gegebenen Winkel gleichen Winkel **EIF** an, ziehe die Linie **OF**, welche die Linie **AB** in **L** ſchneide, und ziehe dann **LO'**; ſo ſind **KL, K'L** die Durchſchnitte der geſuchten Ebene mit den Projectionsebenen.

21. Den Neigungswinkel einer durch ihre Projectionen gegebenen geraden Linie gegen eine durch ihre Durchſchnitte mit den Projectionsebenen gegebene Ebene zu finden.

Denkt man ſich von irgend einem Punkte der gegebenen geraden Linie im Raume auf die gegebene Ebene ein Perpendikel gefällt; ſo iſt der von dieſem Perpendikel mit der gegebenen geraden Linie eingeſchloſſene Winkel die Ergänzung des geſuchten Neigungswinkels zu einem rechten Winkel, und letzterer wird alſo gefunden ſeyn, wenn man erſtern finden kann. Zu dem Ende nehme man auf den beiden Projectionen der gegebenen geraden Linie zwei in einer auf der Linie **AB** ſenkrechten Linie liegende Punkte an, und fälle von denſelben auf die Durchſchnitte der gegebenen Ebene mit den entſprechenden Projectionsebenen Perpendikel; ſo ſind dieſe Perpendikel nach (8.) und (15.) die Projectionen eines von einem gewiſſen Punkte der gegebenen geraden Linie im Raume auf die gegebene Ebene gefällten Perpendikels, und die Aufgabe iſt nun auf die in (11.) aufgelöſte Aufgabe: den von zwei durch ihre Projectionen gegebenen geraden Linien eingeſchloſſenen Winkel zu finden, zurückgeführt.

22. Es ſeyen die Projectionen dreier Punkte im Raume gegeben; man ſoll die Durchſchnitte der durch dieſelben beſtimmten Ebene mit den beiden Projectionsebenen finden.

Die drei Punkte im Raume ſeyen **P, Q, R** und **P', Q', R'**; **P'', Q'', R''** (Fig. 24.) ſeyen ihre horizontalen und vertikalen Projectionen. Zieht man die Linien **P'P'', Q'Q'', R'R''**; ſo ſind dieſelben bekanntlich auf der Linie **AB** ſenkrecht. Die Linien **P'Q', P'R'** und **P''Q'', P''R''** ſind die horizontalen und vertikalen Projectionen der Linien **PQ** und **PR** im Raume. Um

die Durchſchnittspunkte dieſer Linien mit der Horizontalebene zu finden, braucht man, wie leicht erhellet, durch die beiden Punkte **E**, **F**, in denen **AB** von den Projectionen **P″Q″** und **P″R″** geſchnitten wird, auf die Linie **AB** bloß zwei Perpendikel zu errichten, und deren Durchſchnittspunkte **G**, **H** mit den beiden Projectionen **P′Q′** und **P′R′** zu beſtimmen, indem dann offenbar **G**, **H** die geſuchten Durchſchnittspunkte ſeyn werden. Mit dieſen Durchſchnittspunkten iſt aber auch zugleich die Durchſchnittslinie **GH** der geſuchten Ebene mit der Horizontalebene gefunden. Die Durchſchnittslinie der geſuchten Ebene mit der Vertikalebene findet man auf ganz ähnliche Weiſe. Man beſtimmt nämlich die beiden Punkte **K**, **L**, in denen **AB** von den Projectionen **P′Q′**, **P′R′** geſchnitten wird, errichtet durch **K**, **L** auf **AB** Perpendikel und beſtimmt deren Durchſchnittspunkte **M**, **N** mit den Projectionen **P″Q″**, **P″R″**. Zieht man dann **MN**, ſo iſt **MN** die Durchſchnittslinie der geſuchten Ebene mit der Vertikalebene. Uebrigens könnte man auch durch **P′** eine Parallele **P′T** mit **GH**, durch **P″** eine Parallele **P″U** mit **AB** ziehen, und durch **T** ein Perpendikel **TU** auf **AB** errichten, welches die durch **P″** mit **AB** parallel gezogene Linie in **U** ſchneiden möge. Zieht man dann durch **U** und den Punkt, in welchem **AB** von der Linie **GH** geſchnitten wird, eine Linie; ſo erhält man auch den Durchſchnitt der geſuchten Ebene mit der Vertikalebene, wie augenblicklich erhellen wird, wenn man ſich nur durch den Punkt **P** im Raume in der geſuchten Ebene mit deren Durchſchnittslinie **GH** mit der Horizontalebene eine Parallele gezogen denkt.

23. Die vorhergehenden Elementar-Aufgaben wollen wir nun auf einige die Kugel betreffende Aufgaben anwenden, und dabei mit dem folgenden einfachen Probleme beginnen:

Der Mittelpunkt und der Halbmeſſer einer Kugel, erſterer natürlich durch ſeine beiden Projectionen, ſeyen gegeben; man ſoll den Mittelpunkt und den Halbmeſſer des Kreiſes finden, in welchem die Kugel von einer durch ihre Schnitte mit den beiden Projectionsebenen gegebenen Ebene geſchnitten wird.

Von dem gegebenen Mittelpunkte der Kugel fälle man nach (16.) auf die gegebene Ebene ein Perpendikel und ſuche nach (17.) die Projectionen des Durchſchnittspunktes dieſes Perpendikels der gegebenen Ebene; ſo hat man nach bekannten ſtereometriſchen Sätzen die Projectionen des Mittelpunktes des Kreiſes, in welchem die Kugel von der gegebenen Ebene geſchnitten wird. Nun ſuche man nach (9.) die Entfernung des Mittelpunktes dieſes Kreiſes vom Mittelpunkte der Kugel, und wird dann nach dem pythagoräiſchen Lehrſatze mittelſt des gegebenen Halbmeſſers der Kugel auch leicht den Halbmeſſer des Kreiſes finden können, in welchem die Kugel von der gegebenen Ebene geſchnitten wird.

Durch eine zweckmäßige Annahme der Projectionsebenen kann man die Auflöſung ſolcher Aufgaben häufig vereinfachen. Bei

gegenwärtiger Aufgabe wird man die Vertikalebene am beſten ſo annehmen, daß ihre Durchſchnittslinie mit der Horizontalebene auf der Durchſchnittslinie der gegebenen Ebene mit der Horizontalebene ſenkrecht ſteht. Sind unter dieſer Vorausſetzung in Fig. 25. MN, welches ſenkrecht auf AB ſteht, und M′N die Durchſchnitte der gegebenen Ebene mit den Projectionsebenen und O′, O″ die Projectionen des Mittelpunkts der Kugel; ſo braucht man, um die vertikale Projection C″ des Mittelpunktes des Kreiſes, in welchem die Kugel von der gegebenen Ebene geſchnitten wird, zu finden, bloß von O″ auf M′N das Perpendikel O″C″ zu fällen. Fällt man dann ferner von C″ auf AB ein Perpendikel, welches von einer durch O′ mit AB parallel gezogenen geraden Linie in C′ geſchnitten wird; ſo iſt C′ offenbar die horizontale Projection des Mittelpunkts des in Rede ſtehenden Kreiſes. Um endlich den Halbmeſſer dieſes Kreiſes zu finden, braucht man bloß um O″ als Mittelpunkt mit dem gegebenen Halbmeſſer der Kugel als Radius einen Kreis zu beſchreiben, welcher die Linie M′N im Allgemeinen in zwei Punkten E und F ſchneiden wird, welche auf der Linie M′N den geſuchten Halbmeſſer C″E = C″F abſchneiden. Schnitte der beſchriebene Kreis die Linie M′N nicht, ſo würde auch die gegebene Ebene die Kugel nicht ſchneiden, ſo wie denn auch auf der Stelle erhellet, daß die gegebene Ebene die Kugel berühren wird, wenn der beſchriebene Kreis die Linie M′N nur in dem einen Punkte C″ trifft, in welchem Falle C′, C″ die beiden Projectionen des Berührungspunktes der gegebenen Ebene mit der Kugel ſeyn werden.

24. Den Mittelpunkt und den Halbmeſſer einer Kugel zu finden, deren Oberfläche durch vier durch ihre Projectionen gegebene Punkte im Raume geht.

Die Auflöſung dieſer Aufgabe gründet ſich auf den leicht zu beweiſenden Satz, daß eine Ebene, welche durch den Mittelpunkt einer Sehne der Kugel geht und auf dieſer Sehne ſenkrecht iſt, jederzeit durch den Mittelpunkt der Kugel gehen muß. Seyen nun A, B, C, D die vier Punkte im Raume, durch welche die Oberfläche der Kugel gehen ſoll, und A′, B′, C′, D′ und A″, B″, C″, D″ ſeyen die horizontalen und vertikalen Projectionen derſelben. Zieht man nun die Linien A′B′, A′C′, A′D′ und A″B″, A″C″, A″D″; ſo ſind dieſe Linien die horizontalen und vertikalen Projectionen der Linien AB, AC, AD im Raume. Halbirt man hierauf die Linien A′B′, A′C′, A′D′ und A″B″, A″C″, A″D″ ſämmtlich; ſo erhält man die horizontalen und vertikalen Projectionen der Mittelpunkte der Linien AB, AC, AD im Raume. Durch dieſe Mittelpunkte denke man ſich drei auf den Linien AB, AC, AD im Raume ſenkrechte Ebenen E, E′, E″ gelegt, und ſuche nach (18.) die Durchſchnitte dieſer drei Ebenen mit den Projectionsebenen. Sucht man nun nach (12.) die Projectionen der Durchſchnittslinie zweier der drei Ebe-

nen E, E', E'', etwa der Ebenen E, E', und hierauf nach (13.) die Projectionen des Durchſchnittspunktes dieſer Linie mit der dritten Ebene E''; ſo hat man die Projectionen des gemeinſchaftlichen Durchſchnittspunktes der drei Ebenen E, E', E'', welcher, wie aus dem oben angeführten Satze erhellet, der geſuchte Mittelpunkt der Kugel iſt, deren Oberfläche durch die vier gegebenen Punkte A, B, C, D im Raume geht.

25. Den Durchſchnitt zweier Kugeln zu beſtimmen, deren Mittelpunkte und Halbmeſſer gegeben ſind.

Die Mittelpunkte der beiden Kugeln ſeyen C, c. Denkt man ſich nun durch die beiden Mittelpunkte eine Ebene gelegt; ſo wird dieſelbe die beiden Kugeln in zwei größten Kreiſen ſchneiden, deren Durchſchnittspunkte D, E ſeyn mögen, und aus den einfachſten geometriſchen Sätzen erhellet, daß die gemeinſchaftliche Sehne DE der beiden Kreiſe auf der Linie Cc ſenkrecht ſteht, und von derſelben halbirt wird. Stellen wir uns jetzt vor, daß die ganze entſtandene Figur um die Linie Cc wie um eine Axe gedreht werde; ſo werden die beiden größten Kreiſe offenbar die beiden Kugeln und DE wird einen auf Cc ſenkrechten Kreis beſchreiben, welcher der Durchſchnitt der beiden Kugeln iſt, woraus man alſo ſieht, daß der gemeinſchaftliche Durchſchnitt jeder zwei Kugeln ein Kreis iſt, deſſen Ebene auf der Centrallinie Cc der beiden Kugeln ſenkrecht ſteht. In Fig. 26. ſeyen nun C', c' und C'', c'' die horizontalen und vertikalen Projectionen der Mittelpunkte der beiden Kugeln, alſo C'c' und C''c'' die horizontale und vertikale Projection ihrer Centrallinie. Auf C'c' errichte man durch die beiden Endpunkte C', c' zwei Perpendikel CC' = C''K, cc' = c''k, beſchreibe aus C und c als Mittelpunkten mit den gegebenen Halbmeſſern der beiden Kugeln zwei Kreiſe, welche ſich in D und E ſchneiden mögen, ziehe DE und verlängere dieſe Linie bis zu ihrem Durchſchnittspunkte G mit der Linie C'c'; ſo iſt G offenbar ein Punkt in der Durchſchnittslinie der Ebene des gemeinſchaftlichen Durchſchnitts der beiden Kugeln und der Horizontalebene. Da nun nach dem Vorhergehenden die Ebene des gemeinſchaftlichen Durchſchnitts der beiden Kugeln auf der Centrallinie Cc derſelben ſenkrecht ſteht; ſo braucht man nach (15.) bloß durch G auf die horizontale Projection der Centrallinie Cc das Perpendikel MN zu errichten, und durch N auf die vertikale Projection der Centrallinie Cc das Perpendikel M'N zu fällen, um die Durchſchnitte MN, M'N der Ebene des gemeinſchaftlichen Durchſchnitts der beiden Kugeln mit den Projectionsebenen zu finden. Die Projectionen des Mittelpunkts des gemeinſchaftlichen Durchſchnitts der beiden Kugeln ergeben ſich, wenn man von F auf C'c' das Perpendikel FF' und von F' auf AB das Perpendikel F'F'', welches die vertikale Projection der Centrallinie in F'' ſchneidet, fällt, indem dann offenbar F' und F'' die horizontale und vertikale Projection des Mittelpunkts des Schnitts ſeyn

werden. Der Durchmeſſer des Schnitts iſt durch die Linie **DE** unmittelbar gegeben, und auf dieſe Weiſe alſo Lage und Größe des Schnitts vollſtändig beſtimmt.

Um nun auch die Projectionen des Durchſchnitts der beiden Kugeln auf der Horizontal- und Vertikalebene zu finden, kann man auf folgende Art verfahren. Aus **F** als Mittelpunkt mit **DF** = **EF** als Halbmeſſer beſchreibe man einen Kreis, nehme in **DE** einen beliebigen Punkt g an, und errichte durch denſelben auf **DE** das Perpendikel h i. Hierauf fälle man von g auf **C′**c′ das Perpendikel gg′, verlängere es über g′ hinaus, und mache g′h′ = g′i′ = gh = gi; ſo ſind, wie leicht erhellen wird, h′ und i′ zwei Punkte der horizontalen Projection des Durchſchnitts der beiden Kugeln. Die entſprechenden Punkte der vertikalen Projection erhält man, wenn man von h′ und i′ auf **AB** die Perpendikel h′m, i′n fällt, dieſelben über m und n hinaus verlängert, und mh″ = ni″ = gg′ macht. Daß man auf dieſe Art beliebig viele Punkte der horizontalen und vertikalen Projectionen des Durchſchnitts der beiden Kugeln finden und dieſe Projectionen alſo ſelbſt conſtruiren kann, liegt deutlich vor Augen, ſo wie auch aus bekannten ſtereometriſchen Sätzen erhellet, daß beide Projectionen Ellipſen ſind.

26. Die Conſtruction der Projectionen der Durchſchnitte krummer Flächen macht einen Hauptheil der deſcriptiven Geometrie aus; wir können uns aber hier nicht weitläufig über dieſen Gegenſtand verbreiten, und beſchränken uns daher bloß auf das folgende Beiſpiel. Denken wir uns nämlich eine Kugel und einen Kegel mit kreisförmiger Grundfläche, die ſich durchſchneiden; ſo ſchneiden ſich die Oberflächen dieſer beiden Körper offenbar in zwei krummen Linien. Um die Projectionen dieſer beiden krummen Linien zu conſtruiren, nehme man die Grundfläche des Kegels als die Horizontalebene, eine beliebige darauf ſenkrechte Ebene als die Vertikalebene an. Der in Fig. 27. um **C′** beſchriebene Kreis ſey die Grundfläche des Kegels, und **S′**, **S″** ſeyen die beiden Projectionen ſeiner Spitze auf der Horizontal- und Vertikalebene. Die Projectionen des Mittelpunktes der gegebenen Kugel ſeyen c′, c″. Durch **S′** denke man ſich eine beliebige den Umfang der Grundfläche des Kegels in den beiden Punkten **K**, **K′** ſchneidende gerade Linie und durch dieſe Linie eine auf der Horizontalebene ſenkrechte Ebene gelegt. Dieſe Ebene denke man ſich ferner, um ihren Durchſchnitt mit dem Kegel und der Kugel mit Leichtigkeit zu conſtruiren, in die Vertikalebene niedergelegt, nehme sk = **S′K**, sk′ = **S′K′**, ziehe **S″**k, **S″**k′, fälle von c′ auf **S′K** das Perpendikel c′**G**, ziehe durch c″ mit **AB** eine Parallele, und nehme auf derſelben die Linie mg = **S′G**; ſo iſt g offenbar der Mittelpunkt des Kreiſes, in welchem die gegebene Kugel von der durch die Linie **S′K** gelegten, auf der Horizontalebene ſenkrechten, Ebene geſchnitten wird. Beſchreibt man dann mit dem Radius der gegebenen Kugel um c′ und mit

GH = GH′ als Radius um g einen Kreis; ſo iſt letzterer der Kreis, in welchem die Kugel von der durch S′K gelegten, auf der Horizontalebene ſenkrechten, Ebene geſchnitten wird. Dieſer Kreis ſchneidet die Linien S″k, S″k′ in den vier in der Figur durch P bezeichneten Punkten, welche offenbar Punkte der beiden Durchſchnitte der Oberflächen des Kegels und der Kugel ſind, wobei man zu bemerken hat, daß zwei dieſer Punkte jederzeit zu dem bei dem Eintritt des Kegels in die Kugel, die beiden andern zu dem bei dem Austritt des Kegels aus der Kugel gebildeten Durchſchnitt gehören. Um nun die Projectionen der durch P bezeichneten Punkte zu finden, ziehe man durch dieſelben Parallelen, wie Pn, mit der Linie AB, nehme S′P′ = Pn, und fälle von P′ auf AB ein Perpendikel, welches, gehörig verlängert, die Linie Pn in einem gewiſſen Punkte P″ ſchneiden wird. P′ und P″ ſind dann die beiden geſuchten Projectionen, wobei ſich von ſelbſt verſteht, daß für jeden der vier durch P bezeichneten Punkte die Conſtruction ganz auf dieſelbe Art gemacht wird. Da die Linie S′K ganz willkührlich angenommen werden kann, ſo iſt klar, daß man auf dieſe Weiſe beliebig viele Punkte der beiden Projectionen der Durchſchnitte der Kegel- und der Kugelfläche finden, und folglich dieſe Projectionen auch ſelbſt verzeichnen kann, indem man die einzelnen Punkte derſelben durch eine ſtetige Curve mit einander verbindet, wobei man ſich, wenn eine ſolche Conſtruction wirklich ausgeführt werden ſollte, nur vorzuſehen hat, daß man bloß alle die Punkte mit einander verbindet, welche zu einerlei Durchſchnittslinie, nämlich entweder zu der bei dem Eintritt des Kegels in die Kugel oder zu der bei dem Austritt des Kegels aus der Kugel gebildeten Durchſchnittslinie gehören, welches ſich immer leicht entſcheiden laſſen wird. Zu bemerken iſt hierbei noch, daß wir zwar vorher die Grundfläche des Kegels als einen Kreis angenommen haben, daß die obige Conſtruction aber auf alle Arten von Kegeln anwendbar iſt, deren Grundflächen nur ebene oder einfachgekrümmte Curven ſind.

Wer ſich vollſtändiger mit den Lehren der deſcriptiven Geometrie bekannt machen will, findet einen ſehr zu empfehlenden Abriß derſelben in **Lacroix Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes (Élémens de Géométrie descriptive). 6e édition. Paris 1829.** Das Hauptwerk iſt: **Monge Géométrie descriptive, 5e édition, augmentée d'une théorie des ombres et de la perspective, extraite des papiers de l'auteur par Brisson. Paris 1827.**

Gleichung. Der vielfache Gebrauch, welchen wir in dieſem wichtigen Artikel von den imaginären Größen zu machen genöthigt ſeyn werden, erfordert, daß wir mit einigen allgemeinen Betrachtungen über dieſelben beginnen.

Ueberhaupt bemerken wir, daß wir in dieſem Artikel eine ganz elementare und zugleich rein algebraiſche Darſtellung der

Theorie der Gleichungen zu geben verſucht haben. Nur ein Mal, nämlich in (22.), ſind wir von dieſem Vorſatze abgewichen und haben Sätze aus der Trigonometrie und Integralrechnung in Anwendung gebracht. Der an dieſem Orte gegebene Beweis eines wichtigen algebraiſchen Theorems iſt aber bloß ſeiner Schönheit wegen eingeſchaltet worden, und kann, ohne den Zuſammenhang zu unterbrechen, übergangen werden, da derſelbe Satz ſchon vorher auf andere Art bloß durch ganz elementare Hülfsmittel in aller Strenge bewieſen worden iſt.

I. Von den imaginären Größen.

1. Jeder analytiſche Ausdruck von der Form

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}$$

heißt eine imaginäre Größe oder ein imaginärer Ausdruck.

Den Modulus dieſer imaginären Größe nennt man die Größe

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

wobei die Quadratwurzel immer poſitiv genommen wird.

Zwei imaginäre Größen von der Form

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \alpha - \beta\sqrt{-1}$$

heißen conjugirte imaginäre Größen.

Conjugirte imaginäre Größen haben jederzeit einerlei Modulus.

Zwei imaginäre Größen heißen einander gleich, wenn ſowohl ihre beiden reellen Theile, als auch die beiden ebenfalls reellen Coefficienten von $\sqrt{-1}$ einander gleich ſind. Iſt alſo

$$\alpha = \gamma,\ \beta = \delta;$$

ſo iſt immer

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \gamma + \delta\sqrt{-1}.$$

Gleiche imaginäre Größen haben offenbar gleiche Moduli.

2. Die Summe der imaginären Größen

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \alpha' + \beta'\sqrt{-1},\ \alpha'' + \beta''\sqrt{-1},\ \alpha''' + \beta'''\sqrt{-1}, \ldots$$

iſt

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' + \ldots + (\beta + \beta' + \beta'' + \beta''' + \ldots)\sqrt{-1}.$$

3. Die Differenz der imaginären Größen

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

iſt

$$\alpha - \gamma + (\beta - \delta)\sqrt{-1}.$$

4. Das Product der imaginären Größen

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

iſt

$$\alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)\sqrt{-1}.$$

5. Setzt man

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}} = p + q\sqrt{-1},$$

ſo muß

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = (\gamma + \delta\sqrt{-1})(p + q\sqrt{-1}),$$

d. i. nach (4.)

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \gamma p - \delta q + (\delta p + \gamma q)\sqrt{-1}$$

ſeyn. Dies giebt nach (1.) zur Beſtimmung von p und q die Gleichungen

$$\gamma p - \delta q = \alpha,\ \delta p + \gamma q = \beta,$$

aus denen leicht

$$p = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2},\ q = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2};$$

folglich

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}\sqrt{-1}$$

erhalten wird.

Weil

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta + (\beta\gamma - \alpha\delta)\sqrt{-1}}{\gamma^2 + \delta^2},$$

und nach (4.)

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})(\gamma - \delta\sqrt{-1}) = \alpha\gamma + \beta\delta + (\beta\gamma - \alpha\delta)\sqrt{-1}$$

iſt; ſo iſt auch

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}} = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})(\gamma - \delta\sqrt{-1})}{\gamma^2 + \delta^2},$$

wo $\gamma - \delta\sqrt{-1}$ die dem Diviſor $\gamma + \delta\sqrt{-1}$ conjugirte imaginäre Größe, und $\gamma^2 + \delta^2$ das Quadrat des Modulus des Diviſors iſt.

Soll man die imaginäre Größe

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}$$

durch die reelle Größe γ dividiren, ſo hat man im Vorhergehenden $\delta = 0$ zu ſetzen, woraus ſich

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}\sqrt{-1}$$

ergiebt.

6. **Der Modulus des Products zweier imaginären Größen iſt immer das Product der Moduli der beiden imaginären Factoren.**

Das Product der beiden imaginären Größen

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

iſt nämlich nach (4.)

$$\alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)\sqrt{-1}.$$

Die Moduli der beiden imaginären Factoren ſind reſpective

$$(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}, \ (\gamma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Der Modulus ihres Products iſt

$$\{(\alpha\gamma - \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Nun iſt aber, wie man leicht findet,

$$(\alpha\gamma - \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2).$$

Folglich iſt

$$(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}}$$

der Modulus des Products, d. i. das Product der Moduli der beiden imaginären Factoren.

Hieraus ergiebt ſich nun auch unmittelbar, daß der Modulus des Products mehrerer imaginärer Factoren, in beliebiger Anzahl, jederzeit das Product der Moduli aller einzelnen Factoren iſt.

7. Der Modulus der Summe und Differenz zweier imaginären Größen iſt immer eine Mittelgröße zwiſchen der Summe und Differenz der Moduli dieſer beiden imaginären Größen, wobei wir rückſichtlich des Begriffs einer Mittelgröße und der Sätze von den Mittelgrößen, welche nachher gebraucht werden, auf den Artikel Mittel i. d. Z. verweiſen.

Die Summe und Differenz der beiden imaginären Größen

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \ \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

ſind nach dem Vorhergehenden

$$\alpha + \gamma + (\beta + \delta)\sqrt{-1}$$

und

$$\alpha - \gamma + (\beta - \delta)\sqrt{-1}.$$

Die Moduli dieſer beiden Größen ſind

$$\{(\alpha + \gamma)^2 + (\beta + \delta)^2\}^{\frac{1}{2}} = \{\alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha\gamma + \beta\delta) + \gamma^2 + \delta^2\}^{\frac{1}{2}};$$

und

$$\{(\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2\}^{\frac{1}{2}} = \{\alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha\gamma + \beta\delta) + \gamma^2 + \delta^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Weil nun, wie leicht erhellet,

$$(\alpha\gamma + \beta\delta)^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)$$

iſt; ſo iſt

$$(\alpha\gamma + \beta\delta)^2 \overline{\overline{<}} (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2).$$

Alſo iſt der abſolute Werth von $\alpha\gamma + \beta\delta$ eben ſo groß oder kleiner als

$$(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}},$$

und folglich offenbar immer

$$\alpha\gamma + \beta\delta$$

eine Mittelgröße zwiſchen

$$-(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}} \text{ und } +(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Nach bekannten Sätzen von den Mittelgrößen iſt alſo auch

$$2(\alpha\gamma + \beta\delta)$$

eine Mittelgröße zwiſchen

$$-2(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}} \text{ und } +2(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}};$$

alſo auch jede der Größen

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha\gamma + \beta\delta) + \gamma^2 + \delta^2,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha\gamma + \beta\delta) + \gamma^2 + \delta^2,$$

jederzeit eine Mittelgröße zwiſchen

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.\sqrt{\gamma^2 + \delta^2} + \gamma^2 + \delta^2$$

und

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.\sqrt{\gamma^2 + \delta^2} + \gamma^2 + \delta^2,$$

d. i. zwiſchen

$$\{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}\}^2 \text{ und } \{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}\}^2.$$

Folglich iſt auch nach einem ebenfalls im Artikel Mittel i. d. Z. bewieſenen Satze jede der Größen

$$\{\alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha\gamma + \beta\delta) + \gamma^2 + \delta^2\}^{\frac{1}{2}},$$
$$\{\alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha\gamma + \beta\delta) + \gamma^2 + \delta^2\}^{\frac{1}{2}}$$

eine Mittelgröße zwiſchen

$$\pm\{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}\} \text{ und } \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\gamma^2 + \delta^2},$$

wenn man nur das Zeichen immer ſo nimmt, daß die erſtere Größe poſitiv wird. Hierin iſt aber offenbar der zu beweiſende Satz enthalten.

Uebrigens verſteht ſich nun auch von ſelbſt, daß jede der Größen

$$\{\alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha\gamma + \beta\delta) + \gamma^2 + \delta^2\}^{\frac{1}{2}},$$
$$\{\alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha\gamma + \beta\delta) + \gamma^2 + \delta^2\}^{\frac{1}{2}}$$

jederzeit eine Mittelgröße zwiſchen

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} \text{ und } \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}$$

iſt.

Auch ergiebt ſich hieraus auf der Stelle, daß der Modulus der Summe mehrerer imaginärer Größen, in beliebiger Anzahl, nie größer iſt als die Summe der Moduli aller einzelnen imaginären Größen.

Dieſe Sätze von den imaginären Größen reichen für das Folgende hin. Der Artikel Unmögliche Größen verbreitet ſich weiter über dieſelben.

II. Allgemeine Eigenſchaften der Gleichungen.

8. Jede Gleichung läßt ſich offenbar immer auf die Form

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0$$

bringen, und unter dieſer Form ſollen daher im Folgenden auch alle Gleichungen betrachtet werden. Die Coefficienten

$$A, B, C, D. \ldots L, N$$

können reelle und imaginäre Größen ſeyn, werden indeß meiſtens ſämmtlich als reell angenommen. Die Größe

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

auf der linken Seite des Gleichheitszeichens heißt die Function der Gleichung, wenigſtens wollen wir im Folgenden uns immer der Kürze wegen dieſes Ausdrucks bedienen. Alle Werthe von x, welche der Gleichung genügen oder ſie erfüllen, d. h. für welche die Function der Gleichung verſchwindet oder $= 0$ wird, heißen Wurzeln der Gleichung, und können reell und imaginär ſeyn. Sämmtliche Wurzeln einer Gleichung finden, heißt dieſelbe auflöſen. Wenn im Folgenden nicht ausdrücklich das Gegentheil erinnert wird, ſo ſollen immer alle Coefficienten der Gleichungen reelle Größen ſeyn. Auch wollen wir der Kürze wegen die obige allgemeine Form der Gleichungen durch

$$f(x) = 0$$

bezeichnen, wo alſo $f(x)$ die Function der Gleichung oder

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots. + Lx + N$$

iſt.

9. Von ganz vorzüglicher Wichtigkeit für die Theorie der Gleichungen iſt folgender Lehrſatz, von dem wir daher hier unſern Auslauf nehmen wollen:

Wenn ſämmtliche Coefficienten der Gleichung

$$f(x) = 0$$

reelle Größen ſind, und für zwei reelle Werthe x_1, X_1 von x die entſprechenden Werthe der Function $f(x)$ entgegengeſetzte Vorzeichen haben; ſo liegen zwiſchen x_1 und X_1 jederzeit eine oder mehrere reelle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$.

Man laſſe x ſich von x_1 bis X_1 ſtetig verändern, ſo wird auch $f(x)$ ſich von $f(x_1)$ bis $f(X_1)$ ſtetig verändern, wenn nur, wie hier immer angenommen wird, alle Coefficienten der Gleichung $f(x) = 0$ endliche beſtimmte reelle Größen ſind. Da nun nach der Vorausſetzung $f(x_1)$ und $f(X_1)$ entgegengeſetzte Vorzeichen haben, und $f(x)$ nicht vom Poſitiven zum Negativen oder

vom Negativen zum Poſitiven übergehen kann, ohne $= 0$ zu werden; ſo iſt klar, daß $f(x)$ für einen oder einige zwiſchen x_1 und X_1 liegende Werthe von x verſchwinden oder $= 0$ werden muß, daß alſo die Gleichung $f(x) = 0$ jederzeit eine oder einige reelle zwiſchen x_1 und X_1 liegende Wurzeln haben muß, wenn die Vorausſetzungen unſers Satzes erfüllt ſind.

So einfach und völlig überzeugend dieſer Beweis, der auch leicht durch geometriſche Betrachtungen, wenn man ſich nämlich die Werthe von x als Abſciſſen, die entſprechenden Werthe von $f(x)$ dagegen als Ordinaten einer ſtetigen Curve denkt, zu noch größerer Deutlichkeit gebracht werden könnte, auch iſt; ſo halten wir doch aus Gründen, auf die wir nachher beſonders hinweiſen werden, auch den folgenden, freilich weitläufigern, Beweis nicht für überflüſſig. Man nehme an, daß x_1 von den beiden Größen x_1, X_1 die kleinere ſey, und ſetze

$$X_1 - x_1 = h\,,$$

wo alſo h eine poſitive Größe iſt (Ungleich. 1.). Ferner bilde man, wenn k eine beliebige poſitive ganze Zahl bezeichnet, die größer als die Einheit iſt, die Reihe der Größen:

$$f(x_1),\ f\left(x_1 + \frac{h}{k}\right),\ f\left(x_1 + 2\frac{h}{k}\right),\ \ldots f\left(x_1 + (k-1)\frac{h}{k}\right),\ f\left(x_1 + k\frac{h}{k}\right);$$

d. i., wie leicht erhellet, die Reihe der Größen

$$f(x_1),\ f\left(x_1 + \frac{h}{k}\right),\ f\left(x_1 + 2\frac{h}{k}\right),\ \ldots f\left(X_1 - \frac{h}{k}\right),\ f(X_1)\,.$$

Da nun $f(x_1)$ und $f(X_1)$ nach der Vorausſetzung entgegengeſetzte Vorzeichen haben; ſo muß man, wenn man in vorſtehender Reihe das erſte und zweite, zweite und dritte, dritte und vierte Glied, u. ſ. w. mit einander vergleicht, jederzeit offenbar ein oder einige Paare auf einander folgender Glieder mit entgegengeſetzten Vorzeichen finden. Sind nun, indem wir $x_2 < X_2$ ſetzen,

$$f(x_2) \text{ und } f(X_2)$$

zwei ſolche auf einander folgende Glieder mit entgegengeſetzten Vorzeichen in vorſtehender Reihe; ſo iſt offenbar

$$x_1 \overset{=}{<} x_2 < X_2 \overset{=}{<} X_1\,,$$

$$X_2 - x_2 = \frac{h}{k} = \frac{1}{k}(X_1 - x_1) = h_1\,,$$

wobei zu bemerken iſt, daß hier und nachher zwiſchen den obern und untern Zeichen keine Beziehung ſtatt findet, ſo wie ſich auch von ſelbſt verſteht, daß h_1 poſitiv iſt.

Bildet man ferner, nachdem x_2 und X_2 gefunden ſind, die Reihe

$$f(x_2),\ f\left(x_2 + \frac{h_1}{k}\right),\ f\left(x_2 + \frac{h_1}{k}\right),\ \ldots f\left(X_2 - \frac{h_1}{k}\right),\ f(X_2)\,;$$

ſo muß es in derſelben wieder mindeſtens zwei auf einander folgende Glieder

$$f(x_3) \text{ und } f(X_3)$$

mit entgegengeſetzten Vorzeichen geben, und es iſt, wenn wir $x_3 < X_3$ ſetzen, offenbar

$$x_2 \overline{\overline{<}} x_3 < X_3 \overline{\overline{<}} X_2 \,,$$

$$X_3 - x_3 = \frac{h_1}{k} = \frac{1}{k^2}(X_1 - x_1) = h_2 \,.$$

Ganz eben ſo wird man in der Reihe

$$f(x_3),\, f\left(x_3 + \frac{h_2}{k}\right),\, f\left(x_3 + 2\frac{h_2}{k}\right), \ldots f\left(X_3 - \frac{h_2}{k}\right),\, f(X_3)$$

jederzeit mindeſtens zwei auf einander folgende Glieder

$$f(x_4) \text{ und } f(X_4)$$

mit entgegengeſetzten Vorzeichen finden können, für welche, wenn wir $x_4 < X_4$ ſetzen,

$$x_3 \overline{\overline{<}} x_4 < X_4 \overline{\overline{<}} X_3 \,,$$

$$X_4 - x_4 = \frac{h_2}{k} = \frac{1}{k^3}(X_1 - x_1) = h_3$$

iſt, wobei zugleich erhellet, daß man auf dieſe Weiſe beliebig weit fortgehen kann.

Man erhält durch dieſes Verfahren zwei Reihen

$$x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5,\, \ldots\, ;$$

$$X_1,\, X_2,\, X_3,\, X_4,\, X_5,\, \ldots$$

von Werthen der Größe x, deren erſtere im Allgemeinen eine wachſende, die letztern dagegen eine abnehmende Reihe bilden; und für je zwei über einander ſtehende Glieder dieſer Reihen haben die entſprechenden Werthe von $f(x)$ entgegengeſetzte Vorzeichen. Die Differenzen der über einander ſtehenden Glieder dieſer Reihen ſind nach dem Obigen:

$$X_1 - x_1 = h \,,$$

$$X_2 - x_2 = h_1 = \frac{1}{k}(X_1 - x_1) = \frac{1}{k} h \,,$$

$$X_3 - x_3 = h_2 = \frac{1}{k^2}(X_1 - x_1) = \frac{1}{k^2} h \,,$$

$$X_4 - x_4 = h_3 = \frac{1}{k^3}(X_1 - x_1) = \frac{1}{k^3} h \,,$$

$$X_5 - x_5 = h_4 = \frac{1}{k^4}(X_1 - x_1) = \frac{1}{k^4} h \,,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

woraus man ſieht, daß dieſe Differenzen immer kleiner und kleiner werden, und, wenn man das obige Verfahren nur weit genug fortſetzt, der Null beliebig nahe gebracht werden können, ſo daß alſo offenbar weder die Glieder der Reihe

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots\ldots$$

über alle Gränzen wachſen, noch die Glieder der Reihe

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, \ldots\ldots$$

über alle Gränzen abnehmen können, ſondern in beiden Reihen ſich augenſcheinlich einer und derſelben beſtimmten Gränze, welche wir durch a bezeichnen wollen, bis zu jedem beliebigen Grade nähern müſſen. Zugleich werden ſich, alſo auch die Glieder jeder der beiden Reihen

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), f(x_5), \ldots\ldots;$$
$$f(X_1), f(X_2), f(X_3), f(X_4), f(X_5), \ldots\ldots$$

fortwährend und bis zu jedem beliebigen Grade der Gränze $f(a)$ nähern. Weil aber je zwei unter einander ſtehende Glieder dieſer beiden Reihen nach dem Obigen entgegengeſetzte Vorzeichen haben, und dieſe Glieder ſich ſelbſt und der Gränze $f(a)$ bis zu jedem beliebigen Grade genähert werden können; ſo kann offenbar $f(a)$ nur $= 0$ ſeyn. Alſo giebt es unter den Vorausſetzungen unſers Satzes immer mindeſtens einen reellen Werth a von x, für welchen $f(x) = 0$ iſt, d. i. eine reelle Wurzel dieſer letztern Gleichung, welche, wie aus dem Obigen unmittelbar hervorgeht, da a die Gränze iſt, welcher ſich ſowohl die Glieder der wachſenden Reihe

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots\ldots,$$

als auch die Glieder der abnehmenden Reihe

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, \ldots\ldots$$

fortwährend und bis zu jedem beliebigen Grade nähern, wenn man zugleich bedenkt, daß jedes Glied der zweiten Reihe größer als das entſprechende Glied der erſten Reihe iſt, offenbar zwiſchen x_1 und X_1 liegt. Eben ſo leicht überzeugt man ſich, daß a überhaupt zwiſchen zwei über einander ſtehenden Gliedern der Reihen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots\ldots;$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, \ldots\ldots$$

liegt.

Das Hauptverdienſt dieſes zweiten Beweiſes unſers Satzes beſteht darin, daß derſelbe zugleich eine allgemeine Methode enthält, nach welcher wenigſtens eine der zwiſchen x_1 und X_1 liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ durch Annäherung mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit jederzeit wirklich gefunden werden kann. Da a überhaupt zwiſchen x_p und X_p liegt, oder eine Mittelgröße zwiſchen x_p und X_p iſt, welches wir wie im Artikel Mittel i. d. Z. durch

$$a = M(x_p, X_p)$$

bezeichnen wollen; ſo iſt nach den a. a. O. bewieſenen Sätzen auch

$$a - \frac{x_p + X_p}{2} = M\left\{x_p - \frac{x_p + X_p}{2},\ X_p - \frac{x_p + X_p}{2}\right\},$$

d. i.

$$a - \frac{x_p + X_p}{2} = M\left\{-\frac{X_p - x_p}{2}, \frac{X_p - x_p}{2}\right\},$$

oder, weil nach dem Vorhergehenden

$$X_p - x_p = \frac{X_1 - x_1}{k^{p-1}}$$

iſt:

$$a - \frac{x_p + X_p}{2} = M\left\{-\tfrac{1}{2}.\frac{X_1 - x_1}{k^{p-1}}, \tfrac{1}{2}.\frac{X_1 - x_1}{k^{p-1}}\right\},$$

ſo daß alſo der abſolute Werth von

$$a - \frac{x_p + X_p}{2},$$

d. i. der Fehler, welchen man begeht, wenn man die halbe Summe der Größen

$$x_p \text{ und } X_p$$

als eine zwiſchen x_1 und X_1 liegende reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ betrachtet, jederzeit kleiner als

$$\tfrac{1}{2}.\frac{X_1 - x_1}{k^{p-1}}$$

iſt, wodurch alſo zugleich auch eine Methode zur ſichern Beurtheilung des Grades der erreichten Annäherung bei der obigen Approximationsmethode zur Auffindung der reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ gegeben iſt. Dieſe Annäherungsmethode weiter zu verfolgen, gehört jetzt nicht zu unſerm Zwecke.

10. Die Function

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

läßt ſich immer in die beiden Factoren

$$x^n \text{ und } 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \ldots + \frac{L}{x^{n-1}} + \frac{N}{x^n}$$

zerlegen. Je größer man den abſoluten Werth von x werden läßt, deſto mehr nähert ſich der zweite Factor der Einheit, und kann derſelben offenbar beliebig nahe gebracht werden, wenn man den abſoluten Werth von x nur groß genug annimmt. Man ſieht hieraus, daß man die poſitive Größe a immer groß genug annehmen kann, daß der zweite der beiden obigen Factoren ſowohl für $x = -a$, als auch für $x = a$ poſitiv iſt. Iſt nun n eine ungerade Zahl, ſo iſt x^n für $x = -a$ negativ, für $x = a$ dagegen poſitiv. Iſt alſo n eine ungerade Zahl, ſo iſt das Produkt der beiden obigen Factoren, d. i. $f(x)$, für $x = -a$ negativ, für $x = a$ dagegen poſitiv, und es muß alſo nach dem in (9.) bewieſenen Lehrſatze zwiſchen $-a$ und $+a$ mindeſtens eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegen. Hieraus ergiebt ſich alſo der folgende für die ganze Theorie der Gleichungen ebenfalls höchſt wichtige Lehrſatz:

Jede Gleichung eines ungeraden Grades mit lauter reellen Coefficienten hat jederzeit mindeſtens eine reelle Wurzel.

11. Iſt n eine gerade Zahl, ſo iſt das Product der beiden obigen Factoren, d. i. $f(x)$, ſowohl für $x = -a$, als auch für $x = a$, poſitiv. Iſt nun ferner die Größe N negativ, ſo iſt $f(x)$ für $x = 0$ eine negative Größe, weshalb alſo nach dem in (9.) bewieſenen Lehrſatze ſowohl zwiſchen 0 und $-a$, als auch zwiſchen 0 und $+a$, mindeſtens eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegen muß, woraus ſich der folgende Lehrſatz ergiebt:

Jede Gleichung eines geraden Grades mit lauter reellen Coefficienten, deren letztes Glied eine negative Größe iſt, hat jederzeit mindeſtens zwei reelle Wurzeln, von denen die eine immer poſitiv, die andere negativ iſt.

12. Wenn in der Function $f(x)$ alle Coefficienten reelle Größen ſind, das letzte Glied negativ iſt, und, ſofern poſitive Glieder vorkommen, dieſe Glieder ſämmtlich unmittelbar auf das erſte Glied folgen; ſo hat die Gleichung $f(x) = 0$ jederzeit eine, aber auch nur eine, reelle poſitive Wurzel.

Dieſer Satz läßt ſich auf folgende Art leicht beweiſen. Man bezeichne die poſitiven Werthe der Coefficienten

$$A, B, C, \ldots L, N$$

der Reihe nach durch

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_n;$$

ſo hat die Gleichung, den Vorausſetzungen des Satzes gemäß, im Allgemeinen folgende Form:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_m x^{n-m} - a_{m+1} x^{n-m-1} - \ldots - a_{n-1} x - a_n = 0,$$

wo m natürlich eine poſitive ganze Zahl bezeichnet, die kleiner als n iſt. Die Function auf der linken Seite des Gleichheitszeichens läßt ſich offenbar jederzeit in die beiden Factoren x^{n-m} und

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m - \left\{ \frac{a_{m+1}}{x} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-m-1}} + \frac{a_n}{x^{n-m}} \right\}$$

zerlegen. Läßt man nun x von 0 bis ∞ ſtetig wachſen, ſo wächſt die Größe

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots. + a_m = \varphi(x)$$

ſtetig von a_m bis ∞, die Größe

$$\frac{a_{m+1}}{x} + \ldots. + \frac{a_{n-1}}{x^{n-m-1}} + \frac{a_n}{x^{n-m}} = \psi(x)$$

nimmt dagegen von ∞ bis 0 ſtetig ab. Läßt man alſo x von 0 bis ∞ ſtetig wachſen, ſo nimmt die Differenz

$$\varphi(x) - \psi(x)$$

offenbar von $-\infty$ bis $+\infty$ ſtetig zu, und muß folglich jederzeit für einen, aber auch nur für einen, poſitiven Werth von x verſchwinden. Für dieſen Werth von x verſchwindet alſo auch das Product

$$x^{n-m}\{\varphi(x) - \psi(x)\} = f(x),$$

oder dieſer Werth von x iſt eine reelle poſitive Wurzel der Gleichung

$$f(x) = 0.$$

Eine Gleichung von der Form

$$x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \ldots - a_{n-1}x - a_n = 0$$

hat alſo z. B. immer eine, aber auch nur eine, reelle poſitive Wurzel, wenn nämlich $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_n$ ſämmtlich reelle poſitive Größen ſind.

13. Wir wollen nun annehmen, daß die Coefficienten der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0,$$

wo immer die Function auf der linken Seite des Gleichheitszeichens durch $f(x)$ bezeichnet wird, beliebige reelle oder imaginäre Größen ſeyen. Die Moduli der Größen

$$A, B, C, \ldots L, N$$

ſollen immer durch

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_{n-1}, \varrho_n$$

bezeichnet werden. Ein beliebiger Werth von x ſey

$$p + q\sqrt{-1}$$

und der Modulus dieſer Größe ſey r; ſo ſind, wie aus dem in (6.) bewieſenen Satze auf der Stelle folgt, die Moduli der Größen

$$x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots x$$

reſpective

$$r^n, r^{n-1}, r^{n-2}, \ldots r.$$

Die Moduli der Größen

$$x^n, Ax^{n-1}, Bx^{n-2}, \ldots Lx, N$$

ſind alſo nach demſelben Satze

$$r^n, \varrho_1 r^{n-1}, \varrho_2 r^{n-2}, \ldots \varrho_{n-1}r, \varrho_n.$$

Nach dem in (7.) bewieſenen Satze iſt folglich der Modulus der Größe

$$Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

eben ſo groß oder kleiner wie die Summe

$$\varrho_1 r^{n-1} + \varrho_2 r^{n-2} + \ldots + \varrho_{n-1}r + \varrho_n.$$

Bezeichnen wir alſo den Modulus der Größe

$$Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

durch R_1; ſo iſt

$$R_1 \overline{\overline{<}} \varrho_1 r^{n-1} + \varrho_2 r^{n-2} + \ldots + \varrho_{n-1} r + \varrho_n .$$

Nach dem in (7.) bewieſenen Satze iſt der Modulus der Größe

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N ,$$

welchen wir durch **R** bezeichnen wollen, eine Mittelgröße zwiſchen

$$r^n - R_1 \text{ und } r^n + R_1 ,$$

d. i. nach der ſchon oben gebrauchten Bezeichnung

$$R = M(r^n - R_1, r^n + R_1) .$$

Weil nun aber nach dem Vorhergehenden

$$r^n - R_1 \overline{\overline{>}} r^n - \varrho_1 r^{n-1} - \varrho_2 r^{n-2} - \ldots - \varrho_{n-1} r - \varrho_n ,$$

$$r^n + R_1 \overline{\overline{<}} r^n + \varrho_1 r^{n-1} + \varrho_2 r^{n-2} + \ldots + \varrho_{n-1} r + \varrho_n$$

iſt; ſo iſt natürlich der Modulus **R** immer auch eine Mittelgröße zwiſchen

$$r^n - \varrho_1 r^{n-1} - \varrho_2 r^{n-2} - \ldots - \varrho_{n-1} r - \varrho_n$$

und

$$r^n + \varrho_1 r^{n-1} + \varrho_2 r^{n-2} + \ldots + \varrho_{n-1} r + \varrho_n ,$$

oder ſtets größer oder eben ſo groß wie die Größe

$$r^n - \varrho_1 r^{n-1} - \varrho_2 r^{n-2} - \ldots - \varrho_{n-1} r - \varrho_n .$$

Nach dem in (12.) bewieſenen Satze hat die Gleichung

$$\xi^n - \varrho_1 \xi^{n-1} - \varrho_2 \xi^{n-2} - \ldots - \varrho_{n-1} \xi - \varrho_n = 0$$

jederzeit eine reelle poſitive Wurzel, welche ξ ſelbſt ſeyn mag, ſo daß alſo

$$\xi^n \left\{ 1 - \frac{\varrho_1}{\xi} - \frac{\varrho_2}{\xi^2} - \ldots - \frac{\varrho_{n-1}}{\xi^{n-1}} - \frac{\varrho_n}{\xi^n} \right\} = 0$$

iſt. Betrachten wir nun das Product

$$r^n \left\{ 1 - \frac{\varrho_1}{r} - \frac{\varrho_2}{r^2} - \ldots - \frac{\varrho_{n-1}}{r^{n-1}} - \frac{\varrho_n}{r^n} \right\} ,$$

ſo iſt klar, daß dieſes Product, indem wir **r** immer als poſitiv annehmen, wächſt, wenn **r** wächſt, und über alle Gränzen wachſen kann, wenn man **r** über alle Gränzen wachſen läßt. Für $r = \xi$ iſt dieſes Product $= 0$, und iſt alſo ſtets poſitiv, wenn $r > \xi$ iſt, wächſt auch fortwährend und über alle Gränzen, wenn man **r** von ξ bis ∞ wachſen läßt. **r** iſt der Modulus der Größe $p + q\sqrt{-1}$, d. i. nach (1.)

$$r = \sqrt{p^2 + q^2} ,$$

ſo daß man alſo offenbar **r** beliebig groß werden laſſen kann wenn man nur den reellen Größen **p**, **q** geeignete Werthe beilegt. Das eben betrachtete Product

$$r^n \left\{ 1 - \frac{\varrho_1}{r} - \frac{\varrho_2}{r^2} - \ldots - \frac{\varrho_{n-1}}{r^{n-1}} - \frac{\varrho_n}{r^n} \right\}$$

iſt nichts anders wie die Größe

$$r^n - \varrho_1 r^{n-1} - \varrho_2 r^{n-2} - \ldots - \varrho_{n-1} r - \varrho_n ,$$

welche immer kleiner oder eben ſo groß wie der Modulus **R** iſt. Da nun dieſe Größe nach dem Vorhergehenden, wenn man **r** von ξ bis ∞ wachſen läßt, ſtets poſitiv iſt und über alle Gränzen wächſt; ſo wächſt auch der Modulus **R**, wenn man **r** von ξ bis ∞ wachſen läßt, über alle Gränzen, woraus ſich unmittelbar in völliger Strenge ergiebt, daß der kleinſte Werth des Modulus **R** jederzeit einem endlichen beſtimmten Werthe von **r** und folglich natürlich auch von

$$x = p + q\sqrt{-1}$$

entſpricht.

Weil nach (4.) jede Potenz der Größe $p + q\sqrt{-1}$ und auch jedes Product zweier imaginären Größen dieſer Form wieder auf dieſelbe Form gebracht werden kann; ſo iſt klar, daß die Größe

$$(p + q\sqrt{-1})^n + A(p + q\sqrt{-1})^{n-1} + \ldots + L(p + q\sqrt{-1}) + N ,$$

deren Modulus **R** iſt, immer auf die Form

$$P + Q\sqrt{-1}$$

gebracht werden kann.

Man ſetze nun für **x** einen beliebigen von $p + q\sqrt{-1}$ verſchiedenen Werth, der im Allgemeinen durch

$$p + q\sqrt{-1} + z$$

dargeſtellt werden mag; ſo wird die Function unſerer Gleichung

$$(p + q\sqrt{-1} + z)^n + A(p + q\sqrt{-1} + z)^{n-1} + \ldots + L(p + q\sqrt{-1} + z) + N,$$

eine Größe, welche offenbar immer auf die Form

$$P + Q\sqrt{-1} + (P_1 + Q_1\sqrt{-1})z + \ldots + (P_{n-1} + Q_{n-1}\sqrt{-1})z^{n-1} + z^n$$

gebracht werden kann, wobei es wohl nicht erſt noch der beſondern Bemerkung bedarf, daß

$$P, P_1, P_2, \ldots P_{n-1};\ Q, Q_1, Q_2, \ldots Q_{n-1}$$

ſämmtlich reelle Größen ſind.

Iſt nun zuerſt $P_1 + Q_1\sqrt{-1}$ nicht null, ſo kann man die an ſich willkührliche Größe **z** der Größe

$$-\varepsilon\frac{P + Q\sqrt{-1}}{P_1 + Q_1\sqrt{-1}}$$

gleich ſetzen, wo ε eine ſehr kleine poſitive Größe bezeichnen ſoll. Führt man dieſen Werth von **z** ein; ſo werden die beiden erſten Glieder der Function unſerer Gleichung nach dem Obigen

$$P + Q\sqrt{-1},\ -(P + Q\sqrt{-1})\varepsilon .$$

Dividirt man alſo die auf dieſe Weiſe erhaltene Function von ε durch $P + Q\sqrt{-1}$, ſo iſt der Quotient offenbar eine Größe von der Form

$$1 - \varepsilon + c_1 \varepsilon^2 + c_2 \varepsilon^3 + \ldots + c_{n-1} \varepsilon^n ,$$

wo $c_1, c_2, c_3, \ldots c_{n-1}$ gewiſſe reelle oder imaginäre Coefficienten ſind. Für

$$z = -\varepsilon \frac{P + Q\sqrt{-1}}{P_1 + Q_1\sqrt{-1}}$$

iſt alſo

$$(p + q\sqrt{-1} + z)^n + A(p + q\sqrt{-1} + z)^{n-1} + \ldots + L(p + q\sqrt{-1} + z) + N$$
$$= (P + Q\sqrt{-1})(1 - \varepsilon + c_1 \varepsilon^2 + c_2 \varepsilon^3 + \ldots + c_{n-1} \varepsilon^n) .$$

Der Modulus der Größe

$$1 - \varepsilon + c_1 \varepsilon^2 + c_2 \varepsilon^3 + \ldots + c_{n-1} \varepsilon^n$$

ſey Θ; ſo iſt, weil **R** der Modulus der Größe

$$P + Q\sqrt{-1}$$

iſt, nach (6.) Θ**R** der Modulus der Größe

$$(p + q\sqrt{-1} + z)^n + A(p + q\sqrt{-1} + z)^{n-1} + \ldots + L(p + q\sqrt{-1} + z) + N .$$

Die Moduli der reellen Größen

$$1 - \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^4,\ \ldots\ \varepsilon^n ,$$

deren erſte man immer als poſitiv annehmen kann, weil ε eine der Null ſehr nahe kommende Größe ſeyn ſoll, ſind offenbar dieſe Größen ſelbſt. Sind nun

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ \ldots\ k_{n-1}$$

die Moduli der Größen

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots\ c_{n-1} ;$$

ſo ſind nach (6.) die Moduli der Größen

$$1 - \varepsilon,\ c_1 \varepsilon^2,\ c_2 \varepsilon^3,\ c_3 \varepsilon^4,\ \ldots\ c_{n-1} \varepsilon^n$$

reſpective

$$1 - \varepsilon,\ k_1 \varepsilon^2,\ k_2 \varepsilon^3,\ k_3 \varepsilon^4,\ k_{n-1} \varepsilon^n ,$$

und nach (7.) iſt folglich der Modulus der Größe

$$1 - \varepsilon + c_1 \varepsilon^2 + c_2 \varepsilon^3 + \ldots + c_{n-1} \varepsilon^n ,$$

d. i. Θ, nicht größer als die Größe

$$1 - \varepsilon + k_1 \varepsilon^2 + k_2 \varepsilon^3 + \ldots + k_{n-1} \varepsilon^n ,$$

ſo daß alſo

$$\Theta \overline{\gtrless} 1 - \varepsilon(1 - k_1 \varepsilon - k_2 \varepsilon^2 - \ldots - k_{n-1} \varepsilon^{n-1})$$

iſt. Hieraus ſieht man, daß für der Null ſehr nahe kommende Werthe von ε immer

$$\Theta < 1 ,$$

folglich auch

$$\Theta R < R$$

ſeyn wird, vorausgeſetzt, daß **R** nicht $= 0$ iſt.

Iſt nun **R'** der kleinſte Werth des Modulus **R**, ſo würde man alſo nach dem Vorhergehenden, wenn **R'** nicht $= 0$ wäre,

ε immer ſo beſtimmen können, daß der Modulus $\Theta R'$ kleiner als R' wäre, welches ungereimt iſt, da $\Theta R'$, wie aus dem Obigen erhellet, offenbar auch ein Werth des Modulus R iſt, der kleinſte Werth dieſes Modulus aber eben R' ſeyn ſoll. Die Vorausſetzung, daß der kleinſte Werth des Modulus R nicht $= 0$ wäre, iſt folglich falſch, und der kleinſte Werth dieſes Modulus iſt alſo $= 0$. Alle dieſe Schlüſſe gelten aber bloß, wenn die Größe $P_1 + Q_1 \sqrt{-1}$ nicht $= 0$ iſt, ſo daß uns alſo nur noch der Fall zu betrachten übrig iſt, wenn dieſe Größe verſchwindet.

Die erſte der Größen

$$P_1 + Q_1\sqrt{-1}; P_2 + Q_2\sqrt{-1}, P_3 + Q_3\sqrt{-1}, \ldots P_{n-1} + Q_{n-1}\sqrt{-1},$$

welche nicht verſchwindet, ſey

$$P_m + Q_m\sqrt{-1};$$

ſo reducirt ſich die Größe

$$(p + q\sqrt{-1} + z)^n + A(p + q\sqrt{-1} + z)^{n-1} + \ldots + L(p + q\sqrt{-1} + z) + N$$

oder

$$P + Q\sqrt{-1} + (P_1 + Q_1\sqrt{-1})z + \ldots + (P_{n-1} + Q_{n-1}\sqrt{-1})z^{n-1} + z^n$$

auf

$$P + Q\sqrt{-1} + (P_m + Q_m\sqrt{-1})z^m + \ldots + (P_{n-1} + Q_{n-1}\sqrt{-1})z^{n-1} + \ldots$$

Für

$$z = -\varepsilon \frac{P + Q\sqrt{-1}}{P_m + Q_m\sqrt{-1}}$$

werden die beiden erſten Glieder des obigen Polynoms, wenn man ſich daſſelbe nach Potenzen von ε geordnet denkt,

$$P + Q\sqrt{-1}, -(P + Q\sqrt{-1})\varepsilon^m,$$

und es iſt folglich für

$$z = -\varepsilon \frac{P + Q\sqrt{-1}}{P_m + Q_m\sqrt{-1}}$$

in dieſem Falle offenbar

$$(p + q\sqrt{-1} + z)^n + A(p + q\sqrt{-1} + z)^{n-1} + \ldots + L(p + q\sqrt{-1} + z) + N$$
$$= (P + Q\sqrt{-1})(1 - \varepsilon^m + c_1\varepsilon^{m+1} + c_2\varepsilon^{m+2} + \ldots + c_{n-m}\varepsilon^n),$$

auf ganz ähnliche Art wie oben. Sind nun

$$k_1, k_3, k_2, \ldots k_{n-m}$$

die Moduli der Größen

$$c_1, c_2, c_3, \ldots c_{n-m};$$

ſo überzeugt man ſich auf ganz ähnliche Art wie oben, daß, wenn Θ den Modulus der Größe

$$1 - \varepsilon^m + c_1\varepsilon^{m+1} + c_2\varepsilon^{m+2} + \ldots + c_{n-m}\varepsilon^n$$

bezeichnet,

$$\Theta \overline{\overline{<}}\, 1 - \varepsilon^m(1 - k_1\varepsilon - k_2\varepsilon^2 - \ldots - k_{n-m}\varepsilon^{n-m}),$$

folglich, wenn man nur ε nahe genug bei Null annimmt,

$$\Theta < 1,\ \Theta R < R$$

iſt, wobei man wieder zu bemerken hat, daß ΘR der Modulus der Größe

$$(p + q\sqrt{-1} + z)^n + A(p + q\sqrt{-1} + z)^{n-1} + \ldots + L(p + q\sqrt{-1} + z) + N$$

iſt. Durch ein ganz ähnliches Raiſonnement wie vorher ergiebt ſich hieraus nun ferner, daß auch in dieſem Falle der kleinſte Werth des Modulus $R = 0$ ſeyn muß.

Der kleinſte Werth des Modulus R, welcher nach dem Obigen einem endlichen Werthe von r und alſo auch von x entſpricht, iſt daher in allen Fällen $= 0$.

R iſt nach dem Obigen der Modulus von

$$(p + q\sqrt{-1})^n + A(p + q\sqrt{-1})^{n-1} + \ldots + L(p + q\sqrt{-1}) + N$$

oder

$$P + Q\sqrt{-1}\,.$$

Sind nun p', q', P', Q' die endlichen Werthe von p, q, P, Q, welchen der kleinſte Werth R' des Modulus R entſpricht; ſo iſt, weil

$$R' = \sqrt{P'^2 + Q'^2}$$

und nach dem Vorhergehenden $R' = 0$ iſt,

$$P'^2 + Q'^2 = 0\,.$$

Dieſe Größe kann aber nur $= 0$ ſeyn, wenn zugleich

$$P' = 0 \text{ und } Q' = 0$$

iſt. Alſo iſt auch

$$P' + Q'\sqrt{-1} = 0\,,$$

d. i.

$$(p' + q'\sqrt{-1})^n + A(p' + q'\sqrt{-1})^{n-1} + \ldots + L(p' + q'\sqrt{-1}) + N = 0,$$

und $p' + q'\sqrt{-1}$ iſt folglich eine Wurzel der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0\,.$$

Dies führt auf das folgende überaus wichtige Theorem, welches als der Hauptſatz, als der eigentliche Fundamentalſatz, der ganzen Theorie der Gleichungen anzuſehen iſt:

Jede Gleichung, deren Coefficienten beliebige, nur völlig beſtimmte, reelle oder imaginäre Größen ſind, hat immer mindeſtens eine reelle oder imaginäre völlig beſtimmte Wurzel von der allgemeinen Form $p + q\sqrt{-1}$.

14. Die Größe

$$x^n - (p + q\sqrt{-1})^n$$

iſt immer durch

$$x - (p + q\sqrt{-1})$$

ohne Reſt theilbar und der Quotient iſt eine ganze Function des $(n-1)$ten Grades von x.

Multiplicirt man nämlich die Größe

$$x^{n-1} + (p + q\sqrt{-1})x^{n-2} + (p + q\sqrt{-1})^2 x^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + (p + q\sqrt{-1})^{n-2} x + (p + q\sqrt{-1})^{n-1}$$

mit

$$x - p - q\sqrt{-1} = x - (p + q\sqrt{-1});$$

ſo erhält man die Größe

$$x^n - (p + q\sqrt{-1})^n,$$

wodurch der Satz bewieſen iſt.

15. Wenn die Function

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

für

$$x = p + q\sqrt{-1}$$

verſchwindet; ſo iſt $f(x)$ durch

$$x - (p + q\sqrt{-1})$$

ohne Reſt theilbar, und der Quotient iſt eine ganze rationale Function des $(n-1)$ten Grades von x von derſelben Form wie $f(x)$.

Nach der Vorausſetzung iſt

$$0 = (p + q\sqrt{-1})^n + A(p + q\sqrt{-1})^{n-1} + \ldots + L(p + q\sqrt{-1}) + N.$$

Subtrahirt man dieſe Gleichung von der Gleichung

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N;$$

ſo erhält man

$$\begin{aligned} f(x) = {} & x^n - (p + q\sqrt{-1})^n \\ & + A\{x^{n-1} - (p + q\sqrt{-1})^{n-1}\} \\ & + B\{x^{n-2} - (p + q\sqrt{-1})^{n-2}\} \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & + L\{x - (p + q\sqrt{-1})\}; \end{aligned}$$

alſo

$$\frac{f(x)}{x - (p + q\sqrt{-1})} =$$

$$\frac{x^n - (p + q\sqrt{-1})^n}{x - (p + q\sqrt{-1})} + A\frac{x^{n-1} - (p + q\sqrt{-1})^{n-1}}{x - (p + q\sqrt{-1})} + \ldots + L\frac{x - (p + q\sqrt{-1})}{x - (p + q\sqrt{-1})}.$$

Weil nun nach dem in (14.) bewieſenen Satze

$$\frac{x^n - (p + q\sqrt{-1})^n}{x - (p + q\sqrt{-1})}, \quad \frac{x^{n-1} - (p + q\sqrt{-1})^{n-1}}{x - (p + q\sqrt{-1})}, \ldots \frac{x - (p + q\sqrt{-1})}{x - (p + q\sqrt{-1})}$$

respective ganze rationale Functionen des

$(n-1)$ten, $(n-2)$ten, $(n-3)$ten, ... 0ten

Grades von x ſind; ſo erhellet die Richtigkeit des zu beweiſenden Satzes auf der Stelle.

16. Jede ganze rationale algebraiſche Function $f(x)$ des nten Grades von x läßt ſich als ein Product von n einfachen Factoren des erſten Grades von der Form

$$x - p - q\sqrt{-1}$$

darſtellen oder in n ſolche einfache Factoren zerlegen.

Nach dem in (13.) bewieſenen Satze hat jede Gleichung mindeſtens eine Wurzel von der Form $p + q\sqrt{-1}$, die ſowohl reell, als auch imaginär ſeyn kann. Sey daher

$$x = p + q\sqrt{-1}$$

dieſe Wurzel der Gleichung

$$f(x) = 0,$$

welche es nach dem angeführten Satze nothwendig geben muß, ſo daß alſo $f(x)$ für dieſen Werth von x verſchwindet, und daher, wenn $f_1(x)$ eine ganze rationale Function des $(n-1)$ten Grades von derſelben Form wie $f(x)$ bezeichnet, nach (15.)

$$f(x) = (x - p - q\sqrt{-1})f_1(x)$$

geſetzt werden kann. Aber auch die Gleichung

$$f_1(x) = 0$$

muß nach (13.) mindeſtens eine Wurzel haben, welche wir durch

$$x = p_1 + q_1\sqrt{-1}$$

bezeichnen wollen, ſo daß alſo nach (15.), wenn $f_2(x)$ eine ganze rationale Function des $(n-2)$ten Grades bezeichnet,

$$f_1(x) = (x - p_1 - q_1\sqrt{-1})f_2(x)$$

geſetzt werden kann. Ferner muß aber auch nach (13.) die Gleichung

$$f_2(x) = 0$$

mindeſtens eine Wurzel haben, welche

$$x = p_2 + q_2\sqrt{-1}$$

ſeyn mag, ſo daß alſo nach (15.), wenn $f_3(x)$ eine ganze rationale Function des $(n-3)$ten Grades bezeichnet,

$$f_2(x) = (x - p_2 - q_2\sqrt{-1})f_3(x)$$

geſetzt werden kann. Wie man auf dieſe Art weiter gehen kann, iſt klar. Zuletzt wird man auf

$$f_{n-2}(x) = (x - p_{n-2} - q_{n-2}\sqrt{-1})f_{n-1}(x),$$

$$f_{n-1}(x) = (x - p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1})f_n(x)$$

kommen, wo $f_n(x)$ eine ganze rationale Function des $(n-n)$ten $= 0$ten Grades, d. i. eine conſtante Größe iſt, die, wie aus

dem Obigen, wegen der hier immer zum Grunde gelegten Form der Function $f(x)$, unmittelbar hervorgeht, nur $= 1$ ſeyn kann, ſo daß alſo

$$f_{n-1}(x) = x - p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1}$$

iſt. Durch ſucceſſive Subſtitution ergiebt ſich nun hieraus auf der Stelle

$$\begin{aligned} f(x) = &(x - p - q\sqrt{-1}) \\ &\times (x - p_1 - q_1\sqrt{-1}) \\ &\times (x - p_2 - q_2\sqrt{-1}) \\ &\quad \cdots\cdots\cdots \\ &\times (x - p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1}), \end{aligned}$$

wodurch alſo unſer Satz bewieſen iſt. Wenn unter den Größen

$$q, q_1, q_2, q_3, \ldots q_{n-1}$$

eine verſchwindet, ſo iſt der entſprechende einfache Factor eine reelle Größe.

17. Wir wollen nun auch noch zeigen, daß die Zerlegung der ganzen rationalen Function $f(x)$ in n Factoren des erſten Grades jederzeit nur auf eine Art möglich iſt.

Zu dem Ende ſey

$$\begin{aligned} f(x) = &(x - p - q\sqrt{-1}) \\ &\times (x - p_1 - q_1\sqrt{-1}) \\ &\times (x - p_2 - q_2\sqrt{-1}) \\ &\quad \cdots\cdots\cdots \\ &\times (x - p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1}) \end{aligned}$$

und auch

$$\begin{aligned} f(x) = &(x - p' - q'\sqrt{-1}) \\ &\times (x - p'_1 - q'_1\sqrt{-1}) \\ &\times (x - p'_2 - q'_2\sqrt{-1}) \\ &\quad \cdots\cdots\cdots \\ &\times (x - p'_{n-1} - q'_{n-1}\sqrt{-1}). \end{aligned}$$

Das erſte Product wird $= 0$ für

$$x = p + q\sqrt{-1},$$

und für dieſen Werth von x wird alſo auch das zweite Product $= 0$, welches nicht der Fall ſeyn kann, wenn nicht einer der Factoren dieſes Products für denſelben Werth von x verſchwindet. Iſt nun z. B.

$$x - p' - q'\sqrt{-1}$$

dieſer Factor des zweiten Products, ſo iſt alſo

$$p + q\sqrt{-1} - p' - q'\sqrt{-1} = 0,$$
$$p + q\sqrt{-1} = p' + q'\sqrt{-1},$$
$$x - p - q\sqrt{-1} = x - p' - q'\sqrt{-1}.$$

Durch Diviſion mit dieſen beiden Factoren erhält man

$$\begin{aligned}(x - p_1 - q_1\sqrt{-1}) &= (x - p'_1 - q'_1\sqrt{-1}) \\ \times (x - p_2 - q_2\sqrt{-1}) &\quad \times (x - p'_2 - q'_2\sqrt{-1}) \\ \cdots\cdots &\quad \cdots\cdots \\ \times (x - p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1}) &\quad \times (x - p'_{n-1} - q'_{n-1}\sqrt{-1}).\end{aligned}$$

Das erſte Product verſchwindet für

$$x = p_1 + q_1\sqrt{-1},$$

und für denſelben Werth von x muß folglich auch das zweite Product verſchwinden, welches nicht der Fall ſeyn kann, wenn nicht ein Factor dieſes Products für den in Rede ſtehenden Werth von x verſchwindet. Iſt nun z. B.

$$x - p'_1 - q'_1\sqrt{-1}$$

dieſer Factor des zweiten Products, ſo ergiebt ſich wie oben

$$x - p_1 - q_1\sqrt{-1} = x - p'_1 - q'_1\sqrt{-1},$$

und man erhält durch Diviſion mit dieſen gleichen Factoren

$$\begin{aligned}(x - p_2 - q_2\sqrt{-1}) &= (x - p'_2 - q'_2\sqrt{-1}) \\ \cdots\cdots &\quad \cdots\cdots \\ \times (x - p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1}) &\quad \times (x - p'_{n-1} - q'_{n-1}\sqrt{-1}).\end{aligned}$$

Wie man auf dieſe Art weiter gehen und nach und nach die Identität aller Factoren der beiden oben für $f(x)$ geſetzten Producte nachweiſen kann, bedarf keiner weitern Erläuterung.

18. Nach (16.) iſt

$$\begin{aligned}f(x) = &\ (x - p - q\sqrt{-1}) \\ &\times (x - p_1 - q_1\sqrt{-1}) \\ &\times (x - p_2 - q_2\sqrt{-1}) \\ &\cdots\cdots \\ &\times (x - p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1}).\end{aligned}$$

Alſo verſchwindet $f(x)$ für jeden der folgenden Werthe von x:

$$\begin{aligned}x &= p + q\sqrt{-1}, \\ x &= p_1 + q_1\sqrt{-1}, \\ x &= p_2 + q_2\sqrt{-1}, \\ &\cdots\cdots \\ x &= p_{n-1} + q_{n-1}\sqrt{-1}.\end{aligned}$$

Dies führt unmittelbar zu dem folgenden Lehrſatze:

Jede Gleichung des nten Grades hat n reelle oder imaginäre Wurzeln, unter denen aber, was

man wohl zu beachten hat, auch einander gleiche vorkommen können.

Die Anzahl der ſämmtlich von einander verſchiedenen reellen oder imaginären Wurzeln, welche eine Gleichung des nten Grades haben kann, kann höchſtens = n ſeyn. Jede ganze rationale algebraiſche Function des nten Grades kann aber immer in n einfache Factoren des erſten Grades zerlegt werden, unter denen aber auch einander gleiche vorkommen können.

19. Wir wollen nun annehmen, daß alle Coefficienten der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0$$

reelle Größen ſeyen. Weil allgemein

$$(p \pm q\sqrt{-1})(p' \pm q'\sqrt{-1}) = pp' - qq' \pm (pq' + p'q)\sqrt{-1}$$

iſt; ſo erhellet leicht, daß überhaupt die Potenz

$$(p \pm q\sqrt{-1})^n$$

von der Form

$$P \pm Q\sqrt{-1}$$

iſt, wo die obern und untern Zeichen ſich auf einander beziehen. Wir wollen nun annehmen, daß

$$x = p + q\sqrt{-1}$$

eine imaginäre Wurzel der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0$$

ſey, ſo daß alſo, wenn wir jetzt

$$x^2 = p_1 + q_1\sqrt{-1},$$
$$x^3 = p_2 + q_2\sqrt{-1},$$
$$x^4 = p_3 + q_3\sqrt{-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x^n = p_{n-1} + q_{n-1}\sqrt{-1}$$

ſetzen,

$$p_{n-1} + q_{n-1}\sqrt{-1} + A(p_{n-2} + q_{n-2}\sqrt{-1}) + \ldots + L(p + q\sqrt{-1}) + N$$
$$= \left.\begin{matrix} p_{n-1} + Ap_{n-2} + Bp_{n-3} + \ldots + Lp + N \\ + \{q_{n-1} + Aq_{n-2} + Bq_{n-3} + \ldots + Lq\}\sqrt{-1} \end{matrix}\right\} = 0,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$p_{n-1} + Ap_{n-2} + Bp_{n-3} + \ldots + Lp + N = P,$$
$$q_{n-1} + Aq_{n-2} + Bq_{n-3} + \ldots + Lq = Q$$

ſetzen,

$$P + Q\sqrt{-1} = 0$$

iſt, wo ſich nun nach der gemachten Vorausſetzung von ſelbſt verſteht, daß **P** und **Q** reelle Größen ſind. Die Größe $\mathbf{P} + \mathbf{Q}\sqrt{-1}$ kann aber nur dann = 0 ſeyn, wenn für ſich

$$P = 0 \text{ und } Q = 0$$

iſt.

Setzen wir jetzt

$$x = p - q\sqrt{-1};$$

ſo iſt, wie vorher gezeigt worden iſt,

$$x^2 = p_1 - q_1\sqrt{-1},$$
$$x^3 = p_2 - q_2\sqrt{-1},$$
$$x^4 = p_3 - q_3\sqrt{-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x^n = p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1}.$$

Für $x = p - q\sqrt{-1}$ iſt alſo

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + .. + Lx + N$$
$$= p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1} + A(p_{n-2} - q_{n-2}\sqrt{-1}) + .. + L(p - q\sqrt{-1}) + N$$
$$= p_{n-1} + Ap_{n-2} + Bp_{n-3} + .. + Lp + N$$
$$- \{q_{n-1} + Aq_{n-2} + Bq_{n-3} + .. + Lq\}\sqrt{-1}$$
$$= P - Q\sqrt{-1}.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$P = 0 \text{ und } Q = 0$$

iſt; ſo iſt auch

$$P - Q\sqrt{-1} = 0,$$

oder

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + .. + Lx + N = 0$$

für

$$x = p - q\sqrt{-1},$$

und daher $p - q\sqrt{-1}$ eine Wurzel vorſtehender Gleichung. Dies führt auf folgenden Lehrſatz:

Wenn $p + q\sqrt{-1}$ eine imaginäre Wurzel einer Gleichung eines beliebigen Grades mit lauter reellen Coefficienten iſt; ſo iſt auch $p - q\sqrt{-1}$ jederzeit eine Wurzel dieſer Gleichung, und die imaginären Wurzeln der Gleichungen mit reellen Coefficienten ſind alſo immer paarweiſe vorhanden, oder jede Gleichung mit reellen Coefficienten kann nur eine gerade Anzahl imaginärer Wurzeln haben. Zwei und zwei imaginäre Wurzeln einer Gleichung mit reellen Coefficienten ſind immer einander conjugirt.

Hieraus und aus (18.) ergiebt ſich nun auch auf der Stelle, daß jede Gleichung eines geraden Grades mit lauter reellen Coefficienten nur eine gerade, jede Gleichung eines ungeraden Grades mit lauter reellen Coefficienten nur eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln haben kann, auch daß jede Gleichung ei-

nes ungeraden Grades mit lauter reellen Coefficienten immer mindeſtens eine reelle Wurzel haben muß, wie ſchon in (10.) auf andere Art bewieſen worden iſt.

20. Wir wollen nun wieder annehmen, daß die Coefficienten der Function

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + .. + Lx + N$$

ſämmtlich reelle Größen ſeyen. Nach (16.) iſt jederzeit

$$\begin{aligned} f(x) = & (x - p - q\sqrt{-1}) \\ & \times (x - p_1 - q_1\sqrt{-1}) \\ & \times (x - p_2 - q_2\sqrt{-1}) \\ & \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & \times (x - p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1}) \,. \end{aligned}$$

Ein beliebiger imaginärer Factor dieſes Products ſey

$$x - p_k - q_k\sqrt{-1} \,;$$

ſo wird daſſelbe = 0, wenn man

$$x = p_k + q_k\sqrt{-1}$$

ſetzt, und

$$p_k + q_k\sqrt{-1}$$

iſt folglich eine imaginäre Wurzel der Gleichung

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + .. + Lx + N = 0$$

mit lauter reellen Coefficienten. Daher iſt nach (19.) auch

$$p_k - q_k\sqrt{-1}$$

eine Wurzel dieſer Gleichung, und folglich nach (15.)

$$x - p_k + q_k\sqrt{-1}$$

ein einfacher Factor der Function $f(x)$. Da ſich nun dieſe Function nach (17.) nur auf eine Art in n einfache Factoren des erſten Grades zerlegen läßt, ſo muß ſich der Factor

$$x - p_k + q_k\sqrt{-1} \,,$$

ſo wie der Factor

$$x - p_k - q_k\sqrt{-1} \,,$$

unter den Factoren des Products

$$\begin{aligned} f(x) = & (x - p - q\sqrt{-1}) \\ & \times (x - p_1 - q_1\sqrt{-1}) \\ & \times (x - p_2 - q_2\sqrt{-1}) \\ & \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & \times (x - p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1}) \end{aligned}$$

finden. Verbindet man die beiden obigen einfachen Factoren, die einande conjugirte einfache imaginäre Factoren genannt werden können; ſo erhält man

$$(x - p_k - q_k\sqrt{-1})(x - p_k + q_k\sqrt{-1})$$
$$= (x - p_k)^2 - (q_k\sqrt{-1})^2 = (x - p_k)^2 + q_k^2$$
$$= x^2 - 2p_k x + p_k^2 + q_k^2,$$

welches Product eine reelle Größe iſt und ein reeller Factor des zweiten Grades genannt wird. Auf dieſelbe Weiſe giebt es zu jedem imaginären Factor des Products

$$\begin{aligned} f(x) = \ & (x - p - q\sqrt{-1}) \\ & \times (x - p_1 - q_1\sqrt{-1}) \\ & \times (x - p_2 - q_2\sqrt{-1}) \\ & \quad \cdots\cdots\cdots \\ & \times (x - p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1}) \end{aligned}$$

einen conjugirten einfachen imaginären Factor, und zwei ſolche conjugirte einfache imaginäre Factoren laſſen ſich jederzeit zu einem reellen Factor des zweiten Grades mit einander verbinden, woraus ſich nun unmittelbar das folgende Theorem ergiebt:

Jede ganze rationale algebraiſche Function läßt ſich immer in lauter reelle Factoren des erſten oder zweiten Grades zerlegen.

21. Wir ſind hier zu einem Lehrſatze gelangt, mit deſſen Beweiſe ſeiner großen Wichtigkeit wegen ſich die größten Mathematiker beſchäftigt haben. Die ältere Geſchichte dieſes namentlich auch für die Integration der rationalen gebrochenen algebraiſchen Functionen überaus wichtigen Satzes ſ. m. in dem zweiten Theile dieſes Wörterbuchs S. 441 und 442. Die meiſten Verdienſte um denſelben haben ſich unter den neuern Mathematikern ohne Widerrede Gauß und Cauchy erworben. Alle älteren Verſuche, einen ſtrengen Beweis zu führen, ſind mehr oder weniger mangelhaft. Gauß hat in ſeiner erſten unſern Satz betreffenden Schrift: **Demonstratio nova theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse, quam pro obtinendis summis in Philosophia honoribus inclito Philosophorum ordini Academiae Juliae Carolinae exhibuit C. F. Gauss. Helmst. 1799.** nicht nur einen neuen ſtrengen Beweis des Satzes, ſondern auch eine ausführliche Recenſion aller frühern Beweiſe gegeben. Zwei andere Beweiſe giebt Gauß in den Commentarien der Göttinger Akademie vom Jahre 1816. p. 107. und p. 135. in den Abhandlungen: **Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse** und; **Theorematis de resolubilitate functionum algebraicarum integrarum in factores reales demonstratio tertia.** Alle drei Beweiſe ſind nicht leicht zu faſſen, aber völlig würdig dem großen Genie ihres Er-

finders. Der erſte und älteſte, die erſte ſchriftſtelleriſche Arbeit des großen Geometers, beruhet auf trigonometriſchen Hülfsſätzen und bedient ſich auch geometriſcher Betrachtungen; der zweite iſt rein algebraiſch, nimmt aber zugleich auch die Differentialrechnung zu Hülfe; am wenigſten elementar iſt der dritte Beweis, zeichnet ſich aber durch große Kürze vor den beiden andern aus, und iſt zugleich, wenn man nur die nöthigen Sätze aus andern mathematiſchen Disciplinen, namentlich aus der Integralrechnung, vorauszuſetzen berechtigt iſt, ſo einfach und leicht verſtändlich, daß wir es uns nicht verſagen können, gerade dieſen überaus ſchönen Beweis im Folgenden noch mitzutheilen, da ſich in andern Artikeln dieſer Supplemente die Hülfsſätze, welche wir brauchen werden, ſchon ſtreng bewieſen finden, und uns alſo auf dieſelben zu verweiſen verſtattet iſt. Der oben geführte Beweis, bei dem wir einer ſchönen Abhandlung von Cauchy: **sur la résolution des équations numériques et sur la théorie de l'élimination** in den **Exercices de Mathématiques. Livr. 40 et 41. p. 65.** gefolgt ſind, iſt völlig ſtreng, leicht verſtändlich und verdient zugleich den Namen eines ganz elementaren Beweiſes, da er bloß auf einfachen algebraiſchen Principien beruhet. Ein anderer ebenfalls völlig ſtrenger Beweis von Cauchy, der aber trigonometriſche Formeln in Anſpruch nimmt, iſt ſchon im Artikel Unmögliche Größen (32 — 39.) von uns mitgetheilt worden, und kann hier vortheilhaft verglichen werden, ſo wie auch das Studium der verſchiedenen von Gauß gegebenen Beweiſe namentlich durch die Vergleichung der ſo ſehr von einander verſchiedenen Wege, auf denen dieſer große Geiſt zu demſelben Ziele gelangte, die reichſte Belehrung gewähren wird. Mit dem zuletzt erwähnten Beweiſe von Cauchy beruhet die von Legendre in der **Théorie des nombres. P. I. §. XIV.** éd. 2. gegebene Darſtellung dem Weſentlichen nach auf gleichen Principien, iſt aber an dieſem Orte zu ſehr mit andern Unterſuchungen verwebt, und läßt daher den Satz ſelbſt nicht deutlich hervortreten. Noch ſ. m. eine Abhandlung von Laplace im Journal des séances de l'école normale. T. II. p. 315., aus welcher Lacroix im Complément des élémens d'Algèbre §. 23. einen Auszug gegeben hat. Burgs Verſuch in Crelles Journal B. V. S. 182., einen elementaren Beweis zu geben, können wir durchaus nicht als gelungen betrachten, ſo ſehr uns auch ein noch kürzerer und einfacherer Beweis, als der oben nach Cauchy mitgetheilte, als wünſchenswerth erſcheint. Nach dieſen hiſtoriſchen und literariſchen Bemerkungen gehen wir nun zu dem dritten Beweiſe von Gauß über, indem wir ganz den Fußtapfen ſeines Erfinders folgen, und nur hier und da den Weg für weniger geübte Leſer etwas zu ebenen ſuchen.

22. Sey wieder

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N,$$

wobei wir annehmen, daß die Coefficienten **A, B, C, .. L, N** ſämmtlich reelle Größen ſind. **r** und φ ſeyen zwei unbeſtimmte Größen. Der Kürze wegen ſetze man ferner

$$t = r^n \cos n\varphi + A r^{n-1} \cos(n-1)\varphi + B r^{n-2} \cos(n-2)\varphi + \ldots$$
$$\ldots + L r \cos\varphi + N,$$
$$u = r^n \sin n\varphi + A r^{n-1} \sin(n-1)\varphi + B r^{n-2} \sin(n-2)\varphi + \ldots$$
$$\ldots + L r \sin\varphi,$$
$$t' = n r^n \cos n\varphi + (n-1) A r^{n-1} \cos(n-1)\varphi + (n-2) B r^{n-2} \cos(n-2)\varphi + \ldots$$
$$\ldots + L r \cos\varphi,$$
$$u' = n r^n \sin n\varphi + (n-1) A r^{n-1} \sin(n-1)\varphi + (n-2) B r^{n-2} \sin(n-2)\varphi + \ldots$$
$$\ldots + L r \sin\varphi,$$
$$t'' = n^2 r^n \cos n\varphi + (n-1)^2 A r^{n-1} \cos(n-1)\varphi + (n-2)^2 B r^{n-2} \cos(n-2)\varphi + \ldots$$
$$\ldots + L r \cos\varphi,$$
$$u'' = n^2 r^n \sin n\varphi + (n-1)^2 A r^{n-1} \sin(n-1)\varphi + (n-2)^2 B r^{n-2} \sin(n-2)\varphi + \ldots$$
$$\ldots + L r \sin\varphi,$$
$$\frac{(tt + uu)(tt'' + uu'') + (tu' - ut')^2 - (tt' + uu')^2}{r(tt + uu)^2} = y,$$

wobei zu bemerken iſt, daß ſich der Factor **r** aus dem Nenner dieſes letztern Bruchs offenbar wegſchaffen läßt, da t', u', t'', u'' durch **r** theilbar ſind. Iſt nun ϱ eine poſitive Größe, welche größer iſt als die größte der Größen

$$nA\sqrt{2},\ \sqrt{(nB\sqrt{2})},\ \sqrt[3]{(nC\sqrt{2})}\ \sqrt[4]{(nD\sqrt{2})},\ \ldots\ \sqrt[n]{(nN\sqrt{2})},$$

bloß in Bezug auf die abſoluten Werthe dieſer Größen; ſo erhält für $r = \varrho$ die Größe

$$tt' + uu'$$

jederzeit einen poſitiven Werth, der nicht $= 0$ iſt, welchen reellen Werth man auch der Größe φ beilegen mag.

Man ſetze, um dies zu beweiſen, der Kürze wegen,

$$T = \varrho^n \cos 45^\circ + A\varrho^{n-1} \cos(45^\circ + \varphi) + B\varrho^{n-2} \cos(45^\circ + 2\varphi) + \ldots$$
$$\ldots + L\varrho \cos(45^\circ + (n-1)\varphi) + N \cos(45^\circ + n\varphi),$$
$$U = \varrho^n \sin 45^\circ + A\varrho^{n-1} \sin(45^\circ + \varphi) + B\varrho^{n-2} \sin(45^\circ + 2\varphi) + \ldots$$
$$\ldots + L\varrho \sin(45^\circ + (n-1)\varphi) + N \sin(45^\circ + n\varphi),$$
$$T' = n\varrho^n \cos 45^\circ + (n-1) A\varrho^{n-1} \cos(45^\circ + \varphi) + (n-2) B\varrho^{n-2} \cos(45^\circ + 2\varphi) + \ldots$$
$$\ldots + L\varrho \cos(45^\circ + (n-1)\varphi),$$
$$U' = n\varrho^n \sin 45^\circ + (n-1) A\varrho^{n-1} \sin(45^\circ + \varphi) + (n-2) B\varrho^{n-2} \sin(45^\circ + 2\varphi) + \ldots$$
$$\ldots + L\varrho \sin(45^\circ + (n-1)\varphi);$$

ſo iſt, weil bekanntlich

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

iſt, und daher

$$\varrho^n \cos 45^\circ = \frac{\varrho^{n-1}}{n\sqrt{2}}\varrho + \frac{\varrho^{n-2}}{n\sqrt{2}}\varrho^2 + \frac{\varrho^{n-3}}{n\sqrt{2}}\varrho^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\varrho}{n\sqrt{2}}\varrho^{n-1} + \frac{1}{n\sqrt{2}}\varrho^n$$

geſetzt werden kann, offenbar

$$T = \frac{\varrho^{n-1}}{n\sqrt{2}}\{\varrho + nA\sqrt{2}.\cos(45^0+\varphi)\}$$

$$+ \frac{\varrho^{n-2}}{n\sqrt{2}}\{\varrho^2 + nB\sqrt{2}.\cos(45^0+2\varphi)\}$$

$$+ \frac{\varrho^{n-3}}{n\sqrt{2}}\{\varrho^3 + nC\sqrt{2}.\cos(45^0+3\varphi)\}$$

$$+ \frac{\varrho^{n-4}}{n\sqrt{2}}\{\varrho^4 + nD\sqrt{2}\ \cos(45^0+4\varphi\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{1}{n\sqrt{2}}\{\varrho^n + nN\sqrt{2}.\cos(45^0+n\varphi)\}.$$

Da nun nach der Vorausſetzung ϱ poſitiv und, bloß mit Berückſichtigung der abſoluten Werthe, größer als die größte unter den Größen

$$nA\sqrt{2},\ \sqrt{(nB\sqrt{2})},\ \sqrt[3]{(nC\sqrt{2})},\ \sqrt[4]{(nD\sqrt{2})},\ \ldots\ \sqrt[n]{(nN\sqrt{2})}$$

iſt; ſo ſind offenbar

$$\varrho + nA\sqrt{2}.\cos(45^0+\varphi),$$
$$\varrho^2 + nB\sqrt{2}.\cos(45^0+2\varphi),$$
$$\varrho^3 + nC\sqrt{2}.\cos(45^0+3\varphi),$$
$$\varrho^4 + nD\sqrt{2}.\cos(45^0+4\varphi),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varrho^n + nN\sqrt{2}.\cos(45^0+n\varphi)$$

ſämmtlich poſitive Größen und keine dieſer Größen iſt $= 0$. Alſo iſt auch **T** eine poſitive Größe, die nicht $= 0$ iſt. Ueberhaupt ſoll im Folgenden mit der Bemerkung, daß eine Größe poſitiv ſey, zugleich immer die Bedingung verbunden ſeyn, daß dieſe Größe auch nicht $= 0$ iſt, welches hier ein für alle Mal bemerkt ſeyn mag.

Durch ganz ähnliche Schlüſſe, die hier nicht wiederholt zu werden brauchen, überzeugt man ſich, daß auch **U** eine poſitive Größe iſt.

Auch iſt nun

$$T' = \frac{\varrho^{n-1}}{n\sqrt{2}}\{n\varrho + (n-1)nA\sqrt{2}.\cos(45^0+\varphi)\}$$

$$+ \frac{\varrho^{n-2}}{n\sqrt{2}}\{n\varrho^2 + (n-2)nB\sqrt{2}.\cos(45^0+2\varphi)\}$$

$$+ \frac{\varrho^{n-3}}{n\sqrt{2}}\{n\varrho^3 + (n-3)nC\sqrt{2}.\cos(45^0+3\varphi)\}$$

$$+ \frac{\varrho^{n-4}}{n\sqrt{2}}\{n\varrho^4 + (n-4)nD\sqrt{2}.\cos(45^0+4\varphi)\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{\varrho}{n\sqrt{2}}\{n\varrho^{n-1} + nL\sqrt{2}.\cos(45^0+(n-1)\varphi)\}$$

$$+ \frac{1}{n\sqrt{2}}.n\varrho^n.$$

Die Potenzen

$$\varrho, \varrho^2, \varrho^3, \varrho^4, \ldots \varrho^{n-1}$$

ſind nach der Vorausſetzung ſämmtlich poſitiv und reſpective größer als

$$nA\sqrt{2},\ nB\sqrt{2},\ nC\sqrt{2},\ nD\sqrt{2},\ \ldots\ nL\sqrt{2};$$

alſo ſind um ſo mehr

$$n\varrho,\ n\varrho^2,\ n\varrho^3,\ n\varrho^4,\ \ldots\ n\varrho^{n-1}$$

reſpective größer als

$$(n-1)nA\sqrt{2}.\cos(45^0+\varphi),$$
$$(n-2)nB\sqrt{2}.\cos(45^0+2\varphi),$$
$$(n-3)nC\sqrt{2}.\cos(45^0+3\varphi),$$
$$(n-4)nD\sqrt{2}.\cos(45^0+4\varphi),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$nL\sqrt{2}.\cos(45^0+(n-1)\varphi),$$

immer bloß in Rückſicht auf die abſoluten Werthe, und es iſt folglich T', ſo wie auf ganz ähnliche Art auch U', eine poſitive Größe.

Folglich iſt auch $TT' + UU'$ eine poſitive Größe, die alſo nach unſerer obigen Bemerkung auch nicht $= 0$ iſt.

Da nun überhaupt

$$\cos(45^0+k\varphi)\cos(45^0+n\varphi)+\sin(45^0+k\varphi)\sin(45^0+n\varphi)$$
$$=\cos(45^0+n\varphi-45^0-k\varphi)=\cos(n-k)\varphi,$$
$$\cos(45^0+k\varphi)\sin(45^0+n\varphi)-\sin(45^0+k\varphi)\cos(45^0+n\varphi)$$
$$=\sin(45^0+n\varphi-45^0-k\varphi)=\sin(n-k)\varphi$$

iſt; ſo überſieht man auf der Stelle, daß, wenn man $r=\varrho$ ſetzt, t, u, t', u' reſpective in

$$T\cos(45^0+n\varphi)+U\sin(45^0+n\varphi),$$
$$T\sin(45^0+n\varphi)-U\cos(45^0+n\varphi),$$
$$T'\cos(45^0+n\varphi)+U'\sin(45^0+n\varphi),$$
$$T'\sin(45^0+n\varphi)-U'\cos(45^0+n\varphi)$$

übergehen, und folglich für $r=\varrho$

$$tt'+uu'$$
$$=\{T\cos(45^0+n\varphi)+U\sin(45^0+n\varphi)\}\{T'\cos(45^0+n\varphi)+U'\sin(45^0+n\varphi)\}$$
$$+\{T\sin(45^0+n\varphi)-U\cos(45^0+n\varphi)\}\{T'\sin(45^0+n\varphi)-U'\cos(45^0+n\varphi)\}$$
$$=TT'\{\sin(45^0+n\varphi)^2+\cos(45^0+n\varphi)^2\}$$
$$+UU'\{\sin(45^0+n\varphi)^2+\cos(45^0+n\varphi)^2\},$$

d. i. für $r=\varrho$

$$tt'+uu'=TT'+UU'$$

wird, ſo daß alſo der Werth von $tt'+uu'$ für $r=\varrho$ immer poſitiv und nicht $=0$ iſt, wie behauptet wurde.

Der Werth von $tt+uu$ für $r=\varrho$ iſt

$$\{T\cos(45^0+n\varphi)+U\sin(45^0+n\varphi)\}^2$$
$$+\{T\sin(45^0+n\varphi)-U\cos(45^0+n\varphi)\}^2$$
$$=TT\{\sin(45^0+n\varphi)^2+\cos(45^0+n\varphi)^2\}$$
$$+UU\{\sin(45^0+n\varphi)^2+\cos(45^0+n\varphi)^2\},$$

d. i. für $r=\varrho$

$$tt+uu=TT+UU,$$

alſo dieſer Werth ebenfalls poſitiv und nicht $=0$, woraus ſich folglich ergiebt, daß für keinen poſitiven Werth von ϱ, welcher größer als die größte unter den Größen

$$nA\sqrt{2},\ \sqrt{(nB\sqrt{2})},\ \sqrt[3]{(nC\sqrt{2})},\ \sqrt[4]{(nD\sqrt{2})},\ \ldots.$$

iſt, immer bloß mit Berückſichtigung der abſoluten Werthe dieſer Größen, zugleich $t=0$, $u=0$ iſt, weil ſonſt für $r=\varrho$ auch $tt+uu=0$ wäre, welches gegen das Obige ſtreitet.

23. Zwiſchen den Gränzen $r=0$, $r=\varrho$ und $\varphi=0$ $\varphi=2\pi$, wo π wie gewöhnlich die halbe Peripherie bezeichnet, giebt es aber beſtimmt jederzeit Werthe von r und φ, für welche zugleich $t=0$, $u=0$ iſt.

Wir wollen, um dies zu beweiſen, annehmen, daß das Gegentheil Statt finde, und daß folglich für alle Werthe von r und φ zwiſchen den angegebenen Gränzen die poſitive Größe $tt+uu$ nicht $=0$ ſey; ſo hat offenbar die oben durch y bezeichnete Größe für alle Werthe von r und φ zwiſchen den angegebenen Gränzen einen endlichen beſtimmten Werth, wobei man nicht zu vergeſſen hat, daß, wie auch ſchon oben erinnert worden iſt, der Factor r in dem Nenner von y durch Aufheben gegen einen gleichen Factor im Zähler weggeſchafft werden kann, und dieſer Factor daher nur ſcheinbar im Nenner von y enthalten iſt, ſo daß alſo offenbar auch für $r=0$ die Größe y einen endlichen beſtimmten Werth hat.

Betrachten wir nun das doppelte Integral

$$\int\int y\,\partial r\,\partial\varphi,$$

und nehmen deſſen Werth auf bekannte Weiſe zwiſchen den Gränzen $r=0$, $r=\varrho$ und $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$; ſo wird auch der ſo beſtimmte Werth dieſes Integrals, welchen wir $=\Omega$ ſetzen wollen, eine endliche beſtimmte Größe ſeyn, wie ſogleich aus dem im Artikel Beſtimmtes Integral (5.) bewieſenen Satze folgt.

Wir wollen nun den in Rede ſtehenden Werth unſers Integrals auf doppelte Art entwickeln, indem wir das eine Mal zuerſt nach φ, dann nach r, das andere Mal zuerſt nach r, dann nach φ integriren, welches bekanntlich zu einem und demſelben Reſultat führen muß, wie a. a. O. (24.) bewieſen worden iſt.

Betrachtet man nun zuerſt r als conſtant, ſo iſt

$$\int y\,\partial\varphi=\frac{tu'-ut'}{r(tt+uu)}.$$

Differentiirt man nämlich dieſe Größe nach φ, ſo erhält man, weil, wie leicht erhellet,

$$\partial t = -u'\partial\varphi,\ \partial u = t'\partial\varphi,\ \partial t' = -u''\partial\varphi,\ \partial u' = t''\partial\varphi$$

iſt:

$$\frac{(tt + uu)(t\partial u' + u'\partial t - u\partial t' - t'\partial u) - 2(tu' - ut')(t\partial t + u\partial u)}{r(tt + uu)^2}$$

$$= \frac{(tt + uu)(tt'' - u'u' + uu'' - t't') + 2(tu' - ut')^2}{r(tt + uu)^2}\partial\varphi$$

$$= \frac{(tt + uu)(tt'' + uu'') + (tu' - ut')^2 - (tt' + uu')^2}{r(tt + uu)^2}\partial\varphi$$

$$= y\partial\varphi,$$

weil

$$-(tt + uu)(t't' + u'u') + (tu' - ut')^2 = -(tt' + uu')^2$$

iſt. Da nun offenbar ſowohl für $\varphi = 0$, als auch für $\varphi = 2\pi$,

$$\frac{tu' - ut'}{r(tt + uu)} = 0$$

iſt; ſo iſt

$$\int_0^{2\pi} y\partial\varphi = 0$$

für **jedes r**, und folglich offenbar auch

$$\int_0^{\varrho}\partial r\int_0^{\pi} y\partial\varphi = 0,$$

d. i. $\Omega = 0$. Vorausgeſetzt iſt hierbei, der Annahme gemäß, immer, daß $tt + uu$ für keinen Werth von r und φ zwiſchen den angegebenen Gränzen $= 0$ iſt, weil ſonſt die obige Rechnung wegen des vorkommenden Unendlichen offenbar ihre Gültigkeit verlieren würde.

Betrachten wir nun ferner φ als conſtant, und integriren nach r; ſo iſt

$$\int y\partial r = \frac{tt' + uu'}{tt + uu}.$$

Differentiirt man nämlich, ſo erhält man, weil

$$\partial t = \frac{t'}{r}\partial r,\ \partial u = \frac{u'}{r}\partial r,\ \partial t' = \frac{t''}{r}\partial r,\ \partial u' = \frac{u''}{r}\partial r$$

iſt:

$$\frac{(tt + uu)(t\partial t' + t'\partial t + u\partial u' + u'\partial u) - 2(tt' + uu')(t\partial t + u\partial u)}{(tt + uu)^2}$$

$$= \frac{(tt + uu)(tt'' + t't' + uu'' + u'u') - 2(tt' + uu')^2}{r(tt + uu)^2}\partial r$$

$$= \frac{(tt + uu)(tt'' + uu'') + (tu' - ut')^2 - (tt' + uu')^2}{r(tt + uu)^2}\partial r$$

$$= y\partial r,$$

weil

$$(tt + uu)(t't' + u'u') - (tt' + uu')^2 = (tu' - ut')^2$$

iſt.

Für $r = 0$ wird offenbar

$$\frac{tt' + uu'}{tt + uu} = 0,$$

und für $r = \varrho$ iſt (22.)

$$tt' + uu' = TT' + UU', \; tt + uu = TT + UU;$$

alſo iſt

$$\int_0^\varrho y \partial r = \frac{TT' + UU'}{TT + UU}$$

für jedes φ, folglich dieſes beſtimmte Integral für jedes φ nach (22.) immer eine beſtimmte poſitive Größe, die nicht $= 0$ iſt. Alſo iſt nach dem im Artikel Beſtimmtes Integral (5.) bewieſenen allgemeinen Lehrſatze offenbar auch

$$\int_0^{2\pi} \partial\varphi \int_0^\varrho y \partial r = \Omega$$

eine beſtimmte poſitive Größe, die nicht $= 0$ iſt. Dies iſt aber ungereimt, weil wir vorher $\Omega = 0$ gefunden haben, ſo daß alſo unſere Annahme, daß es keine Werthe von r, φ zwiſchen den Gränzen $r = 0$, $r = \varrho$ und $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$ gebe, für welche zugleich $t = 0$, $u = 0$ iſt, falſch iſt, weshalb es alſo zwiſchen dieſen Gränzen immer Werthe von r und φ geben muß, für welche zugleich $t = 0$ und $u = 0$ iſt.

24. Für

$$x = r(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})$$

wird nun

$$\begin{aligned} f(x) = \; & r^n(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^n \\ & + Ar^{n-1}(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{n-1} \\ & + Br^{n-2}(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{n-2} \\ & + Cr^{n-3}(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{n-3} \\ & \dots\dots\dots\dots \\ & + Lr(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1}) \\ & + N, \end{aligned}$$

d. i. nach einem leicht zu beweiſenden goniometriſchen Satze, über den man den Artikel Unmögliche Größen (3.) nachzuſehen hat, für den obigen Werth von x:

$$f(x) =$$

$$\begin{aligned} & r^n \cos n\varphi + Ar^{n-1}\cos(n-1)\varphi + Br^{n-2}\cos(n-2)\varphi + \dots \\ & \qquad \dots + Lr\cos\varphi + N \\ & \pm \left\{ \begin{aligned} & r^n \sin n\varphi + Ar^{n-1}\sin(n-1)\varphi + Br^{n-2}\sin(n-2)\varphi + \dots \\ & \qquad \dots + Lr\sin\varphi \end{aligned} \right\} \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

d. i. für

$$x = r(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})$$

immer

$$f(x) = t \pm u\sqrt{-1}\,.$$

Weil man nun nach (23.) immer Werthe von r und φ angeben kann, für welche zugleich $t = 0$, $u = 0$ iſt; ſo ſeyen z. B. $r = g$, $\varphi = G$ zwei ſolche Werthe von r und φ. Dann iſt $f(x) = 0$ für

$$x = g(\cos G \pm \sin G\sqrt{-1})\,,$$

und dieſe beiden Werthe von x ſind folglich zwei Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$. Für $g = 0$ oder $\sin G = 0$ reduciren ſich dieſe beiden imaginären Wurzeln auf die eine reelle Wurzel $x = 0$ oder $x = g\cos G$, und es erhellet alſo hieraus nicht nur, daß jede Gleichung $f(x) = 0$ mit lauter reellen Coefficienten immer wenigſtens eine Wurzel hat, ſondern auch, daß die imaginären Wurzeln ſolcher Gleichungen immer paarweiſe vorhanden ſind, ſo daß der imaginären Wurzel

$$x = g(\cos G + \sin G\sqrt{-1})$$

immer die imaginäre Wurzel

$$x = g(\cos G - \sin G\sqrt{-1})$$

entſpricht, und umgekehrt. Aus dem Obigen wiſſen wir ſchon, daß zwei ſolche imaginäre Wurzeln, wie

$$x = g(\cos G \pm \sin G\sqrt{-1})$$

oder

$$x = p \pm q\sqrt{-1}\,,$$

die bei jeder Gleichung mit lauter reellen Coefficienten immer zugleich vorhanden ſind, conjugirte Wurzeln genannt werden.

Aus dieſem Satze laſſen ſich nun die übrigen oben bewieſenen Eigenſchaften der Gleichungen und Functionen mit lauter reellen Coefficienten auf ganz ähnliche Art wie oben ableiten. Nach der Mittheilung dieſes ſchönen, freilich aber die höhere Analyſis in Anſpruch nehmenden, Beweiſes des ſchon in (19.) auf andere Art bewieſenen wichtigen Theorems gehen wir nun zu andern allgemeinen Eigenſchaften der Gleichungen über.

25. Vorher erinnern wir jedoch noch an folgenden Satz aus der Combinationslehre. Bezeichnen wir nämlich die nte Klaſſe der Combinationen ohne Wiederholungen für die Elemente a, b, c, d, ... p durch $\overset{n}{C}$, die nte Klaſſe der Combinationen ohne Wiederholungen für die Elemente a, b, c, d, ... p, q dagegen durch $\overset{n}{C'}$; ſo iſt immer

$$\overset{n}{C'} = \overset{n}{C} + \overset{n-1}{C}q\,,$$

wie auf folgende Art leicht bewieſen werden kann.

Daß zuerſt ſämmtliche Combinationen in dem Aggregat auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens Combinationen ohne Wiederholungen der nten Klaſſe und alle unter einander verſchieden ſind, iſt ohne weitere Erläuterung klar, und daher bloß noch zu zeigen, daß das in Rede ſtehende Aggregat jede Combination der nten Klaſſe ohne Wiederholungen für die Elemente a, b, c, d, ... p, q enthält. Aber auch hiervon überzeugt man ſich auf der Stelle, wenn man nur bedenkt, daß jede Combination von a, b, c, d, ... p, q, die q nicht enthält, in $\overset{n}{C}$ vorkommen muß, ſo wie offenbar jede das Element q enthaltende Combination, nachdem man q aus ihr weggelaſſen, ſich in $\overset{n-1}{C}$, die urſprüngliche, q enthaltende, Combination ſich folglich nothwendig in $\overset{n-1}{C}q$ finden muß.

26. Sey nun wieder

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots . + Lx + N = 0$$

eine beliebige Gleichung des nten Grades, deren Coefficienten reelle oder imaginäre Größen ſind; ſo iſt nach (16.)

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) \ldots (x - p),$$

wo a, b, c, d, ... p die n Wurzeln der obigen Gleichung ſind, die ſowohl reell, als auch imaginär ſein können. Entwickelt man das obige Product etwa für die Gleichungen der vier erſten Grade; ſo führt die einfachſte Induction zu dem mittelſt der in (25.) gebrauchten Zeichen in der folgenden allgemeinen Formel dargeſtellten Geſetze:

$$f(x) = x^n - \overset{1}{C}x^{n-1} + \overset{2}{C}x^{n-2} - \overset{3}{C}x^{n-3} + \ldots .$$
$$\ldots .. + (-1)^{n-1}\overset{n-1}{C}x + (-1)^n \overset{n}{C},$$

woraus ſich auf der Stelle

$$A = -\overset{1}{C},\ B = \overset{2}{C},\ C = -\overset{3}{C}, \ldots L = (-1)^{n-1}\overset{n-1}{C},\ N = (-1)^n \overset{n}{C}$$

ergiebt. Um dieſes Geſetz allgemein zu beweiſen, wollen wir annehmen, daß es für jede Gleichung des nten Grades gelte. Iſt dann

$$F(x) = 0$$

eine Gleichung des (n + 1)ten Grades, deren n + 1 Wurzeln a, b, c, d, ... p, q ſind; ſo iſt nach (16.)

$$F(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) \ldots (x - p)(x - q),$$

d. i.

$$F(x) = f(x) . (x - q),$$

und folglich, wenn man für $f(x)$ ſeinen obigen Ausdruck ſetzt:

$$F(x) = x^{n+1} - \{\overset{1}{C} + q\}x^n + \{\overset{2}{C} + \overset{1}{C}q\}x^{n-1} - \{\overset{3}{C} + \overset{2}{C}q\}x^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots .. + (-1)^n\{\overset{n}{C} + \overset{n-1}{C}q\}x + (-1)^{n+1}\overset{n}{C}q,$$

woraus nach der in (25.) bewieſenen allgemeinen Relation auf der Stelle

$$F(x) = x^{n+1} - \overset{1}{C}'x^n + \overset{2}{C}'x^{n-1} - \overset{3}{C}'x^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \overset{n}{C}'x + (-1)^{n+1} \overset{n+1}{C}'$$

folgt, das bemerkte Geſetz folglich für Gleichungen des $(n+1)$ſten Grades gilt, wenn es für Gleichungen des $n$ten Grades gilt, und daher allgemein iſt.

In jeder Gleichung iſt folglich der Coefficient des zweiten Gliedes, mit entgegengeſetztem Vorzeichen genommen, die erſte; der Coefficient des dritten Gliedes, mit unverändertem Vorzeichen, die zweite; der Coefficient des vierten Gliedes, mit entgegengeſetztem Vorzeichen genommen, die dritte; der Coefficient des fünften Gliedes, mit unverändertem Vorzeichen, die vierte Klaſſe der Combinationen ohne Wiederholungen der Wurzeln der Gleichung, u. ſ. w.

27. Eine Wurzel der Gleichung

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0,$$

deren Coeffficienten reelle oder imaginäre Größen ſeyn können, ſey α; ſo iſt nach den aus dem Obigen bekannten Sätzen

$$f(x) = (x - \alpha) f_1(x),$$

wo

$$f_1(x) = x^{n-1} + A'x^{n-2} + B'x^{n-3} + \ldots + K'x + L'$$

iſt. Ferner ſeyen $f'(x)$ und $f_1(x)$ die ſogenannten derivirten Functionen von $f(x)$ und $f_1(x)$, welche man erhält, wenn man in den beiden letztern Functionen jedes Glied mit dem Exponenten der in ihm enthaltenen Potenz von x multiplicirt, und den Exponenten dieſer Potenz von x ſelbſt um eine Einheit vermindert, ſo daß alſo

$$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + \ldots$$

$$\ldots + 2Kx + L,$$

$$f'_1(x) = (n-1)x^{n-2} + (n-2)A'x^{n-3} + (n-3)B'x^{n-3} + \ldots$$

$$\ldots + 2I'x + K'$$

iſt. Unter dieſen Vorausſetzungen findet jederzeit die Gleichung

$$f'(x) = (x - \alpha) f'_1(x) + f_1(x)$$

Statt.

Da nämlich

$$f(x) = (x - \alpha) f_1(x),$$

folglich

$$f(x) + \alpha f_1(x) = x f_1(x)$$

iſt; ſo erhält man, wenn man die obigen Ausdrücke von $f(x)$

und $f_1(x)$ ſubſtituirt, auf der Stelle durch Vergleichung der Glieder auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} A + \alpha &= A', \\ B + \alpha A' &= B', \\ C + \alpha B' &= C', \\ D + \alpha C' &= D', \\ &\ldots\ldots \\ L + \alpha K' &= L', \\ N + \alpha L' &= 0. \end{aligned}$$

Nun iſt

$$\begin{aligned} f'(x) + \alpha f'_1(x) = nx^{n-1} &+ (n-1)(A+\alpha)x^{n-2} \\ &+ (n-2)(B+\alpha A')x^{n-3} \\ &+ (n-3)(C+\alpha B')x^{n-4} \\ &+ (n-4)(D+\alpha C')x^{n-5} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &+ L + \alpha K'; \end{aligned}$$

alſo iſt mittelſt der obigen Gleichungen

$$\begin{aligned} f'(x) + \alpha f'_1(x) = nx^{n-1} &+ (n-1)A'x^{n-2} + (n-2)B'x^{n-3} \\ &+ (n-3)C'x^{n-4} + \ldots + 2K'x + L'. \end{aligned}$$

Denſelben Ausdruck erhält man aber auf der Stelle für

$$f_1(x) + xf'_1(x);$$

alſo iſt

$$f'(x) + \alpha f'_1(x) = f_1(x) + xf'_1(x),$$

$$f'(x) = (x-\alpha)f'_1(x) + f_1(x),$$

welches die zu beweiſende Gleichung iſt.

28. Sey nun

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha_1)f_1(x) \\ &= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)f_2(x) \\ &= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)f_3(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_{n-1})f_{n-1}(x) \\ &= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n); \end{aligned}$$

ſo iſt nach der in (27.) bewieſenen Relation, wenn wir die derivirten Functionen wie dort bezeichnen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-\alpha_1)f'_1(x) + f_1(x), \\ f'_1(x) &= (x-\alpha_2)f'_2(x) + f_2(x), \\ f'_2(x) &= (x-\alpha_3)f'_3(x) + f_3(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f'_{n-2}(x) &= (x-\alpha_{n-1})f'_{n-1}(x) + f_{n-1}(x), \\ f'^{n-1}(x) &= (x-\alpha_n)f'_n(x) + f_n(x), \end{aligned}$$

wobei man zu bemerken hat, daß

$$f_n(x) = 1 = x^0,\ f'_n(x) = 0,$$

folglich $f_{n-1}(x) = 1$ iſt.

Durch ſucceſſive Subſtitution ergiebt ſich aus den obigen Gleichungen leicht:

$$\begin{aligned} f'(x) = {} & (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_{n-1}) \\ & + (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-2})f_{n-1}(x) \\ & + (x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{n-3})f_{n-2}(x) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)f_3(x) \\ & + (x-\alpha_1)f_2(x) \\ & + f_1(x)\,; \end{aligned}$$

alſo, wie leicht erhellet,

$$f'(x) = f(x)\left\{\frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \frac{1}{x-\alpha_3} + \ldots + \frac{1}{x-\alpha_n}\right\}.$$

Repräſentirt nun α irgend eine der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_n$; ſo iſt, weil

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N,$$
$$0 = \alpha^n + A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2} + \ldots + L\alpha + N$$

iſt,

$$\frac{f(x)}{x-\alpha} =$$

$$\frac{x^n-\alpha^n}{x-\alpha} + A\frac{x^{n-1}-\alpha^{n-1}}{x-\alpha} + B\frac{x^{n-2}-\alpha^{n-2}}{x-\alpha} + \ldots + L\frac{x-\alpha}{x-\alpha}$$

$$= x^{n-1} + \left.\begin{matrix}\alpha \\ +A\end{matrix}\right\} x^{n-2} + \left.\begin{matrix}\alpha^2 \\ +A\alpha \\ +B\end{matrix}\right\} x^{n-3} + \left.\begin{matrix}\alpha_3 \\ +A\alpha^2 \\ +B\alpha \\ +C\end{matrix}\right\} x^{n-4} + \ldots + \begin{matrix}\alpha^{n-1} \\ +A\alpha^{n-2} \\ +B\alpha^{n-3} \\ +C\alpha^{n-4} \\ \cdots \\ +L\end{matrix}\;.$$

Setzen wir alſo

$$\frac{f(x)}{x-\alpha_1} + \frac{f(x)}{x-\alpha_2} + \frac{f(x)}{x-\alpha_3} + \ldots + \frac{f(x)}{x-\alpha_n} = \Sigma\frac{f(x)}{x-\alpha_1}$$

und für jedes k

$$\alpha_1{}^k + \alpha_2{}^k + \alpha_3{}^k + \alpha_4{}^k + \ldots \alpha_n{}^k = S_k\,;$$

ſo erhalten wir leicht

$$\Sigma\frac{f(x)}{x-\alpha_1} =$$

$$nx^{n-1} + \left.\begin{matrix}S_1 \\ +nA\end{matrix}\right\} x^{n-2} + \left.\begin{matrix}S_2 \\ +AS_1 \\ +nB\end{matrix}\right\} x^{n-3} + \left.\begin{matrix}S_3 \\ +AS_2 \\ +BS_1 \\ +nC\end{matrix}\right\} x^{n-4} + \ldots + \begin{matrix}S_{n-1} \\ +AS_{n-2} \\ +BS_{n-3} \\ +CS_{n-4} \\ \cdots \\ +nL\end{matrix}\;.$$

Weil nun ferner nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma \frac{f(x)}{x-\alpha_1} = f'(x)$$

$$= nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + \ldots$$
$$\ldots + 2Kx + L$$

iſt; ſo ergiebt ſich durch Vergleichung der einzelnen Glieder dieſer beiden Ausdrücke von

$$\Sigma \frac{f(x)}{x-\alpha_1}$$

die folgende Reihe höchſt merkwürdiger Gleichungen:

$$0 = S_1 + A$$
$$0 = S_2 + AS_1 + 2B$$
$$0 = S_3 + AS_2 + BS_1 + 3C$$
$$0 = S_4 + AS_3 + BS_2 + CS_1 + 4D$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = S_{n-1} + AS_{n-2} + BS_{n-3} + CS_{n-4} + \ldots + (n-1)L.$$

Multiplicirt man die gegebene Gleichung mit x^m, wo m jede poſitive ganze Zahl bezeichnet, die auch = 0 ſeyn kann, ſo erhält man

$$x^{n+m} + Ax^{n+m-1} + Bx^{n+m-2} + \ldots + Lx^{m+1} + Nx^m = 0,$$

und folglich, wenn man für x nach und nach die Wurzeln

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_n$$

der gegebenen Gleichung ſetzt:

$$\alpha_1^{n+m} + A\alpha_1^{n+m-1} + B\alpha_1^{n+m-2} + \ldots + L\alpha_1^{m+1} + N\alpha_1^m = 0,$$
$$\alpha_2^{n+m} + A\alpha_2^{n+m-1} + B\alpha_2^{n+m-2} + \ldots + L\alpha_2^{m+1} + N\alpha_2^m = 0,$$
$$\alpha_3^{n+m} + A\alpha_3^{n+m-1} + B\alpha_3^{n+m-2} + \ldots + L\alpha_3^{m+1} + N\alpha_3^m = 0,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

$$\alpha_n^{n+m} + A\alpha_n^{n+m-1} + B\alpha_n^{n+m-2} + \ldots + L\alpha_n^{m+1} + N\alpha_n^m = 0;$$

alſo, wenn man dieſe Gleichungen zu einander addirt:

$$0 = S_{n+m} + AS_{n+m-1} + BS_{n+m-2} + \ldots + LS_{m+1} + NS_m$$

für jedes poſitive ganze m, welches auch = 0 ſeyn kann. Setzt man nun in dieſer Gleichung nach und nach

$$m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$$

und verbindet die auf dieſe Weiſe hervorgehenden Gleichungen mit den oben gefundenen Gleichungen; ſo erhält man die folgende Reihe merkwürdiger Gleichungen:

$$0 = S_1 + A$$
$$0 = S_2 + AS_1 + 2B$$
$$0 = S_3 + AS_2 + BS_1 + 3C$$
$$0 = S_4 + AS_3 + BS_2 + CS_1 + 4D$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = S_n + AS_{n-1} + BS_{n-2} + CS_{n-3} + \ldots + nN$$
$$0 = S_{n+1} + AS_n + BS_{n-1} + CS_{n-2} + \ldots + NS_1$$

$$0 = S_{n+2} + AS_{n+1} + BS_n + CS_{n-1} + \ldots + NS_2$$
$$0 = S_{n+3} + AS_{n+2} + BS_{n+1} + CS_n + \ldots + NS_3$$
u. ſ. w. u. ſ. w.

Dieſe von Newton gefundenen Gleichungen ſind deshalb ſo merkwürdig und wichtig, weil mittelſt derſelben die Summen der poſitiven ganzen Potenzen der Wurzeln einer jeden Gleichung aus den Coefficienten derſelben berechnet werden können, ohne die Wurzeln ſelbſt zu kennen. Man nennt den in dieſen Gleichungen enthaltenen Satz nach ſeinem Erfinder den Newtonſchen Satz. Ueber die Geſchichte dieſes Satzes ſ. m. den Artikel Combination (47.). Obiger Beweis iſt mit einigen Abänderuugen derſelbe, welchen ich zuerſt in meinen Mathematischen Abhandlungen. Altona 1822. S. 38. gegeben habe, und ſcheint ſich mir durch Kürze und Strenge zu empfehlen.

Will man die Coefficienten einer Gleichung durch die Potenzenſummen ihrer Wurzeln ausdrücken; ſo erhält man aus den obigen Gleichungen:

$$A = -S_1,$$
$$B = -\frac{AS_1 + S_2}{2},$$
$$C = -\frac{BS_1 + AS_2 + S_3}{3},$$
$$D = -\frac{CS_1 + BS_2 + AS_3 + S_4}{4},$$
$$E = -\frac{DS_1 + CS_2 + BS_3 + AS_4 + S_5}{5}.$$
u. ſ. w. u. ſ. w.

Uebrigens kann man auch leicht die Summen der Potenzen der Wurzeln unmittelbar durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken, wie folgende Formeln, die ſich aus den obigen recurrenden Gleichungen für die Summen der Potenzen der Wurzeln leicht ergeben, zeigen:

$$S_1 = -A,$$
$$S_2 = A^2 - 2B,$$
$$S_3 = -A^3 + 3AB - 3C,$$
$$S^4 = A_4 - 4A^2B + 2B^2 + 4AC - 4D,$$
$$S^5 = -A_5 + 5A^3B - 5AB^2 - 5A^2C + 5BC + 5AD - 5E,$$
$$S^6 = A_6 - 6A^4B + 9A^2B^2 - 2B^3 + 6A^3C - 12ABC + 3C^2$$
$$- 6A^2D + 6BD + 6AE - 6F,$$
u. ſ. w. u. ſ. w.

29. Um nun auch Gleichungen zur Berechnung der Summen der negativen ganzen Potenzen der Wurzeln einer Gleichung zu finden, wollen wir zuerſt folgende Aufgabe auflöſen:

Wenn die Wurzeln der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0$$

die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_n$ ſind, eine Gleichung zu finden, deren Wurzeln die Größen

$$\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}, \frac{1}{\alpha_4}, \ldots \frac{1}{\alpha_n}$$

ſind.

Die Function auf der linken Seite des Gleichheitszeichens bezeichne man, wie gewöhnlich, durch $f(x)$; ſo iſt für jedes x

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n);$$

alſo, wenn man $x = \frac{1}{y}$ ſetzt,

$$\frac{1}{y^n} + \frac{A}{y^{n-1}} + \frac{B}{y^{n-2}} + \ldots + \frac{L}{y} + N$$

$$= \left(\frac{1}{y}-\alpha_1\right)\left(\frac{1}{y}-\alpha_2\right)\left(\frac{1}{y}-\alpha_3\right)\ldots\left(\frac{1}{y}-\alpha_n\right)$$

$$= \frac{(1-\alpha_1 y)(1-\alpha_2 y)(1-\alpha_3 y)\ldots(1-\alpha_n y)}{y^n},$$

oder

$$1 + Ay + By^2 + \ldots + Ly^{n-1} + Ny^n$$

$$= (1-\alpha_1 y)(1-\alpha_2 y)(1-\alpha_3 y)\ldots(1-\alpha_n y),$$

$$y^n + \frac{L}{N}y^{n-1} + \ldots + \frac{B}{N}y^2 + \frac{A}{N}y + \frac{1}{N}$$

$$= \frac{(1-\alpha_1 y)(1-\alpha_2 y)(1-\alpha_3 y)\ldots(1-\alpha_n y)}{N}.$$

Nach dem in (26.) bewieſenen Satze iſt aber

$$N = (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots \alpha_n.$$

Alſo iſt

$$y^n + \frac{L}{N}y^{n-1} + \ldots + \frac{B}{N}y^2 + \frac{A}{N}y + \frac{1}{N}$$

$$= \frac{(-1)^n(1-\alpha_1 y)(1-\alpha_2 y)(1-\alpha_3 y)\ldots(1-\alpha_n y)}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots \alpha_n}$$

$$= \frac{(\alpha_1 y-1)(\alpha_2 y-1)(\alpha_3 y-1)\ldots(\alpha^n y-1)}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots \alpha_n}$$

$$= \left(y-\frac{1}{\alpha_1}\right)\left(y-\frac{1}{\alpha_2}\right)\left(y-\frac{1}{\alpha_3}\right)\ldots\left(y-\frac{1}{\alpha_n}\right),$$

ſo daß alſo offenbar, wenn wir x für y ſchreiben, die Gleichung

$$x^n + \frac{L}{N}x^{n-1} + \ldots + \frac{B}{N}x^2 + \frac{A}{N}x + \frac{1}{N}$$

die geſuchte iſt. Man nennt dieſe Gleichung in Bezug auf die gegebene Gleichung $f(x) = 0$ die Gleichung der reciproken Wurzeln.

30. Wendet man auf die Gleichung der reciproken Wurzeln die in (28.) bewieſenen Gleichungen an, bezeichnet die Summen der negativen Potenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ durch

$$S_{-1},\ S_{-2},\ S_{-3},\ S_{-4},\ S_{-5},\ \ldots,$$

und ſetzt der Kürze wegen

$$\frac{L}{N} = A',\ \frac{K}{N} = B',\ \frac{I}{N} = C', \ldots \frac{A}{N} = L',\ \frac{1}{N} = N';$$

ſo erhält man:

$$0 = S_{-1} + A'$$
$$0 = S_{-2} + A'S_{-1} + 2B'$$
$$0 = S_{-3} + A'S_{-2} + B'S_{-1} + 3C'$$
$$0 = S_{-4} + A'S_{-3} + B'S_{-2} + C'S_{-1} + 4D'$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0 = S_{-n} + A'S_{-(n-1)} + B'S_{-(n-2)} + C'S_{-(n-3)} + \ldots + nN'$$
$$0 = S_{-(n+1)} + A'S_{-n} + B'S_{-(n-1)} + C'S_{-(n-2)} + \ldots + N'S_{-1}$$
$$0 = S_{-(n+2)} + A'S_{-(n+1)} + B'S_{-n} + C'S_{-(n-1)} + \ldots + N'S_{-2}$$
$$0 = S_{-(n+3)} + A'S_{-(n+2)} + B'S_{-(n+1)} + C'S_{-n} + \ldots + N'S_{-3}.$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

31. Wir wollen jetzt annehmen, daß alle Coefficienten der einzelnen Glieder der Gleichung $f(x) = 0$ reelle Größen ſeyen. Das erſte oder höchſte Glied dieſer Gleichung wird, wie immer, als poſitiv angenommen, und der Coefficient dieſes Gliedes iſt die Einheit. Betrachtet man nun überhaupt die Reihe der Vorzeichen der einzelnen Glieder, ſo können in derſelben an den verſchiedenen Stellen entweder zwei gleiche Zeichen, wie $+\,+$ oder $-\,-$, oder zwei ungleiche Zeichen, wie $+\,-$ oder $-\,+$ auf einander folgen. Das Erſte nennt man eine Folge, das Zweite einen Wechſel. Die Betrachtung dieſer Zeichenfolgen und Zeichenwechſel iſt, wie wir ſogleich ſehen werden, in der Theorie der Gleichungen mit lauter reellen Coefficienten von ganz beſonderer Wichtigkeit.

32. Seyen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ſämmtliche poſitive Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = 0;$$

ſo iſt

$$f(x) = X(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots,$$

wo X eine ganze rationale Function von x mit lauter reellen Coefficienten iſt. Wir wollen

$$X = x^m + \ldots - Kx^k - \ldots + Px^p + \ldots - Qx^q - \ldots \pm Ux^u \pm \ldots \pm V$$

ſetzen, und nehmen an, daß $-Kx^k$ das erſte negative Glied, $+Px^p$ das erſte poſitive Glied nach $-Kx^k$, $-Qx^q$ das erſte negative Glied nach $+Px^p$ iſt, u. ſ. w. Am Ende werden einige Glieder mit gleichen poſitiven oder negativen Vorzeichen vorkommen; das erſte dieſer Glieder ſoll $\pm Ux^u$ ſeyn, ſo daß alſo alle Glieder von $\pm Ux^u$ bis $\pm V$ gleiche Vorzeichen haben, dem Gliede $\pm Ux^u$ aber ein Glied mit entgegengeſetztem Vorzeichen vorhergeht. Bildet man nun das Product $X(x-\alpha)$,

ſo wird man für daſſelbe offenbar einen Ausdruck von folgender Form erhalten:

$$x^{m+1} \,..\, - K'x^{k+1} \,..\, + P'x^{p+1} \,..\, - Q'x^{q+1} \,..\, \pm U'x^{n+1} \,..\, \mp \alpha V \,.$$

Vergleicht man nun die Ausdrücke von X und X(x — α) mit einander, ſo iſt klar, daß in

$$x^{m+1} \,..\, - K'x^{k+1} \,..\, + P'x^{p+1} \,..\, - Q'x^{q+1} \,..\, \pm U'x^{n+1}$$

wenigſtens eben ſo viele Zeichenwechſel vorkommen, wie in

$$x^m + \,..\, - Kx^k - \,..\, + Px^p + \,..\, - \,..\, \pm Ux^n \,.$$

In X kommt in dem Theile

$$\pm Ux^n \pm \,..\, \pm V$$

kein, in X(x—α) dagegen in dem Theile

$$\pm U'x^{n+1} \,...\, \mp \alpha V$$

wenigſtens ein Zeichenwechſel vor, ſo daß alſo offenbar in jedem Falle X(x—α) wenigſtens einen Zeichenwechſel mehr enthält wie X.

Eben ſo hat alſo X(x — α)(x — β) wenigſtens einen Zeichenwechſel mehr wie X(x—α), folglich jederzeit wenigſtens zwei Zeichenwechſel mehr als X. Das Product

$$X(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

hat wenigſtens einen Zeichenwechſel mehr als X(x—α)(x—β), folglich wenigſtens drei Zeichenwechſel mehr als X. Wie man auf dieſe Art weiter gehen kann, iſt klar, und es erhellet alſo hieraus mit völliger Deutlichkeit, daß, auch wenn X gar keinen Zeichenwechſel enthielte, in

$$f(x) = X(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \,.....$$

immer mindeſtens eben ſo viele Zeichenwechſel vorkommen müſſen, wie die Gleichung

$$f(x) = 0$$

poſitive Wurzeln hat. Dieſer Satz gilt immer, wie auch die Function $f(x)$ beſchaffen ſeyn mag, namentlich auch dann noch, wenn dieſelbe kein vollſtändiges Polynom iſt, ohne daß man in dieſem Falle die fehlenden Glieder durch Glieder mit dem Coefficienten Null zu ergänzen braucht.

Man nehme jetzt in der Gleichung $f(x) = 0$ die Coefficienten der Potenzen x^{n-1}, x^{n-3}, x^{n-5}, x^{n-7}, ... mit entgegengeſetzten Vorzeichen; ſo erhält man eine neue Gleichung, welche wir durch

$$f'(x) = 0$$

bezeichnen wollen, und es erhellet leicht, daß die beiden Gleichungen

$$f(x) = 0,\; f'(x) = 0$$

gleiche, aber entgegengeſetzte Wurzeln haben. Iſt nämlich

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \,...\, + Lx + N\,,$$

ſo iſt

$$f'(x) = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \ldots + L(-1)^{n-1}x + N(-1)^n,$$

und, wenn a eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ iſt,

$$f(a) = a^n + Ba^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + La + N.$$

Setzt man nun in der Function $f'(x)$

$$x = -a = (-1).a;$$

ſo wird

$$f'(-a) = a(-1)^n - Aa^{n-1}(-1)^{n-1} + Ba^{n-2}(-1)^{n-2} - \ldots$$
$$\ldots + La(-1)(-1)^{n-1} + N(-1)^n$$
$$= a(-1)^n + Aa^{n-1}(-1)^n + Ba^{n-2}(-1)^n + \ldots$$
$$\ldots + La(-1)^n + N(-1)^n,$$

d. i.

$$f'(-a) = f(a).(-1)^n;$$

folglich, weil $f(a) = 0$ iſt, auch

$$f'(-a) = 0,$$

ſo daß alſo $-a$ eine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ iſt, wie behauptet wurde.

Nach dem Obigen müſſen in $f'(x)$ wenigſtens eben ſo viele Zeichenwechſel vorkommen, wie die Gleichung $f'(x) = 0$ poſitive, d. i. nach dem ſo eben Bewieſenen, wie die Gleichung $f(x) = 0$ negative Wurzeln hat, wodurch wir auf das folgende überaus wichtige und merkwürdige Theorem geführt werden:

Die Gleichung $f(x) = 0$ kann nicht mehr poſitive Wurzeln haben, als es Zeichenwechſel in $f(x)$ giebt, und nicht mehr negative Wurzeln, als Zeichenwechſel in $f'(x)$ ſind.

Iſt $f(x)$ ein vollſtändiges Polynom, ſo daß in $f(x)$ kein Glied fehlt, oder kein Coefficient $= 0$ iſt; ſo entſpricht offenbar jeder Zeichenfolge und jedem Zeichenwechſel in $f(x)$ reſpective ein Zeichenwechſel und eine Zeichenfolge in $f'(x)$ und umgekehrt, woraus ſich auf der Stelle ergiebt, daß man in dieſem Falle das obige Theorem auch auf den folgenden Ausdruck bringen kann:

Wenn in $f(x)$ kein Coefficient $= 0$ iſt, ſo hat die Gleichung $f(x) = 0$ nicht mehr poſitive Wurzeln, als die Function $f(x)$ Zeichenwechſel, und nicht mehr negative Wurzeln, als dieſe Function Zeichenfolgen.

Dieſer letztere Satz heißt gewöhnlich der Harriotiſche Lehrſatz, obgleich Descartes deſſen eigentlicher Erfinder iſt, indem derſelbe zuerſt in des Letztern Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences. Plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie, qui sont des éssais de cette méthode. A Leyde. 1637. p. 373. vorzukommen ſcheint. In Harriots Werken findet er ſich nicht. Der hier mitgetheilte ſchöne überaus ein-

fache Beweis iſt von Gauß in **Crelles Journal. B. III. S. 1.** gegeben, und von Gergonne in den Annales de Mathématiques. T. XVIII. p. 352. wiederholt worden. Der von dem Verfaſſer dieſer Supplemente in Crelles Journal. B. II. S. 335. gegebene Beweis beruhet gleichfalls auf eigenthümlichen Betrachtungen, iſt aber nicht ſo einfach, wie der Beweis von Gauß, welcher zugleich vor allen übrigen Beweiſen den Vorzug hat, daß er ſich nicht auf den Fall beſchränkt, wenn in $f(x)$ kein Glied fehlt oder kein Coefficient $= 0$ iſt. Mehrere hierher gehörende literariſche Notizen ſ. m. Th. II. S. 435., denen wir nur noch **Aepinus: démonstration du theorème de Harriot. Mém. de Berlin. 1758. p. 354.**, und **Fischer, de theoremate, cui Harriotico nomen vulgo datur. Berol. 1819.** beifügen.

Fehlt kein Glied der Function $f(x)$ und hat die Gleichung

$$f(x) = 0$$

kein imaginären Wurzeln, ſo ſey p die Anzahl der poſitiven, m die Anzahl der negativen Wurzeln, f die Anzahl der Zeichenfolgen, w die Anzahl der Zeichenwechſel in der Function $f(x)$. Iſt nun wie gewöhnlich n der Grad der in Rede ſtehenden Gleichung, ſo iſt

$$p + m = n, f + w = n;$$

alſo

$$p + m = f + w.$$

Nach dem Obigen iſt

$$p \overline{\overline{<}} w, m \overline{\overline{<}} f.$$

Wäre nun $p < w$, ſo wäre wegen der Gleichung

$$p + m = f + w$$

offenbar $m > f$, welches gegen das Obige ſtreitet. Daher muß $p = w$ und folglich $m = f$ ſeyn, ſo daß wir alſo jetzt folgenden Lehrſatz haben:

Wenn kein Glied der Function $f(x)$ fehlt und die Gleichung $f(x) = 0$ lauter reelle Wurzeln hat; ſo iſt die Anzahl der poſitiven Wurzeln dieſer Gleichung jederzeit der Anzahl der Zeichenwechſel, die Anzahl der negativen Wurzeln der Anzahl der Zeichenfolgen in der Function $f(x)$ gleich.

In dem Falle, wo in der Function $f(x)$ Glieder fehlen, kann man über die Gleichung $f(x) = 0$ noch folgende Betrachtungen anſtellen, wozu die Einführung der folgenden Bezeichnungen nöthig iſt.

Die Anzahl der auf einander folgenden fehlenden Glieder kann theils gerade, theils ungerade ſeyn, und Reihen auf einander folgender Glieder können theils zwiſchen zwei in der Gleichung wirklich vorkommenden Gliedern mit gleichen, theils zwiſchen zwei

in der Gleichung wirklich vorkommenden Gliedern mit entgegengeſetzter Vorzeichen fehlen.

α ſey die Anzahl der fehlenden Reihen auf einander folgender Glieder mit gerader Gliederzahl zwiſchen zwei wirklich vorkommenden Gliedern der Gleichung mit gleichen Vorzeichen, und die Anzahl der Glieder in den einzelnen fehlenden Reihen wollen wir durch $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_\alpha$ bezeichnen.

Aehnliche Bedeutung mögen β und $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots b_\beta$ für die fehlenden Reihen mit ungerader Gliederzahl zwiſchen zwei wirklich vorkommenden Gliedern der Gleichung mit gleichen Vorzeichen haben.

γ ſey die Anzahl der fehlenden Reihen mit gerader Gliederzahl zwiſchen zwei wirklich vorkommenden Gliedern der Gleichung mit entgegengeſetzten Vorzeichen, und die Anzahl der Glieder in jeder einzelnen dieſer fehlenden Reihen wollen wir durch $c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots c_\gamma$ bezeichnen.

δ ſey die Anzahl der fehlenden Reihen mit ungerader Gliederzahl zwiſchen zwei wirklich vorkommenden Gliedern der Gleichung mit entgegengeſetzten Vorzeichen, und die Anzahl der Glieder in den einzelnen fehlenden Reihen ſoll durch $d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots d_\delta$ bezeichnet werden.

Iſt nun wieder n der Grad der Gleichung, w die Anzahl der Zeichenwechſel, f die Anzahl der Zeichenfolgen der in der Gleichung wirklich vorkommenden unmittelbar auf einander folgenden Glieder, zwiſchen denen keine andern Glieder fehlen; ſo iſt offenbar

$$n = w + f + \left\{\begin{matrix} \alpha + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_\alpha \\ + \beta + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_\beta \\ + \gamma + c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_\gamma \\ + \delta + d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_\delta \end{matrix}\right\},$$

welches auf der Stelle erhellet, wenn man nur bedenkt, daß überhaupt durch das Fehlen von k auf einander folgenden Gliedern das Fehlen von k + 1 Zeichenfolgen oder Zeichenwechſeln bewirkt wird.

Statt der fehlenden Glieder denke man ſich nun Glieder mit dem Coefficienten Null und beliebigem Vorzeichen geſetzt.

Beſtimmt man aber die Vorzeichen der für die fehlenden Glieder geſetzten Glieder ſo, daß die Anzahl der Zeichenwechſel ein Minimum wird; ſo iſt dieſe kleinſte Anzahl der Zeichenwechſel, wie leicht erhellet,

$$w + \gamma + \delta,$$

und folglich nach dem oben bewieſenen Carteſiſchen Lehrſatze, wenn p die Anzahl der poſitiven Wurzeln bezeichnet,

$$p \leqq w + \gamma + \delta.$$

Beſtimmt man ferner die Vorzeichen der für die fehlenden Glieder geſetzten Glieder ſo, daß die Anzahl der Zeichenfolgen ein Minimum wird; ſo iſt dieſe kleinſte Anzahl der Zeichenfolgen offenbar

$$f + \alpha + \delta\,,$$

und folglich nach dem Carteſiſchen Lehrſatze, wenn m die Anzahl der negativen Wurzeln bezeichnet,

$$\mathrm{m} \overline{\overline{<}} f + \alpha + \delta\,.$$

Für die Anzahl $\mathrm{p} + \mathrm{m}$ der reellen Wurzeln überhaupt hat man alſo

$$\mathrm{p} + \mathrm{m} \overline{\overline{<}} \mathrm{w} + f + \alpha + \gamma + 2\delta\,,$$

und folglich, wenn i die Anzahl der imaginären Wurzeln bezeichnet, da $\mathrm{p} + \mathrm{m} + \mathrm{i} = \mathrm{n}$ iſt:

$$\mathrm{i} \overline{\overline{>}} \mathrm{n} - \mathrm{w} - f - \alpha - \gamma - 2\delta\,,$$

oder, wenn man für $\mathrm{n} - \mathrm{w} - f$ den ſich aus dem Obigen ergebenden Ausdruck ſetzt:

$$\mathrm{i} \overline{\overline{>}} \left\{ \begin{matrix} \mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 + \mathrm{a}_3 + \ldots + \mathrm{a}_\alpha \\ + \mathrm{b}_1 + \mathrm{b}_2 + \mathrm{b}_3 + \ldots + \mathrm{b}_\beta \\ + \mathrm{c}_1 + \mathrm{c}_2 + \mathrm{c}_3 + \ldots + \mathrm{c}_\gamma \\ + \mathrm{d}_1 + \mathrm{d}_2 + \mathrm{d}_3 + \ldots + \mathrm{d}_\delta \end{matrix} \right\} + (\beta - \delta)\,.$$

Dies führt auf den folgenden Lehrſatz:

Wenn in $f(\mathrm{x})$ Glieder fehlen, ſo iſt die Anzahl der imaginären Wurzeln der Gleichung $f(\mathrm{x}) = 0$ nicht kleiner, d. i. wenigſtens eben ſo groß wie die Anzahl aller fehlenden Glieder, vermehrt um den Ueberſchuß der Anzahl der Reihen fehlender Glieder mit ungerader Gliederzahl zwiſchen zwei wirklichen Gliedern der Gleichung mit gleichen Vorzeichen über die Anzahl der Reihen fehlender Glieder mit ungerader Gliederzahl zwiſchen zwei wirklichen Gliedern der Gleichung mit entgegengeſetzten Vorzeichen.

Cauchy beſtimmt in ſeinem Cours d'Analyse de l'école royale polytechnique. Paris. 1821. p. 519. die Gränzen der Anzahl der poſitiven, negativen und imaginären Wurzeln einer Gleichung mit lauter reellen Coefficienten auf eine andere Weiſe, die ſich unmittelbar aus dem Carteſiſchen Lehrſatz ergiebt, und daher hier noch bemerkt werden mag. Fehlen nämlich auch Glieder in der Gleichung $f(\mathrm{x}) = 0$, ſo kann man ſich dieſelben doch immer durch Glieder mit dem Coefficienten Null erſetzt denken, deren Vorzeichen ſich willkührlich annehmen laſſen. Nimmt man nun dieſe Vorzeichen ſo an, daß die Anzahl ſämmtlicher Wechſel ein Minimum wird, ſo ſey die Anzahl der Wechſel $= \mathrm{m}'$; nimmt

man dieſelben dagegen ſo an, daß die Anzahl der Folgen ein Minimum wird; ſo ſey die Anzahl der Folgen $= m''$. Dies vorausgeſetzt, ſo ergiebt ſich aus dem Carteſiſchen Lehrſatze folgender Satz:

Die Anzahl der poſitiven Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ kann nicht größer als m', die Anzahl der negativen Wurzeln nicht größer als m'' ſeyn, und die Anzahl der imaginären Wurzeln iſt folglich, wenn n der Grad der Gleichung iſt, immer eben ſo groß oder größer wie

$$n - (m' + m'').$$

33. Einen die Anzahl der reellen Wurzeln einer Gleichung betreffenden Satz hat L. Olivier in Crelles Journal. I. S. 223. mitgetheilt, welcher hier auch aufgenommen zu werden verdient. Die gegebene Gleichung ſey

$$1.\quad x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \alpha_3 x^{n-3} + \ldots + \alpha_n = 0.$$

Für $x = -y$ wird

$$2.\quad y^n - \alpha_1 y^{n-1} + \alpha_2 y^{n-2} - \alpha_3 y^{n-3} + \ldots \pm \alpha_n = 0,$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen iſt, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl iſt. Sind nun

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

die Wurzeln der Gleichung (1.), ſo ſind

$$-x_1, -x_2, -x_3, -x_4, \ldots -x_n$$

die Wurzeln der Gleichung (2.), und es iſt folglich

$$3.\quad x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \alpha_3 x^{n-3} + \ldots + \alpha_n$$
$$= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n),$$

$$4.\quad x^n - \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} - \alpha_3 x^{n-3} + \ldots \pm \alpha_n$$
$$= (x + x_1)(x + x_2)(x + x_3) \ldots (x + x_n).$$

Alſo iſt, wenn man die Größen auf der linken und rechten Seite dieſer Gleichungen in einander multiplicirt,

$$5.\quad \{x^n + \alpha_2 x^{n-2} + \alpha_4 x^{n-4} + \ldots\}^2 - \{\alpha_1 x^{n-1} + \alpha_3 x^{n-3} + \alpha_5 x^{n-5} + \ldots\}^2$$
$$= (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - x_3^2) \ldots (x^2 - x_n^2),$$

d. i., wenn man der Kürze wegen

$$\alpha_1\alpha_1 - 2\alpha_2 = \beta_1,$$
$$\alpha_2\alpha_2 + 2\alpha_4 - 2\alpha_1\alpha_3 = \beta_2,$$
$$\alpha_3\alpha_3 - 2\alpha_6 + 2\alpha_1\alpha_5 - 2\alpha_2\alpha_4 = \beta_3,$$
$$\alpha_4\alpha_4 + 2\alpha_8 - 2\alpha_1\alpha_7 + 2\alpha_2\alpha_6 - 2\alpha_3\alpha_5 = \beta_4,$$
$$\alpha_5\alpha_5 - 2\alpha_{10} + 2\alpha_1\alpha_9 - 2\alpha_2\alpha_8 + 2\alpha_3\alpha_7 - 2\alpha_4\alpha_6 = \beta_5,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

und $x^2 = z$ ſetzt:

$$6.\quad z^n - \beta_1 z^{n-1} + \beta_2 z^{n-2} - \beta_3 z^{n-3} + \ldots$$
$$= (z - x_1^2)(z - x_2^2)(z - x_3^2) \ldots (z - x_n^2),$$

woraus man ſieht, daß

$$x_1^2,\ x_2^2,\ x_3^2,\ x_4^2,\ \ldots\ x_n^2$$

die n Wurzeln der Gleichung

$$7.\quad z^n - \beta_1 z^{n-1} + \beta_2 z^{n-2} - \beta_3 z^{n-3} + \ldots = 0\,;$$

oder

$$8.\quad x^n - \beta_1 x^{n-1} + \beta_2 x^{n-2} - \beta_3 x^{n-3} + \ldots = 0$$

ſind. Daher ſind die Wurzeln der Gleichung (1.) die Quadratwurzeln aus den Wurzeln der Gleichung (8.), woraus unmittelbar folgt, daß die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung (1.) der Anzahl der poſitiven Wurzeln der Gleichung (8.), welche immer leicht aus der Gleichung (1.) abgeleitet werden kann, gleich iſt. Die Anzahl der poſitiven Wurzeln der Gleichung (8.) iſt aber, die Function dieſer Gleichung mag ein vollſtändiges oder ein unvollſtändiges Polynom ſeyn, nicht größer als die Anzahl der in ihr vorkommenden Zeichenwechſel. Alſo hat die Gleichung (1.) nie mehr reelle Wurzeln, wie die Gleichung (8.), welche aus jener immer leicht abgeleitet werden kann, Zeichenwechſel.

Iſt z. B.

$$x^5 + x^3 + 3x^2 + 16x + 15 = 0$$

die gegebene Gleichung, ſo iſt

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 3,\ \alpha_4 = 16,\ \alpha_5 = 15\,;$$

alſo

$$\beta_1 = -2,\ \beta_2 = +33,\ \beta_3 = -23,\ \beta_4 = +166,\ \beta_5 = +225\,.$$

Folglich iſt die Gleichung (8.) in dieſem Falle

$$x^5 + 2x^4 + 33x^3 + 23x^2 + 166x - 225 = 0\,.$$

Da in dieſer Gleichung nur ein Zeichenwechſel vorkommt, ſo kann die gegebene Gleichung nicht mehr als eine reelle Wurzel haben, und in der That ſind die Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$-1,\ -1 \pm \sqrt{-2},\ \tfrac{1}{2}(3 \pm \sqrt{-11})\,.$$

Iſt ferner

$$x^6 - 10x^4 + 4x^3 + 16x^2 - 27x + 36 = 0$$

die gegebene Gleichung, ſo iſt

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = -10,\ \alpha_3 = 4,\ \alpha_4 = 16,\ \alpha_5 = -27,\ \alpha_6 = 36\,;$$

alſo

$$\beta_1 = +20,\ \beta_2 = +132,\ \beta_3 = +264,\ \beta_4 = -680,\ \beta_5 = -423,\ \beta_6 = +1296.$$

Folglich iſt die Gleichung (8.) in dieſem Falle

$$x^6 - 20x^5 + 132x^4 - 264x^3 - 680x^2 + 423x + 1296 = 0\,.$$

Dieſe Gleichung hat vier Zeichenwechſel; alſo kann die gegebene Gleichung nicht mehr als vier reelle Wurzeln haben, und in der That ſind die ſechs Wurzeln derſelben

$$+1,\ +3,\ -2,\ -3,\ \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-7})\,.$$

III. Von der Beſtimmung der ſymmetriſchen Functionen der Wurzeln der Gleichungen.

34. Eine ſymmetriſche Function der beliebigen Größen

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots\ i,\ k$$

heißt jede Function dieſer Größen von ſolcher Beſchaffenheit, daß dieſelbe ihren Werth nicht ändert, wenn man in ihr zwei beliebige der in Rede ſtehenden Größen, von denen ſie abhängt, mit einander vertauſcht.

Jede ſymmetriſche Function der Wurzeln einer beliebigen Gleichung mit reellen oder imaginären Coefficienten hat die überaus merkwürdige Eigenſchaft, daß ſich ihr Werth durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken läßt, ohne daß man die Wurzeln der Gleichung ſelbſt zu kennen braucht. Dieſen wichtigen Satz in recht helles Licht zu ſetzen, iſt jetzt die Aufgabe unſerer nächſten Unterſuchungen, bei denen wir von dem folgenden Lehrſatze ausgehen.

35. Die n Wurzeln der Gleichung

$$1^*.\quad x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0,$$

deren Coefficienten reelle oder imaginäre Größen ſeyn können, ſeyen

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots\ i,\ k,$$

wobei wir zugleich annehmen wollen, daß dieſe Wurzeln ſämmtlich unter einander ungleich ſind. U ſey eine beliebige Function der Wurzeln

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots\ i,\ k.$$

So wie dieſe Wurzeln offenbar Functionen der Coefficienten der Gleichung (1*.) ſind, ſo kann man ſich natürlich auch U durch dieſe Coefficienten ausgedrückt denken. Der durch die Coefficienten der Gleichung (1.) ausgedrückte Werth von U ſey Ω. Nun wollen wir annehmen, daß man durch irgend ein Mittel die Function U auf die Form

$$\mathfrak{A}a^m + \mathfrak{B}a^{m-1} + \mathfrak{C}a^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}a + \mathfrak{T}$$

gebracht habe, ſo daß die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ ſämmtlich durch die Coefficienten A, B, C, ... L, N ausgedrückt ſind. Bleibt dann die Gleichung

$$2^*.\quad \mathfrak{A}a^m + \mathfrak{B}a^{m-1} + \mathfrak{C}a^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}a + \mathfrak{T} = \Omega$$

jederzeit richtig, wenn man für a irgend eine der Größen b, c, d, ... i, k ſetzt; ſo wird bei der Diviſion der Größe

$$\mathfrak{A}a^m + \mathfrak{B}a^{m-1} + \mathfrak{C}a^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}a + \mathfrak{T}$$

durch die Größe

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + La + N,$$

indem man nämlich dieſe beiden Größen als Functionen von a betrachtet, ein von a unabhängiger Reſt übrig bleiben, welcher der durch die Coefficienten der Gleichung (1*.) ausgedrückte Werth Ω der Function U iſt.

Der bei der Diviſion von

$$\mathfrak{A}x^m + \mathfrak{B}x^{m-1} + \mathfrak{C}x^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}x + \mathfrak{T}$$

durch

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

bleibende Reſt hat im Allgemeinen die Form

$$\alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-3} + \ldots + \lambda x + \mu,$$

ſo daß alſo, wenn wir den bei dieſer Diviſion hervorgehenden Quotienten durch Q bezeichnen, für jedes x

$$3^*.\quad \mathfrak{A}x^m + \mathfrak{B}x^{m-1} + \mathfrak{C}x^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}x + \mathfrak{T}$$
$$= \{x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N\}Q$$
$$+ \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-3} + \ldots + \lambda x + \mu$$

iſt. Nach der Vorausſetzung iſt nun

$$\mathfrak{A}a^m + \mathfrak{B}a^{m-1} + \mathfrak{C}a^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}a + \mathfrak{T} = \Omega,$$
$$\mathfrak{A}b^m + \mathfrak{B}b^{m-1} + \mathfrak{C}b^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}b + \mathfrak{T} = \Omega,$$
$$\mathfrak{A}c^m + \mathfrak{B}c^{m-1} + \mathfrak{C}c^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}c + \mathfrak{T} = \Omega,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

$$\mathfrak{A}k^m + \mathfrak{B}k^{m-1} + \mathfrak{C}k^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}k + \mathfrak{T} = \Omega$$

und

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + La + N = 0,$$
$$b^n + Ab^{n-1} + Bb^{n-2} + \ldots + Lb + N = 0,$$
$$c^n + Ac^{n-1} + Bc^{n-2} + \ldots + Lc + N = 0,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

$$k^n + Ak^{n-1} + Bk^{n-2} + \ldots + Lk + N = 0.$$

Folglich iſt wegen der Gleichung (3*.)

$$\alpha a^{n-1} + \beta a^{n-2} + \gamma a^{n-3} + \ldots + \lambda a + \mu = \Omega;$$
$$\alpha b^{n-1} + \beta b^{n-2} + \gamma b^{n-3} + \ldots + \lambda b + \mu = \Omega,$$
$$\alpha c^{n-1} + \beta c^{n-2} + \gamma c^{n-3} + \ldots + \lambda c + \mu = \Omega,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

$$\alpha k^{n-1} + \beta k^{n-2} + \gamma k^{n-3} + \ldots + \lambda k + \mu = \Omega,$$

und die Gleichung

$$\alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-3} + \ldots + \lambda x + \mu = \Omega$$

oder

$$\alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-3} + \ldots \lambda x + \mu - \Omega = 0$$

hat folglich die n unter einander ungleichen Wurzeln

$$a, b, c, d, \ldots i, k,$$

welches offenbar nur dann der Fall ſeyn kann, wenn

$$\alpha = \beta = \gamma = \ldots. = \lambda = 0$$

iſt, woraus dann ferner

$$\mu - \Omega = 0$$

oder $\Omega = \mu$ folgt. Man ſieht alſo, daß der bei der Diviſion von

$$\mathfrak{A}x^m + \mathfrak{B}x^{m-1} + \mathfrak{C}x^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}x + \mathfrak{T}$$

durch

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

bleibende Reſt eine von x unabhängige Größe und der Werth dieſes Reſtes $= \Omega$ iſt. Daher iſt natürlich auch der bei der Diviſion von

$$\mathfrak{A}a^m + \mathfrak{B}a^{m-1} + \mathfrak{C}a^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}a + \mathfrak{T}$$

durch

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + La + N$$

bleibende Reſt eine von a unabhängige Größe und der Werth dieſes Reſtes iſt $= \Omega$, wie bewieſen werden ſollte.

36. Bevor wir weiter gehen können, müſſen wir noch folgenden Satz beweiſen:

Wenn man mit $x + a$ in die Größe

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Mx + N$$

dividirt; ſo iſt der übrig bleibende Reſt jederzeit eine von x unabhängige Größe, welche man erhält, wenn man im Dividendus $x = -a$ ſetzt.

Der durch die in Rede ſtehende Diviſion hervorgehende Quotient ſey

$$A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} + \ldots + L'x + M';$$

der Reſt, welcher offenbar eine conſtante Größe iſt, ſey **R**; ſo iſt

$$\begin{aligned} & Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Mx + N \\ = & (x + a)\{A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} + \ldots + L'x + M'\} + R \\ = & A'x^n + \left.\begin{matrix} B' \\ + A'a \end{matrix}\right\} x^{n-1} + \left.\begin{matrix} C' \\ + B'a \end{matrix}\right\} x^{n-2} + \ldots + \left.\begin{matrix} M' \\ + L'a \end{matrix}\right\} x + M'a + R. \end{aligned}$$

Alſo iſt

$$\begin{aligned} A &= A', \\ B &= B' + A'a, \\ C &= C' + B'a, \\ & \ldots\ldots \\ M &= M' + L'a, \\ N &= R + M'a, \end{aligned}$$

woraus

$$A' = A,$$
$$B' = B - Aa,$$
$$C' = C - Ba + Aa^2,$$
$$D' = D - Ca + Ba^2 - Aa^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$M' = M - La + Ka^2 - Ia^3 + \ldots + Aa^{n-1}(-1)^{n-1};$$

alſo

$$R = N - Ma + La^2 - Ka^3 + Ia^4 - \ldots - Aa^n(-1)^{n-1}$$
$$= N - Ma + La^2 - Ka^3 + Ia^4 - \ldots + Aa^n(-1)^n,$$

d. i.

$$R = N + M(-a) + L(-a)^2 + K(-a)^3 + \ldots + A(-a)^n$$

oder

$$R = A(-a)^n + B(-a)^{n-1} + C(-a)^{n-2} + \ldots + M(-a) + N,$$

wie bewieſen werden ſollte.

37. Zuerſt ſey die quadratiſche Gleichung

$$4^*. \quad x^2 + Ax + B = 0$$

gegeben, deren Coefficienten reelle und imaginäre Größen ſeyn können. Die beiden unter einander ungleichen Wurzeln dieſer Gleichung ſeyen a, b; ſo iſt nach (26.)

$$5^*. \quad a + b = -A.$$

Wenn nun $f(a, b)$ eine beliebige ganze rationale ſymmetriſche Function von a, b iſt; ſo wird man, wenn man

$$b = -A - a$$

ſetzt, dieſe Function immer leicht auf die Form

$$\mathfrak{A}a^m + \mathfrak{B}a^{m-1} + \mathfrak{C}a^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}a + \mathfrak{T}$$

bringen können, ſo daß alſo

$$f(a, b) = f(a, -A - a)$$
$$= \mathfrak{A}a^m + \mathfrak{B}a^{m-1} + \mathfrak{C}a^{m-2} + \ldots \mathfrak{S}a + \mathfrak{T}$$

iſt. Weil aber nach der Vorausſetzung $f(a, b)$ eine ſymmetriſche Function von a, b iſt; ſo iſt offenbar

$$f(a, b) = f(b, a) = f(b, -A - b)$$
$$= \mathfrak{A}b^m + \mathfrak{B}b^{m-1} + \mathfrak{C}b^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}b + \mathfrak{T}.$$

Bezeichnet alſo, wie in (35.), Ω den durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückten Werth von $f(a, b)$; ſo iſt klar, daß die Gleichung

$$\mathfrak{A}a^m + \mathfrak{B}a^{m-1} + \mathfrak{C}a^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}a + \mathfrak{T} = \Omega$$

auch gilt, wenn man b für a ſetzt. Um alſo Ω zu finden, wird man nach (35.) mit der Größe

$$a^2 + Aa + B$$

in die Größe

$$\mathfrak{A}a^m + \mathfrak{B}a^{m-1} + \mathfrak{C}a^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}a + \mathfrak{T}$$

dividiren und den übrig bleibenden Reſt bemerken, welcher der

durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückte Werth von $f(a, b)$, d. i. die Größe Ω, ſeyn wird.

Betrachtet man $f(a, b)$ als Function von b und dividirt mit

$$b + a + A$$

hinein; ſo iſt nach (36.) der übrig bleibende Reſt der Werth der Function $f(a, b)$, welchen dieſelbe erhält, wenn man

$$b = -A - a$$

ſetzt, d. i.

$$f(a, -A - a)$$

oder die Größe

$$\mathfrak{A}a^m + \mathfrak{B}a^{m-1} + \mathfrak{C}a^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}a + \mathfrak{T},$$

und man kann alſo, um die Function $f(a, b)$ durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung auszudrücken oder die Größe Ω zu finden, auch auf folgende Art verfahren:

Man betrachte $f(a, b)$ als Function von b, dividire in dieſelbe mit

$$6^*.\quad b + a + A$$

hinein, bemerke den Reſt, und dividire in denſelben, als Function von a betrachtet, mit

$$7^*.\quad a^2 + Aa + B$$

hinein; ſo iſt der bei dieſer Diviſion bleibende Reſt der geſuchte durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückte Werth von $f(a, b)$.

Setzt man

$$\{a\} = a^2 + Aa + B,\quad P = x^2 + Ax + B,$$

ſo wird $\{a\}$ aus **P** erhalten, wenn man in letztere Function $x = a$ ſetzt. Setzt man nun

$$Q = \frac{P - \{a\}}{x - a},$$

ſo iſt, wie man leicht findet,

$$Q = x + a + A,$$

und man erhält alſo, wenn man

$$\{b\} = b + a + A$$

ſetzt, die Größe $\{b\}$ aus **Q**, wenn man in letzterer Function $x = b$ ſetzt.

Daher läßt ſich die obige Regel zur Berechnung des geſuchten Werths von $f(a, b)$ nun auch auf folgenden Ausdruck bringen:

Man ſetze

$$P = x^2 + Ax + B$$

und bezeichne durch

$$\{a\},\ \{b\}$$

die Werthe 1. der Function P für $x = a$; 2. der Function

$$Q = \frac{P - \{a\}}{x - a}$$

für $x = b$. Dann dividire man in $f(a, b)$, als Function von b betrachtet, mit $\{b\}$ hinein, bemerke den Reſt, und dividire in denſelben, als Function von a betrachtet, mit $\{a\}$ hinein; ſo iſt der bei dieſer Diviſion bleibende Reſt der geſuchte Werth von $f(a, b)$.

38. Ferner ſey die cubiſche Gleichung

$$8^*. \quad x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

gegeben, deren Coefficienten reelle und imaginäre Größen seyn können. Die drei Wurzeln dieſer Gleichung, die wir immer als unter einander ungleich betrachten, ſeyen a, b, c; ſo iſt

$$9^*. \quad a^3 + Aa^2 + Ba + C = 0$$

oder

$$C = - a^3 - Aa^2 - Ba.$$

Alſo iſt

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = x^3 - a^3 + A(x^2 - a^2) + B(x - a)$$
$$= (x - a)\{x^2 + (a + A)x + (a^2 + Aa + B)\}$$

und b, c ſind folglich offenbar die Wurzeln der quadratiſchen Gleichung

$$10^*. \quad x^2 + (a + A)x + (a^2 + Aa + B) = 0.$$

Iſt nun $f(a, b, c)$ eine ganze rationale ſymmetriſche Function von a, b, c, ſo kann man dieſelbe zuerſt bloß als eine ganze rationale ſymmetriſche Function von b, c betrachten, und nach (37.) durch die Coefficienten der Gleichung (10.*) ausdrücken. Dadurch wird offenbar $f(a, b, c)$ als eine ganze rationale Function von a dargeſtellt. Dividirt man nun in dieſen Ausdruck von $f(a, b, c)$, als Function von a betrachtet, mit

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C$$

hinein, ſo iſt der bei dieſer Diviſion bleibende Reſt der durch die Coefficienten der gegebenen cubiſchen Gleichung (8.*) ausgedrückte Werth von $f(a, b, c)$, welcher geſucht wurde, wie aus dem in (35.) bewieſenen Satze unmittelbar folgt.

Nach (37.) hat man alſo auf folgende Art zu verfahren:

Man ſetze

$$Q = x^2 + (a + A)x + (a^2 + Aa + B)$$

und bezeichne durch

$$\{b\}, \{c\}$$

die Werthe 1. der Function Q für $x = b$; 2. der Function

$$R = \frac{Q - \{b\}}{x - b}$$

für x = c. Dann dividire man in $f(a, b, c)$, als Function von c betrachtet, mit {c} hinein, bemerke den Reſt, und dividire in denſelben, als Function von b betrachtet, mit {b} hinein; ſo iſt der bei dieſer Diviſion bleibende Reſt der als eine Function von a dargeſtellte Werth der Function $f(a, b, c)$. Dividirt man nun in dieſen Reſt mit

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C$$

hinein; ſo iſt der bei dieſer Diviſion bleibende Reſt nach (35.) der durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung (8.*) ausgedrückte Werth von $f(a, b, c)$, welcher geſucht wurde.

Bemerkt man nun aber, daß nach dem Obigen die Function Q erhalten wird, wenn man

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C$$

von

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

ſubtrahirt, in den Reſt mit x — a dividirt und den Quotienten bemerkt; ſo iſt klar, daß ſich obige Regel auch auf folgenden Ausdruck bringen läßt:

Man ſetze

$$P = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

und bezeichne durch

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}$$

die Werthe 1. der Function P für x = a; 2. der Function

$$Q = \frac{P - \{a\}}{x - a}$$

für x = b; 3. der Function

$$R = \frac{Q - \{b\}}{x - b}$$

für x = c. Dann dividire man in $f(a, b, c)$, als Function von c betrachtet, mit {c} hinein, bemerke den Reſt, dividire in denſelben, als Function von b betrachtet, mit {b} hinein, bemerke wieder den Reſt, und dividire in denſelben, als Function von a betrachtet, mit {a} hinein; ſo iſt der bei dieſer Diviſion bleibende Reſt der geſuchte durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückte Werth von $f(a, b, c)$.

39. Auf ähnliche Weiſe ſey nun

$$11^*. \quad x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

eine Gleichung des vierten Grads mit reellen oder imaginären Coefficienten, deren unter einander ungleiche Wurzeln a, b, c, d ſind; ſo iſt

$$12^*. \quad a^4 + Aa^3 + Ba^2 + Ca + D = 0$$

oder

$$D = - a^4 - Aa^3 - Ba^2 - Ca .$$

Alſo iſt

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$
$$= x^4 - a^4 + A(x^3 - a^3) + B(x^2 - a^2) + C(x - a)$$
$$= (x - a)\{x^3 + (a + A)x^2 + (a^2 + Aa + B)x + (a^3 + Aa^2 + Ba + C)\},$$

und b, c, d ſind folglich offenbar die Wurzeln der Gleichung

$$13^*. \quad x^3 + (a + A)x^2 + (a^2 + Aa + B)x + (a^3 + Aa^2 + Ba + C) = 0.$$

Iſt nun $f(a, b, c, d)$ eine ganze rationale ſymmetriſche Function von a, b, c, d; ſo kann man dieſelbe zuerſt bloß als eine ganze rationale ſymmetriſche Function von b, c, d betrachten, und nach (38.) durch die Coefficienten der Gleichung (13.*) ausdrücken. Dadurch erhält man $f(a, b, c, d)$ als eine Function von a ausgedrückt. Dividirt man nun in dieſen Ausdruck mit

$$a^4 + Aa^3 + Ba^2 + Ca + D$$

hinein, ſo iſt nach (35.) der Reſt der durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung (11*.) ausgedrückte Werth der Function $f(a, b, c, d)$, welcher geſucht wurde. Um dieſen Werth zu finden, wird man alſo nach (38.) auf folgende Art zu verfahren haben:

Man ſetze

$$Q = x^3 + (a + A)x^2 + (a^2 + Aa + B)x + (a^3 + Aa^2 + Ba + C)$$

und bezeichne durch

$$\{b\}, \{c\}, \{d\}$$

die Werthe 1. der Function Q für $x = b$; 2. der Function

$$R = \frac{Q - \{b\}}{x - b}$$

für $x = c$; 3. der Function

$$S = \frac{R - \{c\}}{x - c}$$

für $x = d$. Dann dividire man in $f(a, b, c, d)$, als Function von d betrachtet, mit $\{d\}$ hinein, bemerke den Reſt, dividire denſelben, als Function von c betrachtet, durch $\{c\}$, bemerke wieder den Reſt, und dividire denſelben, als Function von b betrachtet, durch $\{b\}$. Der bei dieſer Diviſion bleibende Reſt iſt der als Function von a ausgedrückte Werth der Function $f(a, b, c, d)$. Dieſen Reſt dividire man alſo durch

$$a^4 + Aa^3 + Ba^2 + Ca + D,$$

ſo iſt der bleibende Reſt der durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung (11.*) ausgedrückte Werth von $f(a, b, c, d)$, welcher geſucht wird.

Bemerkt man nun aber wieder, daß nach dem Obigen die Function Q erhalten wird, wenn man

$$a^4 + Aa^3 + Ba^2 + Ca + D$$

von

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

ſubtrahirt, in den Reſt mit x — a dividirt und den Quotienten bemerkt; ſo iſt klar, daß man die obige Regel auch auf folgenden Ausdruck bringen kann:

Man ſetze

$$P = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

und bezeichne durch

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$$

die Werthe 1. der Function P für x = a; 2. der Function

$$Q = \frac{P - \{a\}}{x - a}$$

für x = b; 3. der Function

$$R = \frac{Q - \{b\}}{x - b}$$

für x = c; 4. der Function

$$S = \frac{R - \{c\}}{x - c}$$

für x = d. Dann dividire man in $f(a, b, c, d)$, als Function von d betrachtet, mit {d} hinein, bemerke den Reſt, dividire in denſelben, als Function von c betrachtet, mit {c}, bemerke den Reſt, dividire in denſelben, als Function von b betrachtet, mit {b}, bemerke wieder den Reſt, und dividire in denſelben, als Function von a betrachtet, mit {a}; ſo iſt der bei dieſer Diviſion bleibende Reſt der durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückte Werth von $f(a, b, c, d)$.

40. Wie man auf dem angezeigten Wege weiter fortſchreiten kann, liegt deutlich vor Augen, ſo daß wir alſo nun auf das folgende ſehr wichtige allgemeine Theorem geführt werden:

Die Wurzeln der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0$$

ſeyen a, b, c, d, ... i, k, und $f(a, b, c, d, \ldots i, k)$ ſey eine beliebige ganze rationale ſymmetriſche Function, welche durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung, die reelle und imaginäre Größen ſeyn können, ausgedrückt werden ſoll. Man ſetze

$$P = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

und bezeichne durch

$$\{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{d\},\ \ldots\ \{i\},\ \{k\}$$

die Werthe 1. der Function P für $x = a$; 2. der Function

$$Q = \frac{P - \{a\}}{x - a}$$

für $x = b$; 3. der Function

$$R = \frac{Q - \{b\}}{x - b}$$

für $x = c$; 4. der Function

$$S = \frac{R - \{c\}}{x - c}$$

für $x = d$; 5. der Function

$$T = \frac{S - \{c\}}{x - d}$$

für $x = e$, u. ſ. w. bis zu Ende. Dann dividire man $f(a, b, c, d, \ldots i, k)$, als Function von k betrachtet, durch $\{k\}$, bemerke den Reſt, dividire denſelben, als Function von i betrachtet, durch $\{i\}$, bemerke wieder den Reſt, dividire denſelben, als Fnnction von h betrachtet, durch $\{h\}$, und ſetze dieſes Verfahren fort, bis man einen Reſt, als Function von a betrachtet, durch $\{a\}$ dividirt hat. Der bei dieſer letzten Diviſion bleibende Reſt iſt der geſuchte durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückte Werth der Function $f(a, b, c, d, \ldots i, k)$.

Nach dem Obigen iſt dieſer Satz eigentlich noch der Bedingung zu unterwerfen, daß die Wurzeln a, b, c, d, ... i, k der gegebenen Gleichung unter einander ſämmtlich ungleich ſind. Indeß erhellet durch das folgende einfache Raiſonnement leicht, daß dies nicht nöthig iſt, und unſer Satz auch gültig bleibt, wenn unter den Wurzeln der gegebenen Gleichung einander gleiche Wurzeln vorkommen. Bezeichnet nämlich, die Wurzeln als ſämmtlich unter einander ungleich angenommen, wie ſchon früher, Ω den durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückten Werth der ganzen rationalen ſymmetriſchen Function $f(a, b, c, d, \ldots i, k)$; ſo iſt

$$f(a, b, c, d, \ldots i, k) = \Omega,$$

und aus der eben gelehrten Beſtimmungsweiſe von Ω erhellet unmittelbar, daß unter den gemachten Vorausſetzungen Ω immer eine ganze rationale Function der Coefficienten

$$A, B, C, D, \ldots L, N$$

iſt. Die Gleichung

$$f(a, b, c, d, \ldots i, k) = \Omega$$

bleibt nach dem Obigen richtig, wenn nur alle Wurzeln der gegebenen Gleichung unter einander ungleich ſind, wie klein auch ſonſt ihre Unterſchiede ſeyn mögen. Nun kann man ſich aber offenbar vorſtellen, daß die Coefficienten

$$A, B, C, D, \ldots L, N$$

der gegebenen Gleichung ſich auf eine ſolche Weiſe ſtetig ändern, daß zwei oder mehrere Differenzen zweier Wurzeln der gegebenen Gleichung ſich fortwährend und bis zu jedem beliebigen Grade der Null nähern. Unter dieſer Vorausſetzung hört die Gleichung

$$f(a, b, c, d, \ldots i, k) = \Omega$$

nie auf, Statt zu finden, und wird alſo offenbar auch dann noch Statt finden, wenn die gedachten Differenzen ihre Gränze Null wirklich erreichen, oder, was daſſelbe iſt, zwei oder mehrere Wurzeln der gegebenen Gleichung einander gleich werden.

Von unſerm obigen allgemeinen Lehrſatze wollen wir nun einige Anwendungen zur wirklichen Beſtimmung einiger ganzen rationalen ſymmetriſchen Functionen der Wurzeln einer Gleichung durch die Coefficienten derſelben machen.

41. Sey zuerſt die cubiſche Gleichung

$$x^3 + Bx + C = 0,$$

deren Wurzeln, wie oben, durch a, b, c bezeichnet werden ſollen, gegeben. Man ſoll die ganze rationale ſymmetriſche Function

$$U = b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2b + ab^2$$

der Wurzeln a, b, c durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausdrücken.

Es iſt

$$P = x^3 + Bx + C, \ \{a\} = a^3 + Ba + C;$$

folglich

$$P - \{a\} = x^3 - a^3 + B(x - a)$$

Alſo

$$Q = \frac{P - \{a\}}{x - a} = x^2 + ax + a^2 + B,$$

und daher

$$\{b\} = b^2 + ab + a^2 + B.$$

Alſo iſt

$$Q - \{b\} = x^2 - b^2 + a(x - b),$$

woraus

$$R = \frac{Q - \{b\}}{x - b} = x + b + a;$$

alſo

$$\{c\} = c + b + a.$$

Dividirt man nun mit

$$c + b + a$$

in die Function U, als Function von c betrachtet, d. i. in

$$(b + a)c^2 + (b^2 + a^2)c + ab^2 + a^2b$$

hinein; ſo bleibt der Reſt

$$3ab^2 + 3a^2b .$$

Dividirt man in dieſen Reſt, als Function von b betrachtet, mit

$$b^2 + ab + a^2 + B$$

hinein; ſo bleibt der Reſt

$$- 3a^3 - 3Ba .$$

Dividirt man endlich in dieſen Reſt, als Function von a betrachtet, mit

$$a^3 + Ba + C$$

hinein; ſo bleibt 3 C als Reſt. Dieſer Reſt iſt der Werth der gegebenen ſymmetriſchen Function, d. i.

$$b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2b + ab^2 = 3C .$$

42. Die gegebene Gleichung ſey

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

und

$$U = (a + b)(a + c)(a + d)(b + c)(b + d)(c + d)$$

ſey die gegebene ſymmetriſche Function ihrer Wurzeln a, b, c, d. In dieſem Falle iſt

$$P = x^4 + Bx^2 + Cx + D ,$$

alſo

$$\{a\} = a^4 + Ba^2 + Ca + D ;$$

folglich

$$P - \{a\} = x^4 - a^4 + B(x^2 - a^2) + C(x - a)$$

und hieraus

$$Q = \frac{P - \{a\}}{x - a} = x^3 + ax^2 + (a^2 + B)x + a^3 + Ba + C ;$$

alſo

$$\{b\} = b^3 + ab^2 + (a^2 + B)b + a^3 + Ba + C .$$

Folglich

$$Q - \{b\} = x^3 - b^3 + a(x^2 - b^2) + (a^2 + B)(x - b) ,$$

$$R = \frac{Q - \{b\}}{x - b} = x^2 + (b + a)x + b^2 + ab + a^2 + B ,$$

$$\{c\} = c^2 + (b + a)c + b^2 + ab + a^2 + B ,$$

$$R - \{c\} = x^2 - c^2 + (b + a)(x - c) ,$$

$$S = \frac{R - \{c\}}{x - c} = x + c + b + a ; \{d\} = d + c + b + a .$$

Die fernere Rechnung kann man ſich in dieſem Falle aber ſehr auf folgende Art erleichtern. Nach (26.) iſt nämlich

$$a + b + c + d = 0 ,$$

oder

$$d = -a - b - c.$$

Alſo iſt

$$a + d = -(b + c),$$
$$b + d = -(a + c),$$
$$c + d = -(a + b),$$

und folglich

$$U = -\{(a + b)(a + c)(b + c)\}^2,$$

wo man nun ſtatt U die einfachere ſymmetriſche Function

$$U' = (a + b)(a + c)(b + c)$$

entwickeln kann, aus der ſich dann der Werth von U leicht herleiten läßt. Entwickelt man U' nach Potenzen von c, ſo erhält man

$$U' = (b + a)c^2 + (b + a)^2c + ab^2 + a^2b.$$

Dividirt man nun mit

$$d + c + b + a$$

in U', d. i. in

$$(b + a)c^2 + (b + a)^2c + ab^2 + a^2b,$$

als Function von d betrachtet, hinein; ſo iſt der Reſt natürlich

$$(b + a)c^2 + (b + a)^2 c + ab^2 + a^2 b.$$

Dividirt man in dieſe Größe, als Function von c betrachtet, mit

$$c^2 + (b + a)c + b^2 + ab + a^2 + B$$

hinein, ſo bleibt als Reſt

$$-b^3 - ab^2 - (a^2 + B)b - a^3 - Ba.$$

Dividirt man ferner in dieſe Größe, als Function von b betrachtet, mit

$$b^3 + ab^2 + (a^2 + B)b + a^3 + Ba + C$$

hinein, ſo bleibt + C als Reſt. Dividirt man in dieſen Reſt, als Function von a betrachtet, mit

$$a^4 + Ba^2 + Ca + D$$

hinein, ſo bleibt natürlich + C ſelbſt als Reſt, und es iſt folglich

$$(a + b)(a + c)(b + c) = C.$$

Alſo iſt nach dem Obigen

$$(a + b)(a + c)(a + d)(b + c)(b + d)(c + d) = -C^2.$$

Die Diviſion endigt ſich hier ſchon bei der dritten Operation, und ähnliche Vereinfachungen des Calculs bieten ſich überhaupt öfters dar.

43. Die gegebene Gleichung ſey die quadratiſche Gleichung

$$x^2 + Ax + B = 0.$$

Man ſoll die ſymmetriſche Function

$$U = (a - b)^2$$

ihrer Wurzeln a, b beſtimmen. Es iſt in dieſem Falle

$$P = x^2 + Ax + B,\ \{a\} = a^2 + Aa + B\,;$$

folglich

$$P - \{a\} = x^2 - a^2 + A(x - a)\,,$$

und daher

$$Q = \frac{P - \{a\}}{x - a} = x + a + A\,;$$

alſo

$$\{b\} = b + a + A\,.$$

Entwickelt man U nach Potenzen von b, ſo erhält man

$$U = b^2 - 2ab + a^2\,.$$

Dividirt man mit

$$b + a + A$$

in die Größe

$$b^2 - 2ab + a^2\,,$$

als Function von b betrachtet, hinein; ſo bleibt als Reſt

$$4a^2 + 4Aa + A^2\,.$$

Dividirt man in dieſe Größe, als Function von a betrachtet, mit

$$a^2 + Aa + B$$

hinein; ſo bleibt

$$A^2 - 4B$$

als Reſt. Alſo iſt

$$(a-b)^2 = A^2 - 4B\,.$$

Die Richtigkeit dieſes Reſultats kann man auf folgende Art prüfen. Nach (26.) iſt

$$a + b = -A\,,$$

und nach dem Obigen iſt, weil a eine Wurzel der gegebenen quadratiſchen Gleichung iſt,

$$a^2 + Aa + B = 0\,.$$

Da nun

$$b = -a - A$$

iſt; ſo iſt

$$U = (a-b)^2 = (2a + A)^2 = A^2 + 4(a^2 + Aa)\,.$$

Weil nun

$$a^2 + Aa = -B$$

iſt; ſo iſt

$$(a-b)^2 = A^2 - 4B\,,$$

wie wir ſchon vorher gefunden haben.

44. Die gegebene Gleichung ſey die cubiſche Gleichung

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0\,.$$

Man ſoll die ſymmetriſche Function

$$U = (a-b)^2 (a-c)^2 (b-c)^2$$

ihrer Wurzeln a, b, c beſtimmen.

Um in dieſem und in ähnlichen Fällen die ſymmetriſche Function U bloß durch a und die Coefficienten der gegebenen Gleichung auszudrücken, ſo daß nämlich die Wurzeln b, c aus dem obigen Ausdrucke von U eliminirt werden, kann man auch auf folgende Art verfahren. Da a eine Wurzel der gegebenen Gleichung iſt, ſo iſt

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C = 0 .$$

Folglich iſt für jedes x

$$\begin{aligned} & x^3 + Ax^2 + Bx + C \\ &= x^3 - a^3 + A(x^2 - a^2) + B(x-a) \\ &= (x-a) \{x^2 + (a+A)x + a^2 + Aa + B\} . \end{aligned}$$

Nun iſt aber

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = (x-a)(x-b)(x-c) .$$

Folglich iſt für jedes x

$$(x-b)(x-c) = x^2 + (a+A)x + a^2 + Aa + B ,$$

und daher für x = a

$$(a-b)(a-c) = 3a^2 + 2Aa + B .$$

Alſo iſt

$$U = (b-c)^2 (3a^2 + 2Aa + B)^2 .$$

Da nun ferner b, c die Wurzeln der quadratiſchen Gleichung

$$x^2 + (a+A)x + a^2 + Aa + B = 0$$

ſind; ſo iſt nach (43.)

$$\begin{aligned} (b-c)^2 &= (a+A)^2 - 4(a^2 + Aa + B) \\ &= -(3a^2 + 2Aa - A^2 + 4B) . \end{aligned}$$

Folglich iſt

$$U = -(3a^2 + 2Aa + B)^2 (3a^2 + 2Aa - A^2 + 4B) .$$

Entwickelt man nun U nach Potenzen von a und dividirt dann mit

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C$$

hinein, ſo iſt der bei dieſer Diviſion übrig bleibende Reſt der geſuchte Werth von U. Nach gehöriger Rechnung ergiebt ſich

$$(a-b)^2 (a-c)^2 (b-c)^2 = A^2B^2 - 4A^3C - 4B^3 - 27C^2 + 18ABC .$$

Für A = 0 iſt

$$(a-b)^2 (a-c)^2 (b-c)^2 = -4B^3 - 27C^2 .$$

Letzterer Werth unſerer ſymmetriſchen Function entſpricht einer cubiſchen Gleichung, in der das zweite Glied fehlt. Bekanntlich läßt ſich aber aus jeder cubiſchen Gleichung das zweite Glied wegſchaffen. In dieſem Falle iſt nach dem Obigen

$$\begin{aligned} U &= -(3a^2 + B)^2 (3a^2 + 4B) \\ &= -27a^6 - 54Ba^4 - 27B^2a^2 - 4B^3 . \end{aligned}$$

Dividirt man in dieſe Größe mit

$$a^3 + Ba + C$$

hinein, ſo bleibt die Größe

$$-4B^3 - 27C^2$$

als Reſt, welches der ſchon oben aus der allgemeinen Formel abgeleitete Werth von U in dem vorliegenden ſpeciellen Falle iſt.

45. Das Product der Quadrate aller Differenzen je zweier Wurzeln einer gegebenen Gleichung iſt, wie leicht erhellet, immer eine ganze rationale ſymmetriſche Function der Wurzeln der gegebenen Gleichung und kann daher immer nach den obigen Regeln durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückt werden, ohne die Wurzeln ſelbſt zu kennen. Weil aber dieſes Product in mehreren Beziehungen von beſonderer Wichtigkeit iſt, ſo wollen wir jetzt noch zeigen, wie daſſelbe immer ohne große Schwierigkeit für eine beliebige Gleichung des nten Grades gefunden werden kann, wenn man daſſelbe für jede Gleichung des (n—1)ten Grades finden, d. h. durch die Coefficienten der in Rede ſtehenden Gleichung ausdrücken kann, ohne die Wurzeln derſelben ſelbſt zu kennen, wodurch die Entwickelung dieſer Producte ſehr erleichtert wird. Sey alſo wieder

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0$$

eine ganz beliebige Gleichung des nten Grades, deren Wurzeln

$$a, b, c, d, \ldots i, k$$

ſeyn mögen, und ſey nun

$$\begin{aligned} U = (a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2(a-e)^2 \ldots (a-i)^2(a-k)^2 \\ \times (b-c)^2(b-d)^2(b-e)^2 \ldots (b-i)^2(b-k)^2 \\ \times (c-d)^2(c-e)^2 \ldots (c-i)^2(c-k)^2 \\ \times (d-e)^2 \ldots (d-i)^2(d-k)^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \times (h-i)^2(h-k)^2 \\ \times (i-k)^2 \,. \end{aligned}$$

Weil a eine Wurzel der gegebenen Gleichung iſt; ſo iſt

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + Ca + N = 0 \,.$$

Folglich iſt für jedes x

$$\begin{aligned} & x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N \\ = {} & x^n - a^n + A(x^{n-1} - a^{n-1}) + B(x^{n-2} - a^{n-2}) + \ldots + L(x-a) \,, \end{aligned}$$

oder, weil die Function auf der linken Seite des Gleichheitszeichens bekanntlich dem Producte

$$(x-a)(x-b)(x-c) \ldots (x-i)(x-k)$$

gleich iſt, für jedes x:

$$\begin{aligned} & (x-a)(x-b)(x-c) \ldots (x-i)(x-k) \\ = {} & x^n - a^n + A(x^{n-1} - a^{n-1}) + B(x^{n-2} - a^{n-2}) + \ldots + L(x-a) \,, \end{aligned}$$

oder, wenn man auf beiden Seiten mit $x - a$ dividirt, für jedes x

$$\begin{aligned}(x-b)(x-c)(x-d)\ldots(x-i)(x-k) \\ = x^{n-1} \\ + (a+A)x^{n-2} \\ + (a^2+Aa+B)x^{n-3} \\ + (a^3+Aa^2+Ba+C)x^{n-4} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a^{n-1}+Aa^{n-2}+Ba^{n-3}+Ca^{n-4}+\ldots+L;\end{aligned}$$

folglich für $x = a$

$$(a-b)(a-c)(a-d)\ldots(a-i)(a-k)$$
$$= na^{n-1} + (n-1)Aa^{n-2} + (n-2)Ba^{n-3} + \ldots + L.$$

Auch iſt klar, daß $b, c, d, \ldots i, k$ die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{aligned}0 = x^{n-1} \\ + (a+A)x^{n-2} \\ + (a^2+Aa+B)x^{n-3} \\ + (a^3+Aa^2+Ba+C)x^{n-4} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a^{n-1}+Aa^{n-2}+Ba^{n-3}+Ca^{n-4}+\ldots+L\end{aligned}$$

ſind. Weil wir nun annehmen, daß man für jede Gleichung des $(n-1)$ten Grades das Product der Quadrate der Differenzen je zweier Wurzeln durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken kann; ſo kann man das Product

$$\begin{aligned}(b-c)^2(b-d)^2(b-e)^2\ldots(b-i)^2(b-k)^2 \\ \times (c-d)^2(c-e)^2\ldots(c-i)^2(c-k)^2 \\ \times (d-e)^2\ldots(d-i)^2(d-k)^2 \\ \ldots\ldots \\ \times (h-i)^2(h-k)^2 \\ \times (i-k)^2\end{aligned}$$

durch die Coefficienten der obigen Gleichung des $(n-1)$ten Grades ausdrücken. Bezeichnen wir den dadurch hervorgehenden Ausdruck durch V; ſo iſt V nur noch von a und den Coefficienten $A, B, C, \ldots L$ abhängig, und nach dem Obigen iſt nun

$$U = V\{na^{n-1} + (n-1)Aa^{n-2} + (n-2)Ba^{n-3} + \ldots + L\}^2,$$

wo alſo auch U bloß von a und den Coefficienten $A, B, C, \ldots L$ abhängig iſt. Das Product auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in vorhergehender Gleichung läßt ſich immer durch ganz elementare Rechnungen nach Potenzen von a entwickeln. Dividirt man dann in dieſes ſo entwickelte Product mit der Größe

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + La + N,$$

ſo iſt der bei dieſer Diviſion bleibende Reſt nach dem Obigen von a unabhängig und liefert den bloß durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückten Werth der ſymmetriſchen Function U.

Es iſt klar, daß das durch U bezeichnete Product bloß dann verſchwinden kann, wenn die Gleichung gleiche Wurzeln hat. Iſt dies nicht der Fall, ſo iſt U jederzeit eine ganze rationale Function der Coefficienten A, B, C, ... L, N, und hat einen beſtimmten poſitiven Werth, der nicht = 0 iſt. Sind alſo die Coefficienten A, B, C, ... L, N alle ganze Zahlen, ſo iſt offenbar auch U eine ganze Zahl und daher immer entweder = 1 oder > 1, vorausgeſetzt, daß die gegebene Gleichung keine einander gleichen Wurzeln hat.

46. Wir haben jetzt ausführlich gezeigt, daß jede ganze rationale ſymmetriſche Function der Wurzeln einer Gleichung immer durch die Coefficienten der Gleichung ausgedrückt werden kann, ohne die Wurzeln der Gleichung ſelbſt zu kennen, wobei ſich zugleich auch zeigte, daß der ſich ergebende Ausdruck immer eine ganze rationale Function der Coefficienten der Gleichung war. Kaum bedarf es nun noch einer Erläuterung, daß überhaupt jede ſymmetriſche Function der Wurzeln einer Gleichung durch die Coefficienten derſelben ausgedrückt werden kann, ohne die Wurzeln ſelbſt zu kennen. Hat man nämlich z. B. die rationale gebrochene Function

$$U = \frac{abc}{ab + ac + bc}$$

der drei Wurzeln a, b, c einer cubiſchen Gleichung, ſo ſind natürlich Zähler und Nenner ſymmetriſche Functionen von a, b, c. Da man nun nach den entwickelten Regeln ſowohl abc, als auch $ab + ac + bc$, durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken kann, ohne a, b, c ſelbſt zu kennen, ſo gilt dies natürlich auch von der Function U, wobei ſich nun aber natürlich von ſelbſt verſteht, daß der ſich für U ergebende Ausdruck jetzt keine ganze rationale Function der Coefficienten der Gleichung mehr iſt. Hat man die irrationale ſymmetriſche Function

$$U = \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

der drei Wurzeln a, b, c einer cubiſchen Gleichung, ſo kann man die ganze rationale Function

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$$

durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken, ohne die Wurzeln ſelbſt zu kennen, folglich auch die Function U.

Man ſieht alſo, daß jede ſymmetriſche Function der Wurzeln einer beliebigen Gleichung jederzeit durch die Coefficienten derſelben ausgedrückt werden kann, ohne daß man die Wurzeln der Gleichung ſelbſt zu kennen braucht,

welches unſtreitig eins der merkwürdigſten und wichtigſten Reſultate der ganzen Algebra iſt. In dem Artikel Symmetriſche Function iſt gezeigt, daß jede ſymmetriſche Function der Wurzeln einer Gleichung durch bloße Potenzenſummen der Wurzeln ausgedrückt werden kann. Mittelſt des in (28.) bewieſenen Newton'-

ſchen Satzes kann man die Potenzenſummen der Wurzeln durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken, ohne die Wurzeln ſelbſt zu kennen. Alſo erhellet auch auf dieſe Art, daß jede ſymmetriſche Function der Wurzeln einer Gleichung durch die Coefficienten derſelben ausgedrückt werden kann, ohne die Wurzeln ſelbſt zu kennen. Der von uns oben eingeſchlagene Weg bietet, wie es uns ſcheint, zugleich die bequemſten Methoden zur wirklichen Entwickelung der ſymmetriſchen Functionen der Wurzeln durch die Coefficienten der Gleichung dar, weshalb derſelbe hier vorzugsweiſe von uns betreten worden iſt. Der angeführte Artikel wird aber zweckmäßig mit dem Studium des gegenwärtigen Artikels verbunden. Größerer Ausführlichkeit wegen ſ. m. auch die a. a. O. angeführten Schriften, vorzüglich die Schrift von M. Hirſch. Beizufügen iſt dieſen Schriften noch das Complément des élémens d'Algèbre. p. 1. von Lacroix und die ſchon in (21.) angeführte in jeder Beziehung treffliche Abhandlung von Cauchy, welcher wir bei der obigen Darſtellung vorzüglich gefolgt ſind.

IV. Auflöſung der numeriſchen Gleichungen.

A. Einige vorläufige Sätze.

47. Um bei der Auflöſung der numeriſchen Gleichungen, d. h. der Gleichungen mit numeriſchen oder in beſtimmten Zahlen gegebenen Coefficienten möglichſt elementar zu verfahren, iſt es nöthig, einige Begriffe und Sätze, namentlich über die ganzen rationalen algebraiſchen Functionen, vorauszuſchicken, auf denen das Folgende vorzüglich beruhet. Eine ganze rationale algebraiſche Function heißt bekanntlich, wenn n eine poſitive ganze Zahl bezeichnet, jede Function von der Form

$$a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots . + a_n x^n .$$

Wenn man jedes Glied einer ganzen rationalen algebraiſchen Function mit dem Exponenten der entſprechenden Potenz von x multiplicirt und dieſen Exponenten der Potenz von x ſelbſt um eine Einheit vermindert; ſo heißt die auf dieſe Art erhaltene Function die erſte derivirte Function der gegebenen oder primitiven Function, und wird, wenn letztere durch $f(x)$ bezeichnet wird, durch $f'(x)$ bezeichnet. Für

$$f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots . + a_n x^n$$

iſt alſo

$$f'(x) = 1a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots . + na_n x^{n-1} .$$

Nimmt man von $f'(x)$ wieder die erſte derivirte Function ganz auf dieſelbe Weiſe, ſo heißt dieſelbe in Bezug auf die primitive Function $f(x)$ die zweite derivirte Function und wird durch $f''(x)$ bezeichnet. Die erſte derivirte Function von $f''(x)$ heißt die dritte derivirte Function von $f(x)$ und

wird durch $f'''(x)$ bezeichnet, wobei nun zugleich erhellet, wie man auf dieſe Art weiter gehen kann. In Bezug auf die oben angenommene allgemeine Form der primitiven Function haben wir alſo

$$f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_n x^n,$$
$$f'(x) = 1.a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots + na_n x^{n-1},$$
$$f''(x) = 1.2a_2 + 2.3a_3 x + 3.4a_4 x^2 + \ldots + (n-1)na_n x^{n-2},$$
$$f'''(x) = 1.2.3a_3 + 2.3.4a_4 x + \ldots + (n-2)(n-1)na_n x^{n-3},$$
$$f^{\text{IV}}(x) = 1.2.3.4a_4 + \ldots + (n-3)(n-2)(n-1)na_n x^{n-4},$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

$$f^{(n-1)}(x) = 1.2.3\ldots(n-1)a_{n-1} + 2.3.4\ldots na_n x,$$
$$f^{(n)}(x) = 1.2.3.4\ldots na_n,$$

woraus zugleich erhellet, daß die nte derivirte Function jeder ganzen rationalen algebraiſchen Function des nten Grades eine conſtante Größe iſt, und alle folgenden derivirten Functionen verſchwinden. Setzt man in den obigen Ausdrücken $x = 0$, ſo erhält man

$$a = f(0),\ a_1 = \frac{f'(0)}{1},\ a_2 = \frac{f''(0)}{1.2},\ a_3 = \frac{f'''(0)}{1.2.3},\ \ldots a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{1\ldots n},$$

d. i. allgemein

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{1.2.3\ldots k},$$

und man kann alſo jede ganze rationale algebraiſche Function auf folgenden ſehr merkwürdigen Ausdruck bringen:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1.2}x^2 + \frac{f'''(0)}{1.2.3}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1\ldots n}x^n.$$

Setzen wir in dieſem Ausdruck $x + i$, wo i eine ganz beliebige poſitive oder negative Größe bezeichnet, für x; ſo erhalten wir

$$f(x+i) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}(x+i) + \frac{f''(0)}{1.2}(x+i)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1\ldots n}(x+i)^n,$$

und hieraus, wenn man ſich die Potenzen von $x + i$ entwickelt denkt und das Reſultat nach Potenzen von i ordnet:

$$\begin{aligned} f(x+i) = {} & f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1.2}x^2 + \frac{f'''(0)}{1.2.3}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1\ldots n}x^n \\ & + \frac{i}{1}\left\{f'(0) + \frac{f''(0)}{1}x + \frac{f'''(0)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1\ldots(n-1)}x^{n-1}\right\} \\ & + \frac{i^2}{1.2}\left\{f''(0) + \frac{f'''(0)}{1}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1\ldots(n-2)}x^{n-2}\right\} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{i^{n-1}}{1\ldots(n-1)}\left\{f^{(n-1)}(0) + \frac{f^{(n)}(0)}{1}x\right\} \\ & + \frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(0), \end{aligned}$$

woraus ſich nach dem Obigen auf der Stelle

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i}{1}f'(x) + \frac{i^2}{1.2}f''(x) + \frac{i^3}{1.2.3}f'''(x) + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{i^{n-1}}{1..(n-1)}f^{(n-1)}(x) + \frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(x)$$

ergiebt, eine Formel, von der wir im Folgenden vielfachen Gebrauch machen werden.

48. Wir wollen nun einige einfache Regeln zur Entwickelung der derivirten Functionen beweiſen.

I. Sey

$$f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

und, wenn A eine beliebige conſtante Größe bezeichnet, $F(x) = A\,f(x)$; ſo iſt

$$F(x) = Aa + Aa_1 x + Aa_2 x^2 + Aa_3 x^3 + \ldots + Aa_n x^n,$$
$$F'(x) = Aa_1 + 2Aa_2 x + 3Aa_3 x^2 + \ldots + nAa_n x^{n-1}$$
$$= A\{a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1}\},$$

d. i. $F'(x) = A\,f'(x)$.

II. Wenn

$$f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n,$$
$$\varphi(x) = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots + \alpha_k x^k$$

iſt, wobei wir $n \overline{\overline{>}} k$ ſetzen wollen; ſo iſt, für $f(x) + \varphi(x) = F(x)$,

$$F(x) = a + \alpha + (a_1 + \alpha_1)x + (a_2 + \alpha_2)x^2 + \ldots.$$
$$\ldots + (a_k + \alpha_k)x^k + a_{k+1}x^{k+1} + \ldots + a_n x^n,$$
$$F'(x) = a_1 + \alpha_1 + 2(a_2 + \alpha_2)x + 3(a_3 + \alpha_3)x^2 + \ldots$$
$$\ldots + k(a_k + \alpha_k)x^{k-1} + (k+1)a_{k+1}x^k + \ldots + na_n x^{n-1}$$
$$= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots + na_n x^{n-1}$$
$$+ \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + 4\alpha_3 x^3 + \ldots + k\alpha_k x^{k-1},$$

d. i. $F'(x) = f'(x) + \varphi'(x)$.

III. Iſt $F(x) = f(x) - \varphi(x)$, ſo kann man

$$F(x) = f(x) + (-1).\varphi(x)$$

ſetzen, und aus I. und II. folgt dann auf der Stelle

$$F'(x) = f'(x) + (-1).\varphi'(x),$$

d. i. $F'(x) = f'(x) - \varphi'(x)$.

IV. Sey nun wieder

$$f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

und $F(x) = x^k f(x)$; ſo iſt

$$F(x) = ax^k + a_1 x^{k+1} + a_2 x^{k+2} + \ldots + a_n x^{k+n},$$
$$F'(x) = kax^{k-1} + (k+1)a_1 x^k + (k+2)a_2 x^{k+1} + \ldots + (k+n)a_n x^{k+n-1}$$
$$= k\{a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n\}x^{k-1}$$
$$+ \{a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1}\}x^k,$$

d. i.

$$F'(x) = kx^{k-1}f(x) + x^k f'(x).$$

V. Für $F(x) = Ax^k f(x)$ iſt alſo

$$F'(x) = kAx^{k-1}f(x) + Ax^k f'(x) .$$

VI. Für

$$f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

und $F(x) = f(x) . \varphi(x)$ iſt

$$F(x) = a\varphi(x) + a_1 x\varphi(x) + a_2 x^2 \varphi(x) + \ldots + a_n x^n \varphi(x) ;$$

alſo nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned} F'(x) = a\varphi'(x) &+ a_1 \{x\varphi'(x) + 1\varphi(x)\} \\ &+ a_2 \{x^2\varphi'(x) + 2x\varphi(x)\} \\ &+ a_3 \{x^3\varphi'(x) + 3x^2\varphi(x)\} \\ &\quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ &+ a_n \{x^n\varphi'(x) + nx^{n-1}\varphi(x)\} \end{aligned}$$

$$= \{a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n\} \varphi'(x) + \{a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1}\} \varphi(x) ;$$

folglich

$$F'(x) = f(x) . \varphi'(x) + \varphi(x) . f'(x) .$$

VII. Für $F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ iſt

$$f(x) = F(x) . \varphi(x) ,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$f'(x) = F(x) . \varphi'(x) + \varphi(x) . F'(x) ,$$

woraus

$$F'(x) = \frac{f'(x) - F(x) . \varphi'(x)}{\varphi(x)} ,$$

und, wenn man für $F(x)$ ſeinen obigen Ausdruck ſetzt,

$$F'(x) = \frac{\varphi(x) . f'(x) - f(x) . \varphi'(x)}{\{\varphi(x)\}^2} .$$

VIII. Setzen wir

$$f_n(x) = (x + a)^n ,$$

alſo $f_0(x) = 1$; ſo iſt

$$f_n(x) = (x + a) f_{n-1}(x) ,$$

und folglich nach VI.

$$f'_n(x) = (x + a) f'_{n-1}(x) + f_{n-1}(x) ,$$

d. i.

$$f'_n(x) = (x + a)\{f'_{n-1}(x) + f_{n-2}(x)\} .$$

Alſo iſt

$$\begin{aligned} f'_1(x) &= 1 , \\ f'_2(x) &= (x+a)\{f'_1(x) + f_0(x)\} = 2(x+a) , \\ f'_3(x) &= (x+a)\{f'_2(x) + f_1(x)\} = 3(x+a)^2 , \\ f'_4(x) &= (x+a)\{f'_3(x) + f_2(x)\} = 4(x+a)^3 , \\ f'_5(x) &= (x+a)\{f'_4(x) + f_3(x)\} = 5(x+a)^4 , \end{aligned}$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Folglich iſt allgemein

$$f'_n(x) = n(x+a)^{n-1},$$

wie ſich auch leicht beweiſen läßt, wenn man $f_n(x) = (x+a)^n$ nach dem binomiſchen Lehrſatze entwickelt.

49. Wenn

$$f(x) = ax^n + a_1 x^{n+1} + a_2 x^{n+2} + \dots + a_k x^{n+k}$$

iſt; ſo kann man den abſoluten Werth von x immer ſo klein nehmen, daß das Vorzeichen des entſprechenden Werthes der Function mit dem Vorzeichen ihres erſten Gliedes ax^n einerlei iſt, oder bloß durch dieſes Glied beſtimmt wird, wobei wir zugleich immer annehmen wollen, daß die Function für den in Rede ſtehenden Werth von x mit Berückſichtigung ſeines Vorzeichens nicht verſchwindet. Um dies zu zeigen, ſeyen

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_k$$

die abſoluten Werthe der Coefficienten

$$a, a_1, a_2, a_3, \dots a_k;$$

der abſolute Werth von x ſey ξ; die größte unter den Größen

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_k$$

ſey α_e. Nimmt man nun

$$\xi < \frac{\alpha}{k\alpha_e},$$

ſo iſt offenbar auch $\xi < 1$, wenn nur k nicht $= 0$ iſt, in welchem Falle ſich der zu beweiſende Satz von ſelbſt verſteht. Die Größen

$$\frac{\alpha}{k\alpha_1}, \frac{\alpha}{k\alpha_2}, \frac{\alpha}{k\alpha_3}, \frac{\alpha}{k\alpha_4}, \dots \frac{\alpha}{k\alpha_k}$$

ſind ſämmtlich nicht kleiner wie die Größe $\frac{\alpha}{k\alpha_e}$, und es iſt folglich

$$\xi < \frac{\alpha}{k\alpha_1}, \xi < \frac{\alpha}{k\alpha_2}, \xi < \frac{\alpha}{k\alpha_3}, \dots \xi < \frac{\alpha}{k\alpha_k};$$

$$\alpha_1 \xi < \frac{\alpha}{k}, \alpha_2 \xi < \frac{\alpha}{k}, \alpha_3 \xi < \frac{\alpha}{k}, \dots \alpha_k \xi < \frac{\alpha}{k};$$

alſo, weil $\xi < 1$ iſt, um ſo mehr

$$\alpha_1 \xi < \frac{\alpha}{k}, \alpha_2 \xi^2 < \frac{\alpha}{k}, \alpha_3 \xi^3 < \frac{\alpha}{k}, \dots \alpha_k \xi^k < \frac{\alpha}{k};$$

folglich, wenn man addirt,

$$\alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 + \dots + \alpha_k \xi^k < \alpha,$$

$$\alpha_1 \xi^{n+1} + \alpha_2 \xi^{n+2} + \alpha_3 \xi^{n+3} + \dots + \alpha_k \xi^{n+k} < a\xi^n.$$

Alſo iſt offenbar um ſo mehr der abſolute Werth von ax^n größer wie der abſolute Werth von

$$a_1 x^{n+1} + a_2 x^{n+2} + \alpha_3 x^{n+3} + \dots + a_k x^{n+k},$$

ſo daß alſo augenſcheinlich, wenn man den abſoluten Werth von $x = \xi$ ſetzt, das Vorzeichen des entſprechenden Werths der Function $f(x)$ bloß von dem Gliede ax^n abhängt.

50. Man kann aber auch den abſoluten Werth von x immer ſo groß nehmen, daß das Vorzeichen des entſprechenden Werths der Function

$$f(x) = ax^n + a_1 x^{n+1} + a_2 x^{n+2} + \ldots + a_k x^{n+k}$$

bloß durch das Zeichen des Gliedes $a_k x^{n+k}$ beſtimmt wird. Es iſt nämlich

$$f(x) = x^{n+k}\left\{a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \frac{a_{k-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \frac{a}{x^k}\right\},$$

und nach (49.) kann man den abſoluten Werth von $\frac{1}{x}$ ſo klein, den abſoluten Werth von x alſo ſo groß nehmen, daß das Zeichen der Größe

$$a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \frac{a_{k-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \frac{a}{x^k}$$

bloß von a_k, das Zeichen der Function $f(x)$ folglich bloß von $a_k x^{n+k}$ abhängt, wie behauptet wurde.

51. Wenn

$$f(x) = ax^n + bx^{n+1} + cx^{n+2} + \ldots,$$
$$f_1(x) = a_1 x^{n'} + b_1 x^{n'+1} + c_1 x^{n'+2} + \ldots,$$
$$f_2(x) = a_2 x^{n''} + b_2 x^{n''+1} + c_2 x^{n''+2} + \ldots,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

mehrere ganze rationale algebraiſche Functionen ſind; ſo erhellet aus dem Vorhergehenden auch leicht, daß man den abſoluten Werth von x immer ſo beſtimmen kann, daß die Vorzeichen der Werthe aller dieſer Functionen bloß durch die Vorzeichen ihrer entſprechenden erſten Glieder

$$ax^n,\ a_1 x^{n'},\ a_2 x^{n''},\ a_3 x^{n'''},\ \ldots.$$

beſtimmt werden. Setzen wir nun im Folgenden mehrere gegebene ganze rationale algebraiſche Functionen ihren erſten Gliedern gleich, z. B.

$$f(x) = ax^n,\ f_1(x) = a_1 x^{n'},\ f_2(x) = a_2 x^{n''}, \ldots;$$

ſo ſoll dies ſtets bloß ſo viel heißen, daß der abſolute Werth von x ſo klein genommen oder überhaupt ſo beſtimmt worden ſey, daß die Vorzeichen der Werthe der ſämmtlichen gegebenen Functionen bloß von den Vorzeichen ihrer erſten Glieder abhängen.

Setzt man dagegen Functionen ihren letzten oder höchſten Gliedern, d. i. den Gliedern, welche die höchſte Potenz von x enthalten, gleich, oder ſagt man, daß dieſe Functionen ſich ſämmlich auf ihre höchſten Glieder reduciren; ſo hat man damit wieder immer bloß den Sinn zu verbinden, daß der abſolute Werth von x ſo groß genommen ſey, daß die Vorzeichen der Functionen bloß von den Vorzeichen der in Rede ſtehenden Glieder abhängen.

52. Nach (47.) iſt

$$f(a+i)=f(a)+\frac{i}{1}f'(a)+\frac{i^2}{1.2}f''(a)+\ldots+\frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(a),$$

wenn a jetzt irgend einen gewiſſen beſtimmten Werth der unabhängigen veränderlichen Größe x bezeichnet, und nach (49.) kann man den abſoluten Werth von i ſo klein nehmen, daß das Vorzeichen der Größe

$$\frac{i}{1}f'(a)+\frac{i^2}{1.2}f''(a)+\ldots.+\frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(a)$$

bloß von dem Gliede $if'(a)$ abhängt. Denkt man ſich alſo den abſoluten Werth von i ſo klein genommen, daß dieſer Bedingung genügt wird; ſo kann man in dem in (51.) näher angedeuteten Sinne

$$\frac{i}{1}f'(a)+\frac{i^2}{1.2}f''(a)+\ldots+\frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(a),$$

oder

$$f(a+i)=f(a)+if'(a)$$

ſetzen, woraus nun Folgendes hervorgeht:

I. Wenn $f'(a)$ poſitiv iſt; ſo wird $f(x)$ in der Nähe des Werths a von x von $f(a)$ an mit x gleichzeitig zu- und abnehmen.

II. Iſt aber $f'(a)$ negativ, ſo wird $f(x)$ in der Nähe des Werthes a von x, wenn x von a an zu- oder abnimmt, von $f(a)$ an reſpective ab- oder zunehmen.

III. Iſt nun $f'(x)$ zwiſchen den Gränzen $x=a$, $x=b$, d. h., wenn wir $b>a$ ſetzen, von $x=a$ bis $x=b$ ſtets poſitiv; ſo wird $f(x)$ von $f(a)$ bis $f(b)$ ſtets wachſen, wenn man x von $x=a$ bis $x=b$ wachſen läßt.

IV. Iſt aber $f'(x)$ zwiſchen den Gränzen $x=a$, $x=b$, d. h., wenn wir wieder $b>a$ ſetzen, von $x=a$ bis $x=b$ ſtets negativ; ſo wird $f(x)$ von $f(a)$ bis $f(b)$ ſtets abnehmen, wenn man x von $x=a$ bis $x=b$ wachſen läßt.

V. Aendert alſo $f'(x)$ zwiſchen den Gränzen $x=a$, $x=b$ ſein Zeichen nicht; ſo wird $f(x)$ zwiſchen dieſen Gränzen entweder ſtets wachſen oder ſtets abnehmen, wobei a und b ganz beliebige poſitive oder negative Größen ſind.

VI. Aus dem Obigen geht auch mit völliger Deutlichkeit hervor, daß jede ganze rationale algebraiſche Function ſich zwiſchen jeden zwei beliebigen Gränzen ſtetig verändert. Es iſt nämlich

$$f(x+i)=f(x)+\frac{i}{1}f'(x)+\frac{i^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{i^n}{1..n}f^{(n)}(x).$$

Bezeichnet nun N eine beliebig kleine poſitive Größe; ſo kann man, wie aus (49.) erhellet, den abſoluten Werth von i immer ſo klein nehmen, daß der abſolute Werth von

$$\frac{i}{1}f'(x)+\frac{i^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(x)$$

kleiner als **N** iſt, woraus man ſieht, daß unendlich kleinen Aenderungen von x ſtets unendlich kleine Aenderungen der Function entſprechen, oder daß jede ganze rationale algebraiſche Function ſich zwiſchen jeden zwei beliebigen Gränzen, alſo auch zwiſchen den Gränzen $x = -\infty$ und $x = +\infty$, jederzeit ſtetig verändert. Obgleich dies eigentlich ſchon für ſich klar und früher auch ſchon gebraucht worden iſt; ſo haben wir der obigen Erläuterung hier doch einigen Raum vergönnt, weil von der Stetigkeit der ganzen rationalen Function überhaupt, vorzüglich aber im Folgenden, ſo vielfacher Gebrauch gemacht wird. Da alle derivirten Functionen wieder ganze rationale algebraiſche Functionen ſind; ſo ſind auch alle derivirten Functionen jeder ganzen rationalen algebraiſchen Function zwiſchen jeden zwei beliebigen Gränzen ſtetig.

53. Seyen jetzt **A** und **B** reſpective der kleinſte und größte Werth der Function

$$\frac{f'(x)}{nx^{n-1}}$$

zwiſchen den Gränzen $x = 0$ und $x = a$, d. h. der kleinſte und größte unter allen den Werthen, welche dieſe Function erhält, wenn man ſich x von $x = 0$ bis $x = a$ ſtetig verändern läßt, und $f(x)$ ſey eine für $x = 0$ verſchwindende ganze rationale algebraiſche Function; ſo iſt

$$\frac{f(a)}{a^n}$$

jederzeit eine Mittelgröße zwiſchen **A** und **B**, d. h. nicht kleiner wie **A** und nicht größer wie **B**.

Um dies zu beweiſen ſey i eine unendlich kleine poſitive Größe, die nur nicht null ſelbſt iſt, ſonſt aber beliebig klein angenommen werden kann; ſo iſt, wenn wir

$$A - i = A', \; B + i = B'$$

ſetzen, für jedes x von $x = 0$ bis $x = a$,

$$\frac{f'(x)}{nx^{n-1}} > A', \quad \frac{f'(x)}{nx^{n-1}} < B'$$

oder

$$\frac{f'(x)}{nx^{n-1}} - A' > 0, \quad \frac{f'(x)}{nx^{n-1}} - B' < 0,$$

ſo daß alſo dieſe beiden Größen ihre Vorzeichen in dem in Rede ſtehenden Intervall nicht ändern, und zwar die erſte ſtets > 0, die zweite ſtets < 0 iſt. Alſo iſt auch in dieſem Intervall die eine der Größen

$$nx^{n-1}\left\{\frac{f'(x)}{nx^{n-1}} - A'\right\}, \quad nx^{n-1}\left\{\frac{f'(x)}{nx^{n-1}} - B'\right\},$$

d. i. die eine der Größen

$$f'(x) - nA'x^{n-1}, f'(x) - nB'x^{n-1}$$

ohne Beziehung ſtets poſitiv, die andere ſtets negativ. Dieſe beiden Größen ſind reſpective die derivirten Functionen von

$$f(x) - A'x^n, f(x) - B'x^n,$$

und es wird alſo nach (52.) die eine dieſer beiden Größen von $x = 0$ bis $x = a$ ſtets wachſen, die andere dagegen ſtets abnehmen. Weil nun aber nach der Vorausſetzung die beiden obigen Functionen für $x = 0$ verſchwinden; ſo iſt klar, daß die eine der beiden Größen

$$f(a) - A'a^n, f(a) - B'a^n$$

jederzeit > 0, die andere dagegen < 0 iſt. Folglich iſt auch, wenn man mit a^n dividirt, die eine der beiden Größen

$$\frac{f(a)}{a^n} - A', \frac{f(a)}{a^n} - B'$$

jederzeit poſitiv, die andere dagegen negativ, d. i. die eine > 0, die andere < 0. Weil nun

$$\left\{\frac{f(a)}{a^n} - A'\right\} - \left\{\frac{f(a)}{a^n} - B'\right\} = B' - A'$$

und nach der Vorausſetzung $B' - A' > 0$ iſt; ſo iſt offenbar

$$\frac{f(a)}{a^n} - A' > 0, \frac{f(a)}{a^n} - B' < 0$$

oder

$$\frac{f(a)}{a^n} > A', \frac{f(a)}{a^n} < B'.$$

Weil nun aber

$$A - i = A', B + i = B'$$

iſt, und i beliebig klein genommen werden kann, wenn es nur nicht null ſelbſt wird; ſo iſt klar, daß

$$\frac{f(a)}{a^n}$$

jederzeit eine Mittelgröße zwiſchen **A** und **B**, d. h. nicht kleiner wie **A**, nicht größer wie **B** iſt, wie behauptet wurde *).

54. Die Function $\frac{f'(x)}{nx^{n-1}}$ iſt offenbar zwiſchen den Gränzen $x = 0$, $x = a$ ſtetig, wobei man nur zu beachten hat, daß man, ſtatt x wirklich $= 0$ zu ſetzen, an dieſer Gränze immer eine unendlich wenig von null verſchiedene zwiſchen 0 und **a** liegende Größe ſich für x geſetzt denken kann, und

$$\frac{f(a)}{a^n}$$

*) Wegen weiterer Entwickelung und größerer Verallgemeinerung dieſes Satzes ſ. m. den Artikel Taylors Lehrſatz i. d. Z. Für unſern jetzigen Zweck iſt das Obige hinreichend.

iſt nach (53.) eine Mittelgröße zwiſchen dem kleinſten und größten unter allen Werthen von

$$\frac{f'(x)}{nx^{n-1}}$$

von $x = 0$ bis $x = a$. Alſo muß unter dieſen Werthen von

$$\frac{f'(x)}{nx^{n-1}}$$

jederzeit mindeſtens einer vorkommen, welcher der Größe

$$\frac{f(a)}{a^n}$$

gleich iſt. Da dieſer Werth der in Rede ſtehenden Function einem Mittelwerthe von x zwiſchen 0 und a entſpricht, und jede Mittelgröße zwiſchen 0 und a offenbar durch ϱa bezeichnet werden kann, wo ϱ eine die Einheit nicht überſteigende poſitive Größe iſt; ſo iſt klar, daß man unter der in (53.) gemachten Vorausſetzung, daß $f(0) = 0$ iſt, jederzeit

$$\frac{f(a)}{a^n} = \frac{f'(\varrho a)}{n(\varrho a)^{n-1}}$$

oder nun überhaupt

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f'(\varrho x)}{n(\varrho x)^{n-1}}$$

ſetzen kann.

55. Verſchwinden $f(x)$ und $f'(x)$ für $x = 0$, ſo iſt nach der vorhergehenden Gleichung, wenn immer $\varrho, \varrho', \varrho'', \varrho''', \ldots$ poſitive die Einheit nicht überſteigende Größen bezeichnen,

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f'(\varrho x)}{n(\varrho x)^{n-1}},$$

$$\frac{f'(\varrho x)}{n(\varrho x)^{n-1}} = \frac{f''(\varrho\varrho' x)}{n(n-1)(\varrho\varrho' x)^{n-2}};$$

alſo

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f''(\varrho\varrho' x)}{n(n-1)(\varrho\varrho' x)^{n-2}},$$

oder, weil $\varrho\varrho'$ offenbar auch eine poſitive die Einheit nicht überſteigende Größe iſt,

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f''(\varrho x)}{n(n-1)(\varrho x)^{n-2}}:$$

Verſchwinden $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ für $x = 0$, ſo iſt eben ſo nach (54.)

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f'(\varrho x)}{n(\varrho x)^{n-1}},$$

$$\frac{f'(\varrho x)}{n(\varrho x)^{n-1}} = \frac{f''(\varrho\varrho' x)}{n(n-1)(\varrho\varrho' x)^{n-2}},$$

$$\frac{f''(\varrho\varrho' x)}{n(n-1)(\varrho\varrho' x)^{n-2}} = \frac{f'''(\varrho\varrho'\varrho'' x)}{n(n-1)(n-2)(\varrho\varrho'\varrho'' x)^{n-3}};$$

alſo

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f'''(\varrho\varrho'\varrho''x)}{n(n-1)(n-2)(\varrho\varrho'\varrho''x)^{n-3}},$$

oder, weil $\varrho\varrho'\varrho''$ eine poſitive die Einheit nicht überſteigende Größe iſt,

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f'''(\varrho x)}{n(n-1)(n-2)(\varrho x)^{n-3}}.$$

Wie man auf dieſe Art weiter gehen könnte, iſt klar. Wenn

$$f(x), f'(x), f''(x), \ldots f^{(n-1)}(x)$$

für $x = 0$ verſchwinden, ſo iſt

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\varrho x)}{1.2.3\ldots n},$$

wie aus dem Vorhergehenden leicht erhellet.

56. Bevor wir weitere Anwendungen hiervon machen, ſchalten wir noch folgende Betrachtung über die derivirten Functionen ein. Sey

$$f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n;$$

ſo iſt

$$f(x+i) = a + a_1(x+i) + a_2(x+i)^2 + \ldots + a_n(x+i)^n.$$

Dieſe Function wollen wir nun als Function von $x + i$, als eine einfache veränderliche Größe, und als Function von i betrachten. In erſterer Beziehung ſetzen wir $x + i = z$, alſo

$$f(z) = a + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n.$$

Nehmen wir nun die erſte derivirte Function in Bezug auf z als veränderliche Größe; ſo erhalten wir

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots + na_n z^{n-1}$$
$$= a_1 + 2a_2(x+i) + 3a_3(x+i)^2 + \ldots + na_n(x+i)^{n-1}.$$

Betrachten wir $f(x+i)$ als Function von i, ſo wollen wir $f(x+i) = \varphi(i)$ ſetzen. Dann iſt nach den in (48.) entwickelten Regeln

$$\varphi'(i) = a_1 + 2a_2(x+i) + 3a_3(x+i)^2 + \ldots + na_n(x+i)^{n-1},$$

d. i. $f'(z) = \varphi'(i)$; folglich erhält man einerlei Reſultat, wenn man von $f(x+i)$ die erſte derivirte Function in Bezug auf $x+i$ als einfache veränderliche Größe oder in Bezug auf i als veränderliche Größe entwickelt. Will man alſo $\varphi'(i)$ haben, ſo entwickelt man $f'(x)$ und ſchreibt $x + i$ für x. Dies wird ſogleich ſeine Anwendung finden.

57. I. Man betrachte

$$f(x+i) - f(x)$$

als Function von i und ſetze zu dem Ende

$$f(x+i) - f(x) = F(i);$$

ſo iſt

$$F(0) = f(x) - f(x) = 0,$$

und F(i) verſchwindet alſo für $i = 0$. Alſo iſt nach (55.) für $n = 1$

$$\frac{F(i)}{i} = F'(\varrho i),$$

wo ϱ dieſelbe Bedeutung hat wie a. a. O. Aus der Gleichung

$$F(i) = f(x+i) - f(x),$$

wo $f(x)$ kein i enthält und daher conſtant iſt, folgt

$$F'(i) = f'(x+i),$$

wo nach (56.) $f'(x+i)$ aus $f'(x)$ erhalten wird, wenn man $x+i$ für x ſetzt. Alſo iſt

$$F'(\varrho i) = f'(x+\varrho i),$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i} = f'(x+\varrho i),$$

d. i.

$$f(x+i) = f(x) + if'(x+\varrho i).$$

II. Sey ferner

$$f(x+i) - f(x) - \frac{i}{1}f'(x) = F(i),$$

ſo iſt

$$F'(i) = f'(x+i) - f'(x);$$

folglich verſchwinden offenbar F(i) und F'(i) für $i = 0$. Alſo iſt nach (55.) für $n = 2$

$$\frac{F(i)}{i^2} = \frac{F''(\varrho i)}{1.2}.$$

Aber

$$F''(i) = f''(x+i)$$

und folglich

$$F''(\varrho i) = f''(x+\varrho i).$$

Dies giebt nach dem Obigen

$$\frac{f(x+i) - f(x) - \frac{i}{1}f'(x)}{i^2} = \frac{f''(x+\varrho i)}{1.2}$$

oder

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i}{1}f'(x) + \frac{i^2}{1.2}f''(x+\varrho i).$$

III. Setzt man

$$f(x+i) - f(x) - \frac{i}{1}f'(x) - \frac{i^2}{1.2}f''(x) = F(i),$$

ſo iſt

$$F'(i) = f'(x+i) - f'(x) - \frac{i}{1}f''(x),$$

$$F''(i) = f''(x+i) - f''(x),$$

und F(i), F′(i), F″(i) verſchwinden alſo für i = 0. Alſo iſt nach (55.) für n = 3

$$\frac{F(i)}{i^3} = \frac{F'''(\varrho i)}{1.2.3}.$$

Nun iſt aber

$$F'''(i) = f'''(x+i)$$

und

$$F'''(\varrho i) = f'''(x+\varrho i).$$

Alſo iſt nach dem Obigen

$$\frac{f(x+i) - f(x) - \frac{i}{1}f'(x) - \frac{i^2}{1.2}f''(x)}{i^3} = \frac{f'''(x+\varrho i)}{1.2.3},$$

d. i.

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i}{1}f'(x) + \frac{i^2}{1.2}f''(x) + \frac{i^3}{1.2.3}f'''(x+\varrho i).$$

Wie man auf dieſe Art weiter gehen könnte, iſt klar. Das Vorhergehende iſt aber zu unſerm gegenwärtigen Zwecke mehr als hinreichend.

58. Mit der Lehre von den derivirten Functionen hängen mehrere Sätze von den Gleichungen mit gleichen Wurzeln zuſammen, die wir im Folgenden brauchen und daher hier noch kurz entwickeln wollen.

I. Wenn die Gleichung $f(x) = 0$ des nten Grades nicht mehr und nicht weniger als k Wurzeln hat, die $= \alpha$ ſind; ſo hat die derivirte Gleichung $f'(x) = 0$ nicht mehr und nicht weniger als k — 1 Wurzeln, die $= \alpha$ ſind, wobei ſich von ſelbſt verſteht, daß k nicht = 0 ſeyn darf.

Da die Gleichung $f(x) = 0$ nicht mehr und nicht weniger als k Wurzeln hat, die $= \alpha$ ſind; ſo iſt

$$f(x) = (x-\alpha)^k \varphi(x),$$

und $\varphi(\alpha)$ iſt nicht = 0. Nimmt man nun die derivirten Functionen, ſo erhält man nach den aus dem Obigen bekannten Regeln

$$f'(x) = (x-\alpha)^k \varphi'(x) + k(x-\alpha)^{k-1}\varphi(x)$$
$$= (x-\alpha)^{k-1}\{(x-\alpha)\varphi'(x) + k\varphi(x)\},$$

und überſieht alſo hieraus auf der Stelle, daß die Gleichung $f'(x) = 0$ jederzeit k — 1 Wurzeln hat, deren jede $= \alpha$ iſt. Daß aber dieſe Gleichung auch nicht mehr als k — 1 Wurzeln hat, die $= \alpha$ ſind, erhellet eben ſo leicht. Sollte dieſelbe nämlich k Wurzeln haben, die $= \alpha$ ſind; ſo müßte offenbar $x - \alpha$ in der ganzen rationalen Function

$$(x-\alpha)\varphi'(x) + k\varphi(x)$$

aufgehen und dieſe Function alſo für $x = \alpha$ verſchwinden, welches nicht möglich iſt, da dieſelbe für dieſen Werth der unbe-

kannten Größe $= k\varphi(\alpha)$ wird, und nach der Vorausſetzung weder k, noch $\varphi(\alpha)$, $= 0$ iſt.

II. Wenn die Gleichung $f(x) = 0$ nicht mehr und nicht weniger als k Wurzeln hat, die $= \alpha$ ſind; ſo haben die Gleichungen

$$f'(x) = 0,\ f''(x) = 0,\ f'''(x) = 0,\ \ldots f^{(k-1)}(x) = 0,\ f^{(k)}(x) = 0$$

reſpective nicht mehr und nicht weniger als $k-1$, $k-2$, $k-3$, ... 2, 1, 0 Wurzeln, die $= \alpha$ ſind.

Daß dies eine unmittelbare Folge aus dem Vorhergehenden iſt, erhellet leicht. Daß k nicht $= 0$ ſeyn darf, verſteht ſich von ſelbſt.

III. Wenn die Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots\ f^{(k-1)}(x)$$

für $x = \alpha$ ſämmtlich verſchwinden, aber $f^{(k)}(\alpha)$ nicht $= 0$ iſt; ſo hat die Gleichung $f(x) = 0$ nicht mehr und nicht weniger als k Wurzeln, die $= \alpha$ ſind.

Die Anzahl der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, welche $= \alpha$ ſind, ſey $= p$, ſo iſt $p > 0$, weil nach der Vorausſetzung $f(\alpha) = 0$ iſt. Daher verſchwinden nach **II.** die Functionen

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots\ f^{(p-1)}(x)$$

für $x = \alpha$ ſämmtlich, $f^{(p)}(\alpha)$ iſt aber nicht $= 0$. Wäre nun $p > k$, ſo wäre $p-1$ mindeſtens $= k$, und es würde alſo $f^{(k)}(\alpha) = 0$ ſeyn, welches gegen die Vorausſetzung iſt. Wäre aber $p < k$, ſo wäre $k-1$ mindeſtens $= p$, und es müßte alſo $f^{(p)}(\alpha) = 0$ ſeyn, welches wieder nicht Statt finden kann. Daher iſt $p = k$ und unſer Satz alſo bewieſen. Daß dieſer Satz, wenigſtens gewiſſermaßen, auch für $k = 0$ gilt, erhellet leicht, weil für dieſen Werth $f^{(k)}(\alpha)$ in $f(\alpha)$ übergeht, nach der Vorausſetzung alſo $f(\alpha)$ nicht $= 0$, die Anzahl der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, welche $= \alpha$ ſind, folglich $= 0$ iſt.

IV. Sey jetzt

$$f(x) = A(x-a)^m(x-b)^p(x-c)^q \ldots,$$

wo A eine beliebige conſtante Größe bezeichnet, und a, b, c, ... ſämmtlich unter einander ungleich ſeyn ſollen. Nun findet man leicht durch Entwickelung der erſten derivirten Function

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{x-a} + \frac{p}{x-b} + \frac{q}{x-c} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{m(x-b)(x-c)\ldots + p(x-a)(x-c)\ldots + q(x-a)(x-b)\ldots + \ldots}{(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner des Bruchs auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens reſpective durch $F(x)$ und $F_1(x)$ bezeichnet,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{F_1(x)}.$$

Sey nun ferner $\psi(x)$ der größte gemeinſchaftliche Diviſor von $f(x)$ und $f'(x)$; ſo ſind, wenn wir

$$\frac{f'(x)}{\psi(x)} = \varphi(x),\ \frac{f(x)}{\psi(x)} = \varphi_1(x)$$

ſetzen, $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ zwei ganze rationale algebraiſche Functionen von x, die für keinen Werth von x zugleich verſchwinden, und es iſt offenbar

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{F_1(x)} = \frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}\ ;$$

alſo

$$F(x).\varphi_1(x) = \varphi(x).F_1(x)$$

für jedes x. Für $x = a$ iſt folglich

$$F(a).\varphi_1(a) = \varphi(a).F_1(a)\ ,$$

d. i., weil $F_1(a) = 0$ iſt,

$$F(a).\varphi_1(a) = 0\ ,$$

und folglich, weil $F(a)$ offenbar nicht $= 0$ iſt, $\varphi_1(a) = 0$; alſo, weil $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ für keinen Werth von x zugleich verſchwinden, $\varphi(a)$ nicht $= 0$. Weil $\varphi_1(a) = 0$ iſt, ſo geht $x - a$ in $\varphi_1(x)$ auf, und

$$\frac{\varphi_1(x)}{x - a} = \varphi_2(x)$$

iſt alſo eine ganze rationale algebraiſche Function. Aus dem Obigen ergiebt ſich nun auf der Stelle

$$F(x).\frac{\varphi_1(x)}{x - a} = \varphi(x).\frac{F_1(x)}{x - a}\ ,$$

d. i.

$$F(x).\varphi_2(x) = \varphi(x).F_2(x)\ ;$$

wenn wir

$$(x - b)(x - c)(x - d)\ldots = F_2(x)$$

ſetzen. Für $x = a$ iſt alſo

$$F(a).\varphi_2(a) = \varphi(a).F_2(a)\ ,$$

wo weder $\varphi(a)$, noch $F_2(a)$, $= 0$, alſo auch $\varphi_2(a)$ nicht $= 0$ iſt. Hieraus ſieht man, daß die Gleichung $\varphi_1(x) = 0$ die Wurzel $x = a$ nur ein Mal enthält, und ganz auf dieſelbe Art überzeugt man ſich, daß dieſe Gleichung auch jede der Wurzeln $x = b, c, d, \ldots$, zugleich aber auch jede nur ein Mal enthält, ſo daß alſo

$$\varphi_1(x) = 0$$

eine Gleichung iſt, welche alle ungleichen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, und jede dieſer Wurzeln nur ein Mal, übrigens auch keine andern Wurzeln, enthält. Daß nämlich die Gleichung $\varphi_1(x) = 0$ auch keine andern Wurzeln wie a, b, c, d, ... enthält, erhellet leicht auf folgende Art. Nach dem Obigen iſt für jedes x

$$F(x).\varphi_1(x) = \varphi(x).F_1(x)\ .$$

Wäre nun g eine nicht unter a, b, c, d, ... vorkommende Größe und $\varphi_1(g) = 0$, ſo daß nämlich g eine Wurzel der Gleichung $\varphi_1(x) = 0$ wäre; ſo müßte offenbar auch

$$\varphi(g) \cdot F_1(g) = 0,$$

und folglich entweder $\varphi(g)$, oder $F_1(g)$, $= 0$ ſeyn. Beides iſt aber nicht möglich, weil $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ für keinen Werth von x zugleich verſchwinden, und

$$F_1(g) = (g-a)(g-b)(g-c) \ldots\ldots$$

offenbar nicht $= 0$ iſt, da g unter den Größen a, b, c, d, ... nicht vorkommt. Man ſieht alſo, daß die Gleichung $\varphi_1(x) = 0$ bloß die Wurzeln a, b, c, d, ... hat, und auch jede nur ein Mal enthält. Die Function $\varphi_1(x)$ erhält man, wenn man $f(x)$ durch den größten gemeinſchaftlichen Diviſor $\psi(x)$ von $f(x)$ und $f'(x)$ dividirt, und kann alſo immer leicht eine Gleichung bilden, welche alle ungleichen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, jede dieſer Wurzeln nur ein Mal, und übrigens keine andern Wurzeln enthält. Durch Auflöſung der Gleichung $\varphi_1(x) = 0$ erhält man alſo alle ungleichen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, und wird nun auch in allen Fällen durch mehrmalige ſucceſſive Diviſion mit $x-a$, $x-b$, $x-c$, ... in die Function $f(x)$ leicht beſtimmen können, wie oft jede dieſer Wurzeln in der Gleichung $f(x) = 0$ vorkommt.

Man kann ſich nun aber auch leicht eine Gleichung bilden, welche bloß alle die Wurzeln enthält, welche in der Gleichung $f(x) = 0$ mehr als ein Mal vorkommen. Nach dem Obigen iſt nämlich

$$\psi(x) \cdot \varphi_1(x) = f(x),$$

und folglich

$$\psi(x) \cdot \frac{\varphi_1(x)}{x-a} = \frac{f(x)}{x-a},$$

d. i., wenn wir wieder

$$\frac{\varphi_1(x)}{x-a} = \varphi_2(x)$$

ſetzen, wo $\varphi_2(x)$ eine ganze rationale algebraiſche Function von x bezeichnet, die für $x = a$ nicht verſchwindet:

$$\psi(x) \cdot \varphi_2(x) = A(x-a)^{m-1}(x-b)^p(x-c)^q \ldots\ldots$$

Da nun $\varphi_2(a)$ nicht $= 0$, und folglich $x-a$ kein Factor von $\varphi_2(x)$ iſt; ſo ſieht man, daß $\psi(x)$ den Factor $x-a$ nur $(m-1)$mal enthält. Ganz eben ſo enthält $\psi(x)$ den Factor $x-b$ nur $(p-1)$mal, den Factor $x-c$ nur $(q-1)$mal u. ſ. w., und überhaupt keine andern Factoren. Daher enthält die Gleichung

$$\psi(x) = 0$$

die Wurzeln a, b, c, ... der Gleichung $f(x) = 0$ reſpective $(m-1)$mal, $(p-1)$mal, $(q-1)$mal, u. ſ. w., und außerdem keine andern Wurzeln. Eine in der Gleichung $f(x) = 0$ nur

ein Mal vorkommende Wurzel enthält die Gleichung $\psi(x) = 0$ alſo gar nicht, und dieſe Gleichung enthält folglich bloß die Wurzeln, welche die Gleichung $f(x) = 0$ mehr als ein Mal enthält. $\psi(x)$ iſt der größte gemeinſchaftliche Diviſor von $f(x)$ und $f'(x)$. Iſt dieſer größte gemeinſchaftliche Diviſor eine conſtante Größe, ſo verſteht ſich von ſelbſt, daß die Gleichung $f(x) = 0$ gar keine gleichen Wurzeln hat.

59. Noch verdient folgender Satz bemerkt zu werden. Wir wollen annehmen, daß a, b, c, d, ... p, q die ſämmtlichen reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ ſind; auch mögen dieſe Wurzeln in vorſtehender Reihe abſteigend nach ihrer Größe geordnet und ſämmtlich unter einander ungleich ſeyn. Bezeichnet nun $\varphi(x)$ das Product aller imaginären einfachen Factoren der Function $f(x)$; ſo iſt bekanntlich

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-p)(x-q)\varphi(x),$$

und folglich

$$\begin{aligned} f'(x) = \{ & (x-b)(x-c)(x-d)\ldots(x-p)(x-q) \\ & + (x-a)(x-c)(x-d)\ldots(x-p)(x-q) \\ & + (x-a)(x-b)(x-d)\ldots(x-p)(x-q) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-o)(x-q) \\ & + (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-o)(x-p)\}\,\varphi(x) \\ & + (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-p)(x-q)\,\varphi'(x). \end{aligned}$$

Da die imaginären Wurzeln bekanntlich immer paarweiſe von der Form $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$ vorhanden ſind, und

$$(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})(x-\alpha+\beta\sqrt{-1}) = (x-\alpha)^2 + \beta^2$$

iſt; ſo iſt $\varphi(x)$ ein Product von der Form

$$\varphi(x) = \{(x-\alpha)^2+\beta^2\}\{(x-\alpha')^2+\beta'^2\}\{(x-\alpha'')^2+\beta''^2\}\ldots,$$

und daher für jedes x poſitiv. Alſo iſt

$$\begin{aligned} f'(a) &= (a-b)(a-c)(a-d)..(a-p)(a-q)\varphi(a) > 0, \\ f'(b) &= (b-a)(b-c)(b-d)..(b-p)(b-q)\varphi(b) < 0, \\ f'(c) &= (c-a)(c-b)(c-d)..(c-p)(c-q)\varphi(c) > 0, \\ f'(d) &= (d-a)(d-b)(d-c)..(d-p)(d-q)\varphi(d) < 0, \end{aligned}$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

woraus ſich nach (9.) unmittelbar folgender Satz ergiebt:

Zwiſchen jeden zwei nächſten reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ liegt immer mindeſtens eine reelle Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$, auch ſelbſt dann, wenn unter den reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ gleiche vorkommen, weil das Obige richtig bleibt, wie klein man auch die Unterſchiede der reellen Wurzeln dieſer Gleichung annehmen mag.

B. Von den Zeichenreihen.

60. Die gegebene Gleichung, deren Coefficienten wir jetzt ſämmtlich als reelle Größen annehmen, ſey nun wieder, wie immer in dieſem Artikel,

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0 .$$

Entwickelt man die derivirten Functionen von $f(x)$ und ſchreibt dieſelben in umgekehrter Ordnung; ſo erhält man die Reihe

$$f^{(n)}(x), f^{(n-1)}(x), f^{(n-2)}(x), \ldots f'(x), f(x) ,$$

welche im Folgenden in der Kürze bloß durch $f^{(n)}f$ bezeichnet und die **Functionenreihe** genannt werden ſoll. Setzt man nun für x einen beſtimmten Werth a, und ordnet die Vorzeichen der einzelnen Glieder der Reihe

$$f^{(n)}(a), f^{(n-1)}(a), f^{(n-2)}(a), \ldots f'(a), f'(a)$$

in eine Reihe, ſo ſoll dieſe Reihe die der Functionenreihe $f^{(n)}f$ für den Werth a der veränderlichen Größe entſprechende **Zeichenreihe** genannt und durch (a) bezeichnet werden, wobei wir zugleich noch bemerken, daß, wenn für $x = a$ Glieder der Functionenreihe verſchwinden, in der Zeichenreihe (a) an den entſprechenden Stellen jederzeit 0 geſchrieben wird, wie ſich von ſelbſt verſteht. Dieſe Zeichenreihen ſpielen bei der Auflöſung der numeriſchen Gleichungen, wie wir im Folgenden ſehen werden, eine große Rolle, und ſollen daher hier zunächſt einer ausführlichen Betrachtung gewürdigt werden.

61. Weil, wie leicht erhellet,

$$f^{(n)}(x) = 1.2.3\ldots n$$

iſt; ſo **iſt das erſte Glied jeder Zeichenreihe offenbar +.**

Für $x = -\infty$ und $x = +\infty$ reducirt ſich jede der in der Functionenreihe $f^{(n)}f$ enthaltenen Functionen auf ihr erſtes oder höchſtes Glied (51.). **Deshalb enthält die Zeichenreihe $(-\infty)$ offenbar bloß Zeichenwechſel, die Zeichenreihe $(+\infty)$ dagegen bloß Zeichenfolgen. Die Anzahl der Zeichenwechſel in $(-\infty)$ ſowohl, als auch die Anzahl der Zeichenfolgen in $(+\infty)$ iſt $=$ n. Die Anzahl der Zeichenwechſel in $(+\infty)$ iſt null, und die Zeichenreihe $(+\infty)$ hat alſo n Zeichenwechſel weniger wie die Zeichenreihe $(-\infty)$.**

Wir wollen uns nun denken, daß x von $-\infty$ bis $+\infty$ ſtetig wachſe, und wollen die Veränderungen aufmerkſam betrachten, welche dabei die den einzelnen Werthen von x entſprechenden Zeichenreihen erleiden, wobei wir zunächſt die ſich auf der Stelle ergebende Bemerkung machen, daß überhaupt keine Veränderung mit den Zeichenreihen vorgehen kann, wenn nicht ein oder einige Glieder der Functionenreihe für einen gewiſſen Werth von x verſchwinden, indem wegen der Stetigkeit der ganzen rationalen al-

gebraiſchen Functionen zwiſchen jeden zwei beliebigen Gränzen keine ſolche Function vom Poſitiven zum Negativen oder umgekehrt vom Negativen zum Poſitiven übergehen kann, ohne zwiſchen beiden Zuſtänden zu verſchwinden, wobei man auch (9.) vergleichen mag.

62. Durch i ſoll im Folgenden, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes beſtimmt wird, immer eine poſitive unendlich kleine Größe bezeichnet werden, ſo daß alſo a — i und a + i zwei dem Werthe a von x auf beiden Seiten unendlich nahe liegende oder nächſt benachbarte Werthe dieſer veränderlichen Größe, (a — i) und (a + i) alſo zwei der Zeichenreihe (a) nächſt benachbarte Zeichenreihen ſind. Dies vorausgeſetzt, legen wir uns nun zunächſt die Frage vor, wie man aus der Zeichenreihe (a) immer mit Leichtigkeit die beiden nächſt benachbarten Zeichenreihen (a — i) und (a + i) ableiten oder bilden kann.

I. Wir wollen zuerſt annehmen, daß das beliebige Glied $f^{(k)}(x)$ der Functionenreihe für x = a nicht verſchwinde, ſo daß alſo $f^{(k)}(a)$ nicht null, das entſprechende Glied der Zeichenreihe (a) alſo auch nicht 0, ſondern ± iſt. Nach dem Obigen iſt

$$f^{(k)}(a \pm i) = f^{(k)}(a) \pm \frac{i}{1} f^{(k+1)}(a) + \ldots . + \frac{(-i)^{n-k}}{1 \ldots (n-k)} f^{(n-k)}(a),$$

und i kann immer ſo klein genommen werden, daß das Zeichen der Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, d. h. das Zeichen von $f^{(k)}(a \pm i)$, bloß von dem Zeichen des erſten Gliedes $f^{(k)}(a)$, welches nach der Vorausſetzung nicht null iſt, abhängt oder mit dem Zeichen dieſes Gliedes einerlei iſt. Wenn alſo das dem Gliede $f^{(k)}(a)$ der Functionenreihe entſprechende Glied der Zeichenreihe (a) ± iſt; ſo ſind mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander auch die entſprechenden Glieder der Zeichenreihen (a — i) und (a + i) ±. Für jedes Glied der Zeichenreihe (a), welches nicht null iſt, hat man alſo in den Zeichenreihen (a — i) und (a + i) daſſelbe Zeichen zu ſetzen.

II. Nun wollen wir aber annehmen, daß die den Gliedern

$$f^{(k+1)}(a),\, f^{(k)}(a),\, f^{(k-1)}(a),\, f^{(k-2)}(a),\, \ldots f^{(k-e)}(a)$$

der Functionenreihe entſprechenden Glieder der Zeichenreihe (a) reſpective

$$\pm\, 0000 \ldots 00$$

ſind; ſo iſt nach dem Obigen, indem man vorzüglich auch die in (51.) gemachten Bemerkungen berückſichtigt:

$$f^{(k)}(a \pm i) = \pm \frac{i}{1} f^{(k+1)}(a),$$

$$f^{(k-1)}(a \pm i) = \frac{i^2}{1.2} f^{(k+1)}(a),$$

$$f^{(k-2)}(a \pm i) = \pm \frac{i^3}{1.2.3} f^{(k+1)}(a),$$

$$f^{(k-3)}(a \pm i) = \frac{i^4}{1 \ldots 4} f^{(k+1)}(a),$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

$$f^{(k-e)}(a \pm i) = (\pm 1)^{e+1} \cdot \frac{i^{e+1}}{1 \ldots (e+1)} f^{(k+1)}(a).$$

Dies erhellet aus dem Obigen auf der Stelle, wenn man nur bedenkt, daß die Größen

$$f^{(k)}(a),\ f^{(k-1)}(a),\ f^{(k-2)}(a),\ \ldots\ f^{(k-e)}(a)$$

ſämmtlich null ſind.

Man ſieht nun hieraus und aus I., daß die den Gliedern

$$\pm\ 0000 \ldots 00$$

der Zeichenreihe (a) entſprechenden Glieder der Zeichenreihe (a — i) jederzeit

$$\pm \mp \pm \mp \pm \ldots \begin{Bmatrix} (-)^{e+1} \\ (-)^{e} \end{Bmatrix}$$

ſind, ſo daß nämlich in dieſem Theile der Zeichenreihe (a — i) die Zeichen vom erſten bis zum letzten Gliede beſtändig abwechſeln. Die den Gliedern

$$\pm\ 0000 \ldots 00$$

der Zeichenreihe (a) entſprechenden Glieder der Zeichenreihe (a + i) ſind dagegen

$$\pm \pm \pm \pm \pm \ldots \pm,$$

ſo daß nämlich in dieſem Theile der Zeichenreihe (a + i) jedes Glied vom erſten bis zum letzten dem vorhergehenden Gliede gleich iſt.

III. Aus I. und II. ergiebt ſich nun unmittelbar folgende ſehr einfache Regel zur Bildung der Zeichenreihen (a — i) und (a + i) aus der Zeichenreihe (a):

Ueber und unter jedes Glied der Zeichenreihe (a), welches nicht null iſt, ſchreibe man daſſelbe Zeichen. Dagegen ſchreibe man über jedes Glied der Reihe (a), welches null iſt, das entgegengeſetzte Zeichen von dem, welches in der Reihe (a — i) nach der linken Seite hin unmittelbar vorher geht; unter jedes Glied der Reihe (a), welches null iſt, ſchreibe man aber ein dem in der Reihe (a + i) nach der linken Seite hin unmittelbar vorhergehenden gleiches Zeichen.

Fourier, welchem in neueſter Zeit die Auflöſung der numeriſchen Gleichungen die meiſte Ausbildung und Vervollkommnung verdankt, nennt dieſe wichtige in der Anwendung ſehr leichte Regel die Regel des doppelten Zeichens, und bezeichnet

ſehr zweckmäßig die von a unendlich wenig verſchiedenen Größen $a - i$ und $a + i$ bloß durch $< a$ und $> a$, die Zeichenreihen $(a - i)$ und $(a + i)$ alſo durch $(< a)$ und $(> a)$. Das folgende Beiſpiel wird die Anwendung der Regel des doppelten Zeichens erläutern:

$$\begin{array}{l} (<a) = + - + - + - + - + - + + + - + - + - + - - + \\ (a) = + - + \; 0\;0\;0\;0 - 0\;0\;0 + + \;0 + 0\;0\;0\;0\;0 - + \\ (>a) = + - + + + + + - - - - + + + + + + + + - + \end{array}$$

63. Wir wollen nun ferner im Allgemeinen die Anzahl der in der Reihe $(a + i)$ oder $(> a)$ vorkommenden Zeichenwechſel mit der in der Reihe $(a - i)$ oder $(< a)$ enthaltenen Zeichenwechſel vergleichen.

I. Zuerſt betrachten wir eine Gruppe auf einander folgender Glieder der Reihe (a), die ſämmtlich 0 ſind und von zwei nicht verſchwindenden Gliedern auf beiden Seiten eingeſchloſſen oder begränzt werden, wobei nun aber wieder zwei Fälle zu unterſcheiden ſind, je nachdem die einſchließenden oder begränzenden Glieder einander gleich oder entgegengeſetzt ſind. Die Anzahl der auf einander folgenden Glieder, welche ſämmtlich 0 ſind, wollen wir wie in (62.) $= e + 1$ ſetzen.

1. Haben wir alſo zunächſt die Gruppe

$$\pm\; 00000 \;\ldots\; 00 \;\pm$$

der Reihe (a), ſo giebt die Regel des doppelten Zeichens für die Reihen $(< a)$ und $(> a)$ nach dem Vorhergehenden:

$$\begin{array}{rl} (< a) \ldots\ldots & \pm \mp \pm \mp \pm \mp \ldots \begin{Bmatrix} (-)^{e+1} \\ (-)^{0} \end{Bmatrix} \pm \\ (a) \ldots\ldots & \pm \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \;\ldots\ldots\ldots\; 0 \pm \\ (> a) \ldots\ldots & \pm \pm \pm \pm \pm \pm \ldots\ldots\ldots \pm \pm , \end{array}$$

wo man nun wieder zwei Fälle unterſcheiden muß, je nachdem die Anzahl der verſchwindenden Glieder, welche wir durch $e + 1$ bezeichnet haben, eine gerade oder eine ungerade Zahl iſt.

a. Wenn die Anzahl der verſchwindenden Glieder eine gerade Zahl iſt, ſo iſt

$$\begin{array}{rl} (< a) \ldots\ldots & \pm \mp \pm \mp \pm \mp \ldots \pm \pm \\ (a) \ldots\ldots & \pm \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \ldots 0 \pm \\ (> a) \ldots\ldots & \pm \pm \pm \pm \pm \pm \ldots \pm \pm . \end{array}$$

In dieſem Falle hat alſo die Zeichenreihe $(> a)$ offenbar $e + 1$ Zeichenwechſel weniger wie die Zeichenreihe $(< a)$, natürlich nicht im Ganzen, ſondern immer bloß in Bezug auf die hier betrachteten Gruppen.

b. Wenn die Anzahl der verſchwindenden Glieder eine ungerade Zahl iſt, ſo iſt

$$(< a) \ldots\ldots \pm \mp \pm \mp \pm \mp \cdots \mp \pm$$
$$(a) \ldots\ldots \pm\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots 0 \pm$$
$$(> a) \ldots\ldots \pm \pm \pm \pm \pm \pm \cdots \pm \pm .$$

In dieſem Falle hat alſo die Reihe (> a) jederzeit $e + 2$ Zeichenwechſel weniger wie die Zeichenreihe (< a).

2. Haben wir ferner die Gruppe

$$\pm\ 00000 \ldots\ldots 00 \mp$$

der Reihe (a), ſo giebt die Regel des doppelten Zeichens

$$(< a) \ldots\ldots \pm \mp \pm \mp \pm \mp \cdots \left\{\begin{matrix}(-)^{e+1}\\(-)^{e}\end{matrix}\right\} \mp$$
$$(a) \ldots\ldots \pm\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots\ldots\ldots 0 \mp$$
$$(> a) \ldots\ldots \pm \pm \pm \pm \pm \pm \ldots\ldots\ldots \pm \mp .$$

a. Iſt nun die Anzahl der verſchwindenden Glieder eine gerade Zahl; ſo iſt

$$(< a) \ldots\ldots \pm \mp \pm \mp \pm \mp \cdots \pm \mp$$
$$(a) \ldots\ldots \pm\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots 0 \mp$$
$$(> a) \ldots\ldots \pm \pm \pm \pm \pm \pm \cdots \pm \mp .$$

In dieſem Falle hat alſo die Zeichenreihe (> a) wieder $e + 1$ Zeichenwechſel weniger wie die Zeichenreihe (< a).

b. Iſt die Anzahl der verſchwindenden Glieder eine ungerade Zahl, ſo iſt

$$(< a) \ldots\ldots \pm \mp \pm \mp \pm \mp \cdots \mp \mp$$
$$(a) \ldots\ldots \pm\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots 0 \mp$$
$$(> (a) \ldots\ldots \pm \pm \pm \pm \pm \pm \cdots \pm \mp .$$

Weil ſich in dieſem Falle die Zeichenfolge $\mp \mp$ am Ende der erſten Reihe in den Wechſel $\pm \mp$ am Ende der letzten Reihe verwandelt, ſo hat die Reihe (> a) offenbar nur e Zeichenwechſel weniger wie die Reihe (< a).

3. Das Ergebniß aus allem Vorhergehenden iſt Folgendes:

Wenn mehrere auf einander folgende Glieder der Reihe (a), deren Anzahl wir jetzt durch ε bezeichnen wollen, 0 ſind und von zwei nicht verſchwindenden Gliedern eingeſchloſſen werden; ſo hat

a. wenn ε eine gerade Zahl iſt, die Reihe (> a) jederzeit ε Zeichenwechſel weniger wie die Reihe (< a).

b. Iſt aber ε eine ungerade Zahl, ſo hat die Reihe (> a) jederzeit $\varepsilon + 1$ oder $\varepsilon - 1$ Zeichenwechſel weniger wie die Reihe (< a), je nachdem reſpective die beiden in Rede ſtehenden nicht verſchwin-

denden Glieder einander gleich oder entgegengeſetzt ſind.

c. Ueberhaupt iſt aber die Anzahl der Zeichenwechſel, welche unter den hier gemachten Vorausſetzungen die Zeichenreihe ($>$ a) weniger wie die Zeichenreihe ($<$ a) hat, jederzeit eine gerade Zahl, wobei nur noch erinnert werden mag, daß dieſe Zahl, wie leicht erhellet, auch in gewiſſen Fällen $= 0$ ſeyn kann.

II. Wir betrachten nun ferner den Fall, wo die Reihe (a) ſich auf folgende Art endigt:

$$\pm\, 00000 \ldots . 00,$$

ſo daß nämlich das letzte Glied $f(x)$ der Functionenreihe ſich mit unter den für $x = a$ verſchwindenden Gliedern befindet, und wollen nun wieder die Anzahl der verſchwindenden Glieder durch ε bezeichnen. Mittelſt der Regel des doppelten Zeichens erhalten wir auf der Stelle:

1. wenn ε gerade iſt:

$$\begin{array}{rl} (< a) \ldots\ldots & \pm\ \mp\ \pm\ \mp\ \pm\ \mp\ \cdots\ \mp\ \pm \\ (a) \ldots\ldots & \pm\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0 \\ (> a) \ldots\ldots & \pm\ \pm\ \pm\ \pm\ \pm\ \pm\ \cdots\ \pm\ \pm \end{array}$$

2. wenn ε ungerade iſt:

$$\begin{array}{rl} (< a) \ldots\ldots & \pm\ \mp\ \pm\ \mp\ \pm\ \mp\ \cdots\ \pm\ \mp \\ (a) \ldots\ldots & \pm\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \cdots\ 0\ 0 \\ (> a) \ldots\ldots & \pm\ \pm\ \pm\ \pm\ \pm\ \pm\ \cdots\ \pm\ \pm, \end{array}$$

ſo daß alſo in beiden Fällen die Reihe ($>$ a) offenbar ε Zeichenwechſel weniger wie die Reihe ($<$ a) hat.

In dieſem Falle hat, was vorzüglich zu bemerken iſt, nach 58. **III.** die Gleichung $f(x) = 0$ nicht mehr und nicht weniger als ε reelle Wurzeln, deren jede $=$ a iſt, ſo daß alſo für jede dieſer reellen Wurzeln ein Zeichenwechſel in eine Zeichenfolge übergeht oder verſchwindet.

III. Wenn nun, wie es auch der Fall ſeyn kann, mehrere Gruppen von Gliedern der Reihe (a) von der erſten oder zweiten der beiden vorher betrachteten Arten null ſind, ſo läßt ſich zwar die Anzahl der Zeichenwechſel der Reihe ($>$ a) im Allgemeinen aus der Anzahl der Zeichenwechſel der Reihe ($<$ a) nicht herleiten, oder vielmehr die Differenz zwiſchen der Anzahl der Zeichenwechſel der Reihe ($<$ a) und ($>$ a) nicht im Allgemeinen beſtimmen; man kann aber doch nach dem Vorhergehenden Folgendes mit Gewißheit behaupten:

1. Die Anzahl der Zeichenwechſel der Reihe ($>$ a) iſt nie größer wie die Anzahl der Zeichenwech-

ſel der Reihe ($< a$). Die Differenz, welche man erhält, wenn man die Anzahl der Zeichenwechſel der Reihe ($> a$) von der Anzahl der Zeichenwechſel der Reihe ($< a$) abzieht, iſt alſo nie eine negative Zahl, kann aber wohl $= 0$ ſeyn.

2. Wenn das letzte Glied $f(x)$ der Functionenreihe für $x = a$ nicht verſchwindet, oder a keine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ iſt; ſo iſt die Differenz zwiſchen der Anzahl der Zeichenwechſel der Reihe ($< a$) und der Reihe ($> a$) jederzeit eine gerade Zahl, wodurch aber nicht ausgeſchloſſen iſt, daß dieſe Differenz $= 0$ ſeyn kann.

3. Wenn ε letzte Glieder der Functionenreihe in ununterbrochener Folge für $x = a$ verſchwinden, d. h. wenn die Gleichung $f(x) = 0$ ε Wurzeln hat, die ſämmtlich $= a$ ſind; ſo hat die Zeichenreihe ($> a$) jederzeit mindeſtens ε Zeichenwechſel weniger wie die Zeichenreihe ($< a$). Für jede reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, welche $= a$ iſt, hat die Zeichenreihe ($> a$) einen Zeichenwechſel weniger wie die Zeichenreihe ($< a$).

64. Wir wollen uns nun vorſtellen, daß, wenn a und b zwei beliebe reelle Größen ſind, und $b > a$ iſt, wo a auch $= -\infty$, $b = +\infty$ ſeyn kann, x von $x = a$ bis $x = b$ ſtetig wächſt; ſo ergiebt ſich aus dem Vorhergehenden unmittelbar Folgendes:

I. Das erſte Glied jeder Zeichenreihe iſt $+$.

II. Die Anzahl der Zeichenwechſel der Reihe ($-\infty$) iſt $= n$.

III. Die Anzahl der Zeichenwechſel der Reihe ($+\infty$) iſt $= 0$.

IV. Die Reihe ($+\infty$) hat alſo n, d. h. eben ſo viele Zeichenwechſel weniger als die Reihe ($-\infty$), wie die gegebene Gleichung überhaupt Wurzeln hat.

V. Wächſt x ſtetig von $-\infty$ bis $+\infty$, ſo nimmt die Anzahl der Zeichenwechſel in den einzelnen Zeichenreihen nie zu, und vermindert ſich überhaupt ſucceſſive von n bis 0.

VI. Die Zeichenreihe (b) kann höchſtens n Zeichenwechſel weniger wie die Zeichenreihe (a) haben. Die Anzahl der Zeichenwechſel in der Reihe (b) iſt nie größer wie die Anzahl der Zeichenwechſel in der Reihe (a). Zieht man alſo die Anzahl der Zeichenwechſel in der Reihe (b) von der Anzahl der Zeichenwechſel in der Reihe (a) ab, ſo kann die Differenz nie negativ, wohl aber $= 0$ ſeyn.

VII. Für jede einzelne zwiſchen den Gränzen a und b liegende reelle Wurzel der gegebenen Gleichung verſchwindet ein Zeichenwechſel. Liegen alſo zwiſchen den Gränzen a und b m reelle Wurzeln der Gleichung, ſo muß die Zeichenreihe (b) min-

deſtens m Zeichenwechſel weniger wie die Zeichenreihe (a) haben, wobei noch beſonders bemerkt werden mag, daß hierbei ſowohl alle zwiſchen a und b liegende reelle Wurzeln der Gleichung unter einander ungleich, oder alle, oder theilweiſe einander gleich ſeyn können.

VIII. Hat daher die Zeichenreihe (b) nicht weniger Zeichenwechſel wie die Zeichenreihe (a), ſo daß alſo die Anzahl der Zeichenwechſel in beiden Reihen dieſelbe, oder die Differenz, welche man erhält, wenn man die Anzahl der Zeichenwechſel in der Reihe (b) von der Anzahl der Zeichenwechſel in der Reihe (a) abzieht, $= 0$ iſt; ſo kann zwiſchen a und b keine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung liegen. Hat aber die Reihe (b) m Zeichenwechſel weniger wie die Reihe (a), ſo können zwiſchen a und b m reelle Wurzeln der Gleichung liegen, aber nicht mehr; nur darf man durchaus nicht ſchließen, daß zwiſchen dieſen Gränzen auch wirklich m reelle Wurzeln liegen müſſen, weil das Verſchwinden der Zeichenwechſel, wie wir im Vorhergehenden geſehen haben, auch dadurch herbeigeführt werden kann, daß Glieder der Functionenreihe verſchwinden, ohne daß zugleich auch das letzte Glied der Functionenreihe, d. i. die Function $f(x)$, für denſelben zwiſchen a und b liegenden Werth von x verſchwindet.

IX. Wenn $f(x)$ für keinen zwiſchen a und b liegenden Werth von x verſchwindet, zwiſchen a und b alſo keine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegt; ſo iſt die Differenz zwiſchen der Anzahl der Zeichenwechſel der Reihe (a) und der Reihe (b) jederzeit eine gerade Zahl. Iſt alſo die Differenz zwiſchen der Anzahl der Zeichenwechſel der Reihe (a) und der Anzahl der Zeichenwechſel in der Reihe (b) eine ungerade Zahl; ſo kann man immer ſicher ſchließen, daß zwiſchen a und b mindeſtens eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegt. Iſt die in Rede ſtehende Differenz die Einheit, ſo liegt zwiſchen a und b jederzeit eine reelle Wurzel, aber auch nicht mehr, weil ſonſt nach dem Vorhergehenden auch die in Rede ſtehende Differenz nothwendig größer als die Einheit ſeyn müßte.

Auch ergiebt ſich aus dem Vorhergehenden unmittelbar, daß, wenn die Differenz zwiſchen der Anzahlder Zeichenwechſel der Reihe (a) und der Reihe (b) eine gerade Zahl iſt, zwiſchen a und b auch nur eine gerade Anzahl reeller Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ liegen kann. Hat dagegen die Zeichenreihe (b) eine ungerade Anzahl von Zeichenwechſeln weniger wie die Zeichenreihe (a), ſo kann zwiſchen a und b auch nur eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln der gegebenen Gleichung liegen. Daß im letztern Falle zwiſchen a und b immer mindeſtens eine reelle Wurzel liegen muß, haben wir kurz zuvor geſehen.

X. Wenn die Zeichenreihe (b) m Zeichenwechſel weniger wie die Zeichenreihe (a) hat, man aber aus andern Gründen weiß, daß zwiſchen a und b nur k, wo k auch $= 0$ ſeyn kann, reelle

Wurzeln liegen können; ſo kann man, wie aus allem Vorhergehenden unzweideutig hervorgeht, immer ſicher ſchließen, daß die gegebene Gleichung $m - k$ imaginäre Wurzeln hat. In einem ſolchen Falle ſagt man auch, daß in dem Intervall ab $m - k$ reelle Wurzeln, oder überhaupt $m - k$ Wurzeln fehlen.

XI. Wenn für $x = a$ ε auf einander folgende Glieder der Functionenreihe verſchwinden und das letzte Glied $f(x)$ der Functionenreihe ſich unter dieſen verſchwindenden Gliedern nicht befindet; ſo gehen, wie wir im Vorhergehenden geſehen haben, von $a - i$ bis $a + i$, wenn ε gerade iſt, eine eben ſo große Anzahl von Zeichenwechſeln, wenn dagegen ε eine ungerade Zahl iſt, $\varepsilon - 1$ oder $\varepsilon + 1$ Zeichenwechſel verloren, je nachdem die den verſchwindenden Gliedern nächſt benachbarten nicht verſchwindenden Glieder für denſelben Werth von x entgegengeſetzte oder gleiche Vorzeichen haben. Weil nun, da i eine unendlich kleine Größe iſt, zwiſchen $a - i$ und $a + i$ bloß a liegt, und nach der Vorausſetzung a keine Wurzel der gegebenen Gleichung iſt; ſo liegt zwiſchen $a - i$ und $a + i$ keine reelle Wurzel derſelben, oder die Anzahl der zwiſchen $a - i$ und $a + i$ liegenden reellen Wurzeln iſt $= 0$. Man kann alſo nach X jederzeit ſicher ſchließen, daß unter den gemachten Vorausſetzungen, wenn ε eine gerade Zahl iſt, die gegebene Gleichung ε, wenn dagegen ε eine ungerade Zahl iſt, $\varepsilon - 1$ oder $\varepsilon + 1$ imaginäre Wurzeln hat, je nachdem die den verſchwindenden nächſt benachbarten nicht verſchwindenden Glieder der Functionenreihe für denſelben Werth von x entgegengeſetzte oder gleiche Vorzeichen haben. Dieſen Satz hat ſchon de Gua gefunden.

XII. Die Differenz zwiſchen der Anzahl der Zeichenwechſel in der Reihe $(< a)$ und in der Reihe $(> a)$ iſt, wie wir aus dem Vorhergehenden wiſſen, wenn a keine Wurzel der gegebenen Gleichung iſt, jederzeit eine gerade Zahl. Iſt dieſe Differenz nun $= 2\mu$, ſo iſt, weil zwiſchen $< a$ und $> a$, oder zwiſchen $a - i$ und $a + i$ bloß a liegt, und a keine Wurzel der gegebenen Gleichung iſt, klar, daß die gegebene Gleichung jederzeit 2μ imaginäre Wurzeln hat.

Man kann dies aber auch noch erweitern, indem nämlich nach X. leicht erhellet, daß, wenn die Zeichenreihe $(> a)$ überhaupt m Zeichenwechſel weniger wie die Zeichenreihe $(< a)$, die Gleichung $f(x) = 0$ aber nicht mehr und nicht weniger als k Wurzeln hat, die $= a$ ſind, dieſelbe jederzeit $m - k$ imaginäre Wurzeln haben muß.

XIII. Wenn die beiden beliebigen Zeichenreihen (a) und (b) identiſch ſind, d. h. ganz aus denſelben Gliedern beſtehen, welches wir durch $(a) = (b)$ andeuten wollen; ſo iſt für jeden zwiſchen a und b liegenden Werth c von x

$$(a) = (c) = (b).$$

Da man nämlich in der Reihe $f^{(n)} f$ eine beliebige Anzahl auf

einander folgender Glieder vom Ende an weglaſſen kann, und allen auf dieſe Art hervorgehenden Functionenreihen für $x = a$ und $x = b$ nach der Vorausſetzung identiſche Zeichenreihen entſprechen; ſo erhellet aus VIII., daß keine der Gleichungen

$$f^{(n)}(x) = 0,\ f^{(n-1)}(x) = 0,\ f^{(n-2)}(x) = 0,\ \ldots f(x) = 0$$

eine reelle Wurzel zwiſchen a und b haben kann. Hätten aber überhaupt $f^{(n-k)}(a)$ und $f^{(n-k)}(c)$ ungleiche Vorzeichen; ſo müßte nach (9.) mindeſtens eine reelle Wurzel der Gleichung $f^{(n-k)}(x) = 0$ zwiſchen a und c, alſo, weil nach der Vorausſetzung c zwiſchen a und b liegt, auch zwiſchen a und b liegen, welches mit dem Vorhergehenden in Widerſpruch ſteht. Alſo müſſen $f^{(n-k)}(a)$ und $f^{(n-k)}(c)$ gleiche Vorzeichen haben, und es iſt folglich offenbar $(a) = (c) = (b)$, wie bewieſen werden ſollte.

XIV. Man kann auch leicht beweiſen, daß, wenn zwei beliebige Zeichenreihen (a) und (b) eine gleiche Anzahl von Zeichenwechſeln enthalten, jede dazwiſchen liegende Zeichenreihe (c) eine eben ſo große Anzahl von Zeichenwechſeln enthalten muß. Iſt nämlich w die Anzahl der Zeichenwechſel in (a) und in (b), w' die Anzahl der Zeichenwechſel in (c); ſo wäre nach V., wenn w' nicht $= w$ wäre, weil $c > a$ iſt, $w' < w$, und, weil $b > c$ iſt, $w' > w$, welches beides zugleich nicht Statt finden kann. Daher iſt $w' = w$.

XV. Wenn das letzte Glied einer Zeichenreihe + iſt, ſo iſt die Anzahl der in ihr enthaltenen Zeichenwechſel jederzeit eine gerade Zahl.

Dies erhellet auf der Stelle, wenn man ſich für jede Gruppe auf einander folgender gleicher Glieder der Zeichenreihe nur eins dieſer Glieder geſetzt denkt, wodurch man eine Reihe von der Form

$$+ - + - + - \ldots - +$$

erhält, in welcher offenbar die Anzahl der Zeichenwechſel von der Anzahl der Zeichenwechſel in der primitiven Zeichenreihe nicht verſchieden und augenſcheinlich eine gerade Zahl iſt.

XVI. Wenn das letzte Glied einer Zeichenreihe — iſt; ſo iſt die Anzahl der in ihr enthaltenen Zeichenwechſel jederzeit eine ungerade Zahl.

Die Richtigkeit dieſes Satzes erhellet eben ſo leicht und ganz auf dieſelbe Weiſe wie die Richtigkeit des vorhergehenden.

XVII. Wenn die Anzahl der in einer Zeichenreihe enthaltenen Zeichenwechſel eine gerade Zahl iſt, ſo iſt das letzte Glied dieſer Zeichenreihe +.

XVIII. Wenn die Anzahl der in einer Zeichenreihe enthaltenen Zeichenwechſel eine ungerade Zahl iſt, ſo iſt das letzte Glied dieſer Zeichenreihe —.

65. Wenn man die Anzahl der Zeichenwechſel zählt, welche in den Zeichenreihen (a) und (b) bis zu jedem beliebigen Gliede derſelben vorgekommen ſind, und die auf dieſe Weiſe erhaltenen zu gleichſtelligen Gliedern gehörenden Zahlen von einander abzieht; ſo heißen die auf dieſe Weiſe hervorgehenden Differenzen, welche, wie wir aus dem Vorhergehenden wiſſen, unter der Vorausſetzung, daß $b > a$ iſt, nie negativ ſeyn können, die dem Intervall **ab** entſprechenden Indices, und die Reihe dieſer Zahlen nennt man die dem Intervall **ab** entſprechende Indexreihe. Wir werden im Folgenden die Indices immer zwiſchen die beiden entſprechenden Zeichenreihen ſchreiben, wie z. B. in folgendem Falle:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} + & - & + & + & + & - & - & + & + & - & + & + & - & + & - \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ + & - & - & - & - & - & + & + & + & + & + & - & - & + & + . \end{array}$$

Für die Functionenreihe $f^{(n)}f$ und das beliebige Interall **ab** ſollen die Indices überhaupt durch

$$0,\ \delta',\ \delta'',\ \delta''',\ \ldots\ \delta^{(n-2)},\ \delta^{(n-1)},\ \delta^{(n)}$$

bezeichnet werden, ſo daß dem Gliede $f^{(n-k)}(x)$ der Functionenreihe überhaupt der Index $\delta^{(k)}$ entſpricht. Ueber dieſe Indices iſt die leicht zu rechtfertigende, für das Folgende aber ſehr wichtige Bemerkung zu machen, daß, wenn überhaupt $\delta^{(k)}$ und $\delta^{(k+1)}$ zwei einander nächſt benachbarte Indices ſind, $\delta^{(k+1)}$ jederzeit entweder $= \delta^{(k)}$, oder $= \delta^{(k)} - 1$, oder $= \delta^{(k)} + 1$ iſt. Um dies zu beweiſen ſeyen K, K' und K_1, K'_1 die Zahlen, welche angeben, wie viele in den Zeichenreihen (a) und (b) bis zu den den Indices $\delta^{(k)}$ und $\delta^{(k+1)}$ entſprechenden Gliedern derſelben Zeichenwechſel vorgekommen ſind; ſo erhellet aus der Entſtehung dieſer Zahlen auf der Stelle, daß jede folgende der nächſt vorhergehenden entweder gleich, oder nur um eine Einheit größer als dieſelbe iſt, weil die Anzahl der Zeichenwechſel, indem man von einem beliebigen Gliede zu dem nächſt folgenden übergeht, entweder ungeändert bleibt oder um eine Einheit zunimmt. Daher iſt entweder $K' = K$ oder $K' = K + 1$, und eben ſo, ohne Beziehung auf das Vorhergehende, entweder $K'_1 = K_1$ oder $K'_1 = K_1 + 1$. Alſo ſind, weil $\delta^{(k)} = K - K_1$, $\delta^{(k+1)} = K' - K'_1$ iſt, die folgenden vier Fälle möglich:

1. $\delta^{(k+1)} = K - K_1 = \delta^{(k)}$,
2. $\delta^{(k+1)} = K - (K_1 + 1) = \delta^{(k)} - 1$,
3. $\delta^{(k+1)} = (K + 1) - K_1 = \delta^{(k)} + 1$,
4. $\delta^{(k+1)} = (K + 1) - (K_1 + 1) = \delta^{(k)}$,

wodurch unſer Satz bewieſen iſt. Auch ergiebt ſich hieraus nun ſogleich, daß entweder $\delta^{(k-1)} = \delta^{(k)}$, oder $\delta^{(k-1)} = \delta^{(k)} - 1$, oder $\delta^{(k-1)} = \delta^{(k)} + 1$ iſt.

66. Aus (64. XV. XVI.) ergiebt ſich auf der Stelle auch Folgendes:

I. Wenn zwei aus einer gleichen Anzahl von Gliedern beſtehende Zeichenreihen ſich mit zwei gleichen Gliedern endigen; ſo iſt der den beiden letzten Gliedern entſprechende Index jederzeit eine gerade Zahl.

II. Wenn zwei aus einer gleichen Anzahl von Gliedern beſtehende Zeichenreihen ſich mit zwei ungleichen Gliedern endigen; ſo iſt der den beiden letzten Gliedern entſprechende Index jederzeit eine ungerade Zahl.

III. Wenn der den letzten Gliedern zweier aus einer gleichen Anzahl von Gliedern beſtehenden Zeichenreihen entſprechende Index eine gerade Zahl iſt; ſo ſind die letzten Glieder der beiden Zeichenreihen einander gleich.

IV. Wenn der den letzten Gliedern zweier aus einer gleichen Anzahl von Gliedern beſtehenden Zeichenreihen entſprechende Index eine ungerade Zahl iſt; ſo ſind die letzten Glieder der beiden Zeichenreihen ungleich.

C. Hauptlehrſätze.

67. Wir wollen jetzt einige Theoreme beweiſen, welche nebſt der Lehre von den Zeichenreihen der Auflöſungsmethode der numeriſchen Gleichungen, welche wir im Folgenden kennen lernen werden, vorzüglich zum Grunde liegen, und daher in der obigen Ueberſchrift auch als Hauptlehrſätze bezeichnet worden ſind, weil ſie in der That nebſt der Lehre von den Zeichenreihen das eigentliche Fundament aller folgenden Unterſuchungen bilden.

Zu dem Ende ſetzen wir, daß a und b, wo $b > a$ iſt, wieder zwei beliebige reelle Größen ſind, welche man für x in die Functionenreihe $f^{(n)}f$ geſetzt, und dadurch die beiden Zeichenreihen (a), (b), und die dem Intervall ab entſprechende Indexreihe erhalten hat. Auf die Beſchaffenheit dieſer Indexreihe kommt es, wie wir ſehen werden, im Folgenden ganz vorzüglich an. Hier werden wir in dieſer Beziehung von einigen Vorausſetzungen ausgehen, daraus mehrere wichtige Folgerungen ziehen, ſpäterhin zeigen, wie ſich die in Rede ſtehenden Vorausſetzungen in allen Fällen realiſiren laſſen, und dann die aus denſelben hier gezogenen Folgerungen zur Auflöſung der numeriſchen Gleichungen anwenden.

Zuerſt wollen wir annehmen, daß die drei letzten Glieder der dem Intervall ab entſprechenden Indexreihe 001 ſind. Dann wiſſen wir aus dem Vorhergehenden, daß in dem Intervall ab eine, aber auch nur eine, reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, keine reelle Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$, keine reelle Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$ liegt, oder mit andern Worten, daß die Function $f(x)$ für einen, aber auch nur einen, reellen Werth von x zwiſchen a und b, den wir $= \alpha$ ſetzen wollen, verſchwindet, daß aber weder die Function $f'(x)$, noch die Fun-

ction $f''(x)$, für einen zwiſchen a und b liegenden reellen Werth von x verſchwindet, woraus denn nach (9.) weiter von ſelbſt folgt, daß die Functionen $f'(x)$ und $f''(x)$, wenn man x von $x = a$ bis $x = b$ ſtetig wachſen läßt, ihre Vorzeichen nie ändern. a und b ſind zwei Gränzen der einen in dem Intervall ab liegenden reellen Wurzel α der Gleichung $f(x) = 0$, und es kommt uns jetzt vorzüglich darauf an, zu zeigen, wie man, wenn die Vorausſetzung, daß die drei letzten Glieder der dem Intervall ab entſprechenden Indexreihe 001 ſind, erfüllt iſt, aus den Gränzen a und b nach und nach immer engere und engere Gränzen der reellen Wurzel α der Gleichung $f(x) = 0$ ableiten kann, eine Unterſuchung, die für das Folgende von der größten Wichtigkeit iſt.

Zuerſt bemerken wir nun in dieſer Beziehung, daß, wie aus (66. III.) auf der Stelle folgt, wenn die drei letzten Glieder der dem Intervall ab entſprechenden Indexreihe 001 ſind, in Bezug auf die drei letzten Glieder der Zeichenreihen (a) und (b) nur die folgenden vier Fälle Statt finden können:

1. (a) = ... + + −
   (b) = ... + + +
2. (a) = ... + − +
   (b) = ... + − −
3. (a) = ... − + −
   (b) = ... − + +
4. (a) = ... − − +
   (b) = ... − − −

Dieſe vier Fälle wollen wir jetzt nach der Reihe, jeden einzeln, durchgehen, indem wir bemerken, daß im Folgenden ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''', ..., wie ſchon in (55.), immer poſitive die Einheit nicht überſteigende Größen bezeichnen ſollen.

I. Sey

(a) = ... + + −
(b) = ... + + +

Weil $f'(x)$ und $f''(x)$ in dem Intervall ab ihre Vorzeichen nicht ändern, ſo iſt in dieſem Intervall ſowohl $f'(x)$, als auch $f''(x)$, ſtets poſitiv.

1. Betrachten wir zuvörderſt b als einen erſten Näherungswerth der reellen Wurzel α, und ſetzen $\alpha = b - \Theta$; ſo iſt, weil b die obere Gränze iſt, Θ poſitiv. Nach (57.) iſt

$$f(b - \Theta) = f(b) - \Theta f'(b - \varrho\Theta),$$

d. i., weil $f(b - \Theta) = f(\alpha) = 0$ iſt,

$$f(b) - \Theta f'(b - \varrho\Theta) = 0,$$

und hieraus

$$\Theta = \frac{f(b)}{f'(b-\varrho\Theta)}.$$

Ferner iſt nach (57.)

$$f'(b-\varrho\Theta) = f'(b) - \varrho\Theta f''(b-\varrho'\varrho\Theta).$$

$b - \varrho'\varrho\Theta$ iſt offenbar eine Mittelgröße zwiſchen $b - \Theta$ und b, d. i. zwiſchen α und b, folglich auch zwiſchen a und b. Daher iſt $f''(b - \varrho'\varrho\Theta)$ poſitiv, und folglich

$$f'(b-\varrho\Theta) < f'(b),$$

wobei zugleich klar iſt, daß dieſe beiden Größen poſitiv ſind. Da nun auch $f(b)$ poſitiv iſt, ſo iſt

$$\frac{f(b)}{f'(b-\varrho\Theta)} > \frac{f(b)}{f'(b)},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\Theta > \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Folglich iſt

$$b - \Theta < b - \frac{f(b)}{f'(b)},$$

d. i., weil $b - \Theta = \alpha$ iſt,

$$\alpha < b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Weil ferner $f(b)$ und $f'(b)$ beide poſitiv ſind, und folglich auch $\frac{f(b)}{f'(b)}$ poſitiv iſt; ſo iſt

$$b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b,$$

und man ſieht alſo, daß

$$b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

eine nähere obere Gränze von α wie b iſt.

2. Betrachten wir ferner die untere Gränze a als einen erſten Näherungswerth von α, und ſetzen $\alpha = a + \Theta'$, ſo iſt Θ' poſitiv, und nach (57.) haben wir wieder:

$$f(a+\Theta') = f(a) + \Theta' f'(a+\varrho\Theta'),$$

d. i., weil $f(a + \Theta') = f(\alpha) = 0$ iſt,

$$f(a) + \Theta' f'(a+\varrho\Theta') = 0,$$

woraus

$$\Theta' = -\frac{f(a)}{f'(a+\varrho\Theta')}$$

folgt. $a + \varrho\Theta'$ iſt eine Mittelgröße zwiſchen a und $a + \Theta'$, d. i. zwiſchen a und α, alſo auch zwiſchen a und b. Setzen wir folglich $a + \varrho\Theta' = b - \Theta''$, ſo iſt Θ'' poſitiv, und nach (57.) haben wir

$$f'(a + \varrho\Theta') = f'(b - \Theta'') = f'(b) - \Theta'' f''(b - \varrho'\Theta''),$$

wo $b - \varrho'\Theta''$ eine Mittelgröße zwiſchen $b - \Theta''$ und b, d. i. zwiſchen $a + \varrho\Theta'$ und b, alſo auch zwiſchen a und b, folglich $f''(b - \varrho'\Theta'')$ poſitiv, und daher

$$f'(a + \varrho\Theta') < f'(b)$$

iſt, wobei zugleich auf der Stelle erhellet, daß dieſe beiden Größen poſitiv ſind. Da nun $f(a)$ negativ iſt, ſo iſt

$$-\frac{f(a)}{f'(a + \varrho\Theta')} > -\frac{f(a)}{f'(b)},$$

d. i. nach dem Obigen

$$\Theta' > -\frac{f(a)}{f'(b)};$$

folglich

$$a + \Theta' > a - \frac{f(a)}{f'(b)},$$

d. i., weil $a + \Theta' = \alpha$ iſt,

$$\alpha > a - \frac{f(a)}{f'(b)}.$$

Auch iſt, weil $-\frac{f(a)}{f'(b)}$ poſitiv iſt,

$$a - \frac{f(a)}{f'(b)} > a,$$

und folglich offenbar

$$a - \frac{f(a)}{f'(b)}$$

eine nähere untere Gränze von α wie a.

II. Sey ferner

$$(a) = \ldots\ldots + - +$$
$$(b) = \ldots\ldots + - -;$$

ſo iſt $f'(x)$ in dem Intervall ab ſtets negativ, $f''(x)$ dagegen in demſelben Intervall ſtets poſitiv.

1. Sey $\alpha = b - \Theta$, wo Θ poſitiv iſt, ſo iſt nach (57.)

$$f(b - \Theta) = f(\alpha) = f(b) - \Theta f'(b - \varrho\Theta) = 0;$$

folglich

$$\Theta = \frac{f(b)}{f'(b - \varrho\Theta)}.$$

$b - \varrho\Theta$ iſt eine Mittelgröße zwiſchen $b - \Theta$ und b, d. i. zwiſchen α und b, alſo auch zwiſchen a und b. Setzen wir folglich $b - \varrho\Theta = a + \Theta''$, ſo iſt Θ'' poſitiv, und wir haben nun wieder nach (57.)

$$f'(b - \varrho\Theta) = f'(a + \Theta'') = f'(a) + \Theta'' f''(a + \varrho'\Theta''),$$

wo $a + \varrho'\Theta''$ eine Mittelgröße zwiſchen a und $a + \Theta''$, d. i.

zwiſchen a und $b - \varrho\Theta$, alſo auch zwiſchen a und b, und folglich $f''(a + \varrho'\Theta'')$ poſitiv, alſo

$$f'(b - \varrho\Theta) > f'(a)$$

iſt, wobei man zugleich noch zu bemerken hat, daß dieſe beiden Größen offenbar negativ ſind. Weil nun auch $f(b)$ negativ iſt, ſo iſt

$$\frac{f(b)}{f'(b-\varrho\Theta)} > \frac{f(b)}{f'(a)};$$

folglich

$$\Theta > \frac{f(b)}{f'(a)};$$

alſo

$$b - \Theta < b - \frac{f(b)}{f'(a)},$$

d. i.

$$\alpha < b - \frac{f(b)}{f'(a)}.$$

Weil ferner $\frac{f(b)}{f'(a)}$ poſitiv iſt, ſo iſt

$$b - \frac{f(b)}{f'(a)} < b,$$

und folglich offenbar

$$b - \frac{f(b)}{f'(a)}$$

eine nähere obere Gränze von α wie b.

2. Sey ferner $\alpha = a + \Theta'$, ſo iſt Θ' poſitiv, und

$$f(a + \Theta') = f(\alpha) = f(a) + \Theta' f'(a + \varrho\Theta') = 0;$$

alſo

$$\Theta' = -\frac{f(a)}{f'(a+\varrho\Theta')}.$$

Ferner iſt

$$f'(a + \varrho\Theta') = f'(a) + \varrho\Theta' f''(a + \varrho'\varrho\Theta'),$$

und $f''(a + \varrho'\varrho\Theta')$ iſt, wie leicht erhellet, poſitiv. Alſo iſt

$$f'(a + \varrho\Theta') > f'(a),$$

und dieſe beiden Größen ſind offenbar negativ. Alſo iſt, weil $f(a)$ poſitiv iſt,

$$-\frac{f(a)}{f'(a+\varrho\Theta')} > -\frac{f(a)}{f'(a)},$$

d. i.

$$\Theta' > -\frac{f(a)}{f'(a)};$$

folglich

$$a + \Theta' > a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

d. i.

$$\alpha > a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Weil ferner $-\frac{f(a)}{f'(a)}$ poſitiv iſt, ſo iſt

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)} > a,$$

und folglich offenbar

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

eine nähere untere Gränze von α wie a.

III. Wenn ferner

$$(a) = \ldots - + -$$
$$(b) = \ldots - + +$$

iſt; ſo iſt $f'(x)$ in dem Intervall ab ſtets poſitiv, $f''(x)$ dagegen ſtets negativ.

1. Sey $\alpha = b - \Theta$, ſo iſt Θ poſitiv, und nach (57.) haben wir wieder

$$f(b-\Theta) = f(\alpha) = f(b) - \Theta f'(b-\varrho\Theta) = 0,$$

alſo

$$f\Theta = \frac{f(b)}{f'(b-\varrho\Theta)}.$$

$b - \varrho\Theta$ iſt eine Mittelgröße zwiſchen $b - \Theta$ und b, d. i. zwiſchen α und b, alſo auch zwiſchen a und b. Setzen wir alſo $b - \varrho\Theta = a + \Theta''$, ſo iſt Θ'' poſitiv, und wir haben wieder

$$f'(b-\varrho\Theta) = f'(a+\Theta'') = f'(a) + \Theta'' f''(a+\varrho'\Theta''),$$

d. i., weil, wie leicht erhellet, $f''(a+\varrho'\Theta'')$ negativ iſt,

$$f'(b-\varrho\Theta) < f'(a).$$

Dieſe beiden Größen ſind, ſo wie $f(b)$, poſitiv. Alſo iſt

$$\frac{f(b)}{f'(b-\varrho\Theta)} > \frac{f(b)}{f'(a)},$$

d. i.

$$\Theta > \frac{f(b)}{f'(a)};$$

folglich

$$b - \Theta < b - \frac{f(b)}{f'(a)},$$

d. i.

$$\alpha < b - \frac{f(b)}{f'(a)}.$$

Weil ferner $\frac{f(b)}{f'(a)}$ poſitiv iſt, ſo iſt

$$b - \frac{f(b)}{f'(a)} < b,$$

und folglich

$$b - \frac{f(b)}{f'(a)}$$

eine nähere obere Gränze von α wie b.

2. Für $\alpha = a + \Theta'$, wo Θ' poſitiv iſt, haben wir wieder

$$f(a + \Theta') = f(\alpha) = f(a) + \Theta' f'(a + \varrho\Theta') = 0,$$

$$\Theta' = -\frac{f(a)}{f'(a + \varrho\Theta')}.$$

Ferner iſt

$$f'(a + \varrho\Theta') = f'(a) + \varrho\Theta' f''(a + \varrho'\varrho\Theta'),$$

und folglich, weil $f''(a + \varrho'\varrho\Theta')$ offenbar negativ iſt,

$$f'(a + \varrho\Theta') < f'(a).$$

Da nun dieſe beiden Größen, wie ſogleich erhellet, poſitiv ſind, $f(a)$ aber negativ iſt; ſo iſt

$$-\frac{f(a)}{f'(a + \varrho\Theta')} > -\frac{f(a)}{f'(a)},$$

d. i.

$$\Theta' > -\frac{f(a)}{f'(a)},$$

folglich

$$a + \Theta' > a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

oder

$$\alpha > a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Weil ferner $-\frac{f(a)}{f'(a)}$ poſitiv iſt, ſo iſt

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)} > a,$$

und es iſt folglich

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

eine nähere untere Gränze von α wie a.

IV. Für

$$(a) = \ldots\ldots - - +$$
$$(b) = \ldots\ldots - - -$$

iſt in dem Intervall ab ſowohl $f'(x)$, als auch $f''(x)$, ſtets negativ

1. Für $\alpha = b - \Theta$, wo Θ poſitiv iſt, iſt

$$f(b - \Theta) = f(\alpha) = f(b) - \Theta f'(b - \varrho\Theta) = 0,$$

$$\Theta = \frac{f(b)}{f'(b - \varrho\Theta)}.$$

Da nun

$$f'(b-\varrho\Theta) = f'(b) - \varrho\Theta f''(b-\varrho'\varrho\Theta),$$

und, wie leicht erhellet, $f''(b-\varrho'\varrho\Theta)$ negativ iſt; ſo iſt

$$f'(b-\varrho\Theta) > f'(b);$$

alſo, weil dieſe beiden Größen, ſo wie $f(b)$, negativ ſind,

$$\frac{f(b)}{f'(b-\varrho\Theta)} > \frac{f(b)}{f'(b)},$$

d. i.

$$\Theta > \frac{f(b)}{f'(b)},$$

und folglich

$$b - \Theta < b - \frac{f(b)}{f'(b)},$$

d. i.

$$\alpha < b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Weil ferner $\frac{f(b)}{f'(b)}$ poſitiv iſt, ſo iſt

$$b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b,$$

alſo offenbar

$$b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

eine nähere obere Gränze von α wie b.

2. Ferner ſey $\alpha = a + \Theta'$, wo Θ' poſitiv iſt, ſo iſt

$$f(a+\Theta') = f(\alpha) = f(a) + \Theta' f'(a+\varrho\Theta') = 0,$$

$$\Theta' = -\frac{f(a)}{f'(a+\varrho\Theta')}.$$

$a + \varrho\Theta'$ iſt eine Mittelgröße zwiſchen a und b; folglich iſt, wenn man $a + \varrho\Theta' = b - \Theta''$ ſetzt, Θ'' poſitiv. Weil nun

$$f'(a+\varrho\Theta') = f'(b-\Theta'') = f'(b) - \Theta'' f''(b-\varrho'\Theta'')$$

und $f''(b-\varrho'\Theta'')$ offenbar negativ iſt; ſo iſt

$$f'(a+\varrho\Theta') > f'(b),$$

und dieſe beiden Größen ſind offenbar negativ. Alſo iſt, weil $f(a)$ poſitiv iſt,

$$-\frac{f(a)}{f'(a+\varrho\Theta')} > -\frac{f(a)}{f'(b)},$$

d. i.

$$\Theta' > -\frac{f(a)}{f'(b)};$$

folglich

$$a + \Theta' > a - \frac{f(a)}{f'(b)};$$

d. i.

$$\alpha > a - \frac{f(a)}{f'(b)}.$$

Weil ferner $-\frac{f(a)}{f'(b)}$ poſitiv iſt, ſo iſt

$$a - \frac{f(a)}{f'(b)} > a,$$

und folglich offenbar

$$a - \frac{f(a)}{f'(b)}$$

eine nähere untere Gränze von α wie a.

V. Faſſen wir nun alles Vorhergehende zuſammen; ſo ergiebt ſich Folgendes:

1. Wenn

$$\begin{matrix}(a) = \ldots\ldots + + - \\ (b) = \ldots\ldots + + +\end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix}(a) = \ldots\ldots - - + \\ (b) = \ldots\ldots - - -\end{matrix}$$

iſt; ſo ſind

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)},\ b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

jederzeit zwei Gränzen der reellen Wurzel α, nämlich a' die untere, b' die obere Gränze, ſo daß

$$a' < \alpha,\ b' > \alpha$$

iſt. Ferner iſt immer

$$a' > a,\ b' < b,$$

und folglich jederzeit das Intervall a' b' ein innerhalb ab liegendes, alſo engeres, Intervall, ſo daß folglich a', b engere Gränzen von α ſind wie a, b, und immer

$$b' - a' < b - a$$

iſt.

2. Iſt aber

$$\begin{matrix}(a) = \ldots\ldots + - + \\ (b) = \ldots\ldots + - -\end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix}(a) = \ldots\ldots - + - \\ (b) = \ldots\ldots - + +\end{matrix};$$

ſo ſind

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)},\ b' = b - \frac{f(b)}{f'(a)}$$

jederzeit zwei Gränzen von α, nämlich a' wieder die untere, b' die obere Gränze, ſo daß

$$a' < \alpha,\ b' > \alpha$$

iſt. Ferner iſt auch jetzt immer

$$a' > a,\ b' < b,$$

d. i. a' b' ein engeres innerhalb ab liegendes Intervall, ſo daß alſo a', b' engere Gränzen von α ſind, wie a, b, und immer

$$b' - a' < b - a$$

iſt.

VI. Weil das Intervall a' b' innerhalb des Intervalls ab liegt, ſo erhellet nun auch ſehr leicht, daß für

$$\left.\begin{array}{l}(a) = \ldots\ldots + + -\\(b) = \ldots\ldots + + +\\[4pt](a) = \ldots\ldots - - +\\(b) = \ldots\ldots - - -\\[4pt](a) = \ldots\ldots + - +\\(b) = \ldots\ldots + - -\\[4pt](a) = \ldots\ldots - + -\\(b) = \ldots\ldots - + +\end{array}\right\}\text{ jederzeit reſpective auch }\left\{\begin{array}{l}(a') = \ldots\ldots + + -\\(b') = \ldots\ldots + + +\\[4pt](a') = \ldots\ldots - - +\\(b') = \ldots\ldots - - -\\[4pt](a') = \ldots\ldots + - +\\(b') = \ldots\ldots + - -\\[4pt](a') = \ldots\ldots - + -\\(b') = \ldots\ldots - + +\end{array}\right.$$

iſt, ſo wie auch offenbar die drei letzten Glieder der dem Intervall $a'b'$ entſprechenden Indexreihe 0 0 1 ſeyn müſſen, wobei man (64. XIV.) zu vergleichen hat.

1. Wenn daher

$$\begin{array}{l}(a) = \ldots\ldots + + -\\(b) = \ldots\ldots + + +\end{array}\ \text{oder}\ \begin{array}{l}(a) = \ldots\ldots - - +\\(b) = \ldots\ldots - - -\end{array}$$

iſt; ſo erhält man mittelſt der Formeln

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)},\quad b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)};$$

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(b')},\quad b'' = b' - \frac{f(b')}{f'(b')};$$

$$a''' = a'' - \frac{f(a'')}{f'(b'')},\quad b''' = b'' - \frac{f(b'')}{f'(b'')};$$

$$a^{IV} = a''' - \frac{f(a''')}{f'(b''')},\quad b^{IV} = b''' - \frac{f(b''')}{f'(b''')};$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

jederzeit eine Reihe ſich immer enger und enger zuſammenziehender Gränzen der Wurzel α, und die durch a bezeichneten Gränzen ſind immer die untern, die durch b bezeichneten dagegen die obern Gränzen.

2. Iſt dagegen

$$\begin{array}{l}(a) = \ldots\ldots + - +\\(b) + \ldots\ldots + - -\end{array}\ \text{oder}\ \begin{array}{l}(a) = \ldots\ldots - + -\\(b) = \ldots\ldots - + +\,;\end{array}$$

ſo erhält man mittelſt der Formeln

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)},\quad b' = b - \frac{f(b)}{f'(a)};$$

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(a')},\quad b'' = b' - \frac{f(b')}{f'(a')};$$

$$a''' = a'' - \frac{f(a'')}{f'(a'')},\quad b''' = b'' - \frac{f(b'')}{f'(a'')};$$

$$a^{IV} = a''' - \frac{f(a''')}{f'(a''')},\quad b^{IV} = b''' - \frac{f(b''')}{f'(a''')};$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

eine Reihe ſich immer enger und enger zuſammenziehender Gränzen der Wurzel α, und die durch a bezeichneten Gränzen ſind

wieder immer die untern, die durch b bezeichneten dagegen die obern Gränzen.

VII. Des Folgenden wegen iſt hierbei nun noch folgende Bemerkung zu machen. Wir ſind nämlich im Vorhergehenden von der Vorausſetzung ausgegangen, daß die drei letzten Glieder der dem Intervall a b entſprechenden Indexreihe 0 0 1 ſeyn ſollen. Ueberblickt man aber den ganzen obigen Beweis nochmals aufmerkſam im Zuſammenhange, ſo wird man finden, daß alle Schlüſſe völlig richtig bleiben, wenn man nur überzeugt iſt, daß die folgenden Vorausſetzungen erfüllt ſind: 1. Die den Gränzen a und b des Intervalls a b entſprechenden Werthe $f(a)$ und $f(b)$ der Function $f(x)$ müſſen entgegengeſetzte Vorzeichen haben. 2. Weder die Function $f'(x)$, noch die Function $f''(x)$, darf in dem Intervall a b ihr Zeichen ändern, oder, was daſſelbe iſt, in dem Intervall a b darf weder eine reelle Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$, noch eine reelle Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$, liegen. Sind dieſe Vorausſetzungen erfüllt, ſo kann man zugleich verſichert ſeyn, daß zwiſchen a und b jederzeit eine, aber auch nur eine, reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegt. Daß eine reelle Wurzel dieſer Gleichung zwiſchen a und b liegt, folgt unmittelbar aus (9.); weil nach der Vorausſetzung $f(a)$ und $f(b)$ entgegengeſetzte Vorzeichen haben. Daß nur eine reelle Wurzel der in Rede ſtehenden Gleichung zwiſchen a und b liegt, erhellet eben ſo leicht auf folgende Art. Weil nämlich nach der Vorausſetzung die Function $f'(x)$ ihr Zeichen in dem Intervall a b nie ändert, ſo wird nach (52. V.) die Function $f(x)$ in dieſem Intervall entweder fortwährend wachſen, oder fortwährend abnehmen, und kann alſo in demſelben offenbar auch nur ein Mal verſchwinden, da ſie natürlich nur ein Mal ihr Zeichen ändern oder vom Poſitiven zum Negativen, oder umgekehrt vom Negativen zum Poſitiven übergehen kann. Alſo auch dann, wenn man nur weiß, daß die obigen Vorausſetzungen erfüllt ſind, bleibt alles Vorhergehende richtig. Der Fall, wo die drei letzten Glieder der dem Intervall a b entſprechenden Indexreihe 0 0 1 ſind, kommt aber, wie wir weiter unten ſehen werden, in der Praxis der Auflöſung der numeriſchen Gleichungen vorzüglich vor.

68. Da man zwei einander immer näher und näher kommende Gränzen der geſuchten Wurzel α kennt, ſo läßt ſich nun auch jederzeit der Fehler beurtheilen, welchen man begeht, wenn man die eine von zwei zuſammengehörenden Gränzen als einen Näherungswerth für die Wurzel α ſelbſt ſetzt, indem dieſer Fehler offenbar jederzeit kleiner wie der Unterſchied zwiſchen den beiden in Rede ſtehenden Gränzen ſeyn wird, ſo daß alſo dieſer Unterſchied, welchen man kennt, da man die Gränzen kennt, jederzeit eine Größe iſt, welche der begangene Fehler ſeiner abſoluten Größe nach nicht überſteigen kann, wobei man noch zu merken hat, daß man eine ſolche Größe gewöhnlich die Fehler-

gränze nennt; immer faßt man hierbei aber bloß die abſoluten Werthe der in Rede ſtehenden Größen in's Auge. Man kann jedoch die Größe des Fehlers noch auf eine andere ſehr merkwürdige Weiſe beſtimmen, über die wir nun das Nöthige beibringen wollen.

Dieſe zweite Methode, den Fehler zu beſtimmen, ſetzt aber, was man wohl zu merken hat, voraus, daß die vier letzten Glieder der dem Intervall ab entſprechenden Indexreihe 0001 ſind, indem vorher bloß erfordert wurde, daß die drei letzten Glieder dieſer Indexreihe die Folge 001 bildeten. Entſprechen die vier letzten Glieder der in Rede ſtehenden Indexreihe der Bedingung 0001, ſo ändert offenbar auch die dritte derivirte Function $f'''(x)$ in dem Intervall ab ihr Zeichen nicht, und iſt alſo in demſelben entweder ſtets poſitiv oder ſtets negativ.

1. Sey nun, indem wir im Folgenden immer

$$b-a=i,\ b'-a'=i',\ b''-a''=i'',\ b'''-a'''=i''', \ldots$$

ſetzen, zuerſt wieder

$$\begin{matrix}(a)=\ldots\ +\ +\ - \\ (b)=\ldots\ +\ +\ +\end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix}(a)=\ldots\ -\ -\ + \\ (b)=\ldots\ -\ -\ -\ ;\end{matrix}$$

ſo ſind

$$a'=a-\frac{f(a)}{f'(b)},\ b'=b-\frac{f(b)}{f'(b)}$$

eine untere und eine obere Gränze der geſuchten Wurzel α. Alſo iſt

$$b'-a'=b-a-\frac{f(b)-f(a)}{f'(b)},$$

d. i.

$$i'=i-\frac{f(b)-f(a)}{f'(b)}.$$

Weil $a=b-i$ iſt, ſo iſt nach (57.)

$$f(a)=f(b-i)=f(b)-if'(b)+\tfrac{1}{2}i^2f''(b-\varrho i),$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{f'(b)}=i-\frac{i^2f''(b-\varrho i)}{2f'(b)};$$

alſo

$$i'=i^2.\frac{f''(b-\varrho i)}{2f'(b)}.$$

Der Nenner des Bruchs auf der rechten Seite iſt bekannt, der Zähler dagegen iſt eine noch unbekannte Größe. Bezeichnet aber Θ eine poſitive Größe, die wir uns jetzt als unendlich klein denken wollen, und iſt f eine beliebige zwiſchen a und b liegende Größe; ſo überſieht man, weil nach (57.)

$$f''(f+\Theta)=f''(f)+\Theta f'''(f+\varrho\Theta)$$

iſt, und $f'''(x)$ in dem Intervall ab ſtets einerlei Vorzeichen behält, daß die Function $f''(x)$ in dieſem Intervall entweder fortwährend zu, oder fortwährend abnimmt, welches ganz auf dieſelbe Art auch von der Function $f'(x)$ erhellet, übrigens ſich auch

unmittelbar aus (52. V.) ergiebt. Bezeichnet nun A den kleinſten von den beiden abſoluten Werthen der Größen $f'(a)$ und $f'(b)$, dagegen B den größten von den beiden abſoluten Werthen der Größen $f''(a)$ und $f''(b)$; ſo iſt offenbar immer

$$\frac{f''(b-\varrho i)}{2f'(b)} < \frac{B}{2A},$$

wobei man nur zu bemerken hat, daß $b-\varrho i$ immer eine Mittelgröße zwiſchen $b-i$ und b, d. i. zwiſchen a und b iſt. Alſo iſt nach dem Vorhergehenden immer

$$i' < i^2 . \frac{B}{2A},$$

woraus ſich nun ferner, da für die ſämmtlichen Intervalle ab, $a'b'$, $a''b''$, $a'''b'''$, $a^{IV}b^{IV}$, ..., von denen immer jedes folgende innerhalb des vorhergehenden liegt, offenbar ganz dieſelben Verhältniſſe Statt finden, unmittelbar

$$i' < i^2 . \frac{B}{2A},\ i'' < i'^2 . \frac{B}{2A},\ i''' < i''^2 . \frac{B}{2A},\ i^{IV} < i'''^2 . \frac{B}{2A}, \ldots.,$$

alſo auch

$$i' < i^2 . \frac{B}{2A},\ i'' < i^4 . \left(\frac{B}{2A}\right)^3,\ i''' < i^8 . \left(\frac{B}{2A}\right)^7,\ i^{IV} < i^{16} . \left(\frac{B}{2A}\right)^{15}, \ldots.$$

ergiebt.

2. Iſt ferner

$$\begin{matrix}(a) = \ldots. + - + \\ (b) = \ldots. + - -\end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix}(a) = \ldots. - + - \\ (b) = \ldots. - + +;\end{matrix}$$

ſo ſind

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)},\ b' = b - \frac{f(b)}{f'(a)}$$

eine untere und eine obere Gränze der Wurzel α; alſo iſt

$$b' - a' = b - a - \frac{f(b) - f(a)}{f'(a)},$$

$$i' = i - \frac{f(b) - f(a)}{f'(a)}.$$

Weil nun $b = a + i$ iſt, ſo iſt

$$f(b) = f(a+i) = f(a) + if'(a) + \tfrac{1}{2}i^2 f''(a+\varrho i),$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{f'(a)} = i + \frac{i^2 f''(a+\varrho i)}{2f(a)},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$i' = -i^2 . \frac{f''(a+\varrho i)}{2f'(a)}.$$

Hieraus ergiebt ſich ganz auf dieſelbe Art wie vorher

$$i' < i^2 . \frac{B}{2A},\ i'' < i'^2 \frac{B}{2A},\ i''' < i''^2 . \frac{B}{2A},\ i^{IV} < i'''^2 . \frac{B}{2A}, \ldots.;$$

alſo auch

$$i' < i^2.\frac{B}{2A},\ i'' < i^4.\left(\frac{B}{2A}\right)^3,\ i''' < i^8.\left(\frac{B}{2A}\right)^7,\ i^{iv} < i^{16}.\left(\frac{B}{2A}\right)^{15},\ldots$$

wo **A, B** ganz dieſelbe Bedeutung wie vorher haben.

3. Faſſen wir alles Vorhergehende zuſammen; ſo ergiebt ſich das folgende in jeder Beziehung höchſt wichtige Theorem, von dem wir weiter unten bei der Auflöſung der Gleichungen vielfachen Gebrauch machen werden:

Wenn die vier letzten Glieder der dem Intervall **ab** entſprechenden Indexreihe 0001 ſind, und, ohne Rückſicht auf die Vorzeichen, **A** die kleinere der beiden Größen $f'(a)$ und $f'(b)$, **B** die größere der beiden Größen $f''(a)$ und $f''(b)$ bezeichnet, übrigens $i, i', i'', i''', \ldots$ ihre vorige Bedeutung behalten; ſo ſind ſämmtliche Glieder der Reihe

$$i,\ i',\ i'',\ i''',\ i^{iv},\ \ldots\ldots$$

vom zweiten an kleiner als die entſprechenden Glieder der Reihe

$$i,\ i^2.\frac{B}{2A},\ i'^2.\frac{B}{2A},\ i''^2.\frac{B}{2A},\ i'''^2.\frac{B}{2A},\ \ldots,$$

oder auch kleiner als die entſprechenden Glieder der Reihe

$$i,\ i^2.\frac{B}{2A},\ i^4.\left(\frac{B}{2A}\right)^3,\ i^8.\left(\frac{B}{2A}\right)^7,\ i^{16}.\left(\frac{B}{2A}\right)^{15},\ \ldots\ldots$$

4. Noch iſt hier eine ähnliche Bemerkung wie in (67. **VII.**) zu machen, indem man nämlich auf der Stelle überſieht, daß alles Vorhergehende richtig bleibt, wenn man nur überzeugt iſt: 1. Daß die den Gränzwerthen **a** und **b** entſprechenden Werthe $f(a)$ und $f(b)$ der Function $f(x)$ entgegengeſetzte Vorzeichen haben; 2. daß keine der Functionen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ in dem Intervall **ab** ihr Zeichen ändert.

69. Aus dem Vorhergehenden läßt ſich noch ein anderer ſehr merkwürdiger Satz ableiten, welcher uns ebenfalls bei der Auflöſung der numeriſchen Gleichungen von dem größten Nutzen ſeyn wird. Wir gehen dabei von den folgenden Vorausſetzungen aus: 1. Zwiſchen den Gränzen **a**, **b** ſoll keine reelle Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$ liegen. 2. Die Gleichung $f(x) = 0$ ſoll dagegen eine, aber auch nur e i n e, reelle Wurzel zwiſchen den in Rede ſtehenden Gränzen haben. 3. Was die Gleichung $f(x) = 0$ betrifft, ſo wollen wir annehmen, daß man aus andern Gründen wiſſe, daß entweder keine oder zwei, alſo weder bloß e i n e, noch mehr als zwei, reelle Wurzeln derſelben zwiſchen **a** und **b** liegen, und verlangen nun eben ein Kriterium zu haben, mittelſt deſſen man erkennen kann, ob das Eine oder das Andere Statt findet. Läßt ſich nun auch kein allgemeines Kriterium finden, mittelſt deſſen man in jedem Falle die

in Rede ſtehende Entſcheidung geben kann; ſo wird ſich doch mittelſt des auch an ſich merkwürdigen Satzes, den wir jetzt beweiſen werden, in vielen Fällen ſicher der Fall erkennen laſſen, wo unter den obigen Vorausſetzungen keine reelle Wurzel zwiſchen a und b liegt, und ſchon dies iſt, wie wir ſpäterhin ſehen werden, für die Auflöſung der numeriſchen Gleichungen von der größten Wichtigkeit. Größerer Deutlichkeit wegen bemerken wir noch, daß die obigen Vorausſetzungen z. B. für das Intervall ab dann jederzeit vollſtändig erfüllt ſind, wenn die drei letzten Glieder der demſelben entſprechenden Indexreihe 012 ſind, indem dann, wie aus der Lehre von den Zeichenreihen unmittelbar folgt, zwiſchen a und b keine reelle Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$, eine reelle Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ liegt, zwiſchen denſelben Gränzen aber bloß entweder keine oder zwei reelle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ liegen können. Der Fall, auf welchen wir hier vorläufig und beiſpielsweiſe hingedeutet haben, iſt derjenige, auf welchen wir das Theorem, welches wir jetzt beweiſen wollen, vorzüglich anwenden werden.

Wir wollen nun einmal annehmen, daß zwiſchen a und b zwei, aber nicht mehr, reelle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ liegen, und wollen ſehen, was ſich hieraus, indem wir zugleich für's Erſte die beiden in Rede ſtehenden reellen Wurzeln als ungleich annehmen, unter den übrigen obigen Vorausſetzungen weiter ſchließen läßt.

1. Weil die Gleichung $f(x) = 0$ zwiſchen a und b zwei, aber auch nur zwei, ungleiche reelle Wurzeln hat, die wir durch α und β bezeichnen wollen, ſo daß β die größere von beiden Wurzeln bezeichnet; ſo iſt zuvörderſt klar, daß $f(a)$ und $f(b)$ gleiche Vorzeichen haben, wie ſehr leicht auf folgende Art gezeigt werden kann. Weil α, β die beiden zwiſchen a und b liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ ſind, und $\beta > \alpha$, $b > a$ iſt; ſo iſt $f(\alpha) = 0$, $f(\beta) = 0$, und a, α, β, b ſind in dieſer Folge aufſteigend nach ihrer Größe geordnet. Weil ferner die Gleichung $f(x) = 0$ bloß die beiden reellen Wurzeln α, β in dem Intervall ab hat; ſo liegt in keinem der Intervalle $a\alpha$, $\alpha\beta$, βb eine reelle Wurzel dieſer Gleichung, und es haben folglich, wenn i eine unendlich kleine poſitive Größe bezeichnet, ſowohl die Größen $f(a)$, $f(\alpha - i)$, als auch die Größen $f(\alpha + i)$, $f(\beta - i)$ und $f(\beta + i)$ $f(b)$ mit einander gleiche Vorzeichen. Weil nun aber $f(\alpha) = 0$, $f(\beta) = 0$ iſt; ſo haben ſowohl die Größen $f(\alpha - i)$, $f(\alpha + i)$, als auch die Größen $f(\beta - i)$, $f(\beta + i)$, entgegengeſetzte Vorzeichen, und wir erhalten alſo, alles Vorhergehende zuſammen nehmend, folgende Darſtellung:

$$\begin{array}{ccccccccccc} f(a) & \ldots & f(\alpha - i) & \ldots & f(\alpha + i) & \ldots & f(\beta - i) & \ldots & f(\beta + i) & \ldots & f(b) \\ \pm & \ldots & \pm & \ldots & \mp & \ldots & \mp & \ldots & \pm & \ldots & \pm \end{array}$$

Hieraus ergiebt ſich unmittelbar, daß $f(a)$ und $f(b)$, wie behauptet wurde, gleiche Vorzeichen haben.

2. Die Gleichung $f'(x) = 0$ hat nach der Vorausſetzung zwiſchen a und b **eine** reelle Wurzel, die wir γ nennen wollen, ſo daß alſo $f'(\gamma) = 0$ iſt. $f(\gamma)$ iſt aber nicht $= 0$, weil ſonſt nach aus dem Obigen bekannten Sätzen die Gleichung $f(x) = 0$ zwei der zwiſchen a und b liegenden reellen Größe γ gleiche Wurzeln haben würde, welches gegen die Vorausſetzung iſt, weil wir angenommen haben, daß dieſe Gleichung zwiſchen a und b zwei, aber auch nur zwei, **ungleiche** reelle Wurzeln haben ſoll. Ferner iſt klar, daß die Function $f'(x)$ in keinem der Intervalle aγ und γb ihr Zeichen ändert, weil mit einer Aenderung des Zeichens einer Function immer ein Durchgang derſelben durch Null verbunden iſt, nach der Vorausſetzung die Gleichung $f'(x) = 0$ aber nur **eine** zwiſchen a und b liegende reelle Wurzel hat.

3. Da die Function $f'(x)$, wie wir ſo eben geſehen haben, ſowohl in dem Intervall aγ, als auch in dem Intervall γb, fortwährend daſſelbe Zeichen behält; ſo ergiebt ſich aus (52. V.), daß die Function $f(x)$ in jedem dieſer Intervalle entweder fortwährend wächſt, oder fortwährend abnimmt. Hätte alſo $f(\gamma)$, welches bekanntlich nicht $= 0$ iſt, mit $f(a)$, folglich nach dem Vorhergehenden auch mit $f(b)$, einerlei Vorzeichen; ſo könnte offenbar weder in dem Intervall aγ, noch in dem Intervall γb, die Function $f(x)$ irgend ein Mal verſchwinden, welches man ſich auf bekannte Weiſe mittelſt Darſtellung der Function durch eine Curve ſehr anſchaulich machen kann, obgleich es ſich auch von ſelbſt verſteht, daß eine poſitive oder negative Größe nicht $= 0$ werden oder verſchwinden kann, wenn ſie reſpective bis zu einer andern poſitiven oder negativen Größe entweder ſtets zu= oder ſtets abnimmt. Hätte alſo $f(\gamma)$ mit $f(a)$ und $f(b)$ einerlei Vorzeichen, ſo könnte weder in dem Intervall aγ, noch in dem Intervall γb, eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegen, und dieſe Gleichung würde alſo überhaupt in dem Intervall ab keine reelle Wurzel haben, welches gegen die Vorausſetzung iſt. Daher hat $f(\gamma)$ mit $f(a)$ und $f(b)$ entgegengeſetztes Vorzeichen, woraus ferner auf der Stelle folgt, daß die kleinere reelle Wurzel α der Gleichung $f(x) = 0$ in dem Intervall aγ, die größere reelle Wurzel β dieſer Gleichung dagegen in dem Intervall $\gamma\beta$, die reelle Wurzel γ der Gleichung $f'(x) = 0$ folglich immer in dem Intervall $\alpha\beta$ oder zwiſchen α und β liegt. Andere reelle Wurzeln außer α und β hat die Gleichung $f(x) = 0$ überhaupt nicht, ſo daß alſo auch in dem Intervall aγ bloß die **eine** reelle Wurzel α, in dem Intervall γb bloß die **eine** reelle Wurzel β liegt.

4. Die Gleichung $f''(x) = 0$ hat nach der Vorausſetzung zwiſchen a und b keine reelle Wurzel; alſo haben $f''(a)$, $f''(b)$ einerlei Vorzeichen, und die Function $f''(x)$ ändert überhaupt in dem Intervall ab ihr Zeichen niemals, verſchwindet alſo auch in dieſem Intervall nirgends, ſo daß folglich auch $f''(\gamma)$ nicht $= 0$ iſt.

5. Vorzüglich kommt es nun ferner auf die Beſtimmung des Vorzeichens der Größe $f''(\gamma)$ an, welche, wie wir ſo eben geſehen haben, nicht $=0$ iſt. Laſſen wir i wieder eine unendlich kleine poſitive Größe bezeichnen, ſo iſt nach (57.)

$$f(\gamma - i) = f(\gamma) - if'(\gamma) + \tfrac{1}{2}i^2 f''(\gamma - \varrho i),$$

d. i., weil $f'(\gamma) = 0$ iſt,

$$f(\gamma - i) = f(\gamma) + \tfrac{1}{2}i^2 f''(\gamma - \varrho i).$$

Nehmen wir nun zuerſt an, daß $f(\gamma)$ poſitiv ſey; ſo wäre, wenn auch $f''(\gamma)$, und folglich, weil $f''(x)$ in dem Intervall ab ſein Zeichen nie ändert, auch $f''(\gamma - \varrho i)$ poſitiv wäre,

$$f(\gamma - i) > f(\gamma).$$

Da nun nach dem Vorhergehenden, wenn man x von $x = a$ bis $x = \gamma$ wachſen läßt, $f(x)$ entweder ſtets wächſt, oder ſtets abnimmt; ſo würde unter der obigen Vorausſetzung auch $f(a) > f(\gamma)$, folglich, weil $f(\gamma)$ poſitiv iſt, auch $f(a)$ poſitiv ſeyn, da wir doch im Gegentheil aus dem Vorhergehenden wiſſen, daß $f(\gamma)$ und $f(a)$ jederzeit entgegengeſetzte Vorzeichen haben. Iſt alſo $f(\gamma)$ poſitiv, ſo muß $f''(\gamma)$ negativ ſeyn.

Wäre ferner $f(\gamma)$ negativ und auch $f''(\gamma)$ negativ, ſo wäre auch $f''(\gamma - \varrho i)$ negativ, weil $f''(x)$ in dem Intervall ab ſein Zeichen nie ändert, und folglich

$$f(\gamma - i) < f(\gamma).$$

Weil nun $f(x)$, wenn man x von $x = a$ bis $x = \gamma$ wachſen läßt, entweder ſtets wächſt oder ſtets abnimmt; ſo würde unter der obigen Vorausſetzung auch $f(a) < f(\gamma)$, und folglich, weil $f(\gamma)$ negativ iſt, auch $f(a)$ negativ ſeyn, welches nach dem Obigen ungereimt iſt, weil $f(\gamma)$ und $f(a)$ immer entgegengeſetzte Vorzeichen haben. Iſt alſo $f(\gamma)$ negativ, ſo iſt $f''(\gamma)$ poſitiv, und man ſieht alſo, daß überhaupt $f(\gamma)$ und $f''(\gamma)$ immer entgegengeſetzte Vorzeichen haben müſſen.

6. Da alſo $f(\gamma)$ und $f''(\gamma)$ jederzeit entgegengeſetzte Vorzeichen haben, ſo iſt die dem Werthe γ von x entſprechende Zeichenreihe:

$$(\gamma) = \ldots\ldots \pm\ 0\ \mp$$

Hieraus ergiebt ſich mittelſt der Regel des doppelten Zeichens das Schema:

$$\begin{aligned}(\gamma - i) &= \ldots\ldots \pm\ \mp\ \mp\\ (\gamma) &= \ldots\ldots \pm\ 0\ \mp\\ (\gamma + i) &= \ldots\ldots \pm\ \pm\ \mp\end{aligned}$$

Nehmen wir hierzu nun ferner, daß nach dem Vorhergehenden $f(\gamma)$ mit $f(a)$ und $f(b)$ entgegengeſetztes Vorzeichen hat, daß $f'(x)$ weder in dem Intervall $a\gamma$, noch in dem Intervall γb, ſein Zeichen ändert, und daß $f''(x)$ in dem Intervall ab fort-

während ein und dasſelbe Vorzeichen behält; ſo ergiebt ſich aus dem Vorhergehenden unmittelbar folgendes Schema:

$$\begin{array}{rl} (\mathrm{a}) = \ldots\ldots & \pm \ \mp \ \pm \\ & \ldots\ldots \\ (\gamma - \mathrm{i}) = \ldots\ldots & \pm \ \mp \ \mp \\ (\gamma) = \ldots\ldots & \pm \ \ 0 \ \ \mp \\ (\gamma + \mathrm{i}) = \ldots\ldots & \pm \ \pm \ \mp \\ & \ldots\ldots \\ (\mathrm{b}) = \ldots\ldots & \pm \ \pm \ \pm \end{array}$$

7. Betrachten wir nun a und $\gamma - \mathrm{i}$ als Gränzen der einen in dem Intervall $\mathrm{a}\gamma$ liegenden reellen Wurzel α der Gleichung $f(\mathrm{x}) = 0$; ſo iſt für dieſe Gränzen:

$$\begin{array}{rl} (\mathrm{a}) = \ldots\ldots & \pm \ \mp \ \pm \\ (\gamma - \mathrm{i}) = \ldots\ldots & \pm \ \mp \ \mp \end{array}$$

und folglich nach (67. **VI.** 2.)

$$\mathrm{a} - \frac{f(\mathrm{a})}{f'(\mathrm{a})} < \alpha .$$

Betrachten wir ferner $\gamma + \mathrm{i}$ und b als Gränzen der einen in dem Intervall $\gamma\mathrm{b}$ liegenden reellen Wurzel β der Gleichung $f(\mathrm{x}) = 0$; ſo iſt für dieſe Gränzen:

$$\begin{array}{rl} (\gamma + \mathrm{i}) = \ldots\ldots & \pm \ \pm \ \mp \\ (\mathrm{b}) = \ldots\ldots & \pm \ \pm \ \pm \end{array}$$

und folglich nach (67. **VI.** 1.)

$$\mathrm{b} - \frac{f(\mathrm{b})}{f'(\mathrm{b})} > \beta .$$

Alſo iſt

$$\left\{\mathrm{a} - \frac{f(\mathrm{a})}{f'(\mathrm{a})}\right\} - \left\{\mathrm{b} - \frac{f(\mathrm{b})}{f'(\mathrm{b})}\right\} < \alpha - \beta ,$$

$$\mathrm{a} - \mathrm{b} + \frac{f(\mathrm{b})}{f'(\mathrm{b})} - \frac{f(\mathrm{a})}{f'(\mathrm{a})} < \alpha - \beta ,$$

$$\frac{f(\mathrm{b})}{f'(\mathrm{b})} - \frac{f(\mathrm{a})}{f'(\mathrm{a})} < \mathrm{b} - \mathrm{a} - (\beta - \alpha) ;$$

folglich, weil $\beta > \alpha$, $\beta - \alpha$ poſitiv iſt, um ſo mehr

$$\frac{f(\mathrm{b})}{f'(\mathrm{b})} - \frac{f(\mathrm{a})}{f'(\mathrm{a})} < \mathrm{b} - \mathrm{a} .$$

Bisher iſt zwar angenommen worden, daß α und β ungleich ſind. Da aber auch dann, wenn α und β einander unendlich nahe kommen oder $\beta - \alpha$ unendlich klein iſt, immer

$$\frac{f(\mathrm{b})}{f'(\mathrm{b})} - \frac{f(\mathrm{a})}{f'(\mathrm{a})} < \mathrm{b} - \mathrm{a} - (\beta - \alpha)$$

iſt; ſo iſt offenbar auch für $\alpha = \beta$, d. i. wenn die Gleichung

$f(x) = 0$ zwiſchen a und b zwei einander gleiche reelle Wurzeln hat, jederzeit

$$\frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{f(a)}{f'(a)} < b - a.$$

Wenn alſo zwiſchen a und b keine reelle Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$, eine reelle Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ liegt, und zwiſchen dieſen Gränzen zwei einander gleiche oder ungleiche reelle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ liegen; ſo iſt jederzeit

$$\frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{f(a)}{f'(a)} < b - a.$$

8. Man ſetze nun

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)},\ b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)};$$

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(a')},\ b'' = b' - \frac{f(b')}{f'(b')};$$

$$a''' = a'' - \frac{f(a'')}{f'(a'')},\ b''' = b'' - \frac{f(b'')}{f'(b'')};$$

$$a^{IV} = a''' - \frac{f(a''')}{f'(a''')},\ b^{IV} = b''' - \frac{f(b''')}{f'(b''')};$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

und nehme wieder an, daß zwiſchen a und b keine reelle Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$, eine reelle Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ liegt, daß aber zwiſchen dieſen Gränzen zwei gleiche oder ungleiche reelle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ liegen; ſo iſt

$$\frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{f(a)}{f'(a)} < b - a,$$

$$\frac{f(b')}{f'(b')} - \frac{f(a')}{f'(a')} < b' - a',$$

$$\frac{f(b'')}{f'(b'')} - \frac{f(a'')}{f'(a'')} < b'' - a'',$$

$$\frac{f(b''')}{f'(b''')} - \frac{f(a''')}{f'(a''')} < b''' - a''',$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

wie weit man dieſe Ausdrücke auch fortſetzen mag. Die Richtigkeit hiervon erhellet augenblicklich, wenn man ſich nur aus (67. VI.) erinnert, daß die Größen a, a', a'', a''', a^{IV}, ... fortwährend wachſen, ohne jemals größer als α, die Größen b, b', b'', b''', b^{IV}, ... dagegen fortwährend abnehmen, ohne jemals kleiner als β zu werden, ſo daß alſo ab, a'b', a''b'', a'''b''', $a^{IV}b^{IV}$, ... ſich immer enger und enger zuſammenziehende Intervalle ſind, in deren jedem aber die beiden reellen Wurzeln α, β der Gleichung $f(x) = 0$ liegen. Daß die reelle Wurzel γ der Gleichung $f'(x) = 0$ ebenfalls in jedem dieſer Intervalle liegt, iſt klar, weil nach dem Vorhergehenden γ in dem Intervall $\alpha\beta$, d. h. zwiſchen α und β liegt, ſo wie ſich denn auch von ſelbſt

verſteht, daß $f''(x)$ in keinem der obigen Intervalle ſein Zeichen ändert, ſo daß alſo für die ſämmtlichen obigen Intervalle dieſelben Bedingungen erfüllt ſind, welche nach den Vorausſetzungen für das erſte Intervall ab erfüllt ſeyn müſſen. Man ſieht hieraus zugleich, daß durch a, b; a', b'; a'', b''; a''', b'''; a^{iv}, b^{iv}; ..... die beiden reellen Wurzeln α, β in immer engere und engere Gränzen eingeſchloſſen werden; die Größe, durch welche dieſe Gränzen, wie nahe man dieſelben auch den reellen Wurzeln α, β von beiden Seiten her bringen mag, fortwährend von einander getrennt ſind, iſt die Differenz $\beta - \alpha$ der beiden reellen Wurzeln. Sind dieſe beiden reellen Wurzeln einander gleich, ſo iſt $\beta - \alpha = 0$, oder $\alpha = \beta = \gamma$, und die obigen Gränzen werden ſich nun offenbar der Größe γ ſelbſt von beiden Seiten her immer mehr und mehr nähern.

9. Aus dem Vorhergehenden ergiebt ſich nun endlich auch unmittelbar folgender Satz:

Wenn zwiſchen a und b keine reelle Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$, Eine reelle Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ liegt; wenn man ferner weiß, daß zwiſchen dieſen Gränzen nur entweder keine oder zwei reelle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ liegen können, und irgend eine der Differenzen

$$\frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{f(a)}{f'(a)},\ \frac{f(b')}{f'(b')} - \frac{f(a')}{f'(a')},\ \frac{f(b'')}{f'(b'')} - \frac{f(a'')}{f'(a'')},\ \ldots\ldots$$

eben ſo groß oder größer iſt als das entſprechende Glied der Reihe

$$b - a,\ b' - a',\ b'' - a'',\ b''' - a''',\ \ldots\ldots;$$

ſo läßt ſich immer ſicher ſchließen, daß zwiſchen a und b keine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegt.

Fourier, der berühmte Erfinder dieſes wichtigen Satzes, welchen wir ſpäterhin bei der Auflöſung der numeriſchen Gleichungen, namentlich bei der ſo wichtigen Unterſcheidung ihrer reellen und imaginären Wurzeln, häufig in Anwendung bringen werden, hat denſelben aus Sätzen der höhern Geometrie hergeleitet, worüber man Fouriers berühmtes Werk: Analyse des équations déterminées. I. Paris 1831. p. 117. nachzuſehen hat. Wir haben uns im Vorhergehenden bemühet, einen auf rein arithmetiſchen Principien beruhenden Beweis für denſelben zu geben, verweiſen aber nochmals wegen des geometriſchen Beweiſes auf Fouriers Werk, weil dergleichen geometriſche Darſtellungen allerdings ſehr geeignet ſind, eine recht deutliche Einſicht in die Natur des Gegenſtandes zu gewähren, und denſelben gewöhnlich auch zu großer Anſchaulichkeit bringen, welches rein arithmetiſche Darſtellungen, obgleich freilich nur dieſe nach unſerem Dafürhalten in die reine ſtreng wiſſenſchaftliche Arithmetik gehören, nicht

in demſelben Grade vermögen. Von den bisherigen Sätzen wollen wir nun zu der Auflöſung der numeriſchen Gleichungen ſelbſt übergehen, da das Vorhergehende nun alle dazu nöthigen Grundlagen enthält.

D. Allgemeine Beſtimmung der Gränzen, zwiſchen denen die Wurzeln einer numeriſchen Gleichung überhaupt zu ſuchen ſind.

70. Bei Beſtimmung der Gränzen, zwiſchen denen die Wurzeln einer numeriſchen Gleichung überhaupt geſucht werden müſſen, verfährt man practiſch am leichteſten auf folgende Art. Man bildet ſich durch Entwickelung der derivirten Functionen der Function der gegebenen Gleichung die Reihe $f^{(n)}f$. Hierauf ſetzt man in allen Gliedern dieſer Reihe die Größe $x = 0$, und geht dann, indem man $x = -1, -10, -10^2, -10^3$, u. ſ. w. ſetzt, zuerſt ſo lange rückwärts, bis man einen Werth $x = -10^\mu$ findet, für welchen die Zeichenreihe (-10^μ) bloß Zeichenwechſel enthält. Dann geht man, nach und nach $x = 1, 10, 10^2, 10^3$, u. ſ. w. ſetzend, ſo lange vorwärts, bis man auf einen Werth $x = 10^\nu$ kommt, für welchen die Zeichenreihe (10^ν) bloß Zeichenfolgen enthält. Nach (64. **VIII.**) können alſo weder zwiſchen $-\infty$ und -10^μ, noch zwiſchen 10^ν und $+\infty$ reelle Wurzeln der Gleichung liegen, ſondern alle reelle Wurzeln ſind zwiſchen -10^μ und 10^ν zu ſuchen. Die Zeichenreihen (-10^μ) und (10^ν) ſind jederzeit um n Zeichenwechſel von einander verſchieden. Nun beſtimme man die Anzahl der Zeichenwechſel in jeder der Zeichenreihen

$$(-10^\mu),\ (-10^{\mu-1}),\ (10^{\mu-2}),\ \ldots\ (10^{\nu-2}),\ (10^{\nu-1}),\ (10^\nu),$$

oder, wie wir in der Folge immer thun wollen, die jedem einzelnen Intervalle entſprechenden Indices. Haben zwei auf einander folgende Zeichenreihen dieſelbe Anzahl von Zeichenwechſeln, oder iſt das letzte Glied der zwiſchen beiden Zeichenreihen liegenden Indexreihe 0; ſo liegt zwiſchen den beiden Werthen von x, denen die beiden in Rede ſtehenden Zeichenreihen entſprechen, keine reelle Wurzel der Gleichung, und dieſe Intervalle werden dann überhaupt nicht weiter beachtet. Iſt aber das letzte Glied der zwiſchen beiden Zeichenreihen liegenden Indexreihe nicht 0, nach dem Obigen alſo > 0; ſo ſind zwei Fälle zu unterſcheiden, jenachdem das letzte Glied der in Rede ſtehenden Indexreihe eine ungerade oder eine gerade Zahl iſt. Im erſten Falle liegt nach (64. **IX.**) in dem Intervall, welchem die Indexreihe entſpricht, jederzeit mindeſtens e i n e reelle Wurzel der gegebenen Gleichung; im zweiten Falle läßt ſich dagegen nur durch eine beſondere Unterſuchung, mit der wir es jetzt noch nicht zu thun haben, von der aber bald nachher ausführlich die Rede ſeyn wird, über die Natur der Wurzeln eine beſtimmte Entſcheidung geben.

Oft trifft es ſich, daß, wenn man in der Reihe $f^{(n)}f$ für x einen beſtimmten Werth, den wir überhaupt a nennen wollen, ſetzt, einige Glieder verſchwinden, und man alſo keine vollſtändige dem Werthe $x = a$ enſprechende Zeichenreihe erhält. In einem ſolchen Falle bildet man jederzeit mittelſt der Regel des doppelten Zeichens aus der Zeichenreihe (a) die beiden Zeichenreihen $(a - i)$ und $(a + i)$, oder $(< a)$ und $(> a)$, und vergleicht dann dieſe Zeichenreihen mit den übrigen ſchon gebildeten Zeichenreihen und unter ſich ſelbſt, wie an den folgenden Beiſpielen ausführlicher gezeigt werden wird. Bei der Vergleichung der Zeichenreihen $(< a)$ und $(> a)$ mit einander hat man vorzüglich das zu berückſichtigen, was in (64. XII.) bewieſen worden iſt.

71. Die vorhergehenden Regeln wollen wir nun durch mehrere vollſtändig ausgeführte Exempel in das hellſte Licht zu ſetzen ſuchen.

I. $x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x - 7$$

$$f''(x) = 6x - 8$$

$$f'''(x) = 6$$

(— 10) =	+ — + —	
	0 0 0 1	eine reelle Wurzel
(— 1) =	+ — + +	
	0 0 1 0	keine Wurzel
(0) =	+ — — +	
	0 0 0 1	eine reelle Wurzel
(1) =	+ — — —	
	0 1 1 1	eine reelle Wurzel.
(10) =	+ + + +	

Man brauchte hier bloß bis $x = -10$ nach der einen Seite hin, und bis $x = 10$ nach der andern Seite hin zu gehen, weil die Zeichenreihe (— 10) bloß Zeichenwechſel, die Zeichenreihe (10) dagegen bloß Zeichenfolgen enthält, wie die vorher gegebenen Regeln erfordern.

II. $x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0$

$$f(x) = x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101$$

$$f'(x) = 5x^4 - 12x^3 - 72x^2 + 190x - 46$$

$$f''(x) = 20x^3 - 36x^2 - 144x + 190$$

$$f'''(x) = 60x^2 - 72x - 144$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = 120x - 72$$

$$f^{\mathrm{V}}(x) = 120$$

$(-10) = + - + - + -$
$\quad 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 1$ } eine reelle Wurzel
$(-1) = + - + - + +$
$\quad 0 \; 0 \; 1 \; 1 \; 1 \; 1$ } eine reelle Wurzel
$(0) = + - - + - -$
$\quad 0 \; 1 \; 0 \; 0 \; 1 \; 0$ } keine Wurzel
$(1) = + + - + + -$
$\quad 0 \; 0 \; 1 \; 2 \; 2 \; 3$ } eine reelle Wurzel, die Natur zweier Wurzeln ungewiß.
$(10) = + + + + + +$

Bei den beiden vorhergehenden Exempeln war die Anwendung der Regel des doppelten Zeichens nicht nöthig. Jetzt wollen wir zu ſolchen Exempeln übergehen, bei denen dieſe Regel in Anwendung gebracht werden muß.

III. $x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0$

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 3x + 23$$
$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 3$$
$$f''(x) = 12x^2 - 24x$$
$$f'''(x) = 24x - 24$$
$$f^{IV}(x) = 24$$
$$(0) = + - 0 - +$$
$$(1) = + 0 - - +$$
$$(10) = + + + + +$$

Alſo mittelſt der Regel des doppelten Zeichens:

$(< 0) = + - + - +$
$\quad 0 \; 0 \; 1 \; 2 \; 2$ } zwei imaginäre Wurzeln
$(> 0) = + - - - +$
$\quad 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0$ } keine Wurzel
$(< 1) = + - - - +$
$\quad 0 \; 1 \; 0 \; 0 \; 0$ } keine Wurzel
$(> 1) = + + - - +$
$\quad 0 \; 0 \; 1 \; 1 \; 2$ } zwei Wurzeln von unbeſtimmter Beſchaffenheit.
$(10) = + + + + +$

Ueber den Schluß auf zwei imaginäre Wurzeln wegen des letzten Index 2 im erſten Intervall zwiſchen < 0 und > 0 ſ. m. (64. XII.).

IV. $x^3 - 7x + 7 = 0$

$$f(x) = x^3 - 7x + 7$$
$$f'(x) = 3x^2 - 7$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f'''(x) = 6$$
$$(-10) = + - + -$$
$$(-1) = + - - +$$
$$(0) = + 0 - +$$
$$(1) = + + - +$$
$$(10) = + + + +$$

Die Regel des doppelten Zeichens giebt:

$(-10) = + - + -$
$\quad 0 \ 0 \ 1 \ 1$ } eine reelle Wurzel
$(-1) = + - - +$
$\quad 0 \ 0 \ 0 \ 0$
$(<0) = + - - +$
$\quad 0 \ 1 \ 1 \ 0$ } keine Wurzel
$(>0) = + + - +$
$\quad 0 \ 0 \ 0 \ 0$
$(1) = + + - +$
$\quad 0 \ 0 \ 1 \ 2$ } zwei Wurzeln von unbeſtimmter Beſchaffenheit.
$(10) = + + + +$

V. $x^3 - 2x - 5 = 0$

$$f(x) = x^3 - 2x - 5$$
$$f'(x) = 3x^2 - 2$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f'''(x) = 6$$

$(-1) = + - + -$
$(0) = + \ 0 - -$
$(1) = + + + -$
$(10) = + + + +$

$(-1) = + - + -$
$\quad 0 \ 0 \ 1 \ 2$ } zwei Wurzeln von unbeſtimmter Beſchaffenheit.
$(<0) = + - - -$
$\quad 0 \ 1 \ 0 \ 0$
$(>0) = + + - -$ } keine Wurzel
$\quad 0 \ 0 \ 1 \ 0$
$(1) = + + + -$
$\quad 0 \ 0 \ 0 \ 1$ } eine reelle Wurzel.
$(10) = + + + +$

VI. $x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$

$$f(x) = x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$$
$$f'(x) = 7x^6 - 10x^4 - 9x^2 + 8x - 5$$
$$f''(x) = 42x^5 - 40x^3 - 18x + 8$$
$$f'''(x) = 210x^4 - 120x^2 - 18$$
$$f^{IV}(x) = 840x^3 - 240x$$
$$f^{V}(x) = 2520x^2 - 240$$
$$f^{VI}(x) = 5040x$$
$$f^{VII}(x) = 5040$$

$(-10) = + - + - + - + -$
$(-1) = + - + - + + - +$
$(0) = + \ 0 - 0 - + - +$
$(1) = + + + + + - - +$
$(10) = + + + + + + + +$

(− 10) =	+	−	+	−	+	−	+	−	
	0	0	0	0	0	1	1	1	eine reelle Wurzel
(− 1) =	+	−	+	−	+	+	−	+	
	0	0	1	1	1	0	0	0	keine Wurzel
(< 0) =	+	−	−	+	−	+	−	+	
	0	1	0	1	2	2	2	2	zwei imaginäre Wurzeln
(> 0) =	+	+	−	−	−	+	−	+	
	0	0	1	1	1	1	2	2	zwei Wurzeln von unbeſtimmter Beſchaffenheit
(1) =	+	+	+	+	+	−	−	+	
	0	0	0	0	0	1	1	2	zwei Wurzeln von unbeſtimmter Beſchaffenheit.
(10) =	+	+	+	+	+	+	+	+	

VII. $x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0$

$$f(x) = x^5 - 10x^3 + 6x + 1$$
$$f'(x) = 5x^4 - 30x^2 + 6$$
$$f''(x) = 20x^3 - 60x$$
$$f'''(x) = 60x^2 - 60$$
$$f^{IV}(x) = 120x$$
$$f^{V}(x) = 120$$

(− 10) =	+	−	+	−	+	−
(− 1) =	+	−	0	+	−	+
(0) =	+	0	−	0	+	+
(1) =	+	+	0	−	−	−
(10) =	+	+	+	+	+	+

(−10) =	+	−	+	−	+	−	
	0	0	0	1	1	1	eine reelle Wurzel
(<−1) =	+	−	+	+	−	+	
	0	0	1	0	0	0	keine Wurzel
(>−1) =	+	−	−	+	−	+	
	0	0	0	0	1	2	zwei Wurzeln unbeſtimmt
(< 0) =	+	−	−	+	+	+	
	0	1	0	1	0	0	keine Wurzel
(> 0) =	+	+	−	−	+	+	
	0	0	0	0	1	1	eine reelle Wurzel
(< 1) =	+	+	−	−	−	−	
	0	0	1	0	0	0	keine Wurzel
(> 1) =	+	+	+	−	−	−	
	0	0	0	1	1	1	eine reelle Wurzel.
(10) =	+	+	+	+	+	+	

VIII. $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 15x + 17 = 0$

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 15x + 17$$
$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 30x^2 - 20x + 15$$
$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 60x - 20$$
$$f'''(x) = 60x^2 - 120x + 60$$
$$f^{IV}(x) = 120x - 120$$
$$f^{V}(x) = 120$$

(− 1) = + − + − + −
(0) = + − + − + +
(1) = + 0 0 0 + +

(− 1) = + − + − + −
0 0 0 0 0 1 } eine reelle Wurzel
(0) = + − + − + +
0 0 0 0 0 0 } keine Wurzel
(< 1) = + − + − + +
0 1 2 3 4 4 } vier imaginäre Wurzeln.
(> 1) = + + + + + +

IX. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 7 = 0.$

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 7$$
$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 4$$
$$f''(x) = 12x^2 + 24x + 12$$
$$f'''(x) = 24x + 24$$
$$f^{IV}(x) = 24$$

(− 10) = + − + − +
(− 1) = + 0 0 0 −
(0) = + + + + −
(1) = + + + + +

(− 10) = + − + − +
0 0 0 0 1 } eine reelle Wurzel
(< − 1) = + − + − −
0 1 2 3 2 } zwei imaginäre Wurzeln
(> − 1) = + + + + −
0 0 0 0 0 } keine Wurzel
(0) = + + + + −
0 0 0 0 1 } eine reelle Wurzel.
(1) = + + + + +

Dieſe Exempel, von denen die beiden letzten vollſtändigen Aufſchluß über die Natur aller Wurzeln der vorgelegten Gleichung geben, mögen zur Erläuterung des bei Entdeckung der Gränzen der Wurzeln anzuwendenden Verfahrens hinreichen. Vorzüglich liegt es uns nun aber ob, zu zeigen, wie in den Fällen, wo die Natur der Wurzeln noch zweifelhaft bleibt, über dieſelbe ſicher entſchieden werden kann.

72. Bevor wir indeß zu dieſer Unterſuchung übergehen, wollen wir zeigen, wie ſich aus den vorhergehenden Principien noch ein neuer Beweis des in II. ſchon auf andere Art bewieſenen, gewöhnlich nach Harriot benannten, Lehrſatzes ableiten läßt. Die gegebene Gleichung mit lauter reellen Coefficienten, deren, wie wir jetzt annehmen wollen, keiner = 0 ſeyn ſoll, ſey wie gewöhnlich

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0,$$

ſo daß alſo

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

iſt. Entwickelt man die derivirten Functionen dieſer Function und ſetzt $x = 0$; ſo findet man auf der Stelle, daß die Vorzeichen von

$$f^{(n-1)}(0), f^{(n-2)}(0), f^{(n-3)}(0), \ldots f'(0), f(0)$$

respective mit den Vorzeichen der Coefficienten A, B, C, ... L, N einerlei ſind, das Vorzeichen von $f^{(n)}(x)$ aber immer $+$ iſt. Laſſen wir nun den Ausdruck

$$(0) = + \text{ABCD} \ldots \text{LN}$$

bloß bedeuten, daß die Glieder der Zeichenreihe (0) vom zweiten an mit den Vorzeichen der Coefficienten A, B, C, D, ... L, N einerlei ſind; ſo haben wir die folgenden Zeichenreihen:

$$(-\infty) = + - + - + - \ldots \mp \pm$$
$$(0) = + \text{A B C D E} \ldots \text{L N}$$
$$(+\infty) = + + + + + + \ldots + + .$$

Die Anzahl der Wechſel der Reihe $(-\infty)$ iſt $= n$, die Anzahl der Wechſel der Reihe $(+\infty)$ iſt $= 0$. Die Anzahl der Wechſel der Reihe (0) ſey $= w$, die Anzahl der in dieſer Reihe vorkommenden Folgen dagegen $= f$. Die Anzahl der negativen reeen Wurzeln unſerer Gleichung ſey, wie in (32.), $= m$, die Anzahl der poſitiven Wurzeln dagegen $= p$. Weil alle negativen reellen Wurzeln zwiſchen $-\infty$ und 0 liegen; ſo iſt nach (64. VII.)

$$m \overline{\overline{<}}\, n - w.$$

Nun iſt offenbar $n - w = f$. Alſo iſt

$$m \overline{\overline{<}}\, f.$$

Da ferner alle poſitiven reellen Wurzeln zwiſchen 0 und $+\infty$ liegen; ſo iſt nach (64. VII.)

$$p \overline{\overline{<}}\, w - 0, \text{ d. i. } p \overline{\overline{<}}\, w.$$

In den Ausdrücken

$$p \overline{\overline{<}}\, w,\; m \overline{\overline{<}}\, f$$

iſt aber der nach Harriot benannte Lehrſatz, ſo wie er in (32.) für den Fall, wo kein Coefficient der Gleichung $= 0$ iſt, ausgeſprochen worden iſt, enthalten. Hat die Gleichung lauter reelle Wurzeln, ſo iſt $p + m = n$, $f + w = n$, woraus ganz wie in (32.) leicht $p = w$, $m = f$ folgt. Ueber die weitern Entwickelungen und Beſtimmungen dieſes Satzes muß man (32.) nachſehen.

E. Von der Unterſcheidung der reellen und imaginären Wurzeln.

73. Wir betrachten hier zunächſt einen Fall, der zwar ſehr ſpeciell iſt, auf den ſich aber, wie wir nachher ſehen werden, alle

übrigen Fälle zurückführen laſſen. Dies iſt der Fall, in welchem die drei letzten Glieder der dem Intervall ab entſprechenden Indexreihe 012 ſind, wo man alſo, wie aus der Lehre von den Zeichenreihen erhellet und auch ſchon in (69.) bemerkt worden iſt, weiß, daß in dem Intervall ab keine reelle Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$, eine reelle Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ liegt, und daß in dieſem Intervall bloß entweder keine oder zwei reelle Wurzeln der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ liegen können. Auf dieſen Fall iſt alſo der in (69.) bewieſene Satz anwendbar, und es kommt nun eben darauf an, mittelſt deſſelben zu entſcheiden, ob die beiden zwiſchen a und b angedeuteten Wurzeln der gegebenen Gleichung reell ſind, oder ob zwiſchen dieſen Gränzen keine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung liegen kann, und dieſelbe alſo ſtatt der beiden zwiſchen a und b angedeuteten Wurzeln zwei imaginäre Wurzeln hat, in welchem Falle man bekanntlich auch ſagt, daß die beiden zwiſchen a und b angedeuteten Wurzeln in dem Intervalle ab fehlen. Dieſe Entſcheidung kann nun, indem wir für jetzt immer den in Rede ſtehenden Fall vor Augen behalten, auf folgende Art gegeben werden.

Man beſtimme aus den gegebenen Gränzen a und b und den bekannten Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ die Größe

$$\frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Findet ſich dieſe Größe $\overline{\overline{>}}$ b — a, ſo liegt nach (69. 9.) keine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ zwiſchen a und b, und dieſelbe hat alſo ſtatt der beiden zwiſchen a und b angedeuteten Wurzeln zwei imaginäre Wurzeln, oder die beiden zwiſchen a und b angedeuteten Wurzeln fehlen in dem Intervall ab. Findet ſich aber die obige Größe $<$ b — a, ſo können zwiſchen a und b zwei reelle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ liegen, überhaupt bleibt aber die Natur der beiden zwiſchen a und b angedeuteten Wurzeln noch unbeſtimmt. In dieſem Falle muß man die Gränzen a und b enger zuſammenziehen, indem man für x eine zwiſchen a und b liegende Größe c ſetzt, wodurch das Intervall ab in die beiden engern Intervalle ac und cb getheilt wird, und nun zwei Fälle eintreten können. Sind nämlich, welches der eine mögliche Fall iſt, die letzten Glieder der den Intervallen ac und cb entſprechenden Indexreihen beide die Einheit, ſo liegt ſowohl in dem Intervall ac, als auch in dem Intervall cb, eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, ſo daß alſo nun offenbar über die Natur der beiden zwiſchen a und b angedeuteten Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ entſchieden iſt, und dieſe beiden reellen Wurzela zugleich, wie man dies zu nennen pflegt, durch die bekannte Größe c getrennt ſind, ſo daß nämlich in jedem der beiden Intervalle ac und cb nur eine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung liegt. Es können aber auch, welches der zweite mögliche Fall iſt, die drei letzten Glieder der dem eines

der beiden Intervalle, in welche das Intervall ab getheilt worden iſt, entſprechenden Indexreihe 000, die drei letzten Glieder der dem andern Intervalle entſprechenden Indexreihe 012 ſeyn, wobei folgende Erläuterung nöthig iſt. Daß nämlich zuerſt die dem Gliede $f''(x)$ der Functionenreihe entſprechenden Indices in beiden Intervallen jederzeit 0 ſind, folgt unmittelbar aus (64. **XIV.**). Sind alſo nicht in beiden Intervallen die letzten Indices die Einheit, ſo können die drei letzten Indices in den beiden Intervallen bloß entweder die Folgen 000, 012 oder die Folgen 002, 010 bilden. Da nun aber der letzte Fall nicht Statt finden kann, weil nach (65.) die Folge 002 nicht zuläſſig iſt, ſo bleibt bloß der erſte Fall übrig, und es findet ſich folglich in dem einen der beiden Intervalle ac, cb jederzeit die Folge 012 der drei letzten Indices. In dieſem Intervalle ſind alſo auch bloß die in dem Intervall ab angedeuteten zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung ferner zu ſuchen, und man kann jetzt auf dieſes Intervall wieder ganz daſſelbe Verfahren anwenden, welches nach dem Vorhergehenden auf das Intervall ab angewandt werden muß. Ueberhaupt aber ſieht man, daß man dieſes Verfahren beliebig weit fortſetzen kann, und daß man dadurch, wenn man es nur weit genug fortſetzt, weil ſich bei demſelben die Gränzen der Wurzeln immer enger und enger zuſammenziehen, jederzeit entweder zu einer Trennung der beiden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, wenn es nämlich zwiſchen a und b zwei ſolche Wurzeln dieſer Gleichung giebt und dieſelben ungleich ſind, oder zu dem obigen Kennzeichen der Nichtexiſtenz zweier ſolchen Wurzeln zwiſchen den angegebenen Gränzen gelangen muß. Sind die beiden zwiſchen dieſen Gränzen angedeuteten Wurzeln reell, aber einander gleich, ſo kann natürlich niemals eine Trennung derſelben bewirkt werden, welches folgende Ergänzungsregel zu dem Obigen nöthig macht. Hat ſich nämlich die Größe

$$\frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

kleiner wie die Größe b — a ergeben, ſo daß alſo die Natur der beiden zwiſchen a und b angedeuteten Wurzeln noch unbeſtimmt geblieben iſt; ſo ſuche man, wobei überhaupt (58.) zu vergleichen iſt, den größten gemeinſchaftlichen Diviſor $\psi(x)$ von $f(x)$ und $f'(x)$, und beſtimme dann nach den vorhergehenden Regeln, ob die Gleichung $\psi(x) = 0$, welche offenbar jederzeit von einem niedrigern Grade wie die Gleichung $f(x) = 0$ iſt, zwiſchen den Gränzen a und b eine reelle Wurzel, die wir α nennen wollen, hat. Wäre dies der Fall, ſo würde, aber auch nur in dieſem Falle, die Gleichung $f(x) = 0$ zwiſchen denſelben Gränzen zwei reelle Wurzeln haben, die beide $= \alpha$ ſind.

In Bezug auf die Erkennung desjenigen der beiden Intervalle ac, cb, in welchem die drei letzten Indices die Folge 012 bilden, iſt noch zu bemerken, daß dieſes Intervall jederzeit das

Intervall ac oder das Intervall cb iſt, je nachdem $f'(c)$ reſpective mit $f'(a)$ oder mit $f'(b)$ entgegengeſetztes Vorzeichen hat, wie leicht auf folgende Art erhellet. Da für das Intervall ab die drei letzten Indices die Folge 012 bilden, ſo können die Zeichenreihen (a) und (b) offenbar bloß folgende Geſtalt haben:

$$(a) = \ldots\ldots \pm \mp \pm$$
$$(b) = \ldots\ldots \pm \pm \pm$$

$f''(c)$ hat mit $f''(a)$ und $f''(b)$ einerlei Vorzeichen, weil zwiſchen a und b keine reelle Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$ liegt. $f(c)$ hat mit $f(a)$ und $f(b)$ einerlei Vorzeichen, weil im entgegengeſetzten Falle die beiden zwiſchen a und b angedeuteten Wurzeln der gegebenen Gleichung reell und durch c getrennt ſeyn würden, welches der erſte der beiden oben unterſchiedenen Fälle iſt, den man alſo, wie man hieraus zugleich ſieht, immer daran erkennt, daß $f(c)$ mit $f(a)$ und $f(b)$ entgegengeſetztes Vorzeichen hat. Alſo können im zweiten der beiden oben unterſchiedenen Fälle die Zeichenreihen (a), (c), (b) bloß entweder

$$(a) = \ldots\ldots \pm \mp \pm$$
$$(c) = \ldots\ldots \pm \pm \pm$$
$$(b) = \ldots\ldots \pm \pm \pm$$

oder

$$(a) = \ldots\ldots \pm \mp \pm$$
$$(c) = \ldots\ldots \pm \mp \pm$$
$$(b) = \ldots\ldots \pm \pm \pm$$

ſeyn, woraus man alſo ſieht, daß dasjenige der beiden Intervalle ac, cb, in welchem die drei letzten Indices die Folge 012 bilden, jederzeit das Intervall ac oder das Intervall cb iſt, jenachdem $f'(c)$ reſpective mit $f'(a)$ oder mit $f'(b)$ entgegengeſetztes Vorzeichen hat, wie oben behauptet wurde.

74. Das Vorhergehende wollen wir nun durch einige vollſtändig ausgeführte Beiſpiele zu völliger Deutlichkeit zu bringen ſuchen, wobei wir bemerken, daß dieſelben der Kürze wegen hier ſämmtlich ſo gewählt werden ſollen, daß eine beſondere Unterſuchung wegen der gleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung bei denſelben nicht nöthig iſt. Von den ſchon in (71.) behandelten Gleichungen ſind die Gleichungen **IV.**, **V.** und **VII.** zu unſerm jetzigen Zwecke brauchbar, die wir daher zuerſt vornehmen wollen.

I. Bei der Gleichung

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

blieb in (71.) die Beſchaffenheit zweier zwiſchen 1 und 10 angedeuteten Wurzeln ungewiß. Die Zeichenreihen nebſt der entſprechenden Indexreihe waren:

$$(1) = + + - +$$
$$\quad\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 2$$
$$(10) = + + + + .$$

Ferner iſt

$$f(1) = 1,\quad f'(1) = -4;$$
$$f(10) = 937,\ f'(10) = 293.$$

Folglich iſt

$$\frac{f(10)}{f'(10)} - \frac{f(1)}{f'(1)} = \frac{937}{293} + \frac{1}{4},$$

und dieſe Größe alſo offenbar kleiner wie $10 - 1 = 9$. Man muß alſo das Intervall zwiſchen 1 und 10 nach dem Vorhergehenden ferner theilen, wozu man der Leichtigkeit der Rechnung wegen in allen Fällen am beſten die kleinſten in dem in Rede ſtehenden Intervall liegenden Zahlen, hier alſo 2, wählt. Da nun

$$f(2) = 1,\ f'(2) = 5$$

iſt, ſo hat $f(2)$ mit $f(1)$ und $f(10)$ gleiches, $f'(2)$ mit $f'(1)$ ungleiches Vorzeichen, weshalb nach (73.) die Wurzeln zwiſchen 1 und 2 zu ſuchen ſind. Da nun

$$\frac{f(2)}{f'(2)} - \frac{f(1)}{f'(1)} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$$

iſt, ſo iſt dieſe Größe wieder kleiner wie $2 - 1 = 1$, und man muß alſo das Intervall zwiſchen 1 und 2 ferner theilen. Für $x = 1,5$ erhält man

$$f(1,5) = -0,125;\ f'(1,5) = -0,25\ .$$

Alſo hat $f(1,5)$ mit $f(1)$ und $f(2)$ entgegengeſetztes Vorzeichen, und deshalb die gegebene Gleichung eine reelle Wurzel zwiſchen 1 und 1,5, ſo wie eine reelle Wurzel zwiſchen 1,5 und 2. Dieſe Gleichung hat alſo drei reelle Wurzeln zwiſchen -10 und -1, zwiſchen 1 und 1,5 und zwiſchen 1,5 und 2.

II. Bei der Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

blieb in (71.) die Beſchaffenheit zweier Wurzeln zwiſchen -1 und 0 unbeſtimmt, und die Zeichenreihen nebſt der entſprechenden Indexreihe waren:

$$\begin{array}{l} (-1) = + - + - \\ \qquad\quad\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 2 \\ (<0) = + - - - . \end{array}$$

Da

$$f(-1) = -4,\ f'(-1) = 1;$$
$$f(0) = -5,\ f'(0) = -2$$

iſt; ſo iſt

$$\frac{f(0)}{f'(0)} - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = \frac{5}{2} + \frac{4}{1} = \frac{13}{2},$$

d. i. größer wie $0 - (-1) = 1$. Die beiden zwiſchen -1 und 0 angedeuteten Wurzeln fehlen alſo in dieſem Intervall, oder die gegebene Gleichung hat ſtatt dieſer Wurzeln zwei imaginäre

Wurzeln. Eigentlich bietet dieſer Fall die Eigenthümlichkeit dar, daß $f''(0) = 0$ iſt. Es iſt aber klar, daß auch in einem ſolchen Falle alles Obige ſeine Richtigkeit behält, wie ſchon daraus erhellet, daß, ſo wie

$$\frac{f(0)}{f'(0)} - \frac{f(-1)}{f'(-1)} > 1$$

iſt, offenbar auch

$$\frac{f(<0)}{f'(<0)} - \frac{f(-1)}{f'(-1)} > 1$$

iſt, wo <0 bekanntlich eine um ein Unendlichkleines von 0 verſchiedene Größe bezeichnet.

III. Für die Gleichung

$$x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0$$

blieb in (71.) die Natur zweier Wurzeln zwiſchen -1 und 0 unbeſtimmt, und die Zeichenreihen nebſt der entſprechenden Indexreihe waren

$$\begin{array}{l} (>-1) = + - - + - + \\ \quad\quad\quad\;\; 0\;\;0\;\;0\;\;0\;\;1\;\;0 \\ (<0) = + - - + + + \end{array}$$

Man findet leicht

$$f(-1) = 4,\; f'(-1) = -19\,;$$
$$f(0) = 1,\; f'(0) \quad = 6\,.$$

Alſo iſt

$$\frac{f(0)}{f'(0)} - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = \frac{1}{6} + \frac{4}{19} = \frac{43}{114},$$

dieſe Größe folglich kleiner wie $0 - (-1) = 1$. Man ſetze nun $x = -0{,}5$; ſo iſt

$$f(-0{,}5) = -0{,}78125\,.$$

Daher hat $f(-0{,}5)$ mit $f(-1)$ und $f(0)$ entgegengeſetztes Vorzeichen, und die gegebene Gleichung hat folglich zwei reelle Wurzeln zwiſchen -1 und 0, *eine* zwiſchen -1 und $-0{,}5$, *eine* zwiſchen $-0{,}5$ und 0. Dieſe Gleichung hat alſo fünf reelle Wurzeln zwiſchen -10 und -1; -1 und $-0{,}5$; $-0{,}5$ und 0; 0 und 1; 1 und 10.

Dieſen Beiſpielen fügen wir nun noch die beiden folgenden ganz neuen bei.

IV. Die gegebene Gleichung ſey

$$x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = 0\,;$$

alſo

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2$$
$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$$
$$f''(x) = 6x + 4$$
$$f'''(x) = 6$$

$$\begin{array}{rl}
(-10) = + - + - & \\
\quad 0\ 0\ 1\ 1 & \text{eine reelle Wurzel} \\
(-1) = + - - + & \\
\quad 0\ 1\ 0\ 0 & \text{keine Wurzel} \\
(0) = + + - + & \\
\quad 0\ 0\ 1\ 2 & \text{zwei Wurzeln von unbeſtimmter Beſchaffenheit.} \\
(1) = + + + + &
\end{array}$$

Es iſt nun

$$f(0) = 2,\ f'(0) = -3\ ;$$
$$f(1) = 2,\ f'(1) = 4\ .$$

Alſo iſt

$$\frac{f(1)}{f'(1)} - \frac{f(0)}{f'(0)} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6},$$

dieſe Größe folglich größer wie $1 - 0 = 1$. Daher fehlen die beiden zwiſchen 0 und 1 angedeuteten Wurzeln in dieſem Intervall, oder die gegebene Gleichung hat ſtatt derſelben zwei imaginäre Wurzeln.

V. Für die gegebene Gleichung

$$x^5 + x^4 + x^2 - 25x - 36 = 0$$

erhält man:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^5 + x^4 + x^2 - 25x - 36 \\
f'(x) &= 5x^4 + 4x^3 + 2x - 25 \\
f''(x) &= 20x^3 + 12x^2 + 2 \\
f'''(x) &= 60x^2 + 24x \\
f^{IV}(x) &= 120x + 24 \\
f^{V}(x) &= 120\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-10) &= + - + - + - \\
(-1) &= + - + - - - \\
(0) &= + + 0 + - - \\
(1) &= + + + + - - \\
(10) &= + + + + + +
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl}
(-10) = + - + - + - & \\
\quad 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 2 & \text{zwei Wurzeln von unbeſtimmter Beſchaffenheit} \\
(-1) = + - + - - - & \\
\quad 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0 & \text{keine Wurzel} \\
(< 0) = + + - + - - & \\
\quad 0\ 0\ 1\ 2\ 2\ 2 & \text{zwei imaginäre Wurzeln} \\
(> 0) = + + + + - - & \\
\quad 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 & \text{keine Wurzel} \\
(1) = + + + + - - & \\
\quad 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1 & \text{eine reelle Wurzel.} \\
(10) = + + + + + + &
\end{array}$$

Es iſt alſo bloß noch über die beiden zwiſchen -10 und -1 angedeuteten Wurzeln zu entſcheiden. Da

$$f(-10) = -89686,\ f'(-10) = 45955\ ;$$
$$f(-1) = -10,\quad f'(-1) = -26$$

iſt; ſo iſt

$$\frac{f(-1)}{f'(-1)} - \frac{f(-10)}{f'(-10)} = \frac{10}{26} + \frac{89686}{45955},$$

dieſe Größe alſo offenbar kleiner wie $-1 - (-10) = 9$. Setzen wir nun $x = -2$, ſo wird

$$f(-2) = +2,\ f'(-2) = +19\,.$$

Folglich hat $f(-2)$ mit $f(-10)$ und $f(-1)$ entgegengeſetztes Vorzeichen, und unſere Gleichung hat alſo ſowohl zwiſchen -10 und -2, als auch zwiſchen -2 und -1, eine reelle Wurzel. Dieſelbe hat folglich drei reelle Wurzeln zwiſchen -10, -2; -2, -1; $1, 10$; außerdem zwei imaginäre Wurzeln.

75. Es liegt uns nun ob, zu zeigen, daß auf den vorher betrachteten Fall alle übrigen Fälle zurückgeführt werden können.

I. Wenn für das beliebige Intervall ab der letzte Index $\delta^{(n)} = 1$ iſt; ſo wiſſen wir, daß in dieſem Intervall eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegt.

II. Wenn für das beliebige Intervall ab die drei letzten Indices $\delta^{(n-2)}$, $\delta^{(n-1)}$, $\delta^{(n)}$ die Folge 012 bilden; ſo wiſſen wir aus dem Vorhergehenden, wie ſich über die Natur der beiden zwiſchen a und b angedeuteten Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ entſcheiden läßt.

III. In jedem andern Falle, wo alſo für das beliebige Intervall ab der letzte Index $\delta^{(n)} \overline{>} 2$ iſt, und die beiden vorhergehenden Indices für $\delta^{(n)} = 2$ nicht 01 ſind, ſuche man, in der Indexreihe von der rechten nach der linken Hand hin gehend, das erſte Glied derſelben, welches $= 1$ iſt. Entſpricht dieſes Glied dem Gliede $f^{(k)}(x)$ der Functionenreihe, und iſt alſo $\delta^{(n-k)}$; ſo iſt das nächſt folgende Glied der Indexreihe nach der rechten Seite hin, d. i. $\delta^{(n-k+1)}$, jederzeit $= 2$. Dieſes Glied kann nämlich nach (65.) nur $= 0$, $= 1$ oder $= 2$ ſeyn. Wäre daſſelbe $= 1$, ſo wäre $\delta^{(n-k)}$ nicht das erſte Glied der Indexreihe, welches, von der rechten nach der linken Seite hin gehend, $=$ iſt. Wäre $\delta^{(n-k+1)} = 0$, ſo müßte ſich in der Indexreihe nach der rechten Seite hin nothwendig ein der Einheit gleiches Glied finden, weil $\delta^{(n)} \overline{>} 2$ iſt, und nach (65.) die Indices bloß um einzelne Einheiten zunehmen können. Alſo wäre in dieſem Falle wieder $\delta^{(n-k)}$ nicht das erſte Glied der Indexreihe, welches, von der rechten nach der linken Seite hin gehend, $= 1$ iſt. Daß man übrigens, wenn man die Indexreihe von der rechten nach der linken Seite hin durchläuft, jederzeit auf ein der Einheit gleiches Glied treffen muß, erhellet auf der Stelle, weil das erſte Glied der Indexreihe jederzeit $= 0$, das letzte nach der Vorausſetzung $\overline{>} 2$ iſt, und nach (65.) die Glieder der Index-

reihe bloß um einzelne Einheiten wachſen können. Der dem Index $\delta^{(n-k)}$ vorhergehende Index $\delta^{(n-k-1)}$ kann, weil jener $= 1$ iſt, bloß 0, 1 oder 2 ſeyn. Iſt $\delta^{(n-k-1)} = 0$, ſo bilden die Indices

$$\delta^{(n-k-1)},\ \delta^{(n-k)},\ \delta^{(n-k+1)}$$

die Folge 012. Iſt $\delta^{(n-k-1)}$ nicht $= 0$, alſo $= 1$ oder $= 2$, ſo gehen in Bezug auf die Functionenreihe $f^{(n)} f^{(k+1)}$ von $x = a$ bis $x = b$ reſpective ein oder zwei Zeichenwechſel verloren. Für die Functionenreihe $f^{(n)} f^{(k)}$ geht, weil $\delta^{(n-k)} = 1$ iſt, von $x = a$ bis $x = b$ ein Zeichenwechſel verloren, und wir wollen nun näher unterſuchen, wie dieſer Zeichenwechſel verloren geht. Weil $\delta^{(n-k)} = 1$ iſt, ſo hat die Gleichung $f^{(k)}(x) = 0$ eine reelle Wurzel, die wir α nennen wollen, zwiſchen a und b, ſo daß alſo $f^{(k)}(\alpha) = 0$ iſt. Wäre zu gleicher Zeit

$$f^{(k)}(\alpha) = 0,\ f^{(k+1)}(\alpha) = 0,$$

ſo hätte nach aus dem Obigen bekannten Sätzen die Gleichung

$$f^{(k)}(x) = 0$$

zwei der Größe α gleiche, folglich zwei reelle Wurzeln zwiſchen a und b, welches ungereimt iſt, weil die Gleichung nach dem Vorhergehenden nur eine reelle Wurzel zwiſchen a und b hat. Es iſt alſo $f^{(k+1)}(\alpha)$ nicht $= 0$, und für die Functionenreihe $f^{(n)} f^{(k)}$ verſchwindet alſo zwiſchen a und b ein Zeichenwechſel offenbar auf folgende Art:

$$(<\alpha) = \ldots\ldots \pm \mp$$
$$(\alpha) = \ldots\ldots \pm\ 0$$
$$(>\alpha) = \ldots\ldots \pm \pm$$

wie man augenblicklich findet, wenn man auf die Zeichenreihe

$$(\alpha) = \ldots\ldots \pm\ 0$$

die Regel des doppelten Zeichens anwendet. Sollten nun bei dem Werthe α von x auch für die Functionenreihe $f^{(n)} f^{(k+1)}$ Zeichenwechſel verſchwinden, oder für dieſe Functionenreihe die Zeichenreihe $(>\alpha)$ weniger Zeichenwechſel wie die Zeichenreihe $(<\alpha)$ haben, ſo würden bei dem Werthe α von x für die Functionenreihe $f^{(n)} f^{(k)}$ offenbar mehr als ein Zeichenwechſel verſchwinden, welches ungereimt iſt, da für dieſe Functionenreihe in dem Intervall ab überhaupt nur ein Zeichenwechſel verſchwindet, wobei man feſtzuhalten hat, daß, wie wir aus dem Vorhergehenden wiſſen, für dieſelbe Functionenreihe in den einzelnen Zeichenreihen die Anzahl der Zeichenwechſel nie wachſen kann. Für die Functionenreihe $f^{(n)} f^{(k+1)}$ haben alſo die Zeichenreihen $(<\alpha)$ und $(>\alpha)$ gleichviel Zeichenwechſel, oder in dem Intervall $<\alpha$, $>\alpha$ iſt für die in Rede ſtehende Functionenreihe der letzte Index 0. Für die Functionenreihe $f^{(n)} f^{(k)}$ iſt dagegen der letzte Index in dem in Rede ſtehenden Intervall 1. Hieraus ſieht man, daß ſich durch hinreichend weit fortgeſetzte Zertheilung des Intervalls ab in engere Intervalle immer ein innerhalb dieſes Intervalls liegendes Intervall a′b′ finden laſſen muß, in welchem die

beiden letzten Glieder der der Functionenreihe $f^{(n)}f^{(k)}$ entſprechenden Indexreihe 01 ſind, ſo daß alſo in dem Intervall a′ b′

$$\delta^{(n-k-1)} = 0,\ \delta^{(n-k)} = 1$$

iſt. In den beiden Intervallen aa′, b′b iſt offenbar $\delta^{(n-k)} = 0$; ſind alſo in dieſen beiden Intervallen die auf $\delta^{(n-k)}$ nach der rechten Seite hin folgenden Indices nicht ſämmtlich = 0, ſo wird ſich auf dieſer Seite mindeſtens ein der Einheit gleicher Index finden, und alſo der erſte Index, welcher, von der rechten nach der linken Seite hin gehend, = 1 iſt, einem Gliede der Functionenreihe angehören, welches weiter wie $f^{(k)}(x)$ nach der rechten Seite hin liegt. In dem Intervall a′ b′, wo

$$\delta^{(n-k-1)} = 0,\ \delta^{(n-k)} = 1$$

iſt, iſt entweder $\delta^{(n-k)}$ ſelbſt der erſte Index, welcher, von der rechten nach der linken Seite hin gehend, = 1 iſt, oder dieſer erſte Index, welcher, von der rechten nach der linken Seite hin gehend, = 1 iſt, findet ſich in der Indexreihe weiter nach der rechten Seite hin. Iſt in dieſem Intervall $\delta^{(n-k)}$ ſelbſt der erſte Index, welcher, von der rechten nach der linken Hand hin gehend, = 1 iſt; ſo iſt in dieſem Intervall nach dem Vorhergehenden $\delta^{(n-k+1)} = 2$, und die Indices

$$\delta^{(n-k-1)},\ \delta^{(n-k)},\ \delta^{(n-k+1)}$$

bilden alſo in dieſem Falle in dem Intervall a′ b′ die Folge 012. Man kann alſo jetzt nach (74.) entſcheiden, ob die in dem Intervall a′ b′ angedeuteten zwei Wurzeln der Gleichung $f^{(k-1)}(x) = 0$ reell ſind, oder in dieſem Intervall fehlen. Haben dieſelben ſich als reell ausgewieſen, ſo ſind ſie, wofern ſie nämlich nicht einander gleich ſind, durch das a. a. O. gelehrte Verfahren zugleich durch eine gewiſſe Größe, die wir c′ nennen wollen, getrennt, und das Intervall a′ b′ iſt folglich in die beiden Intervalle a′ c′ und c′ b′ getheilt, deren jedes eine reelle Wurzel der Gleichung $f^{(k-1)}(x) = 0$ enthält. In jedem dieſer beiden Intervalle entſpricht alſo dem Gliede $f^{(k-1)}(x)$ der Functionenreihe der Index 1, und es findet ſich folglich in jedem dieſer beiden Intervalle der erſte Index, welcher, von der rechten nach der linken Hand hin gehend, = 1 iſt, eine Stelle weiter nach der rechten Hand hin wie in dem Intervalle a′ b′, indem in dieſem Intervalle der erſte Index, welcher, von der rechten nach der linken Hand hin gehend, = 1 iſt, dem Gliede $f^{(k)}(x)$ der Functionenreihe entſprach. Wie man ſich zu verhalten hat, wenn die Gleichung $f^{(k-1)}(x)$ zwiſchen den Gränzen a′ und b′ zwei einander gleiche reelle Wurzeln hat, wird ſich am beſten an Beiſpielen zeigen laſſen, wie ſpäterhin geſchehen ſoll. Findet man aber, daß zwiſchen a′ und b′ keine reelle Wurzel der Gleichung $f^{(k-1)}(x) = 0$ liegen kann, oder daß die in dem Intervall a′ b′ angedeuteten zwei Wurzeln dieſer Gleichung in dieſem Intervall fehlen, ſo läßt ſich auf folgende Art ſchließen. Weil $\delta^{(n-k)} = 1$ iſt, ſo liegt in dem Intervall a′ b′ eine, aber auch nur eine,

reelle Wurzel der Gleichung $f^{(k)}(x) = 0$, welche wir durch α bezeichnen wollen, ſo daß alſo $f^{(k)}(\alpha) = 0$ iſt. Weder $f^{(k+1)}(\alpha)$, noch $f^{(k-1)}(\alpha)$, iſt $= 0$, weil wir wiſſen, daß in dem Intervall a′b′ weder eine reelle Wurzel der Gleichung $f^{(k+1)}(x) = 0$, weil $\delta^{(n-k-1)} = 0$ iſt, noch eine reelle Wurzel der Gleichung $f^{(k-1)}(x) = 0$ liegen kann. Auch geht, weil $\delta^{(n-k-1)} = 0$ iſt, in dem Intervall a′b′ für die Functionenreihe $f^{(n)}f^{(k+1)}$ überhaupt kein Zeichenwechſel verloren. Hätten nun $f^{(k+1)}(\alpha)$ und $f^{(k-1)}(\alpha)$ ungleiche Vorzeichen; ſo hätte man für die Functionenreihe $f^{(n)}f^{(k-1)}$ folgende Zeichenreihen:

$$(<\alpha) = \ldots\ldots \pm \mp \mp$$
$$(\alpha) = \ldots\ldots \pm\ 0\ \mp$$
$$(>\alpha) = \ldots\ldots \pm \pm \mp$$

woraus man ſieht, daß bei dem Werthe α von x, für welchen $f^{(k)}(\alpha) = 0$ iſt, kein Zeichenwechſel verloren geht. Daher können unter der obigen Annahme die beiden Zeichenwechſel, welche für die Functionenreihe $f^{(n)}f^{(k-1)}$ die Zeichenreihe (b′) weniger wie die Zeichenreihe (a′) hat, offenbar nur dadurch verloren gehen, daß die Function $f^{(k-1)}(x)$ in dem Intervalle a′b′ zwei Mal verſchwindet, ſo daß alſo die Gleichung $f^{(k-1)}(x) = 0$, wenn $f^{(k+1)}(\alpha)$ und $f^{(k-1)}(\alpha)$ ungleiche Vorzeichen hätten, zwiſchen den Gränzen a′, b′ zwei reelle Wurzeln haben müßte, welches gegen die Vorausſetzung iſt. Daher müſſen $f^{(k+1)}(\alpha)$ und $f^{(k-1)}(\alpha)$ gleiche Vorzeichen haben, und es iſt alſo für jede der Functionenreihen

$$f^{(n)}f^{(k-1)},\ f^{(n)}f^{(k-2)},\ f^{(n)}f^{(k-3)},\ \ldots\ f^{(n)}f',\ f^{(n)}f$$

die Zeichenreihe (α) von der Form

$$(\alpha) = \ldots\ldots \pm\ 0 \pm \ldots\ldots,$$

woraus man mittelſt der Regel des doppelten Zeichens

$$(<\alpha) = \ldots\ldots \pm \mp \pm \ldots\ldots$$
$$(\alpha) = \ldots\ldots \pm\ 0 \pm \ldots\ldots$$
$$(>\alpha) = \ldots\ldots \pm \pm \pm \ldots\ldots$$

erhält. Hieraus, verglichen mit (64. XII), ergiebt ſich nun auf der Stelle mittelſt einer ſehr einfachen Betrachtung, daß für jede der Gleichungen

$$f^{(k-1)}(x) = 0,\ f^{(k-2)}(x) = 0,\ f^{(k-3)}(x) = 0,\ \ldots\ldots f(x) = 0$$

von den in dem Intervall a′b′ angedeuteten Wurzeln zwei Wurzeln in dieſem Intervall fehlen, ſtatt deren denn jede der obigen Gleichungen zwei imaginäre Wurzeln hat. Da in dem Intervall a′b′ der Index $\delta^{(n-k)}$ der erſte Index iſt, welcher, von der rechten nach der linken Hand hin gehend, $= 1$ iſt; ſo folgen auf den Index $\delta^{(n-k+1)}$, welcher bekanntlich $= 2$ iſt, in dieſem Intervall nach der rechten Seite hin bloß Indices, welche $\geqq 2$ ſind. Man kann alſo jeden der Indices

$$\delta^{(n-k+1)},\ \delta^{(n-k+2)},\ \delta^{(n-k+3)},\ \ldots\ldots\ \delta^{(n)}$$

um zwei Einheiten vermindern, und die ſo erhaltenen Differenzen werden dann die Anzahl der Wurzeln der obigen Gleichungen beſtimmen, über deren Natur man in dem Intervall $a'b'$ noch in Zweifel iſt. Auf dieſe ſo erhaltene neue Indexreihe wird man nun alles Obige von Neuem anwenden, und auf dieſe Art überhaupt immer weiter gehen können.

Ueberblickt man nun aber alles Vorhergehende nochmals im Zuſammenhange; ſo iſt klar, daß in den Intervallen, welche man durch Zertheilung des primitiven Intervalls in kleinere oder engere Intervalle erhält, bei Anwendung der obigen Regeln der *erſte* Index, welcher von der rechten nach der linken Hand hin gehend, = 1 iſt, immer weiter und weiter nach der rechten Seite hin rücken, und daß man alſo, weil man mit dieſem Verfahren doch immer irgend einmal zu Ende kommen muß, auf dieſe Weiſe nach und nach in allen Fällen über die Natur aller in einem gewiſſen Intervall angedeuteten Wurzeln völlig in's Klare kommen wird, wobei man zugleich noch zu bemerken hat, daß ſich durch das beſchriebene Verfahren immer eine völlige Trennung aller ungleichen reellen Wurzeln einer gegebenen Gleichung wird bewirken laſſen, ſo daß nämlich in jedem einzelnen der erhaltenen Intervalle immer nur *eine* ſolche Wurzel liegt. Dies wollen wir nun durch mehrere vollſtändig ausgeführte Beiſpiele zu erläutern ſuchen.

76. Wir wählen dazu zuerſt die ſchon in (71.) behandelten Gleichungen **II.**, **III.**, **VI.**, bei denen die Natur einiger Wurzeln noch ungewiß blieb, die aber in (74.) noch nicht einer fernern Unterſuchung unterworfen werden konnten.

I. Für die Gleichung

$$x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0$$

entſprachen den Gränzwerthen 1 und 10 die Zeichenreihen:

$$\begin{array}{rcccccc} (1) = & + & + & - & + & + & - \\ & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ (10) = & + & + & + & + & + & + \end{array}$$

Suchen wir nun, von der rechten nach der linken Hand hin gehend, den erſten der Einheit gleichen Index; ſo finden wir, daß derſelbe dem Gliede $f'''(x)$ der Functionenreihe entſpricht. Weil ſich ferner die Folge 012 ſchon findet; ſo können wir unmittelbar das in (73.) entwickelte Verfahren anwenden, um zu entſcheiden, ob die angedeuteten zwei Wurzeln der Gleichung $f''(x) = 0$ reell ſind, oder in dem obigen Intervall fehlen. Es iſt nämlich

$$f''(1) = 30,\quad f'''(1) = -156;$$
$$f''(10) = 15150,\ f'''(15) = 5136;$$

alſo iſt

$$\frac{f''(10)}{f'''(10)} - \frac{f''(1)}{f'''(1)} = \frac{15150}{5136} + \frac{30}{156},$$

und dieſe Größe folglich kleiner wie 10 — 1 = 9. Daher bleibt die Natur der beiden Wurzeln noch unbeſtimmt. Um zu beurtheilen, ob die Gleichung $f''(x) = 0$ zwiſchen 1 und 10 vielleicht zwei einander gleiche reelle Wurzeln hat, muß man den größten gemeinſchaftlichen Diviſor von

$$f''(x) = 20x^3 - 36x^2 - 144x + 190$$

und

$$f'''(x) = 60x^2 - 72x - 144$$

ſuchen, denſelben = 0 ſetzen, und unterſuchen, ob die auf dieſe Weiſe hervorgehende Gleichung, welche nothwendig von einem niedrigern Grade wie die Gleichung $f''(x) = 0$ iſt, zwiſchen 1 und 10 eine reelle Wurzel hat. Da dies nicht der Fall iſt, ſo theilen wir das Intervall ferner durch 2, welches die leichteſte Rechnung gewährt. Dies giebt

$$\begin{array}{l} (1) = + + - + + - \\ \quad\;\; 0\;0\;0\;1\;0\;0 \\ (2) = + + - - + - \\ \quad\;\; 0\;0\;1\;1\;2\;3 \\ (10) = + + + + + + \end{array}$$

und die Gleichung $f''(x) = 0$ hat alſo eine reelle Wurzel zwiſchen 1 und 2, eine reelle Wurzel zwiſchen 2 und 10. In dem Intervall zwiſchen 2 und 10 findet ſich die Folge 012 noch nicht, weshalb man alſo dieſes Intervall weiter durch 3 theilen wird. Dies giebt

$$\begin{array}{l} (2) = + + - + + - \\ \quad\;\; 0\;0\;1\;0\;1\;2 \\ (3) = + + + - - - \\ \quad\;\; 0\;0\;0\;1\;1\;1 \\ (10) = + + + + + + . \end{array}$$

Alſo liegt zwiſchen 3 und 10 eine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung, und in dem Intervall zwiſchen 2 und 3 findet ſich zuletzt die Folge 012. Weil nun

$$f(2) = -21,\ f'(2) = 30;$$
$$f(3) = -32,\ f'(3) = -43$$

iſt; ſo iſt

$$\frac{f(3)}{f'(3)} - \frac{f(2)}{f'(2)} = \frac{32}{43} + \frac{21}{30} = \frac{621}{430},$$

und dieſe Größe iſt folglich größer als 3 — 2 = 1. Daher fehlen die beiden zwiſchen 2 und 3 angedeuteten Wurzeln in dieſem Intervall, und wir ſind nun über die Natur aller fünf Wurzeln der gegebenen Gleichung völlig im Klaren. Auch iſt eine völlige Trennung aller reellen Wurzeln von einander bewirkt, wie die folgende Darſtellung zeigt:

$$\begin{array}{rl}
(-10) = & + \; - \; + \; - \; + \; - \\
 & 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1 \quad \Big\} \text{ eine reelle Wurzel} \\
(-1) = & + \; - \; + \; - \; + \; + \\
 & 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1 \quad \Big\} \text{ eine reelle Wurzel} \\
(0) = & + \; - \; - \; + \; - \; - \\
 & 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0 \\
(1) = & + \; + \; - \; + \; + \; - \quad \Bigg\} \text{ keine Wurzel} \\
 & 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0 \\
(2) = & + \; + \; - \; - \; + \; - \\
 & 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 2 \quad \Big\} \text{ zwei imaginäre Wurzeln} \\
(3) = & + \; + \; + \; - \; - \; - \\
 & 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1 \quad \Big\} \text{ eine reelle Wurzel.} \\
(10) = & + \; + \; + \; + \; + \; +
\end{array}$$

II. Für die Gleichung

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0$$

blieb in (71.) die Natur zweier zwiſchen 1 und 10 angedeuteter Wurzeln noch unbeſtimmt. Die Indexreihen waren

$$\begin{array}{rl}
(> 1) = & + \; + \; - \; - \; + \\
 & 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 2 \\
(10) = & + \; + \; + \; + \; + \, .
\end{array}$$

Da ſich die Folge 012 noch nicht findet, ſo theilen wir das Intervall durch 2. Dies giebt

$$(2) = + \; + \; 0 \; - \; +$$

und mittelſt der Regel des doppelten Zeichens

$$\begin{array}{rl}
(> 1) = & + \; + \; - \; - \; + \\
 & 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\
(< 2) = & + \; + \; - \; - \; + \quad \Bigg\} \text{ keine Wurzel} \\
 & 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0 \\
(> 2) = & + \; + \; + \; - \; + \\
 & 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 2 \quad \Big\} \text{ zwei Wurzeln noch unbeſtimmt.} \\
(10) = & + \; + \; + \; + \; +
\end{array}$$

Im letzten Intervall findet ſich 012, und es iſt

$$f(2) = 1, \; f'(2) = -19 \, ;$$
$$f(10) = 5993, \; f'(10) = 2797 \, ;$$

alſo

$$\frac{f(10)}{f'(10)} - \frac{f(2)}{f'(2)} = \frac{5993}{2797} + \frac{1}{19} \, ,$$

dieſe Größe folglich kleiner als 10 — 2 = 8. Wir müſſen alſo das Intervall durch 3 theilen. Dadurch erhalten wir, wenn wir zugleich die ganze hier und in (71.) geführte Rechnung zuſammen faſſen, folgende Darſtellung:

$$\begin{array}{rcccccl}
(<0) = & + & - & + & - & + & \\
 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & \text{zwei imaginäre Wurzeln} \\
(>0) = & + & - & - & - & + & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
(<1) = & + & - & - & - & + & \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
(>1) = & + & + & - & - & + & \text{keine Wurzel} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
(<2) = & + & + & - & - & + & \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
(>2) = & + & + & + & - & + & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \text{eine reelle Wurzel} \\
(3) = & + & + & + & - & - & \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \text{eine reelle Wurzel.} \\
(10) = & + & + & + & + & + &
\end{array}$$

III. In (71.) blieb für die Gleichung

$$x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$$

die Natur zweier Wurzeln zwiſchen 0 und 1 und zweier Wurzeln zwiſchen 1 und 10 noch unbeſtimmt, und wir fanden folgende Zeichenreihen:

$$\begin{array}{rcccccccc}
(>0) = & + & + & - & - & - & + & - & + \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\
(1) = & + & + & + & + & + & - & - & + \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
(10) = & + & + & + & + & + & + & + & + \, .
\end{array}$$

Das erſte Intervall durch $\frac{1}{2}$ theilend, erhalten wir

$$\begin{array}{rcccccccc}
(>0) = & + & + & - & - & - & + & - & + \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\
(\tfrac{1}{2}) = & + & + & + & - & - & - & - & + \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
(1) = & + & + & + & + & + & - & - & + \, .
\end{array}$$

Im erſten Intervall findet ſich 012 und es iſt

$$\frac{f'(\frac{1}{2})}{f''(\frac{1}{2})} - \frac{f'(0)}{f''(0)} = \frac{241}{300} + \frac{5}{8},$$

dieſe Größe alſo, wie man leicht findet, größer als $\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$. Daher ſind die beiden zwiſchen 0 und $\frac{1}{2}$ angedeuteten Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$ imaginär. Vermindert man die Indices 22 beide um 2, ſo erhält man 00, ſo daß alſo zwiſchen 0 und $\frac{1}{2}$ auch keine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegen kann, oder die in dem in Rede ſtehenden Intervall angedeuteten zwei Wurzeln dieſer Gleichung in dem in Rede ſtehenden Intervall fehlen. Theilen wir nun auch das Intervall zwiſchen 1 und 10 durch 2, ſo erhalten wir

$$(1) = + + + + + - - +$$
0 0 0 0 0 1 1 2
$$(2) = + + + + + + + +$$
0 0 0 0 0 0 0 0
$$(10) = + + + + + + + + .$$

Theilen wir ferner das erſte Intervall ferner durch $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; ſo ergiebt ſich

$$(1) = + + + + + - - +$$
0 0 0 0 0 1 1 1
$$(\tfrac{3}{2}) = + + + + + + + -$$
0 0 0 0 0 0 0 1
$$(2) = + + + + + + + +$$

und es iſt nun, wie folgende Darſtellung zeigt, über die Natur aller Wurzeln entſchieden, auch eine völlige Trennung aller reellen Wurzeln bewirkt:

$$(-10) = + - + - + - + -$$
0 0 0 0 0 1 1 1 } eine reelle Wurzel
$$(-1) = + - + - + + - +$$
0 0 1 1 1 0 0 0 } keine Wurzel
$$(<0) = + - - + - + - +$$
0 1 0 1 2 2 2 2 } zwei imaginäre Wurzeln
$$(>0) = + + - - - + - +$$
0 0 1 0 0 1 2 2 } zwei imaginäre Wurzeln
$$(\tfrac{1}{2}) = + + + - - - - +$$
0 0 0 1 1 0 0 0 } keine Wurzel
$$(1) = + + + + + - - +$$
0 0 0 0 0 1 1 1 } eine reelle Wurzel
$$(\tfrac{3}{2}) = + + + + + + + -$$
0 0 0 0 0 0 0 1 } eine reelle Wurzel.
$$(2) = + + + + + + + +$$

IV. Die gegebene Gleichung ſey ferner

$$x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0\,,$$

ſo iſt

$$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1$$
$$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x + 2$$
$$f''(x) = 20x^3 + 12x^2 + 6x - 4$$
$$f'''(x) = 60x^2 + 24x + 6$$
$$f^{IV}(x) = 120x + 24$$
$$f^{V}(x) = 120$$

$$(-1) = + - + - + -$$
0 1 2 2 2 2
$$(0) = + + + - + -$$
0 0 0 1 2 3
$$(1) = + + + + + + .$$

Im erſten Intervall findet ſich 012. Wir beſtimmen alſo

$$\frac{f'''(0)}{f^{IV}(0)} - \frac{f'''(-1)}{f^{IV}(-1)} = \frac{6}{24} + \frac{42}{96},$$

und ſehen folglich, daß dieſe Größe kleiner als $0 - (-1) = 1$ iſt. Deshalb theilen wir, nachdem wir uns auf die gewöhnliche Art überzeugt haben, daß die Gleichung $f'''(x) = 0$ zwiſchen -1 und 0 nicht zwei gleiche reelle Wurzeln hat, das in Rede ſtehende Intervall durch $-\frac{1}{2}$, und finden:

$$\begin{array}{l} (-1) = + - + - + - \\ \quad\quad\quad 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ (-\frac{1}{2}) = + - + - + - \\ \quad\quad\quad 0\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2 \\ (0) = + + + - + - . \end{array}$$

Im zweiten Intervall findet ſich 012, und es iſt

$$\frac{f'''(0)}{f^{IV}(0)} - \frac{f'''(-\frac{1}{2})}{f^{IV}(-\frac{1}{2})} = \frac{6}{24} + \frac{9}{36} = \frac{1}{2} = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right).$$

Alſo ſind die Wurzeln der Gleichung $f'''(x) = 0$ zwiſchen $-\frac{1}{2}$ und 0 imaginär. Durch Verminderung der Indices 2222 um 2 erhalten wir 0000. Alſo hat die Gleichung $f(x) = 0$ zwiſchen $-\frac{1}{2}$ und 0 keine reelle Wurzel.

Wir nehmen nun das Intervall zwiſchen 0 und 1 vor. Es findet ſich 012. Da ferner

$$\frac{f'(1)}{f''(1)} - \frac{f'(0)}{f''(0)} = \frac{10}{34} + \frac{2}{4} < 1 - 0$$

iſt, ſo bleibt die Natur der beiden zwiſchen 0 und 1 angedeuteten Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$ noch ungewiß. Nachdem wir uns verſichert haben, daß dieſe Gleichung zwiſchen 0 und 1 nicht zwei einander gleiche reelle Wurzeln hat, theilen wir das Intervall durch $\frac{1}{2}$, und erhalten:

$$\begin{array}{l} (0) = + + + - + - \\ \quad\quad 0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 2 \\ (\frac{1}{2}) = + + + + + - \\ \quad\quad 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ (1) = + + + + + + . \end{array}$$

Alſo liegt eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ zwiſchen $\frac{1}{2}$ und 1. Zwiſchen 0 und $\frac{1}{2}$ findet ſich 012, und es iſt

$$\frac{f'(\frac{1}{2})}{f''(\frac{1}{2})} - \frac{f'(0)}{f''(0)} = \frac{25}{72} + \frac{2}{4} > \frac{1}{2} - 0.$$

Die beiden Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$ ſind alſo imaginär. Durch Verminderung der Indices 22 um 2 erhalten wir 00, und ſchließen hieraus, daß zwiſchen 0 und $\frac{1}{2}$ auch keine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegen kann. Daß wir nun über die Natur aller Wurzeln völlig im Klaren und alle reelle Wurzeln völlig getrennt ſind, zeigt folgende Darſtellung:

$(-1) =$	$+ - + - + -$	
	$0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0$	keine Wurzel
$(-\tfrac{1}{2}) =$	$+ - + - + -$	
	$0 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 2 \;\; 2 \;\; 2$	zwei imaginäre Wurzeln
$(0) =$	$+ + + - + -$	
	$0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 2$	zwei imaginäre Wurzeln
$(\tfrac{1}{2}) =$	$+ + + + + -$	
	$0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1$	eine reelle Wurzel.
$(1) =$	$+ + + + + +$	

V. Die gegebene Gleichung ſey

$$x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4 = 0,$$

ſo iſt

$$f(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4$$
$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 8x + 1$$
$$f''(x) = 12x^2 - 6x + 8$$
$$f'''(x) = 24x - 6$$
$$f^{IV}(x) = 24$$

$$\begin{array}{l} (-1) = + - + - + \\ \quad\quad\quad\;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1 \\ (0) = + - + + - \\ \quad\quad\quad\;\; 0 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 2 \;\; 3 \\ (1) = + + + + + . \end{array}$$

Im letzten Intervall findet ſich 012, und es iſt

$$\frac{f''(1)}{f'''(1)} - \frac{f''(0)}{f'''(0)} = \frac{14}{18} + \frac{8}{6} > 1 - 0 .$$

Alſo ſind die beiden zwiſchen 0 und 1 angedeuteten Wurzeln der Gleichung $f''(x) = 0$ imaginär. Vermindert man die Indices 223 ſämmtlich um 2, ſo erhält man 001, und die Gleichung $f(x) = 0$ hat alſo eine reelle Wurzel zwiſchen 0 und 1. Dies giebt folgende Darſtellung:

$(-1) =$	$+ - + - +$	
	$0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1$	eine reelle Wurzel
$(0) =$	$+ - + + -$	
	$0 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 3$	eine reelle Wurzel zwei imaginäre Wurzeln.
$(1) =$	$+ + + + +$	

Auch hier ſind die reellen Wurzeln völlig von einander getrennt, da wir wiſſen, daß zwiſchen 0 und 1 nur eine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung liegt. Eben ſo wiſſen wir, daß zwiſchen dieſen Gränzen keine reelle Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$, keine reelle Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ liegt.

VI. Die gegebene Gleichung ſey

$$x^6 - 12x^5 + 60x^4 + 123x^3 + 4567x - 89012 = 0,$$

ſo iſt

$$f(x) = x^6 - 12x^5 + 60x^4 + 123x^2 + 4567x - 89012$$
$$f'(x) = 6x^5 - 60x^4 + 240x^3 + 246x + 4567$$
$$f''(x) = 30x^4 - 240x^3 + 720x^2 + 246$$
$$f'''(x) = 120x^3 - 720x^2 + 1440x$$
$$f^{IV}(x) = 360x^2 - 1440x + 1440$$
$$f^{V}(x) = 720x - 1440$$
$$f^{VI}(x) = 720$$

(−10) =	+	−	+	−	+	−	+	
	0	0	0	0	0	0	1	eine reelle Wurzel
(− 1) =	+	−	+	−	+	−	−	
	0	0	0	0	0	1	0	keine Wurzel
(< 0) =	+	−	+	−	+	+	−	
	0	0	0	1	2	2	2	zwei imaginäre Wurzeln
(> 0) =	+	−	+	+	+	+	−	
	0	0	0	0	0	0	0	keine Wurzel
(1) =	+	−	+	+	+	+	−	
	0	1	2	2	2	2	3	drei Wurzeln, von denen eine beſtimmt reell iſt.
(10) =	+	+	+	+	+	+	+	

In der letzten Indexreihe findet ſich 012, und es iſt

$$\frac{f^{IV}(10)}{f^{V}(10)} - \frac{f^{IV}(1)}{f^{V}(1)} = \frac{23040}{5760} + \frac{360}{720} < 10 - 1 \,.$$

die Natur der beiden zwiſchen 1 und 10 angedeuteten Wurzeln der Gleichung $f^{IV}(x) = 0$ bleibt alſo noch unbeſtimmt. Man muß nun zunächſt unterſuchen, ob dieſe Gleichung zwiſchen 1 und 10 vielleicht zwei einander gleiche reelle Wurzeln hat. Zu dem Ende ſucht man den größten gemeinſchaftlichen Diviſor von

$$f^{IV}(x) = 360x^2 - 1440x + 1440 \text{ und } f^{V}(x) = 720x - 1440 \,.$$

Dieſer größte gemeinſchaftliche Diviſor iſt $\frac{1}{2}x - 1$. Setzt man denſelben $= 0$, ſo erhält man die Gleichung $\frac{1}{2}x - 1 = 0$, woraus $x = 2$. Alſo hat die Gleichung $f^{IV}(x) = 0$ zwei reelle Wurzeln zwiſchen 1 und 10, die beide $= 2$ ſind. Setzt man nun in der Functionenreihe $x = 2$, ſo erhält man

$$(2) = +\ 0\ 0 + + + - \,,$$

und mittelſt der Regel des doppelten Zeichens

$$(< 2) = + - + + + + -$$
$$\quad 0\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2$$
$$(> 2) = + + + + + + - \,,$$

woraus man ſieht, daß jede der Gleichungen

$$f'''(x) = 0,\ f''(x) = 0,\ f'(x) = 0,\ f(x) = 0$$

zwiſchen 1 und 10 zwei imaginäre Wurzeln hat, weil keine der Functionen $f'''(x)$, $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$ für $x = 2$ verſchwindet. Man kann alſo wieder jeden der Indices 2223 um 2 vermindern, welches 0001 giebt, und wird hieraus zugleich ſehen, wie man

ſich in allen ähnlichen Fällen zu verhalten hat. Faſſen wir nun das Obige zuſammen, ſo ergiebt ſich folgende Darſtellung:

$(-10) = + - + - + - +$

$\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1$ } eine reelle Wurzel

$(-1) = + - + - + - -$

$\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0$ } keine Wurzel

$(< 0) = + - + - + + -$

$\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2$ } zwei imaginäre Wurzeln

$(> 0) = + - + + + + -$

$\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

$(1) = + - + + + + -$ } keine Wurzel

$\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

$(< 2) = + - + + + + -$

$\quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2$ } zwei imaginäre Wurzeln

$(> 2) = + + + + + + -$

$\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1$ } eine reelle Wurzel.

$(10) = + + + + + + +$

VII. Für

$$x^6 - 6x^5 + x^4 + 48x^3 - 81x^2 + 54x - 81 = 0$$

iſt

$$f(x) = x^6 - 6x^5 + x^4 + 48x^3 - 81x^2 + 54x - 81$$

$$f'(x) = 6x^5 - 30x^4 + 4x^3 + 144x^2 - 162x + 54$$

$$f''(x) = 30x^4 - 120x^3 + 12x^2 + 288x - 162$$

$$f'''(x) = 120x^3 - 360x^2 + 24x + 288$$

$$f^{\text{IV}}(x) = 360x^2 - 720x + 24$$

$$f^{\text{V}}(x) = 720x - 720$$

$$f^{\text{VI}}(x) = 720$$

$(-10) = + - + - + - +$

$\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1$ } eine reelle Wurzel

$(-1) = + - + - - + -$

$\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0$ } keine Wurzel

$(0) = + - + + - + -$

$\quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2$ } zwei Wurzeln von unbeſtimmter Beſchaffenheit

$(< 1) = + - - + + + -$

$\quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$ } keine Wurzel

$(> 1) = + + - + + + -$

$\quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 3$ } drei Wurzeln, von denen eine beſtimmt reell iſt.

$(10) = + + + + + + +$

In dem Intervall zwiſchen 0 und < 1 findet ſich 012, und es iſt

$$\frac{f'(1)}{f''(1)} - \frac{f'(0)}{f''(0)} = \frac{16}{48} + \frac{54}{162} = \frac{2}{3} < 1 - 0\,.$$

Als größter gemeinſchaftlicher Diviſor von $f'(x)$ und $f''(x)$ ergiebt ſich $x - 3$. Die Gleichung $x - 3 = 0$ hat aber keine reelle Wurzel zwiſchen 0 und 1. Wir theilen alſo das Intervał durch $\frac{1}{2}$, und erhalten:

$$(0) = + - + + - + -$$
$$0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0$$
$$(\tfrac{1}{2}) = + - - + - + -$$
$$0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 2$$
$$(< 1) = + - - + + + -\,.$$

Im zweiten Intervall findet ſich 012, und es iſt

$$\frac{f'(1)}{f''(1)} - \frac{f'(\frac{1}{2})}{f''(\frac{1}{2})} = \frac{16}{48} + \frac{125}{450} = \frac{1}{3} + \frac{5}{18} = \frac{11}{18} > 1 - \frac{1}{2}\,.$$

Folglich ſind die beiden zwiſchen $\frac{1}{2}$ und < 1 angedeuteten Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$ imaginär. Vermindert man die Indices 22 um 2, ſo erhält man 00, und die Gleichung $f(x) = 0$ hat alſo auch keine reelle Wurzel in dem in Rede ſtehenden Intervall. In dem Intervall zwiſchen > 1 und 10 findet ſich die Folge 012 auch, und es iſt

$$\frac{f'''(10)}{f^{IV}(10)} - \frac{f'''(1)}{f^{IV}(1)} = \frac{84528}{28824} + \frac{72}{336} < 10 - 1\,.$$

Zwei gleiche reelle Wurzeln hat die Gleichung $f''(x) = 0$ in dem in Rede ſtehenden Intervall nicht. Theilen wir ſelbiges alſo durch 2, ſo erhalten wir

$$(> 1) = + + - + + + -$$
$$0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0$$
$$(2) = + + + - - + -$$
$$0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 3$$
$$(10) = + + + + + + +\,.$$

Im letztern Intervall findet ſich die Folge 012 nicht, und wir theilen daſſelbe alſo durch 3. Dies giebt

$$(3) = + + + + 0\,0\,0\,,$$

woraus man ſieht, daß die Gleichung $f(x) = 0$ drei gleiche reelle Wurzeln hat, deren jede $= 3$ iſt, weil nämlich $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ für $x = 3$ ſämmtlich verſchwinden. Stellen wir alles Obige zuſammen, ſo erhalten wir:

(—10) =	+	—	+	—	+	—	+	
	o	o	o	o	1	1	1	eine reelle Wurzel
(— 1) =	+	—	+	—	—	+	—	
	o	o	o	1	o	o	o	
(0) =	+	—	+	+	—	+	—	keine Wurzel
	o	o	1	o	o	o	o	
(½) =	+	—	—	+	—	+	—	
	o	o	o	o	1	2	2	zwei imaginäre Wurzeln
(< 1) =	+	—	—	+	+	+	—	
	o	1	o	o	o	o	o	
(> 1) =	+	+	—	+	+	+	—	
	o	o	1	1	1	o	o	keine Wurzel
(2) =	+	+	+	—	—	+	—	
	o	o	o	1	o	1	o	
(< 3) =	+	+	+	+	—	+	—	
(3) =	+	+	+	+	0	0	0	drei reelle Wurzeln, jede = 3
(> 3) =	+	+	+	+	+	+	+	
	o	o	o	o	o	o	o	keine Wurzel.
(10) =	+	+	+	+	+	+	+	

77. Durch Erfindung der vorhergehenden trefflichen Methode zur Unterſcheidung der reellen und imaginären Wurzeln der Gleichungen hat ſich Fourier unſtreitig ein großes Verdienſt um die Auflöſung der numeriſchen Gleichungen erworben, und wir glauben nicht, daß ſich dieſe Unterſcheidung überhaupt auf eine einfachere Weiſe bewirken läßt. Indeß hat Cauchy eine Methode angegeben, die uns namentlich in theoretiſcher Rückſicht bemerkenswerth ſcheint, und daher hier in der Kürze noch mitgetheilt werden ſoll, wobei indeß bemerkt ſeyn mag, daß Leſer, die es vorziehen möchten, zunächſt bloß Fouriers Unterſuchungen über die Auflöſung der numeriſchen Gleichungen im Zuſammenhange und ohne Unterbrechung kennen zu lernen, jetzt auch unmittelbar zu (83.) übergehen können. Die Methode von Cauchy, welche, wie wir nachher ſehen werden, zugleich zu einer ſehr einfachen Methode zur annähernden Berechnung der reellen Wurzeln ſelbſt führt, iſt bloß auf Gleichungen mit lauter ungleichen Wurzeln anwendbar. Iſt alſo die Gleichung $f(x) = 0$ gegeben, ſo ſucht man den größten gemeinſchaftlichen Diviſor von $f(x)$ und $f'(x)$, dividirt mit demſelben in $f(x$ hinein, und ſetzt den Quotienten, welchen wir durch $\varphi(x)$ bezeichnen wollen, $= 0$; ſo iſt

$$\varphi(x) = 0$$

eine Gleichung, welche alle ungleichen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, aber jede nur ein Mal, enthält. Beſtimmt man nun alle reellen Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$, ſo hat man auch alle reelle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, und wird nun auch immer leicht ermitteln können, wie oft letztere Gleichung jede dieſer Wurzeln enthält. Im Folgenden wollen wir nun im-

mer vorausſetzen, daß die Gleichung $f(x) = 0$ keine gleichen Wurzeln enthält.

78. In (12.) iſt bewieſen worden, daß jede Gleichung von der Form

$$x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \ldots - a_{n-1}x - a_n = 0,$$

wo a_1, a_2, a_3, ... a_n ſämmtlich reelle poſitive Größen ſind, jederzeit eine, aber auch nur eine, reelle poſitive Wurzel hat. In allen Fällen mit Leichtigkeit eine Größe angeben zu können, welche von dieſer reellen poſitiven Wurzel der obigen Gleichung nicht überſtiegen werden kann, iſt ein Hauptmoment bei Cauchy's Auflöſungsmethode der numeriſchen Gleichungen. Man gelangt dazu ſehr leicht auf eine der beiden folgenden Arten.

Die reelle poſitive Wurzel, welche die obige Gleichung jederzeit haben muß, ſey x ſelbſt; ſo iſt

$$x^n = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Iſt nun a die größte unter den Größen a_1, a_2, a_3, ... a_n; ſo iſt

$$x^n \overline{\overline{<}} a(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1}),$$

d. i. nach der bekannten Summation der gewöhnlichen geometriſchen Reihe

$$x^n \overline{\overline{<}} a\frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Iſt nun $x > 1$, ſo ſind die Größen $x - 1$ und $x^n - 1$ beide poſitiv, und es iſt folglich

$$x - 1 \overline{\overline{<}} a\frac{x^n - 1}{x^n},$$

d. i. immer

$$x - 1 < a,\ x < a + 1.$$

Wenn $x \overline{\overline{<}} 1$ iſt, ſo verſteht ſich von ſelbſt, daß $x < a + 1$ iſt. Daher iſt immer $x < a + 1$, und es kann folglich eine Größe, welche von der reellen poſitiven Wurzel unſerer Gleichung nicht überſtiegen wird, jederzeit leicht gefunden werden. Eine ſolche Größe bietet nämlich immer die größte unter den Größen

$$a_1 + 1,\ a_2 + 1,\ \ldots\ a_{n-1} + 1,\ a_n + 1$$

dar.

Man kann eine ſolche Größe aber auch noch auf folgende Art finden. Weil nämlich

$$x^n = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

iſt; ſo iſt

$$1 = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}.$$

Folglich ſind die Brüche

$$\frac{a_1}{x},\ \frac{a_2}{x^2},\ \ldots\ \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}},\ \frac{a_n}{x^n}$$

entweder ſämmtlich unter einander und dem Bruche $\frac{1}{n}$ gleich, oder dieſe Brüche ſind theils kleiner, theils größer wie der Bruch $\frac{1}{n}$, weil ſie natürlich weder ſämmtlich größer, noch ſämmtlich kleiner wie dieſer Bruch ſeyn können, indem ihre Summe im erſten Falle offenbar größer, im zweiten kleiner als die Einheit ſeyn würde. Alſo ſind die Brüche

$$\frac{na_1}{x}, \frac{na_2}{x^2}, \ldots \frac{na_{n-1}}{x^{n-1}}, \frac{na_n}{x^n}$$

entweder ſämmtlich unter einander und der Einheit gleich, oder dieſe Brüche ſind theils größer, theils kleiner als die Einheit. Folglich ſind offenbar auch die Größen

$$\frac{na_1}{x} = \frac{na_1}{x},$$

$$\left(\frac{na_2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(na_2)^{\frac{1}{2}}}{x},$$

$$\left(\frac{na_3}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{(na_3)^{\frac{1}{3}}}{x},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{na_{n-1}}{x^{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{(na_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}}{x},$$

$$\left(\frac{na_n}{x}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{(na_n)^{\frac{1}{n}}}{x}$$

entweder ſämmtlich unter einander und der Einheit gleich, oder dieſe Größen ſind theils größer, theils kleiner als die Einheit. Hieraus ergiebt ſich unmittelbar, daß x jederzeit eine Mittelgröße zwiſchen den Größen

$$na_1, (na_2)^{\frac{1}{2}}, (na_3)^{\frac{1}{3}}, \ldots (na_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}, (na_n)^{\frac{1}{n}},$$

alſo nie größer wie die größte unter dieſen Größen iſt, ſo daß ſich alſo auch auf dieſe Weiſe immer leicht eine Größe finden läßt, welche von der poſitiven reellen Wurzel, welche die obige Gleichung jederzeit haben muß, nicht überſtiegen wird.

79. Sey nun wieder

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0$$

die aufzulöſende Gleichung, wo aber angenommen wird, daß die Coefficienten **A, B, C, ... L, N** ſämmtlich reell, die Wurzeln a, b, c, d, ... i, k ſämmtlich unter einander ungleich ſind. Die poſitiven Werthe der Coefficienten

A, B, C, ... L, N

ſollen reſpective durch

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_n$$

bezeichnet werden. Da die Coefficienten nach der Vorausſetzung ſämmtlich reelle Größen ſind; ſo ſind

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots.\ a_{n-1},\ a_n$$

als ihre reſpectiven Moduli zu betrachten. Eine beliebige reelle oder imaginäre Wurzel der gegebenen Gleichung ſey nun

$$x = p + q\sqrt{-1}$$

und r ſey der Modulus derſelben; ſo ſind, wie aus dem in (6.) bewieſenen Satze auf der Stelle folgt, die Moduli der Größen

$$x^n,\ x^{n-1},\ x^{n-2},\ \ldots.\ x$$

reſpective

$$r^n,\ r^{n-1},\ r^{n-2},\ \ldots,\ r\,.$$

Die Moduli der Größen

$$x^n,\ Ax^{n-1},\ Bx^{n-2},\ \ldots\ Lx,\ N$$

ſind alſo nach demſelben Satze

$$r^n,\ a_1 r^{n-1},\ a_2 r^{n-2},\ \ldots\ a_{n-1} r,\ a_n\,.$$

Nach dem in (7.) bewieſenen Satze iſt folglich der Modulus der Größe

$$Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

eben ſo groß oder kleiner wie die Größe

$$a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots + a_{n-1} r + a_n\,.$$

Bezeichnen wir alſo den Modulus der Größe

$$Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

durch R_1; ſo iſt

$$R_1 \overline{\overline{<}}\ a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots. + a_{n-1} r + a_n.$$

Nach dem in (7.) bewieſenen Satze iſt der Modulus der Größe

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N\,,$$

welchen wir durch **R** bezeichnen wollen, eine Mittelgröße zwiſchen

$$r^n - R_1 \text{ und } r^n + R_1\,,$$

d. i. in bekannter Bezeichnung

$$R = M(r^n - R_1,\ r^n + R_1)\,.$$

Weil nun aber nach dem Vorhergehenden

$$r^n - R_1 \overline{\overline{>}}\ r^n - a_1 r^{n-1} - a_2 r^{n-2} - \ldots - a_{n-1} r - a_n\,,$$

$$r^n + R_1 \overline{\overline{<}}\ r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots + a_{n-1} r + a_n$$

iſt; ſo iſt natürlich der Modulus **R** immer auch eine Mittelgröße zwiſchen

$$r^n - a_1 r^{n-1} - a_2 r^{n-2} - \ldots - a_{n-1} r - a_n\,,$$

$$r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots + a_{n-1} r + a_n\,;$$

alſo immer

$$R \overline{\overline{>}}\ r^n - a_1 r^{n-1} - a_2 r^{n-2} - \ldots - a_{n-1} r - a_n\,.$$

Weil aber $x = p + q\sqrt{-1}$ nach der Vorausſetzung eine Wurzel der gegebenen Gleichung iſt, ſo iſt natürlich der Modulus $R = 0$, und folglich

$$0 \overline{\gtrless} r^n - a_1 r^{n-1} - \alpha_2 r^{n-2} - \ldots - a_{n-1} r - a_n .$$

Die Gleichung

$$\xi^n - a_1 \xi^{n-1} - a_2 \xi^{n-2} - \ldots - a_{n-1} \xi - a_n = 0$$

hat, wie wir wiſſen, immer eine reelle poſitive Wurzel, welche ξ ſelbſt ſeyn mag. Daher iſt

$$\xi^n - a_1 \xi^{n-1} - a_2 \xi^{n-2} - \ldots - a_{n-1} \xi - a_n$$
$$\overline{\gtrless}\ r^n - a_1 r^{n-1} - a_2 r^{n-2} - \ldots - a_{n-1} r - a_n ,$$

oder

$$\xi^n \left\{1 - \frac{a_1}{\xi} - \frac{a_2}{\xi^2} - \ldots - \frac{a_{n-1}}{\xi^{n-1}} - \frac{a_n}{\xi^n}\right\}$$
$$\overline{\gtrless}\ r^n \left\{1 - \frac{a_1}{r} - \frac{a_2}{r^2} - \ldots - \frac{a_{n-1}}{r^{n-1}} - \frac{a_n}{r^n}\right\}.$$

Wäre nun $r > \xi$, ſo wäre, wobei der Artikel Ungleich zu vergleichen, offenbar

$$1 - \frac{a_1}{r} - \frac{a_2}{r^2} - \ldots - \frac{a_n}{r^n} > 1 - \frac{a_1}{\xi} - \frac{a_2}{\xi^2} - \ldots - \frac{a_n}{\xi^n},$$

und auch $r_n > \xi_n$; alſo, weil r^n und ξ^n poſitiv ſind,

$$r^n\left(1 - \frac{a_1}{r} - \frac{a_2}{r^2} - \ldots - \frac{a_n}{r^n}\right) > \xi^n\left(1 - \frac{a_1}{\xi} - \frac{a_2}{\xi^2} - \ldots - \frac{a_n}{\xi^n}\right),$$

welches gegen das Vorhergehende ſtreitet. Daher iſt r nicht größer als ξ, und folglich

$$r \overline{\lessgtr} \xi .$$

Man ſieht alſo, daß kein Modulus einer Wurzel unſerer gegebenen Gleichung größer als die reelle poſitive Wurzel ξ der Gleichung

$$\xi^n = a_1 \xi^{n-1} + a_2 \xi^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \xi + a_n$$

ſeyn kann. Nach (78.) iſt aber ξ weder größer als die größte unter den Größen

$$a_1 + 1,\ a_2 + 1,\ \ldots\ a_{n-1} + 1,\ a_n + 1,$$

noch größer als die größte unter den Größen

$$na_1,\ (na_2)^{\frac{1}{2}},\ (na_3)^{\frac{1}{3}},\ \ldots\ (na_{n-1})^{\frac{1}{n-1}},\ (na_n)^{\frac{1}{n}};$$

alſo iſt auch kein Modulus einer Wurzel unſerer gegebenen Gleichung größer als die größte unter den Größen

$$a_1 + 1,\ a_2 + 1,\ \ldots\ a_{n-1} + 1,\ a_n + 1,$$

ſo wie auch kein Modulus einer Wurzel der gegebenen Gleichung größer als die größte unter den Größen

$$na_1,\ (na_2)^{\frac{1}{2}},\ (na_3)^{\frac{1}{3}},\ \ldots\ (na_{n-1})^{\frac{1}{n-1}},\ (na_n)^{\frac{1}{n}}$$

iſt, und daher immer leicht eine Größe angegeben werden kann, welche größer iſt als alle Moduli der Wurzeln der gegebenen Gleichung. Eine ſolche Größe wollen wir im Folgenden durch ϱ bezeichnen. Ueberhaupt braucht man ϱ nur größer zu nehmen als die poſitive Wurzel ξ der Gleichung

$$\xi^n = a_1 \xi^{n-1} + a_2 \xi^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\xi + a_n \,,$$

eine Bedingung, der man, wenn auf keine andere Art, jederzeit nach den obigen allgemeinen Regeln genügen kann.

Nach dem in (7.) bewieſenen Lehrſatze iſt nun der Modulus jeder der Differenzen

$$\begin{array}{r} a-b,\ a-c,\ a-d,\ \ldots\ a-i,\ a-k\,; \\ b-c,\ b-d,\ \ldots\ b-i,\ b-k\,; \\ c-d,\ \ldots\ c-i,\ c-k\,; \\ \ldots\ldots\ldots \\ h-i,\ h-k\,; \\ i-k\,; \end{array}$$

deren Anzahl $= \frac{n(n-1)}{2}$ iſt, kleiner als 2ϱ. Alſo iſt nach dem in (6.) bewieſenen Lehrſatze der Modulus des Products der obigen Differenzen mit Uebergehung einer beliebigen derſelben, die etwa die Differenz $a-b$ ſeyn mag, jederzeit kleiner als die Größe

$$(2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}.$$

Das Product der Quadrate aller obigen Differenzen, welches wir durch $\mathfrak{N}^2$ bezeichnen wollen, ſo daß $\mathfrak{N}$ eine poſitive Größe bezeichnet, läßt ſich aber, wie wir in (45.) geſehen haben, immer leicht aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung finden, ohne die Wurzeln ſelbſt zu kennen, und kann daher immer als eine gegebene Größe angeſehen werden. $\mathfrak{N}$ iſt aber in dieſem Falle, wo alle Coefficienten der gegebenen Gleichung reelle Größen ſind, und daher $\mathfrak{N}$ ſelbſt eine reelle Größe iſt, die wir zugleich vorher als poſitiv angenommen haben, das Product der Moduli aller obigen Differenzen, wie Jedem, der alles Vorhergehende, namentlich die in (8.) — (32.) gelieferte allgemeine Theorie der Gleichungen, gehörig aufgefaßt und verſtanden hat, auf der Stelle einleuchten wird, und daher hier der Kürze wegen nicht weiter erläutert werden ſoll. Folglich iſt nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\mathfrak{N}}{\mathrm{Mod}(a-b)} < (2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}\,;$$

alſo

$$\mathrm{Mod}(a-b) > \frac{\mathfrak{N}}{(2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}\,,$$

ſo daß alſo, wenn wir der Kürze wegen

$$\varDelta = \frac{\mathfrak{N}}{(2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}$$

ſetzen, die bekannte poſitive Größe $\varDelta$, welche, weil alle Wurzeln als ungleich angenommen werden, nicht $= 0$ iſt, kleiner als der Modulus jeder der obigen Differenzen zweier Wurzeln der gegebenen Gleichung, alſo natürlich auch kleiner als der abſolute Werth jeder Differenz zweier reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung, oder kleiner als die kleinſte Differenz zwiſchen zwei reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung iſt, immer bloß in Bezug auf die abſoluten Werthe der Differenzen der reellen Wurzeln.

Sind alle Coefficienten der gegebenen Gleichung ganze Zahlen, ſo iſt, wie ſchon in (45.) gezeigt worden iſt, $\mathfrak{N} \overline{\overline{>}} 1$, und man kann folglich in dieſem Falle, weil

$$\frac{1}{(2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}} \overline{\overline{<}} \frac{\mathfrak{N}}{(2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}$$

iſt, offenbar immer auch

$$\varDelta = \frac{1}{(2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}$$

ſetzen, weil auch dieſer Werth von $\varDelta$ unter der gemachten Vorausſetzung den obigen Bedingungen genügt.

Hat man nun den Werth von $\varDelta$ auf die obige Weiſe berechnet, ſo läßt ſich zuvörderſt immer mit Leichtigkeit völlig beſtimmt angeben, ob die gegebene Gleichung reelle Wurzeln, und wie viele ſolche Wurzeln ſie hat. Iſt nämlich m die ganze Zahl, welche $= \frac{\varrho}{\varDelta}$ oder zunächſt größer als dieſer Bruch iſt, ſo iſt

$$m\varDelta \overline{\overline{>}} \varrho .$$

Nach dem Obigen iſt aber ϱ größer als der poſitive Werth jeder reellen Wurzel. Folglich iſt auch $m\varDelta$ größer als der poſitive Werth jeder reellen Wurzel, und es liegen folglich alle reelle Wurzeln offenbar zwiſchen $-m\varDelta$ und $+m\varDelta$. Da ferner $\varDelta$ kleiner als der poſitive Werth der Differenz zwiſchen jeden zwei reellen Wurzeln iſt, ſo iſt klar, daß zwiſchen jeden zwei Gliedern der Reihe

$$-m\varDelta,\ -(m-1)\varDelta, \ldots -3\varDelta,\ -2\varDelta,\ -\varDelta,\ 0,\ \varDelta,\ 2\varDelta,\ 3\varDelta, \ldots$$
$$\ldots (m-1)\varDelta,\ m\varDelta$$

höchſtens e i n e reelle Wurzel unſerer Gleichung liegen kann.

Nun wollen wir annehmen, daß $\varDelta'$ und $\varDelta''$ überhaupt zwei auf einander folgende Glieder der obigen Reihe ſeyen, zwiſchen denen die reelle Wurzel α der gegebenen Gleichung

$$f(x) = 0$$

liegt. Die übrigen reellen Wurzeln dieſer Gleichung ſeyen β, γ, δ, ...; ſo iſt, wenn wir das Product aller imaginären einfachen Factoren der Function $f(x)$ durch $\varphi(x)$ bezeichnen, und dabei zugleich bemerken, daß alle Wurzeln der gegebenen Gleichung als unter einander ungleich angenommen werden,

$$f(x) = \varphi(x) . (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \ldots .$$

Die Größe $\varphi(x)$ iſt bekanntlich immer von der Form

$$\varphi(x) = (x-p-q\sqrt{-1})(x-p+q\sqrt{-1})(x-p'-q'\sqrt{-1})(x-p'+q'\sqrt{-1}) \ldots .$$
$$= \{(x-p)^2 + q^2\}\{(x-p')^2 + q'^2\} \ldots .$$

und alſo ſtets eine poſitive Größe. Setzt man nun Δ' und Δ'' für x, ſo ergiebt ſich

$$f(\Delta') = \varphi(\Delta') . (\Delta'-\alpha)(\Delta'-\beta)(\Delta'-\gamma) \ldots . ,$$
$$f(\Delta'') = \varphi(\Delta'') . (\Delta''-\alpha)(\Delta''-\beta)(\Delta''-\gamma) \ldots . ,$$

wo alſo auch $\varphi(\Delta')$ und $\varphi(\Delta'')$ poſitive Größen ſind. Da α zwiſchen Δ' und Δ'' liegt, ſo haben die Differenzen

$$\Delta' - \alpha \text{ und } \Delta'' - \alpha$$

offenbar entgegengeſetzte Vorzeichen. Zwiſchen Δ' und Δ'' liegt aber nach dem Obigen bloß die eine reelle Wurzel α, und es liegt folglich keine der andern reellen Wurzeln β, γ, δ, ... zwiſchen Δ' und Δ'', woraus auf der Stelle folgt, daß je zwei neben einander ſtehende der Differenzen

$$\Delta' - \beta,\ \Delta'' - \beta\ ;$$
$$\Delta' - \gamma,\ \Delta'' - \gamma\ ;$$
$$\Delta' - \delta,\ \Delta'' - \delta\ ;$$
u. ſ. w. u. ſ. w.

gleiche Vorzeichen haben. Hieraus folgt, daß $f(\Delta')$ und $f(\Delta'')$ ungleiche Vorzeichen haben, woraus ſich folgender Satz ergiebt:

Wenn zwiſchen zwei beliebigen auf einander folgenden Gliedern Δ' und Δ'' der Reihe

$$-m\Delta,\ -(m-1)\Delta,\ \ldots\ -\Delta,\ 0,\ \Delta,\ \ldots,\ (m-1)\Delta,\ m\Delta$$

eine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ liegt; ſo haben die entſprechenden Werthe $f(\Delta')$ und $f(\Delta'')$ der Function $f(x)$ jederzeit entgegengeſetzte Vorzeichen.

Haben alſo $f(\Delta')$ und $f(\Delta'')$ gleiche Vorzeichen, ſo kann zwiſchen Δ' und Δ'' keine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung liegen.

Haben aber $f(\Delta')$ und $f(\Delta'')$ entgegengeſetzte Vorzeichen, ſo liegt nach dem in (9.) bewieſenen Satze zwiſchen Δ' und Δ'' jederzeit eine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung.

Aus allem Bisherigen ergiebt ſich nun in völliger Strenge der folgende Lehrſatz:

Die gegebene Gleichung

$$f(x) = 0$$

hat jederzeit gerade eben ſo viele reelle Wurzeln, wie die Reihe

$$f(-m\Delta), f(-(m-1)\Delta) \ldots f(-3\Delta), f(-2\Delta)\, f(-\Delta),$$
$$f(0), f(\Delta), f(2\Delta), f(3\Delta), \ldots f((m-1)\Delta), f(m\Delta)$$

Zeichenwechſel darbietet.

Hiernach kann man alſo immer die Anzahl der reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung ſicher beſtimmen, und zugleich ergiebt ſich auch aus dem Obigen unmittelbar, zwiſchen welchen Gränzen man die reellen Wurzeln zu ſuchen hat. Kaum verdient es wohl noch eine beſondere Erwähnung, daß, wenn ein Glied der vorhergehenden Reihe, z. B. überhaupt $f(\Delta')$, verſchwindet, Δ' ſelbſt eine Wurzel der gegebenen Gleichung iſt. Mehr über dieſen ſpeciellen Fall zu ſagen wird hier nicht nöthig ſeyn.

Nun kann man auch leicht alle reelle Wurzeln der gegebenen Gleichung mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit beſtimmen. Sind nämlich x_1 und $x_2 = x_1 + \Delta$ zwei auf einander folgende Glieder der Reihe

$$-m\Delta, -(m-1)\Delta, \ldots -2\Delta, -\Delta, 0, \Delta, 2\Delta, \ldots (m-1)\Delta, m\Delta,$$

für welche $f(x_1)$ und $f(x_2)$ entgegengeſetzte Vorzeichen haben; ſo liegt zwiſchen x_1 und x_2, wie wir wiſſen, eine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung, und der Unterſchied dieſer beiden Gränzen der Wurzel iſt jetzt $= \Delta$. Man ſetze nun

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = x_1 + \tfrac{1}{2}\Delta.$$

Haben jetzt $f(\xi)$ und $f(x_2)$ gleiche Vorzeichen, ſo haben $f(x_1)$ und $f(\xi)$ ungleiche Vorzeichen, und die in Rede ſtehende reelle Wurzel liegt alſo zwiſchen x_1 und ξ. Haben dagegen $f(\xi)$ und $f(x_2)$ ungleiche Vorzeichen, ſo liegt die geſuchte reelle Wurzel zwiſchen ξ und x_2. Hieraus ſieht man, daß ſich immer zwei Gränzen x_1 und ξ oder ξ und x_2 der geſuchten Wurzel angeben laſſen, deren Unterſchied nur $\frac{1}{2}\Delta$ beträgt, und daß man alſo, wenn man ganz daſſelbe Verfahren beliebig oft wiederholt, eine Reihe von Gränzen der geſuchten Wurzel angeben kann, deren Unterſchiede die geometriſche Progreſſion

$$\Delta, \tfrac{1}{2}\Delta, \tfrac{1}{4}\Delta, \tfrac{1}{8}\Delta, \tfrac{1}{16}\Delta, \ldots.$$

bilden, ſo daß man alſo offenbar die beiden Gränzen der geſuchten Wurzel einander beliebig nahe bringen, die Wurzel folglich mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit finden, und, wie leicht erhellet, auch in jedem Falle den Grad der erreichten Genauigkeit beſtimmt angeben kann.

Noch bemerken wir, daß man, wie aus dem Obigen ſich auf der Stelle ergiebt, ohne daß die obigen Schlüſſe die geringſte

Aenderung zu erleiden brauchen, für Δ auch jeden Werth ſetzen kann, welcher kleiner iſt, als der aus der Formel

$$\Delta = \frac{\mathfrak{N}}{(2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}} \text{ oder } \Delta = \frac{1}{(2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}$$

gezogene Werth von Δ, wobei man nie aus den Augen verlieren darf, daß die letztere Formel immer dem Falle entſpricht, wenn alle Coefficienten der gegebenen Gleichung ganze Zahlen ſind.

80. Wir wiſſen aus dem Vorhergehenden, daß es bei der Aufloſung der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ zunächſt vorzüglich darauf ankommt, eine Größe ϱ zu finden, welche größer als die poſitive Wurzel ξ der Gleichung

$$\xi^n = a_1 \xi^{n-1} + a_2 \xi^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\xi + a_n$$

iſt, und es ſind auch allgemeine Regeln gegeben worden, nach denen die Größe ϱ immer auf die verlangte Art beſtimmt werden kann. Die zweite der oben zur Beſtimmung von ϱ gegebenen Methoden iſt indeß noch einer Modification fähig, welche in manchen Fällen von Nutzen ſeyn kann. Sind nämlich

$$a_r \xi^{n-r} \text{ und } a_s \xi^{n-s}$$

das kleinſte und größte unter den Gliedern des Polynoms

$$a_1 \xi^{n-1} + a_2 \xi^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\xi + a_n\,,$$

welche nicht $= 0$ ſind, und bezeichnet k die Anzahl dieſer nicht verſchwindenden Glieder; ſo iſt offenbar ξ^n eine Mittelgröße zwiſchen

$$ka_r \xi^{n-r} \text{ und } ka_s \xi^{n-s}\,,$$

ſo daß nämlich, ohne Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\xi^n \overline{\gtrless} ka_r \xi^{n-r},\ \xi^n \overline{\lessgtr} ka_s \xi^{n-s}\,;$$

folglich auch, immer ohne Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander,

$$\xi^r \overline{\gtrless} ka_r,\ \xi^s \overline{\lessgtr} ka_s\,;$$

$$\xi \overline{\gtrless} (ka_r)^{\frac{1}{r}},\ \xi \overline{\lessgtr} (ka_s)^{\frac{1}{s}}$$

iſt. Alſo iſt ξ eine Mittelgröße zwiſchen

$$(ka_r)^{\frac{1}{r}} \text{ und } (ka_s)^{\frac{1}{s}}.$$

Dieſe Größen kommen aber unter den nicht verſchwindenden Gliedern der Reihe

$$ka_1,\ (ka_2)^{\frac{1}{2}},\ (ka_3)^{\frac{1}{3}},\ (ka_4)^{\frac{1}{4}},\ \ldots\ (ka_n)^{\frac{1}{n}}$$

offenbar vor. Alſo iſt, wobei der Artikel Mittel zu vergleichen, ξ auch eine Mittelgröße zwiſchen den nicht verſchwindenden Gliedern der Reihe

$$ka_1,\ (ka_2)^{\frac{1}{2}},\ (ka_3)^{\frac{1}{3}},\ (ka_4)^{\frac{1}{4}},\ \ldots\ (ka_n)^{\frac{1}{n}},$$

d. i. immer eine Mittelgröße zwiſchen dem kleinſten und größten nicht verſchwindenden Gliede dieſer Reihe.

81. Das Vorhergehende wollen wir nun auf die Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

anwenden. In dieſem Falle iſt

$$n = 3,\ \frac{n(n-1)}{2} = 3\,.$$

Ferner haben wir

$$\xi^3 = 2\xi + 5$$

und folglich

$$a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_3 = 5,\ k = 2\,,$$

wo k dieſelbe Bedeutung wie in (80.) hat. Nach (80.) iſt alſo ξ eine Mittelgröße zwiſchen

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2 \text{ und } 10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}\,.$$

Wir müſſen alſo $\varrho > \sqrt[3]{10}$ ſetzen. Sind a, b, c die drei Wurzeln unſerer Gleichung, ſo iſt nach (44.)

$$(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2 = 4.8 - 27.25 = -643\,.$$

Alſo iſt $\mathfrak{R}^2 = 643$, $\mathfrak{R} = \sqrt{643}$. Setzen wir nun, weil $\sqrt[3]{10}$ 2, 15.. iſt, $\varrho = 2, 2$; ſo iſt

$$\frac{\mathfrak{R}}{(2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}} = \frac{\sqrt{643}}{(4,4)^2} > \frac{25}{19} > 1\,.$$

Daher können wir nach (79.) $\Delta = 1$ ſetzen, und die ganze Zahl m, welche zunächſt größer als $\frac{\varrho}{\Delta}$ iſt, iſt alſo $= 3$. Folglich ſind nach (79.)

$$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

die Gränzen der ſämmtlichen reellen Wurzeln unſerer Gleichung. Führt man dieſe Gränzen für x in die Function

$$x^3 - 2x - 5$$

unſerer Gleichung ein, ſo erhält man

$$\begin{aligned}
-27 + 6 - 5 &= -26\\
-8 + 4 - 5 &= -9\\
-1 + 2 - 5 &= -4\\
0 + 0 - 5 &= -5\\
1 - 2 - 5 &= -6\\
8 - 4 - 5 &= -1\\
27 - 6 - 5 &= +16\,.
\end{aligned}$$

Da nun in der Reihe

$$-26,\ -9,\ -4,\ -5,\ -6,\ -1,\ +16$$

nur ein Zeichenwechſel vorkommt, ſo hat unſere Gleichung auch bloß eine reelle Wurzel zwiſchen den Gränzen 2 und 3. Dies ſtimmt ganz mit dem, was in (71. V.) und (74. II.) gefunden worden iſt, überein. Nur ſind die hier für die reelle Wurzel gefundenen Gränzen ſchon weit enger als die in (71. V.) angegebenen.

Um engere Gränzen für dieſe reelle Wurzel zu finden, müſſen wir nun das in (79.) gelehrte Verfahren anwenden. Setzen wir daher, die dortige Bezeichnung beibehaltend,

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3\,;$$

ſo iſt

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2,5\,.$$

Setzen wir dieſen Werth von ξ für x in die Function unſerer Gleichung, ſo wird dieſelbe

$$15,625 - 5,0 - 5 = +\ 5,625\,.$$

Da dieſe Größe poſitiv iſt, ſo liegt die reelle Wurzel unſerer Gleichung zwiſchen 2 und 2,5. Setzen wir alſo

$$x_1 = 2,\ x_2 = 2,5\,;$$

ſo wird

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2,25\,.$$

Setzt man dieſen Werth von ξ für x in die Function unſerer Gleichung; ſo wird dieſelbe

$$11,390625 - 4,50 - 5 = +\ 1,890625$$

d. i. wieder poſitiv. Folglich liegt die reelle Wurzel unſerer Gleichung zwiſchen 2 und 2,25. Setzen wir folglich

$$x_1 = 2,\ x_2 = 2,25\,;$$

ſo wird

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2,125\,.$$

Setzt man dieſen Werth von ξ für x in die Function unſerer Gleichung; ſo wird dieſelbe, wenn wir alle Decimalbrüche bei der ſechſten Decimalſtelle abbrechen,

$$9,595703 - 4,250 - 5 = +\ 0,345703$$

d. i. wieder poſitiv. Alſo liegt die reelle Wurzel unſerer Gleichung zwiſchen 2 und 2,125. Setzen wir alſo wieder

$$x_1 = 2,\ x_2 = 2,125\,;$$

ſo wird

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2,0625\,.$$

Führt man dieſen Werth von ξ für x in die Function der Gleichung ein, ſo wird dieſelbe

$$8,773682 - 4,1250 - 5 = - 0,351318$$

d. i. negativ. Folglich liegt die geſuchte reelle Wurzel zwiſchen 2,0625 und 2,125. Setzen wir alſo

$$x_1 = 2,0625,\ x_2 = 2,125\ ;$$

ſo wird

$$\xi = \frac{x_2 + x_2}{2} = 2,09375\ .$$

Führt man dieſen Werth von ξ wieder für x in die Function der Gleichung ein, ſo erhält dieſelbe einen negativen Werth, und die reelle Wurzel der Gleichung liegt alſo zwiſchen 2,09375 und 2,125. Setzen wir folglich

$$x_1 = 2,09375,\ x_2 = 2,125\ ;$$

ſo iſt

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2,109375\ .$$

Führt man dieſe Größe für x in die Function der Gleichung ein, ſo erhält dieſelbe einen poſitiven Werth. Alſo liegt die geſuchte reelle Wurzel zwiſchen 2,09375 und 2,109375. Setzen wir folglich

$$x_1 = 2,09375,\ x_2 = 2,109375\ ;$$

ſo wird

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2,1015625\ .$$

Als die folgenden Gränzen der geſuchten reellen Wurzel findet man

$$x_1 = 2,09375,\ x_2 = 2,1015625\ .$$

Wie man auf dieſe Art weiter gehen kann, iſt klar. Die Differenzen der Gränzen der Wurzel ſind

1,
0,5
0,25
0,125
0,0625
0,03125
0,015625
0,0078125,

woraus man ſieht, daß die Gränzen, wie es ſeyn muß, ſich zwar immer mehr und mehr, in dieſem Falle aber doch nur langſam, nähern. Man muß die obige Rechnung noch ziemlich weit fortführen, wenn man die Wurzel bis zur ſiebenten, ſelbſt ſchon bis zur fünften, Decimalſtelle genau finden will. Die Beurtheilung der Vorzeichen der Werthe der Function der gegebenen Gleichung macht die obige Rechnung beſonders langweilig. Dieſelbe wird jedoch in dem vorliegenden Falle ſehr erleichtert und abgekürzt, wenn man möglichſt weit gehende Tafeln der Cubikzahlen zur Hand

hat. Die ſucceſſive Berechnung der Gränz- oder Näherungswerthe ſelbſt hat nicht die mindeſte Schwierigkeit. Daß man durch obiges Verfahren in allen Fällen völlig ſicher und ohne alles Probiren zum Zwecke gelangt, iſt ein Hauptvorzug deſſelben vor allen ältern Methoden. Auch kann man mittelſt deſſelben immer mit völliger Beſtimmtheit über die Anzahl der reellen, folglich auch der imaginären, Wurzeln der gegebenen Gleichung urtheilen, welches ebenfalls ein ſehr weſentlicher Vorzug dieſes Verfahrens, das wir nun noch auf ein anderes Beiſpiel anwenden wollen, vor allen ältern Methoden iſt. Daß **Fouriers** ſchöne Methode daſſelbe, und meiſtens auf weit kürzerem Wege, leiſtet, verſteht ſich von ſelbſt.

82. Wir wollen nun auch noch die Gleichung

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

betrachten. Für dieſe Gleichung iſt

$$n = 3, \frac{n(n-1)}{2} = 3 .$$

Ferner iſt

$$\xi^3 = 7\xi + 7$$

und folglich

$$a_1 = 0, a_2 = 7, a_3 = 7, k = 2 .$$

Sind a, b, c die drei Wurzeln unſerer Gleichung, ſo iſt nach (44.)

$$(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2 = 4.343 - 27.49 = 49 .$$

Alſo iſt

$$\mathfrak{R}^2 = 49, \mathfrak{R} = 7 .$$

Nach (80.) iſt ξ eine Mittelgröße zwiſchen

$$14^{\frac{1}{2}} = \sqrt{14} \text{ und } 14^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{14} .$$

Alſo muß man ϱ größer als $\sqrt{14}$ nehmen. Setzen wir nun $\varrho = 4$, ſo iſt

$$\frac{\mathfrak{R}}{(2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}} = \frac{\mathfrak{R}}{(2\varrho)^2} = \frac{7}{64} .$$

Folglich muß man $\varDelta$ kleiner $\frac{7}{64}$ ſetzen. Der Leichtigkeit wegen wollen wir

$$\varDelta = \tfrac{1}{10} = 0{,}1$$

ſetzen. Dann iſt m = 40 und man muß alſo für x folgende Werthe ſetzen:

$$-4{,}0;\ -3{,}9;\ \ldots\ -0{,}2;\ -0{,}1;\ 0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ \ldots\ 3{,}9;\ 4{,}0 .$$

Dadurch erhält man folgende Reihe von Gleichungen:

x = — 4,0	— 64,000	+ 28,000	+ 7	= — 29,000
x = — 3,9	— 59,310	+ 27,300	+ 7	= — 25,019
x = — 3,8	— 54,972	+ 26,600	+ 7	= — 21,272
x = — 3,7	— 50,635	+ 25,900	+ 7	= — 17,753
x = — 3,6	— 46,656	+ 25,200	+ 7	= — 14,456
x = — 3,5	— 42,875	+ 24,500	+ 7	= — 11,375
x = — 3,4	— 39,304	+ 23,800	+ 7	= — 8,504
x = — 3,3	— 35,937	+ 23,100	+ 7	= — 5,837
x = — 3,2	— 32,768	+ 22,400	+ 7	= — 3,368
x = — 3,1	— 29,791	+ 21,700	+ 7	= — 1,091
x = — 3,0	— 27,000	+ 21,000	+ 7	= + 1,000
x = — 2,9	— 24,389	+ 20,300	+ 7	= + 2,911
x = — 2,8	— 21,952	+ 19,600	+ 7	= + 4,648
x = — 2,7	— 19,683	+ 18,900	+ 7	= + 6,217
x = — 2,6	— 17,576	+ 18,200	+ 7	= + 6,624
x = — 2,5	— 15,625	+ 17,500	+ 7	= + 8,875
x = — 2,4	— 13,824	+ 16,800	+ 7	= + 9,976
x = — 2,3	— 12,167	+ 16,100	+ 7	= + 10,933
x = — 2,2	— 10,648	+ 15,400	+ 7	= + 11,752
x = — 2,1	— 9,261	+ 14,700	+ 7	= + 12,439
x = — 2,0	— 8,000	+ 14,000	+ 7	= + 13,000
x = — 1,9	— 6,859	+ 13,300	+ 7	= + 13,441
x = — 1,8	— 5,832	+ 12,600	+ 7	= + 13,768
x = — 1,7	— 4,913	+ 11,900	+ 7	= + 13,987
x = — 1,6	— 4,096	+ 11,200	+ 7	= + 14,104
x = — 1,5	— 3,375	+ 10,500	+ 7	= + 14,125
x = — 1,4	— 2,744	+ 9,800	+ 7	= + 14,056
x = — 1,3	— 2,197	+ 9,100	+ 7	= + 13,902
x = — 1,2	— 1,728	+ 8,400	+ 7	= + 13,673
x = — 1,1	— 1,331	+ 7,700	+ 7	= + 13,369
x = — 1,0	— 1,000	+ 7,000	+ 7	= + 13,000
x = — 0,9	— 0,729	+ 6,300	+ 7	= + 12,571
x = — 0,8	— 0,512	+ 5,600	+ 7	= + 12,088
x = — 0,7	— 0,343	+ 4,900	+ 7	= + 11,557
x = — 0,6	— 0,216	+ 4,200	+ 7	= + 10,984
x = — 0,5	— 0,125	+ 3,500	+ 7	= + 10,375
x = — 0,4	— 0,064	+ 2,800	+ 7	= + 9,736
x = — 0,3	— 0,027	+ 2,100	+ 7	= + 9,073
x = — 0,2	— 0,008	+ 1,400	+ 7	= + 8,392
x = — 0,1	— 0,001	+ 0,700	+ 7	= + 7,699
x = ∓ 0,0	∓ 0,000	± 0,000	+ 7	= + 7,000
x = + 0,1	+ 0,001	— 0,700	+ 7	= + 6,301
x = + 0,2	+ 0,008	— 1,400	+ 7	= + 5,608
x = + 0,3	+ 0,027	— 2,100	+ 7	= + 4,927
x = + 0,4	+ 0,064	— 2,800	+ 7	= + 4,264
x = + 0,5	+ 0,125	— 3,500	+ 7	= + 3,625
x = + 0,6	+ 0,216	— 4,200	+ 7	= + 3,016
x = + 0,7	+ 0,343	— 4,900	+ 7	= + 2,443
x = + 0,8	+ 0,512	— 5,600	+ 7	= + 1,912
x = + 0,9	+ 0,729	— 6,300	+ 7	= + 1,429
x = + 1,0	+ 1,000	— 7,000	+ 7	= + 1,000
x = + 1,1	+ 1,331	— 7,700	+ 7	= + 0,631
x = + 1,2	+ 1,728	— 8,400	+ 7	= + 0,328
x = + 1,3	+ 2,197	— 9,100	+ 7	= + 0,097
x = + 1,4	+ 2,744	— 9,800	+ 7	= — 0,056
x = + 1,5	+ 3,375	— 10,500	+ 7	= — 0,125
x = + 1,6	+ 4,096	— 11,200	+ 7	= — 0,104
x = + 1,7	+ 4,913	— 11,900	+ 7	= + 0,013
x = + 1,8	+ 5,832	— 12,600	+ 7	= + 0,232

$x = +1,9$	$+6,859$	$-13,300$	$+7$	$= +0,559$
$x = +2,0$	$+8,000$	$-14,000$	$+7$	$= +1,000$
$x = +2,1$	$+9,261$	$-14,700$	$+7$	$= +1,561$
$x = +2,2$	$+10,648$	$-15,400$	$+7$	$= +2,248$
$x = +2,3$	$+12,167$	$-16,100$	$+7$	$= +3,067$
$x = +2,4$	$+13,824$	$-16,800$	$+7$	$= +4,024$
$x = +2,5$	$+15,625$	$-17,500$	$+7$	$= +5,125$
$x = +2,6$	$+17,576$	$-18,200$	$+7$	$= +6,376$
$x = +2,7$	$+19,683$	$-18,900$	$+7$	$= +7,783$
$x = +2,8$	$+21,952$	$-19,600$	$+7$	$= +9,352$
$x = +2,9$	$+24,389$	$-20,300$	$+7$	$= +11,089$
$x = +3,0$	$+27,000$	$-21,000$	$+7$	$= +13,000$
$x = +3,1$	$+29,791$	$-21,700$	$+7$	$= +15,091$
$x = +3,2$	$+32,768$	$-22,400$	$+7$	$= +17,368$
$x = +3,3$	$+35,937$	$-23,100$	$+7$	$= +19,837$
$x = +3,4$	$+39,304$	$-23,800$	$+7$	$= +22,504$
$x = +3,5$	$+42,875$	$-24,500$	$+7$	$= +25,375$
$x = +3,6$	$+46,656$	$-25,200$	$+7$	$= +28,456$
$x = +3,7$	$+50,635$	$-25,900$	$+7$	$= +31,753$
$x = +3,8$	$+54,872$	$-26,600$	$+7$	$= +35,272$
$x = +3,9$	$+59,319$	$-27,300$	$+7$	$= +39,019$
$x = +4,0$	$+64,000$	$-28,000$	$+7$	$= +43,000$.

Aus dieſer Rechnung, welche einiges Ueberflüſſige enthält, hier aber abſichtlich vollſtändig mitgetheilt worden iſt, erhellet, daß unſere Gleichung drei reelle Wurzeln hat, welche zwiſchen folgenden Gränzen liegen, wobei die Vorzeichen der entſprechenden Werthe der Function der Gleichung, in Parentheſen eingeſchloſſen, beigefügt worden ſind:

$$x_1 = -3,1(-);\quad x_1 = +1,3(+);\quad x_1 = +1,6(-);$$
$$x_2 = -3,0(+);\quad x_2 = +1,4(-);\quad x_2 = +1,7(+).$$

Mit dem in (74. I.) Gefundenen ſtimmt dies völlig überein; nur ſind die hier gefundenen Gränzen der drei reellen Wurzeln ſchon weit enger wie die a. a. O. angegebenen Gränzen, indem durch das Obige die drei reellen Wurzeln offenbar ſchon bis auf 0,1 genau gefunden ſind; der Fehler kann noch nicht 0,1 betragen, wenn man die Wurzeln einer ihrer Gränzen gleich ſetzt. Nach (26.) muß die Summe der drei Wurzeln im vorliegenden Falle = 0 ſeyn. Die Summen der Gränzen ſind

$$-3,1 + 1,3 + 1,6 = -0,2;$$
$$-3,0 + 1,4 + 1,7 = +0,1.$$

Durch eine andere Verbindung der Gränzen ergiebt ſich:

$$-3,1 + 1,4 + 1,7 = 0;$$
$$-3,0 + 1,3 + 1,6 = -0,1.$$

Wollte man alſo die Näherung nicht weiter treiben, ſo könnte man $-3,1$; $1,4$; $1,7$ als Wurzeln der Gleichung annehmen.

Wollte man die Näherung weiter treiben, ſo hätte man:

$$\begin{array}{lll} x_1 = -3,1(-) & x_1 = +1,3(+) & x_1 = +1,6(-) \\ x_2 = \underline{-3,0(+)} & x_2 = \underline{+1,4(-)} & x_2 = \underline{+1,7(+)} \\ x_1 + x_2 = -6,1 & x_1 + x_2 = +2,7 & x_1 + x_2 = +3,3 \\ \xi = -3,05, & \xi = +1,35, & \xi = +1,65\,. \end{array}$$

Setzt man die gefundenen drei Werthe von ξ für x in die gegebene Gleichung, ſo iſt der entſprechende Werth ihrer Function reſpective —, +, —. Alſo ſind die folgenden einander nähern Gränzen der drei Wurzeln:

$$x_1 = -3{,}05(-) \quad x_1 = +1{,}35(+) \quad x_1 = +1{,}65(-)$$
$$x_2 = -3{,}00(+) \quad x_2 = +1{,}40(-) \quad x_2 = +1{,}70(+)$$

$$x_1 + x_2 = -6{,}05 \quad x_1 + x_2 = +2{,}75 \quad x_1 + x_2 = +3{,}35$$
$$\xi = -3{,}025, \quad \xi = +1{,}375, \quad \xi = +1{,}675.$$

Die dieſen Werthen von ξ entſprechenden Vorzeichen der Function der Gleichung ſind reſpective +, —, +. Alſo ſind

$$x_1 = -3{,}050(-),\ x_1 = +1{,}350(+),\ x_1 = +1{,}650(-);$$
$$x_2 = -3{,}025(+),\ x_2 = +1{,}375(-),\ x_2 = +1{,}675(+)$$

die folgenden Gränzwerthe der drei Wurzeln. Wie man auf dieſe Art weiter gehen kann, liegt deutlich vor Augen. Die Rechnung wird aber vorzüglich wegen der immer wiederkehrenden Beurtheilung, ob die den gefundenen Werthen von ξ entſprechenden Werthe der Function der Gleichung poſitiv oder negativ ſind, ſehr beſchwerlich, und die Gränzen der Wurzeln nähern ſich einander nur langſam, weil die Unterſchiede der Gränzen die nur langſam abnehmende Reihe Δ, $\frac{1}{2}\Delta$, $\frac{1}{4}\Delta$, $\frac{1}{8}\Delta$, ... bilden. Wir wollen daher jetzt zu Fouriers trefflicher Annäherungsmethode, welche ſich vorzüglich auf die in (67.) und (68.) ſchon bewieſenen wichtigen und merkwürdigen Lehrſätze gründet, übergehen.

F. Annähernde Berechnung der reellen Wurzeln der Gleichungen.

83. Fouriers Methode zur annähernden Berechnung der reellen Wurzeln der numeriſchen Gleichungen iſt im Weſentlichen mit der längſt bekannten Newton'ſchen Annäherungsmethode einerlei; indeß hat Fourier dieſelbe in theoretiſcher und practiſcher Rückſicht ſo ſehr vervollkommnet, daß man ſie jetzt ganz als ſein Eigenthum betrachten muß. Soll dieſe Methode mit Sicherheit angewandt werden, ſo ſetzt ſie einige Bedingungen als erfüllt voraus, über die wir daher jetzt gleich das Nöthige beibringen wollen.

I. Man muß zwei Gränzen **a, b** oder ein Intervall **ab** kennen, für welches das letzte Glied der entſprechenden Indexreihe die Einheit iſt, ſo daß alſo zwiſchen dieſen Gränzen nur eine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung liegt. Daß ſich dieſer Bedingung für alle die reellen Wurzeln, welche die gegebene Gleichung nur ein Mal enthält, immer genügen läßt, iſt im Vorhergehenden ausführlich gezeigt worden. Die mehr als ein Mal vorkommenden reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ erhält man durch Aufſuchung der reellen Wurzeln der Glei-

chung $\psi(x) = 0$, wo $\psi(x)$, wie ſchon früher, den größten gemeinſchaftlichen Diviſor von $f(x)$ und $f'(x)$ bezeichnet, und zu bemerken iſt, daß die Gleichung $\psi(x) = 0$ jederzeit von einem niedrigern Grade wie die gegebene Gleichung iſt. Enthält auch die Gleichung $\psi(x) = 0$ noch gleiche Wurzeln, ſo kann man von derſelben offenbar auf ähnliche Weiſe wieder zu einer Gleichung eines niedrigern Grades übergehen, und wird ſo augenſcheinlich nach und nach alle in der gegebenen Gleichung mehr als ein Mal vorkommende reelle Wurzeln beſtimmen, auch leicht über die Anzahl, in welcher jede derſelben in der gegebenen Gleichung enthalten iſt, entſcheiden können, wenn man nur im Beſitz einer Methode zur Beſtimmung der in einer Gleichung nur ein Mal vorkommenden Wurzeln iſt. Wir wollen alſo annehmen, daß **ab** ein Intervall iſt, in welchem nur eine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung, welche wir im Folgenden immer durch α bezeichnen wollen, liegt, ſo daß alſo das letzte Glied der dem Intervall **ab** entſprechenden Indexreihe die Einheit iſt.

II. Wäre $f'(\alpha) = 0$, ſo hätte die gegebene Gleichung mehr als eine reelle Wurzel zwiſchen **a** und **b**, weil ſie dann mindeſtens zwei der reellen Größe α gleiche Wurzeln haben würde, welches ungereimt iſt, da nach der Vorausſetzung das letzte Glied der dem Intervall **ab** entſprechenden Indexreihe die Einheit iſt. Alſo iſt $f'(\alpha)$ nicht $= 0$, oder α iſt keine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$. Die beiden letzten Glieder der dem Intervall **ab** entſprechenden Indexreihe können nach (65.) bloß 01 oder 11 ſeyn. Im letztern Falle wird man aber, weil α keine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ iſt, durch Zertheilung des Intervalls **ab** immer ein engeres innerhalb **ab** liegendes Intervall **a'b'** erhalten können, für welches die beiden Glieder der entſprechenden Indexreihe 01 ſind, ſo daß nämlich in dem Intervall **a'b'** zwar die eine zwiſchen **a** und **b** liegende reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, aber nicht die eine zwiſchen **a** und **b** liegende reelle Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ liegt. Im Folgenden wollen wir daher immer vorausſetzen, daß die Gränzen **a**, **b** der Wurzel α der gegebenen Gleichung ſchon ſo weit zuſammengezogen ſind, daß die beiden letzten Glieder der dem Intervall **ab** entſprechenden Indexreihe 01 ſind, wozu wir nach dem Vorhergehenden berechtigt ſind.

III. Unter dieſer Vorausſetzung können nach (65.) die dem letzten Gliede der dem Intervall **ab** entſprechenden Indexreihe bloß 001 oder 101 ſeyn. Im letztern Falle kann man aber offenbar, wenn nur $f''(\alpha)$ nicht $= 0$ iſt, durch Zertheilung des Intervalls **ab** immer ein engeres innerhalb **ab** liegendes Intervall **a'b'** erhalten, für welches die drei letzten Glieder der entſprechenden Indexreihe 001 ſind. Wäre $f''(\alpha) = 0$, ſo würden die Gleichungen $f(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ zwiſchen **a** und **b** die gemeinſchaftliche reelle Wurzel α haben. Ob dies der Fall ſeyn kann, wird dadurch entſchieden, daß man den größten gemein-

ſchaftlichen Diviſor $\psi_1(x)$ von $f(x)$ und $f''(x)$ ſucht, und dann unterſucht, ob die Gleichung $\psi_1(x) = 0$, welche jederzeit von einem niedrigern Grade wie die gegebene Gleichung ſeyn wird, zwiſchen den Gränzen a und b eine reelle Wurzel hat, und, wenn eine ſolche Wurzel exiſtirt, dieſelbe zugleich nach den Methoden, die wir kennen lernen werden, beſtimmt, wobei man nie aus den Augen verlieren darf, daß die Gleichung $\psi_1(x) = 0$ jederzeit von einem niedrigern Grade wie die gegebene Gleichung iſt, und daß man von der Gleichung $\psi_1(x) = 0$, wenn es nöthig ſeyn ſollte, auf ähnliche Weiſe zu einer Gleichung eines noch niedrigern Grades übergehen, alſo offenbar immer zu einer Beſtimmung der reellen Wurzel α gelangen kann. Wir ſind daher berechtigt, im Folgenden immer vorauszuſetzen, daß die drei letzten Glieder der dem Intervall ab entſprechenden Indexreihe 001 ſind.

IV. Iſt dieſe Bedingung erfüllt, ſo können nach (65.) die vier letzten Glieder der dem Intervall ab entſprechenden Indexreihe bloß 0001 oder 1001 ſeyn. Im letztern Falle wird man aber wieder, wenn $f'''(\alpha)$ nicht $= 0$ iſt, durch Zertheilung des Intervalls ab ein innerhalb deſſelben liegendes Intervall $a'b'$ erhalten können, für welches die vier letzten Glieder der entſprechenden Indexreihe 0001 ſind, ſo daß wir alſo, da aus dem Vorhergehenden zugleich erhellet, wie man ſich zu verhalten hat, wenn $f'''(\alpha) = 0$ iſt, im Folgenden, wenn dies nöthig ſeyn ſollte, auch vorausſetzen können, daß die Gränzen a, b der Wurzel α ſchon ſo weit zuſammengezogen ſind, daß die vier letzten Glieder der dem Intervall ab entſprechenden Indexreihe 0001 ſind.

84. Sind nun die drei letzten Glieder der dem Intervall ab entſprechenden Indexreihe 001, eine Vorausſetzung, die wir nach dem Vorhergehenden immer zu machen berechtigt ſind; ſo liefert das in (67.) bewieſene Theorem auf der Stelle ſich immer enger und enger zuſammenziehende Gränzen für die geſuchte Wurzel α, wobei wir aber bekanntlich zwei Fälle zu unterſcheiden haben.

I. Wenn nämlich

$$\begin{matrix}(a) = \ldots + + - \\ (b) = \ldots + + +\end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix}(a) = \ldots - - + \\ (b) = \ldots - - -\end{matrix}$$

iſt; ſo ſind, indem wir immer die untern Gränzen durch a, a′, a″, a‴, ..., die obern dagegen durch b, b′, b″, b‴, ..., bezeichnen, nach (67.)

$$a = a, \qquad b = b;$$

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)}, \quad b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)};$$

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(b')}, \quad b'' = b' - \frac{f(b')}{f'(b')};$$

$$a''' = a'' - \frac{f(a'')}{f'(b'')}, \quad b''' = b'' - \frac{f(b'')}{f'(b'')};$$

$$a^{IV} = a''' - \frac{f(a''')}{f'(b''')},\quad b^{IV} = b''' - \frac{f'(b''')}{f'(b''')};$$
u. ſ. w. u. ſ. w.

ſich immer mehr und mehr nähernde Gränzen der Wurzel α.

II. Iſt dagegen

$$\begin{matrix}(a) = \ldots + - + \\ (b) = \ldots + - -\end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix}(a) = \ldots - + - \\ (b) = \ldots - + +\end{matrix};$$

ſo ſind

$$a = a, \qquad b = b;$$
$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)},\quad b' = b - \frac{f(b)}{f'(a)};$$
$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(a')},\quad b'' = b' - \frac{f(b')}{f'(a')};$$
$$a''' = a'' - \frac{f(a'')}{f'(a'')},\quad b''' = b'' - \frac{f(b'')}{f'(a'')};$$
$$a^{IV} = a''' - \frac{f(a''')}{f'(a''')},\quad b^{IV} = b''' - \frac{f(b''')}{f'(a''')};$$
u. ſ. w. u. ſ. w.

ſich immer mehr und mehr nähernde Gränzen der Wurzel α.

Betrachtet man eine von zwei zuſammen gehörenden Gränzen als einen Näherungswerth der geſuchten Wurzel, ſo iſt der Fehler, welchen man begeht, jederzeit kleiner wie die Differenz, welche man erhält, wenn man die untere Gränze von der obern abzieht.

85. Die vorhergehende Näherungsmethode läßt ſich aber, wie wir nun zeigen wollen, noch bedeutend vervollkommnen.

I. Dabei ſetzen wir voraus, daß die Gränzen a, b der Wurzel α einander ſchon ſo nahe gebracht ſind, daß die vier letzten Glieder der dem Intervall ab entſprechenden Indexreihe 0001 ſind, eine Vorausſetzung, zu welcher wir nach dem Vorhergehenden berechtigt ſind.

II. Iſt nun

$$\begin{matrix}(a) = \ldots + + - \\ (b) = \ldots + + +\end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix}(a) = \ldots - - + \\ (b) = \ldots - - -\end{matrix};$$

ſo berechnen wir bloß die obern Gränzen

$$b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)},\quad b'' = b' - \frac{f(b')}{f'(b')},\quad b''' = b'' - \frac{f(b'')}{f'(b'')},\ \ldots$$

der geſuchten Wurzel α.

Iſt dagegen

$$\begin{matrix}(a) = \ldots + - + \\ (b) = \ldots + - -\end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix}(a) = \ldots - + - \\ (b) = \ldots - + +\end{matrix};$$

ſo berechnen wir bloß die untern Gränzen

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)},\ a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(a')},\ a''' = a'' - \frac{f(a'')}{f'(a'')},\ \ldots.$$

Faſſen wir dies zuſammen, ſo finden wir, daß wir, wenn wir auf dieſe Art bei der Gränzenberechnung verfahren, jederzeit von derjenigen der beiden primitiven Gränzen a, b ausgehen müſſen, für welche die entſprechenden Werthe von $f(x)$ und $f''(x)$ gleiche Vorzeichen haben. Wird nun dieſe primitive Gränze überhaupt durch γ repräſentirt, ſo daß alſo $f(\gamma)$ und $f''(\gamma)$ gleiche Vorzeichen haben; ſo kann die Gränzenberechnung in allen Fällen nach folgenden Formeln geführt werden:

$$\gamma' = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)},\ \gamma'' = \gamma' - \frac{f(\gamma')}{f'(\gamma')},\ \gamma''' = \gamma'' - \frac{f(\gamma'')}{f'(\gamma'')},\ \ldots.$$

und die erhaltenen Gränzen ſind ſämmtlich untere oder obere Gränzen der geſuchten Wurzel, je nachdem man bei der Rechnung reſpective von der untern oder obern primitiven Gränze ausging.

III. Durch die Berechnung nur einer Gränzenreihe wird allerdings die Rechnung ſehr erleichtert; nur bedarf es dann aber einer beſondern Methode zur ſichern Beurtheilung des Grades der erreichten Genauigkeit oder des Fehlers, welchen man begeht, wenn man eine der berechneten Gränzen als einen Näherungswerth der geſuchten Wurzel betrachtet. Eine ſolche Methode ergiebt ſich aus dem in (68.) bewieſenen Satze, deſſen Anwendung geſtattet iſt, weil wir angenommen haben, daß die vier letzten Glieder der dem primitiven Intervall entſprechenden Indexreihe 0001 ſeyn ſollen, eine Vorausſetzung, welche bekanntlich dem in Rede ſtehenden Satze zum Grunde liegt. Sey nämlich wie a. a. O. $b - a = i$, und **A** bezeichne, ohne Rückſicht auf die Vorzeichen, die kleinere der beiden Größen $f'(a)$ und $f'(b)$, **B** dagegen die größere der beiden Größen $f''(a)$ und $f''(b)$. Iſt nun

$$i \leqq \left(\tfrac{1}{10}\right)^m,\ \frac{B}{2A} \leqq \left(\tfrac{1}{10}\right)^k,$$

wo m und k gewiſſe poſitive oder negative ganze Zahlen bezeichnen, die ſich immer aus den bekannten Werthen von $i = b - a$ und A, B leicht beſtimmen laſſen; ſo ſind nach dem in (68.) bewieſenen Satze die Fehler, welche man begeht, wenn man die Gränzwerthe

$$\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma''', \gamma^{IV}, \gamma^{V}, \ldots..$$

als Näherungswerthe der geſuchten Wurzel α betrachtet, vom zweiten Gliede dieſer Reihe an, jederzeit kleiner als die entſprechenden Glieder der Reihe

$$\left(\tfrac{1}{10}\right)^m, \left(\tfrac{1}{10}\right)^{2m+k}, \left(\tfrac{1}{10}\right)^{4m+3k}, \left(\tfrac{1}{10}\right)^{8m+7k}, \left(\tfrac{1}{10}\right)^{16m+15k}, \ldots..$$

Der Fehler, welchen man begeht, wenn man γ als einen Näherungswerth der geſuchten Wurzel betrachtet, iſt wenigſtens nicht größer als das erſte Glied der vorſtehenden Reihe. Auf dieſe Weiſe kann man alſo die Größe der in Rede ſtehenden Fehler beurtheilen, ſieht aber zugleich, daß obige Methode nur dann

den Namen einer Annäherungsmethode verdient, wenn die Größen

$$(\tfrac{1}{10})^{m},\ (\tfrac{1}{10})^{2m+k},\ (\tfrac{1}{10})^{4m+3k},\ (\tfrac{1}{10})^{8m+7k},\ (\tfrac{1}{10})^{16m+15k},\ \ldots\ldots$$

eine abnehmende, d. i. die Größen

$$m,\ 2m+k,\ 4m+3k,\ 8m+7k,\ 16m+15k,\ \ldots\ldots$$

eine wachſende Reihe bilden. Dieſe Bedingung iſt jederzeit erfüllt, wenn $2m+k>m$ iſt, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann. Iſt nämlich $2m+k>m$, ſo iſt $m+k>0$, d. i. $m+k$ eine poſitive Größe, die nicht $=0$ iſt. Da nun

$$\begin{aligned} m &= m \\ 2m+k &= m + (m+k), \\ 4m+3k &= 2m+k + 2(m+k), \\ 8m+7k &= 4m+3k + 4(m+k), \\ 16m+15k &= 8m+7k + 8(m+k), \\ 32m+31k &= 16m+15k + 16(m+k), \\ &\text{u. ſ. w.} \end{aligned}$$

iſt; ſo iſt klar, daß die Reihe

$$m,\ 2m+k,\ 4m+3k,\ 8m+7k,\ 16m+15k,\ \ldots\ldots$$

eine wachſende Reihe iſt, wenn $2m+k>m$ oder $m+k>0$ iſt. Iſt aber $m \geqq 1-k$, ſo iſt $m+k \geqq 1$, d. i. $m+k>0$, woraus man alſo ſieht, daß, bevor man die obige Näherungsmethode anwendet, die primitiven Gränzen a, b der geſuchten Wurzel durch Zertheilung des Intervalls ab in engere Intervalle jederzeit ſo weit zuſammengezogen werden müſſen, daß $m \geqq 1-k$ iſt. Nur erſt, wenn dieſe Bedingung erfüllt iſt, kann man die eigentliche Näherungsrechnung nach den obigen Vorſchriften beginnen, und iſt dann verſichert, daß die berechneten Näherungswerthe

$$\gamma,\ \gamma',\ \gamma'',\ \gamma''',\ \gamma^{IV},\ \gamma^{V},\ \ldots\ldots$$

reſpective bis zu Decimaleinheiten von der Ordnung

$$m,\ 2m+k,\ 4m+3k,\ 8m+7k,\ 16m+15k,\ 32m+31k,\ \ldots\ldots$$

genau ſind, ſo daß man nämlich, wenn, jenachdem z. B. der Näherungswerth γ^{IV} kleiner oder größer als die geſuchte Wurzel iſt, zu dieſem Näherungswerthe eine Decimaleinheit der $(16m+15k)$ten Ordnung addirt oder davon ſubtrahirt wird, eine Größe erhält, welche reſpective größer oder kleiner als die geſuchte Wurzel iſt, wodurch ſich dann alſo auch wieder zwei Gränzen ergeben, zwiſchen denen die geſuchte Wurzel liegt.

IV. Hierbei ſind nun aber noch einige ſehr wichtige Bemerkungen zu machen, wobei wir annehmen wollen, daß γ ein ganz beliebiger der nach dem Obigen berechneten Näherungswerthe der geſuchten Wurzel, d. h. ein ganz beliebiges Glied der Reihe γ, γ', γ'', γ''', ..., und γ' der auf γ folgende aus der Formel

$$\gamma' = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}$$

berechnete Näherungswerth ſey. Auch ſey γ wie vorher bis auf Decimaleinheiten der mten, γ' bis auf Decimaleinheiten der (2m + k)ten Ordnung richtig. Dies und alles Vorhergehende gilt bloß unter der Vorausſetzung, daß der Quotient

$$\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}$$

in völliger Schärfe berechnet iſt, eine Bedingung, der ſich nur ſelten, wenn man nämlich, wie hier immer, dieſen Quotienten in Form eines Decimalbruchs darſtellt, genügen laſſen wird, indem man faſt immer bei einer größern oder geringern Anzahl von Decimalziffern wird ſtehen bleiben müſſen, ſo daß wir alſo jetzt noch zu zeigen haben, wie man ſich bei der Berechnung des in Rede ſtehenden Quotienten zu verhalten hat, um γ' bis auf Decimaleinheiten der (2m + k)ten Ordnung richtig zu bekommen. Um dies recht deutlich zu zeigen, betrachten wir jeden möglichen Fall beſonders.

1. Sey $\gamma < \alpha$, ſo iſt $\gamma' > \gamma$, aber auch $\gamma' < \alpha$, wie wir aus dem Vorhergehenden wiſſen. Da

$$\gamma' = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}$$

und $\gamma' > \gamma$ iſt, ſo iſt

$$-\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}$$

eine poſitive Größe. Bezeichnen wir nun den decadiſchen Zahlenausdruck, welchen man erhält, wenn man vorſtehenden Quotienten bis auf Decimaleinheiten der (2m + k)ten Ordnung entwickelt und die letzte beibehaltene Ziffer um eine Einheit erhöhet, durch Γ; ſo iſt

$$-\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} = \Gamma - \varDelta$$

und bekanntlich

$$\varDelta \overline{\overline{<}} (\tfrac{1}{10})^{2m+k}.$$

Ferner iſt

$$\gamma' = \gamma + \Gamma - \varDelta,$$

alſo

$$\alpha - \gamma' = \alpha - (\gamma + \Gamma) + \varDelta.$$

Nach dem Obigen iſt aber

$$\alpha - \gamma' < (\tfrac{1}{10})^{2m+k};$$

alſo iſt auch

$$\alpha - (\gamma + \Gamma) + \varDelta < (\tfrac{1}{10})^{2m+k},$$

$$\alpha - (\gamma + \Gamma) < (\tfrac{1}{10})^{2m+k} - \varDelta,$$

wo immer, beſonders auch des Folgenden wegen, feſtzuhalten iſt, daß $\varDelta$ eine poſitive Größe iſt. Iſt nun zuerſt

$$\gamma + \Gamma \leqq \alpha ,$$

alſo $\alpha - (\gamma + \Gamma)$ eine poſitive Größe, ſo muß natürlich

$$(\tfrac{1}{10})^{2m+k} - \Delta$$

eine poſitive Größe ſeyn, die nicht $= 0$ iſt, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, $\alpha - (\gamma + \Gamma)$ offenbar eine negative Größe ſeyn würde. Weil nun Δ poſitiv iſt, ſo iſt

$$(\tfrac{1}{10})^{2m+k} - \Delta < (\tfrac{1}{10})^{2m+k} ,$$

und folglich auch

$$\alpha - (\gamma + \Gamma) < (\tfrac{1}{10})^{2m+k} .$$

Iſt ferner

$$\gamma + \Gamma > \alpha ,$$

ſo iſt

$$(\gamma + \Gamma) - \alpha = \gamma' + \Delta - \alpha = \Delta - (\alpha - \gamma') .$$

Da nun $(\gamma + \Gamma) - \alpha$ eine poſitive Größe iſt, die nicht $= 0$ iſt; ſo iſt auch $\Delta - (\alpha - \gamma')$ eine poſitive Größe und nicht $= 0$. Weil aber $\gamma' < \alpha$ iſt, ſo iſt $\alpha - \gamma'$ eine poſitive Größe, und folglich

$$\Delta - (\alpha - \gamma') < \Delta ,$$

d. i.

$$\Delta - (\alpha - \gamma') < (\tfrac{1}{10})^{2m+k} ;$$

folglich auch

$$(\gamma + \Gamma) - \alpha < (\tfrac{1}{10})^{2m+k} .$$

Hieraus ſieht man alſo, daß $\gamma + \Gamma$ jederzeit ein bis auf Decimaleinheiten der $(2m + k)$ten Ordnung richtiger Näherungswerth der geſuchten Wurzel α iſt. Die Größe Γ wird, was wohl zu merken iſt, erhalten, wenn man den Bruch

$$-\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}$$

bis auf Decimaleinheiten der $(2m + k)$ten Ordnung entwickelt und die letzte beibehaltene Ziffer um *eine* Einheit erhöhet. Zu bemerken iſt aber auch, daß ſich nicht im Allgemeinen entſcheiden läßt, ob $\gamma + \Gamma$ kleiner oder größer als die geſuchte Wurzel, d. h. eine untere oder eine obere Gränze derſelben iſt.

2. Wenn $\gamma > \alpha$ iſt, ſo iſt $\gamma' < \gamma$, aber auch $\gamma' > \alpha$, wie aus dem Vorhergehenden bekannt iſt. Da

$$\gamma' = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}$$

und $\gamma' < \gamma$ iſt, ſo iſt

$$\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}$$

eine poſitive Größe. Bezeichnen wir nun wieder den decadiſchen Zahlenausdruck, welchen man erhält, wenn man vorſtehenden

Quotienten bis auf Decimaleinheiten der (2m + k)ten Ordnung entwickelt, und die letzte beibehaltene Ziffer um eine Einheit erhöhet, durch Γ; ſo iſt

$$\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} = \Gamma - \Delta,$$

wo Δ poſitiv iſt. Auch iſt bekanntlich

$$\Delta \overline{\overline{<}} (\tfrac{1}{10})^{2m+k}.$$

Ferner iſt

$$\gamma' = \gamma - \Gamma + \Delta,$$

alſo

$$\gamma' - \alpha = (\gamma - \Gamma) - \alpha + \Delta.$$

Nach dem Obigen iſt aber

$$\gamma' - \alpha < (\tfrac{1}{10})^{2m+k};$$

alſo iſt auch

$$(\gamma - \Gamma) - \alpha + \Delta < (\tfrac{1}{10})^{2m+k},$$
$$(\gamma - \Gamma) - \alpha < (\tfrac{1}{10})^{2m+k} - \Delta.$$

Iſt nun zuerſt

$$\gamma - \Gamma \overline{\overline{>}} \alpha,$$

alſo $(\gamma - \Gamma) - \alpha$ eine poſitive Größe; ſo iſt natürlich

$$(\tfrac{1}{10})^{2m+k} - \Delta$$

eine poſitive Größe, die nicht $= 0$ iſt, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, $(\gamma - \Gamma) - \alpha$ offenbar eine negative Größe ſeyn würde. Weil nun Δ poſitiv iſt, ſo iſt

$$(\tfrac{1}{10})^{2m+k} - \Delta < (\tfrac{1}{10})^{2m+k},$$

und folglich auch

$$(\gamma - \Gamma) - \alpha < (\tfrac{1}{10})^{2m+k}.$$

Iſt ferner

$$\gamma - \Gamma < \alpha,$$

ſo iſt

$$\alpha - (\gamma - \Gamma) = \alpha - \gamma' + \Delta = \Delta - (\gamma' - \alpha),$$

d. i., weil $\gamma' > \alpha$, alſo $\gamma' - \alpha$ poſitiv iſt,

$$\Delta - (\gamma' - \alpha) < \Delta,$$

wobei auch noch zu bemerken iſt, daß $\Delta - (\gamma' - \alpha)$, ſo wie das ihm gleiche $\alpha - (\gamma - \Gamma)$, poſitiv iſt. Es iſt folglich auch

$$\alpha - (\gamma - \Gamma) < \Delta,$$

d. i., weil

$$\Delta \overline{\overline{<}} (\tfrac{1}{10})^{2m+k}$$

iſt,

$$\alpha - (\gamma - \Gamma) < (\tfrac{1}{10})^{2m+k}.$$

Man ſieht alſo, daß immer $\gamma - \Gamma$ ein bis auf Decimaleinheiten der (2m + k)ten Ordnung genauer Näherungswerth der geſuchten Wurzel α iſt, wobei es aber unentſchieden bleibt, ob $\gamma - \Gamma$ kleiner oder größer als die geſuchte Wurzel α, d. i. eine untere oder eine obere Gränze derſelben iſt, welches in jedem Falle beſonders entſchieden werden muß. Γ erhält man, wenn man den Quotienten

$$\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}$$

bis auf Decimaleinheiten der (2m + k)ten Ordnung berechnet, und die letzte beibehaltene Ziffer um eine Einheit erhöhet.

3. Mittelſt der ſo eben gegebenen Vorſchriften kann man alſo immer einen bis zu Decimaleinheiten der (2m + k)ten Ordnung richtigen Näherungswerth der geſuchten Wurzel, den wir überhaupt durch γ_1 bezeichnen wollen, finden, und es iſt bloß in jedem Falle noch beſonders zu beſtimmen, ob dieſer Näherungswerth kleiner oder größer als die geſuchte Wurzel iſt. Um dies zu entſcheiden, muß man $f(\gamma_1)$ berechnen, und das Zeichen von $f(\gamma_1)$ mit den Vorzeichen von $f(a)$ und $f(b)$, wo a und b die primitiven Gränzwerthe der Wurzel ſind, vergleichen. Hat nämlich $f(\gamma_1)$ mit $f(b)$ entgegengeſetztes, mit $f(a)$ alſo gleiches Vorzeichen, ſo iſt γ_1 ein unterer Gränzwerth, d. i. $\gamma_1 < \alpha$. Im entgegengeſetzten Falle, wo $f(\gamma_1)$ mit $f(a)$ entgegengeſetztes, mit $f(b)$ alſo gleiches Vorzeichen hat, iſt γ_1 ein oberer Gränzwerth, d. i. $\gamma_1 > \alpha$. Immer iſt aber γ_1 bis auf Decimaleinheiten der (2m + k)ten Ordnung genau. Iſt alſo zuerſt $\gamma_1 < \alpha$, ſo ſind

$$\gamma_1 \text{ und } \gamma_1 + (\tfrac{1}{10})^{2m+k};$$

iſt dagegen $\gamma_1 > \alpha$, ſo ſind

$$\gamma_1 - (\tfrac{1}{10})^{2m+k} \text{ und } \gamma_1$$

offenbar ein unterer und ein oberer Gränzwerth der geſuchten Wurzel.

$$\gamma_1 \pm (\tfrac{1}{10})^{2m+k},$$

wo das obere Zeichen dem Fall $\gamma_1 < \alpha$, das untere dem Fall $\gamma_1 > \alpha$ entſpricht, erhält man aber ſehr leicht, wenn man nur die letzte beibehaltene Decimalziffer von γ_1 reſpective um eine Einheit vermehrt oder vermindert, ſo daß man alſo, wenn man nur γ_1 hat, immer ſehr leicht eine untere und eine obere Gränze der geſuchten Wurzel erhalten kann. Dieſe beiden Gränzen betrachtet man nun wieder als zwei primitive Gränzen, und verfährt mit denſelben auch fernerhin ganz eben ſo wie mit den beiden primitiven Gränzen a und b, wodurch man alſo nach und nach zu immer engern und engern Gränzen der geſuchten Wurzel geführt wird, und dieſe Gränzen, wenn nur alle obigen Bedingungen erfüllt ſind, auch bis zu jedem beliebigen Grade zuſammenziehen, oder die geſuchte Wurzel mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit finden, auch immer den Grad der erreichten Genauig-

keit mit völliger Sicherheit und Beſtimmtheit angeben kann. Bevor wir nun das Vorhergehende an einem Beiſpiele erläutern, iſt, um die numeriſche Rechnung möglichſt zu erleichtern, noch Folgendes zu bemerken.

V. Wir wollen nämlich, bevor wir die Anwendung des Vorhergehenden an einem Beiſpiele zeigen, noch eine Methode angeben, nach welcher man, wenn überhaupt $y' = y + \varepsilon$ iſt, mit Leichtigkeit aus den Größen

$$f(y),\ f'(y),\ f''(y),\ f'''(y),\ \ldots f^{(n)}(y)$$

die Größen

$$f(y'),\ f'(y'),\ f''(y'),\ f'''(y'),\ \ldots f^{(n)}(y')$$

finden kann, wobei wir jedoch der Kürze wegen $n = 4$ ſetzen wollen. Zu dem Ende ſchreibe man die Größen

$$f(y),\ f'(y),\ f''(y),\ f'''(y),\ f^{IV}(y)$$

in eine Reihe, ſo kann man, wenn man alle Glieder dieſer Reihe vom zweiten an mit ε multiplicirt, auch leicht die folgende Reihe berechnen:

$$\varepsilon f'(y),\ \varepsilon f''(y),\ \varepsilon f'''(y),\ \varepsilon f^{IV}(y).$$

Multiplicirt man nun wieder alle Glieder dieſer Reihe vom zweiten an mit $\frac{1}{2}\varepsilon$, ſo ergiebt ſich

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 f''(y),\ \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 f'''(y),\ \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 f^{IV}(y).$$

Durch Multiplication aller Glieder dieſer Reihe vom zweiten an mit $\frac{1}{3}\varepsilon$ erhält man

$$\frac{1}{2.3}\varepsilon^3 f'''(y),\ \frac{1}{2.3}\varepsilon^3 f^{IV}(y),$$

und endlich ergiebt ſich, wenn man das zweite Glied dieſer Reihe mit $\frac{1}{4}\varepsilon$ multiplicirt, die Größe

$$\frac{1}{2.3.4}\varepsilon^4 f^{IV}(y).$$

Auf dieſe Weiſe erhält man alſo überhaupt folgende Reihen

$$f(y),\ f'(y),\ f''(y),\ f'''(y),\ f^{IV}(y);$$
$$\varepsilon f'(y),\ \varepsilon f''(y),\ \varepsilon f'''(y),\ \varepsilon f^{IV}(y);$$
$$\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 f''(y),\ \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 f'''(y),\ \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 f^{IV}(y);$$
$$\frac{1}{2.3}\varepsilon^3 f'''(y),\ \frac{1}{2.3}\varepsilon^3 f^{IV}(y);$$
$$\frac{1}{2.3.4}\varepsilon^4 f^{IV}(y);$$

und hieraus ergeben ſich, wenn man die ſämmtlichen erſten, zweiten, dritten, vierten Glieder zu einander addirt, nach (47.) offenbar die Größen

$$f(y+\varepsilon),\ f'(y+\varepsilon),\ f''(y+\varepsilon),\ f'''(y+\varepsilon),\ f^{IV}(y+\varepsilon),$$

d. i. die zu findenden Größen

$$f(y'),\ f'(y'),\ f''(y'),\ f'''(y'),\ f^{IV}(y'),$$

wobei man zu bemerken hat, daß im vorliegenden Falle $f^{IV}(x)$ eine conſtante Größe iſt, ſo daß man alſo ſtatt $f^{IV}(y)$ allerdings $f^{IV}(y+\varepsilon)$ oder $f^{IV}(y')$ ſetzen kann.

86. Das Vorhergehende wollen wir nun auf die Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

anwenden, welche, wie wir aus (71. V.) und (74. II.) wiſſen, nur eine reelle Wurzel, und zwar zwiſchen den Gränzen 1 und 10 hat. Für dieſe Gleichung iſt

$$f(x) = x^3 - 2x - 5$$
$$f'(x) = 3x^2 - 2$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f'''(x) = 6$$

und in (71. V.) fanden wir folgende Zeichenreihen

$$\begin{array}{l} (1) = + + + - \\ \quad\;\; 0\;\; 0\;\; 0\;\; 1 \\ (10) = + + + + , \end{array}$$

ſo daß alſo die erforderliche Bedingung, daß die vier letzten Glieder der dem Intervall zwiſchen 1 und 10 entſprechenden Inderreihe die Folge 0001 bilden, erfüllt iſt. Im vorliegenden Falle iſt nun

$$a = 1,\ b = 10;\ f'(a) = 1,\ f'(b) = 298;\ f''(a) = 6,\ f''(b) = 60\ ;$$
$$i = 9,\ A = 1,\ B = 60,\ \frac{B}{2A} = 30\ ;$$
$$i < (\tfrac{1}{10})^{-1},\ \frac{B}{2A} < (\tfrac{1}{10})^{-2},\ m = -1,\ k = -2\ ,$$
$$1 - k = 3,\ m < 1 - k$$

und es iſt folglich die Bedingung $m \overline{\overline{>}} 1 - k$ noch nicht erfüllt. Wir theilen deshalb das Intervall ferner, zunächſt durch 2, und erhalten:

$$\begin{array}{l} (1) = + + + - \\ \quad\;\; 0\;\; 0\;\; 0\;\; 0 \\ (2) = + + + - \\ \quad\;\; 0\;\; 0\;\; 0\;\; 1 \\ (10) = + + + + . \end{array}$$

Folglich iſt nun

$$a = 2,\ b = 10;\ f'(a) = 10,\ f'(b) = 298;\ f''(a) = 12,\ f''(b) = 60;$$
$$i = 8,\ A = 10,\ B = 60,\ \frac{B}{2A} = 3\ ;$$
$$i < (\tfrac{1}{10})^{-1},\ \frac{B}{2A} < (\tfrac{1}{10})^{-1},\ m = -1,\ k = -1\ ;$$
$$1 - k = 2,\ m < 1 - k$$

und daher die Bedingung $m \overline{\overline{>}} 1 - k$ noch nicht erfüllt. Des=

halb theilen wir das Intervall zwiſchen 2 und 10 ferner durch 3, und erhalten:

$$\begin{array}{l} (2) = + + + - \\ \quad\quad\; 0 \; 0 \; 0 \; 1 \\ (3) = + + + + \\ \quad\quad\; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \\ (10) = + + + + . \end{array}$$

Alſo iſt jetzt

$$a = 2,\ b = 3;\ f'(a) = 10,\ f'(b) = 25;\ f''(a) = 12,\ f''(b) = 18;$$

$$i = 1,\ A = 10,\ B = 18,\ \frac{B}{2A} = \frac{18}{20} = 0{,}9;$$

$$i = (\tfrac{1}{10})^0,\ \frac{B}{2A} < (\tfrac{1}{10})^0,\ m = 0,\ k = 0;$$

$$1 - k = 1,\ m < 1 - k$$

und folglich die Bedingung $m \geqq 1 - k$ noch nicht erfüllt, ſo daß wir alſo das Intervall zwiſchen 2 und 3 ferner theilen müſſen. Setzen wir nun zunächſt 2,1 für x, ſo erhalten wir

$$\begin{array}{l} (2 = + + + - \\ \quad\quad\; 0 \; 0 \; 0 \; 1 \\ (2{,}1) = + + + + \\ \quad\quad\; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \\ (3) = + + + + \end{array}$$

und es iſt folglich jetzt

$$a = 2,\ b = 2{,}1;\ f'(a) = 10,\ f'(b) = 11{,}23;\ f''(a) = 12,\ f''(b) = 12{,}6;$$

$$i = 0{,}1,\ A = 10,\ B = 12{,}6,\ \frac{B}{2A} = \frac{12{,}6}{20} = 0{,}63;$$

$$i = (\tfrac{1}{10})^1,\ \frac{B}{2A} < (\tfrac{1}{10})^0,\ m = 1,\ k = 0;$$

$$1 - k = 1,\ m = 1 - k,$$

ſo daß alſo nun die Bedingung $m \geqq 1 - k$ erfüllt iſt, und wir daher jetzt die eigentliche Näherungsrechnung beginnen können.

Es iſt nämlich

$$a = 2,\ b = 2{,}1.$$

Da $f(b)$ und $f''(b)$ gleiche Vorzeichen haben, ſo iſt

$$\gamma = 2{,}1$$

zu ſetzen, und dieſer Näherungswerth iſt, da $m = 1$ iſt, bis auf Decimaleinheiten der erſten Ordnung, d. i. bis auf Zehntheile, genau.

Da $2m + k = 2$ iſt, ſo entwickeln wir

$$\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} = \frac{0{,}061}{11{,}23}$$

bis auf Decimaleinheiten der zweiten Ordnung und vermehren die letzte Ziffer um *eine* Einheit. Dies giebt

$$\Gamma = 0{,}01$$

und folglich

$$\gamma_1 = \gamma - \Gamma = 2{,}09\,,$$

wo es nun zunächſt darauf ankommt, zu entſcheiden, ob γ_1 kleiner oder größer wie die geſuchte Wurzel iſt. Zu dem Ende müſſen wir $f(\gamma_1)$ berechnen und das Vorzeichen dieſer Größe mit den Vorzeichen von $f(\text{a})$ und $f(\text{b})$ vergleichen. Wir wenden aber hierbei, $\varepsilon = 0{,}09$ ſetzend, mit großem Vortheil für den ganzen fernern Gang der Rechnung das in (85. V.) gezeigte Verfahren an, und hoffen, daß die nachſtehende Rechnung auch ohne weitere Erläuterung völlig verſtändlich ſeyn wird, wenn man nur das a. a. O. Geſagte gehörig berückſichtigt:

$f(2)$,	$f'(2)$,	$f''(2)$,	$f'''(2)$,
−1	10	12	6
	0,09	0,09	0,09
	0,90	1,08	0,54
		0,09	0,09
		0,0972	0,0486
		0,0486	0,0243
			0,09
			0,002187
			0,000729

$f(2{,}09)$,	$f'(2{,}09)$,	$f''(2{,}09)$,	$f'''(2{,}09)$
0,90	10	12	6
0,0486	1,08	0,54	
0,000729	0,0243	12,54	
0,949329	11,1043		
−1,000000			
−0,050671			

Weil nun $f(2{,}09)$ mit $f(\text{b})$ entgegengeſetztes Vorzeichen hat; ſo iſt 2,09 kleiner wie die geſnchte Wurzel und jetzt alſo

$$\text{a} = 2{,}09,\ \text{b} = 2{,}10$$

zu ſetzen. m iſt = 2. Ferner iſt jetzt

$$\text{A} = 11{,}1043,\ \text{B} = 12{,}6,\ \frac{\text{B}}{2\text{A}} = \frac{12{,}6}{22{,}2086} = 0{,}5\ldots < (\tfrac{1}{10})^0\,;$$

folglich wieder $\text{k} = 0$. Weil $f(\text{b})$ und $f''(\text{b})$ gleiche Vorzeichen haben, ſo iſt

$$\gamma = 2{,}10$$

zu ſetzen, und man muß nun, da $2\text{m} + \text{k} = 4$ iſt, den Quotienten

$$\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} = \frac{0{,}061}{11{,}23}$$

bis auf Decimaleinheiten der vierten Ordnung entwickeln, und die letzte Ziffer um eine Einheit erhöhen. Dies giebt

$$\Gamma = 0{,}0055$$

und folglich

$$\gamma_1 = \gamma - \Gamma = 2{,}0945\,,$$

wo nun wieder zunächſt zu beurtheilen iſt, ob γ_1 kleiner oder größer wie die geſuchte Wurzel iſt. Zu dem Ende führen wir, $\varepsilon = 0{,}0045$ ſetzend, die Rechnung wieder auf folgende Art:

$f(2{,}09)$,	$f'(2{,}09)$,	$f'(2{,}09)$,	$f'''(2{,}09)$,
$-0{,}050671$	11,1043	12,54	6
	0,0045	0,0045	0,0045
	555215	6270	30
	444172	5016	24
	0,04996935	0,056430	0,0270
		0,0045	0,0045
		282150	1350
		225720	1080
		0,0002539350	0,00012150
		0,0001269675	0,00006075
			0,0045
			30375
			24300
			0,000000273375
			0,000000091125

$f(2{,}0945)$	$f'(2{,}0945)$	$f''(2{,}0945)$	$f'''(2{,}0945)$
0,04996935	11,1043	12,54	6
0,0001269675	0,056430	0,0270	
0,000000091125	0,00006075	12,5670	
0,050096408625	11,16079075		
$-0{,}050671$			
$=-0{,}000574591375$			

Weil nun $f(2{,}0945)$ mit $f(b)$ entgegengeſetztes Vorzeichen hat, ſo iſt 2,0945 kleiner, wie die geſuchte Wurzel, und jetzt alſo

$$a = 2{,}0945, \quad b = 2{,}0946$$

zu ſetzen. m iſt $= 4$. Um k beſtimmen zu können, muß man erſt $f(b)$, $f'(b)$, $f''(b)$, $f'''(b)$ berechnen. Für $\varepsilon = 0{,}0001$ erhält man, wenn wir jetzt der Beſchränktheit des Raumes wegen die einzelnen Theile der Rechnung nur nicht mehr neben, ſondern unter einander ſchreiben, auf bekannte Weiſe:

$$f(2{,}0945) = -0{,}000574591375$$

$$f'(2{,}0945) = \begin{array}{r} 11{,}16079075 \\ 0{,}0001 \\ \hline 0{,}001116079075 \end{array}$$

$$f''(2{,}0945) = \begin{array}{r} 12{,}5670 \\ 0{,}0001 \\ \hline 0{,}00125670 \\ 0{,}0001 \\ \hline 0{,}000000125670 \\ 0{,}000000062835 \end{array}$$

$$f'''(2{,}0945) = \begin{array}{r} 6 \\ 0{,}0001 \\ \hline 0{,}0006 \\ 0{,}0001 \\ \hline 0{,}00000006 \\ 0{,}00000003 \\ 0{,}0001 \\ \hline 0{,}000000000003 \\ 0{,}000000000001 \end{array}.$$

Folglich

$$f(2{,}0946) = \begin{array}{r} 0{,}001116079075 \\ 0{,}000000062835 \\ 0{,}000000000001 \\ \hline 0{,}001116141911 \\ -0{,}000574591375 \\ \hline \end{array}$$
$$= 0{,}000541550536$$

$$f'(2{,}0946) = \begin{array}{r} 11{,}16079075 \\ 0{,}00125670 \\ 0{,}00000003 \\ \hline \end{array}$$
$$= 11{,}16204748$$

$$f''(2{,}0946) = \begin{array}{r} 12{,}5670 \\ 0{,}0006 \\ \hline 12{,}5676 \end{array}.$$

$$f'''(2{,}0946) = 6\,.$$

Es iſt nun

$$A = 11{,}16079075,\quad B = 12{,}5676\,;$$

alſo

$$\frac{B}{2\,A} = \frac{12{,}5676}{22{,}32158150} = 0{,}5\,.. < \left(\frac{1}{10}\right)^0;$$

folglich $k = 0$. Weil $f(b)$ und $f''(b)$ gleiche Vorzeichen haben, ſo iſt

$$\gamma = 2{,}0946$$

zu ſetzen, und man muß nun, weil $2m + k = 8$ iſt, den Quotienten

$$\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} = \frac{0{,}000541550536}{11{,}16204748}$$

bis auf die achte Ziffer hinter dem Komma entwickeln und die letzte Ziffer dann um eine Einheit erhöhen, welches

$$\Gamma = 0{,}00004852$$

und

$$\gamma_1 = \gamma - \Gamma = 2{,}09455148$$

giebt. Dieſer Näherungswerth der geſuchten Wurzel iſt bis auf die achte Ziffer hinter dem Komma genau; um aber zu entſcheiden, ob derſelbe kleiner oder größer als die geſuchte Wurzel iſt, muß man, $\varepsilon = 0{,}00005148$ ſetzend, folgende Rechnung machen:

$$f(2{,}0945) = -\ 0{,}000574591375$$

$$
f'(2{,}0945) = \begin{array}{r}
11{,}16079075 \\
0{,}00005148 \\ \hline
8928632600 \\
4464316300 \\
1116079075 \\
5580395375 \\ \hline
0{,}0005745575078100
\end{array}
$$

$$
f''(2{,}0945) = \begin{array}{r}
12{,}5670 \\
0{,}00005148 \\ \hline
1005360 \\
502680 \\
125670 \\
628350 \\ \hline
0{,}000646949160 \\
0{,}00005148 \\ \hline
5175593280 \\
2587796640 \\
646949160 \\
3234745800 \\ \hline
0{,}00000003330494275680 \\
0{,}00000001665247137840
\end{array}
$$

$$
f'''(2{,}0945) = \begin{array}{r}
6 \\
0{,}00005148 \\ \hline
0{,}00030888 \\
0{,}00005148 \\ \hline
247104 \\
123552 \\
30888 \\
154440 \\ \hline
0{,}0000000159011424 \\
0{,}0000000079505712 \\
0{,}00005148 \\ \hline
636045696 \\
318022848 \\
79505712 \\
397528560 \\ \hline
0{,}000000000000409295405376 \\
0{,}000000000000136431801792
\end{array}.
$$

Folglich iſt

$$
f(2{,}09455148) = \begin{array}{r}
0{,}0005745575078100 \\
0{,}00000001665247137840 \\
0{,}000000000000136431801792 \\ \hline
0{,}000574574160417810201792 \\
-0{,}000574591375 \\ \hline
=-0{,}000000017214582189798208
\end{array}
$$

$$
f'(2{,}09455148) = \begin{array}{l}
11{,}16079075 \\
0{,}000646949160 \\
0{,}0000000079505712 \\ \hline
11{,}1614377071105712
\end{array}
$$

$$f'(2{,}09455148) = \begin{array}{r} 12{,}5670 \\ 0{,}00030888 \\ \hline \end{array}$$
$$= 12{,}56730888$$

$$f'''(2{,}09455148) = 6\,.$$

Weil nun $f(2{,}09455148)$ mit $f(\mathrm{b})$ entgegengeſetztes Vorzeichen hat, ſo iſt 2,09455148 kleiner als die geſuchte Wurzel und man muß alſo jetzt

$$\mathrm{a} = 2{,}09455148, \quad \mathrm{b} = 2{,}09455149$$

ſetzen. m iſt $= 8$. Um k beſtimmen zu können, muß man erſt $f(\mathrm{b})$, $f'(\mathrm{b})$, $f''(\mathrm{b})$, $f'''(\mathrm{b})$ berechnen. Dazu gelangt man, $\varepsilon = 0{,}00000001$ ſetzend, durch folgende hier abgekürzt mitgetheilte Rechnung:

$$f(2{,}09455149) = \begin{array}{r} 0{,}0000001116143770711057 12 \\ 628365444 \\ 1 \\ \hline 0{,}0000001116143776994711 57 \\ -0{,}0000000172145821897982 08 \\ \hline \end{array}$$
$$= 0{,}000000094399795509672949$$

$$f'(2{,}09455149) = \begin{array}{r} 11{,}1614377071105712 \\ 1256730888 \\ 3 \\ \hline \end{array}$$
$$= 11{,}1614378327836603$$

$$f''(2{,}09455149) = \begin{array}{r} 12{,}56730888 \\ 6 \\ \hline \end{array}$$
$$= 12{,}56730894$$

$$f'''(2{,}09455149) = 6\,.$$

Es iſt alſo

$$\mathrm{A} = 11{,}1614377071105712, \quad \mathrm{B} = 12{,}56730894\,;$$

$$\frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{A}} = \frac{12{,}56730894}{22{,}3228754142211424} = 0{,}5\ldots < \left(\frac{1}{10}\right)^{0};$$

folglich $\mathrm{k} = 0$. Weil $f(\mathrm{b})$ und $f''(\mathrm{b})$ gleiche Vorzeichen haben, ſo iſt

$$\gamma = 2{,}09455149$$

zu ſetzen, und man muß nun, weil $2\mathrm{m} + \mathrm{k} = 16$ iſt, den Quotienten

$$\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} = \frac{0{,}000000094399795509672949}{11{,}1614378327836603}$$

bis auf die ſechzehnte Ziffer hinter dem Komma entwickeln und die letzte Ziffer um eine Einheit erhöhen. Dies giebt

$$\Gamma = 0{,}0000000084576735$$

und

$$\gamma_1 = \gamma - \Gamma = 2{,}0945514815423265\,.$$

Dieſer Näherungswerth iſt bis auf die ſechzehnte Decimalſtelle genau. Fourier, von dem wir das vorhergehende Bei-

ſpiel entlehnt haben, hat noch den fünften Näherungswerth berechnet, welcher bis zur zwei und dreißigſten Decimalſtelle genau iſt. Wir theilen dieſen Näherungswerth noch mit, weil die Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

eine Art von Berühmtheit in der Theorie der Gleichungen erhalten hat, indem ſie auch ſchon von Newton und Lagrange als Prüfſtein ihrer Näherungsmethoden gebraucht worden iſt. Der fünfte Näherungswerth iſt nach Fourier

$$y_1 = 2{,}09455148154232659148238654057930$$

wo ſelbſt die letzte Ziffer noch völlig genau iſt. Newton und Lagrange ſind beide bloß bis zur achten Decimale hinter dem Komma gegangen. Erſterer findet 2,09455147, letzterer findet 2,09455147 und 2,09455149 als Gränzen der geſuchten Wurzel (Lagrange Traité de la résolution des équations numériques. Paris 1808. p. 33.)

87. Eine andere Gleichung, die auch bei der Auflöſung der numeriſchen Gleichungen oft als Beiſpiel gebraucht worden iſt, iſt die Gleichung

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

welche, wie wir aus (74. I.) wiſſen, drei reelle Wurzeln zwiſchen — 10 und — 1, zwiſchen 1 und 1,5 und zwiſchen 1,5 und 2 hat. Für dieſe Gleichung iſt

$$f(x) = x^3 - 7x + 7$$
$$f'(x) = 3x^2 - 7$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f'''(x) = 6$$

und für die Gränzen 1 und 1,5 haben wir die Zeichenreihen

$$\begin{array}{l} (1) = + + - + \\ \quad\quad\;\; 0\;\; 0\;\; 0\;\; 1 \\ (1{,}5) = + + - -, \end{array}$$

ſo daß alſo die Indices die Folge 0001 bilden, und demnach unſere Näherungsmethode anwendbar iſt. Auch iſt

$$f(1) = 1\,; \quad f'(1) = -4\,; \quad f''(1) = 6\,; \quad f'''(1) = 6\,;$$
$$f(1{,}5) = -0{,}125\,; \; f'(1{,}5) = -0{,}25\,; \; f''(1{,}5) = 9{,}0\,; \; f'''(1{,}5) = 6\,.$$

Wir ſetzen alſo

$$a = 1,\; b = 1{,}5\,;\; f'(a) = -4\,;\; f'(b) = -0{,}25\,;\; f''(a) = 6\,;\; f''(b) = 9{,}0\,;$$
$$i = 0{,}5,\; A = 0{,}25,\; B = 9{,}0,\; \frac{B}{2A} = \frac{9{,}0}{0{,}50} = 18\,;$$
$$i < \left(\frac{1}{10}\right)^0,\; \frac{B}{2A} < \left(\frac{1}{10}\right)^{-2},\; m = 0,\; k = -2\,;$$
$$1 - k = 3,\; m < 1 - k\,.$$

Man muß folglich das Intervall ferner theilen. Wir ſetzen da-

her zunächſt x = 1,1, und rechnen nun auf folgende Art, wobei das obige $\varepsilon = 0{,}1$ angenommen iſt:

$f(1)$,	$f'(1)$,	$f''(1)$,	$f'''(1)$
1	− 4	6	6
	0,1	0,1	0,1
	− 0,4	0,6	0,6
		0,1	0,1
		0,06	0,06
		0,03	0,03
			0,1
			0,003
			0,001

$f(1,1)$	$f'(1,1)$	$f''(1,1)$	$f'''(1,1)$
1	0,6	6	6
0,03	0,03	0,6	
0,001	0,63	6,6	
1,031	− 4		
− 0,4	− 3,37		
0,631			

$$a = 1{,}1,\ b = 1{,}5;\ f'(a) = -3{,}37,\ f'(b) = -0{,}25;\ f''(a) = 6{,}6,\ f''(b) = 9{,}0;$$

$$i = 0{,}4,\ A = 0{,}25,\ B = 9{,}0,\ \frac{B}{2A} = \frac{9{,}0}{0{,}50} = 18;$$

$$i < \left(\frac{1}{10}\right)^0,\ \frac{B}{2A} < \left(\frac{1}{10}\right)^{-2},\ m = 0,\ k = -2;$$

$$1 - k = 3,\ m < 1 - k.$$

$f(1,1)$	$f'(1,1)$,	$f''(1,1)$,	$f'''(1,1)$
0,631	− 3,37	6,6	6
	0,1	0,1	0,1
	− 0,337	0,66	0,6
		0,1	0,1
		0,066	0,06
		0,033	0,03
			0,1
			0,003
			0,001

$f(1,2)$,	$f'(1,2)$,	$f''(1,2)$,	$f'''(1,2)$
0,631	0,66	6,6	6
0,033	0,03	0,6	
0.001	0,69	7,2	
0,665	− 3,37		
− 0,337	− 2,68		
0,328			

$$a = 1{,}2,\ b = 1{,}5;\ f'(a) = -2{,}68,\ f'(b) = -0{,}25;\ f''(a) = 7{,}2,\ f''(b) = 9{,}0;$$

$$i = 0{,}3,\ A = 0{,}25,\ B = 9{,}0,\ \frac{B}{2A} = \frac{9{,}0}{0{,}50} = 18;$$

$$i < \left(\frac{1}{10}\right)^0,\ \frac{B}{2A} < \left(\frac{1}{10}\right)^{-2},\ m = 0,\ k = -2;$$

$$1 - k = 3,\ m < 1 - k.$$

$f(1,2)$,	$f'(1,2)$,	$f''(1,2)$,	$f'''(1,2)$
0,328	−2,68	7,2	6
	0,1	0,1	0,1
	−0,268	0,72	0,6
		0,1	0,1
		0,072	0,06
		0,036	0,03
			0,1
			0,003
			0,001

$f(1,3)$,	$f'(1,3)$,	$f''(1,3)$,	$f'''(1,3)$
0,328	0,72	7,2	6
0,036	0,03	0,6	
0,001	0,75	7,8	
0,365	−2,68		
−0,268	−1,93		
0,097			

$$a = 1,3,\ b = 1,5;\ f'(a) = -1,93,\ f'(b) = -0,25;\ f''(a) = 7,8,\ f''(b) = 9,0;$$

$$i = 0,2,\ A = 0,25,\ B = 9,0,\ \frac{B}{2A} = \frac{9,0}{0,50} = 18;$$

$$i < \left(\frac{1}{10}\right)^0,\ \frac{B}{2A} < \left(\frac{1}{10}\right)^{-2},\ m = 0,\ k = -2;$$

$$1 - k = 3,\ m < 1 - k.$$

$f(1,3)$,	$f'(1,3)$,	$f''(1,3)$,	$f'''(1,3)$
0,097	−1,93	7,8	6
	0,1	0,1	0,1
	−0,193	0,78	0,6
		0,1	0,1
		0,078	0,06
		0,039	0,03
			0,1
			0,003
			0,001

$f(1,4)$,	$f(1,4)$,	$f''(1,4)$,	$f'''(1,4)$
0,097	0,78	7,8	6
0,039	0,03	0,6	
0,001	0,81	8,4	
0,137	−1,93		
−0,193	−1,12		
−0,056			

$$a = 1,3,\ b = 1,4;\ f'(a) = -1,93,\ f'(b) = -1,12;\ f''(a) = 7,8,\ f''(b) = 8,4;$$

$$i = 0,1,\ A = 1,12,\ B = 8,4,\ \frac{B}{2A} = \frac{8.4}{2,24};$$

$$i = \left(\frac{1}{10}\right)^1,\ \frac{B}{2A} < \left(\frac{1}{10}\right)^{-1},\ m = 1,\ k = -1;$$

$$1 - k = 2,\ m < 1 - k.$$

Wir wollen nun $x = 1,35$, $\varepsilon = 0,05$ ſetzen:

$f(1,3)$,	$f'(1,3)$,	$f''(1,3)$,	$f'''(1,3)$,
0,097	− 1,93	7,8	6
	0,05	0,05	0,05
	−0,0965	0,390	0,30
		0,05	0,05
		0,01950	0,0150
		0,00975	0,0075
			0,05
			0,000375
			0,000125

$f'(1,35)$,	$f'(35)$,	$f''(1,35)$,	$f''(1,35)$
0,097	0,390	7,8	6
0,00975	0,0075	0,30	
0,000125	0,3975	8,10	
0,106875	−1,93		
− 0,0965	−1,5325		
0,010375			

$$a=1,35,\ b=1,4;\ f'(a)=-1,5325,\ f'(b)=-1,12;\ f''(a)=8,10,\ f''(b)=8,4;$$

$$i=0,05,\ A=1,12,\ B=8,4,\ \frac{B}{2A}=\frac{8,4}{2,24};$$

$$i<\left(\frac{1}{10}\right)^{1},\ \frac{B}{2A}<\left(\frac{1}{10}\right)^{-1},\ m=1,\ k=-1;$$

$$1-k=2,\ m<1-k.$$

$f(1,35)$,	$f'(1,35)$,	$f''(1,35)$,	$f'''(1,35)$
0,010375	−1,5325	8,10	6
	0,01	0,01	0,01
	−0,015325	0,0810	0,06
		0,01	0,01
		0,000810	0,0006
		0,000405	0,0006
			0,01
			0,000003
			0,000001

$f(1,36)$,	$f'(1,36)$,	$f''(1,36)$,	$f'''(1,36)$
0,010375	0,0810	8,10	6
0,000405	0,0003	0,06	
0,000001	0,0813	8,16	
0,010781	−1,5325		
− 0,015325	−1,4512		
− 0,004544			

$$a=1,35,\ b=1,36;\ f'(a)=-1,5325,\ f'(b)=-1,4512;$$

$$f''(a)=8,10,\ f''(b)=8,16;$$

$$i=0,01,\ A=1,4512,\ B=8,16,\ \frac{B}{2A}=\frac{8,16}{2,9024};$$

$$i=\left(\frac{1}{10}\right)^{2},\ \frac{B}{2A}<\left(\frac{1}{10}\right)^{-1},\ m=2,\ k=-1;$$

$$1-k=2,\ m=1-k.$$

Nun iſt die Bedingung $m \overset{=}{>} 1 - k$ erfüllt, und die eigentliche Näherungsrechnung kann alſo beginnen. Da $f(a)$ und $f''(a)$ gleiche Vorzeichen haben, ſo ſetzen wir

$$\gamma = 1{,}35 \; .$$

Weil $2m + k = 3$ iſt, ſo entwickeln wir den Quotienten

$$-\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} = \frac{0{,}010375}{1{,}5325}$$

bis auf die dritte Decimalziffer hinter dem Komma genau, und vermehren die letzte Ziffer um eine Einheit. Dies giebt

$$\Gamma = 0{,}007 \; ,$$

$$\gamma_1 = \gamma + \Gamma = 1{,}357 \; .$$

$f(1{,}35)$,	$f'(1{,}35)$,	$f''(1{,}35)$,	$f'''(1{,}35)$
0,010375	— 1,5325	8,10	6
	0,007	0,007	0,007
	— 0,0107275	0,05670	0,042
		0,007	0,007
		0,00039690	0,000294
		0,00019845	0,000147
			0,007
			0,000001029
			0,000000343

$$\begin{array}{rl} f(1{,}357) = & 0{,}010375 \\ & 0{,}00019845 \\ & 0{,}000000343 \\ \hline & 0{,}010573793 \\ & -\,0{,}0107275 \\ \hline & = -\,0{,}000153707 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} f'(1{,}357) = & 0{,}05670 \\ & 0{,}000147 \\ \hline & 0{,}056847 \\ & -\,1{,}5325 \\ \hline & = -\,1{,}475653 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} f''(1{,}357) = & 8{,}10 \\ & 0{,}042 \\ \hline & 8{,}142 \end{array}$$

$$f'''(1{,}357) = 6 \; .$$

$f(1{,}357)$ hat mit $f(a)$ entgegengeſetztes Vorzeichen; folglich iſt 1,357 größer wie die geſuchte Wurzel, und daher nun

$$a = 1{,}356, \; b = 1{,}357 \; .$$

m iſt $= 3$. Um k beſtimmen zu können, müſſen wir erſt folgende Rechnung machen:

$f(1{,}35)$,	$f'(1{,}35)$,	$f''(1{,}35)$,	$f'''(1{,}35)$,
0,010375	− 1,5325	8,10	6
	0,006	0,006	0,006
	− 0,0091950	0,04860	0,036
		0,006	0.006
		0,00029160	0,000216
		0,00014580	0,000108
			0,006
			0,000000648
			0,000000216

$$f(1{,}356) = \begin{array}{r} 0{,}010375 \\ 0{,}00014580 \\ 0{,}000000216 \\ \hline 0{,}010521016 \\ -\ 0{,}0091950 \\ \hline 0{,}001326016 \end{array}$$

$$f'(1{,}356) = \begin{array}{r} 0{,}04860 \\ 0{,}000108 \\ \hline 0{,}048708 \\ -\ 1{,}5325 \\ \hline -\ 1{,}483792 \end{array}$$

$$f''(1{,}356) = \begin{array}{r} 8{,}10 \\ 0{,}036 \\ \hline 8{,}136 \end{array}$$

$$f'''(1{,}356) = 6$$

$$A = 1{,}475653,\ B = 8{,}142,\ \frac{B}{2A} = \frac{8{,}142}{2{,}951306} < \left(\frac{1}{10}\right)^{-1};$$

folglich wieder $k = -1$ und daher $2m + k = 5$. Weil nun $f(a)$ und $f''(a)$ gleiche Vorzeichen haben, ſo muß man

$$\gamma = 1{,}356$$

ſetzen, den Quotienten

$$-\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} = \frac{0{,}001326016}{1{,}483792}$$

bis zur fünften Stelle hinter dem Komma entwickeln, und die letzte Ziffer um eine Einheit vermehren. Dies giebt

$$\Gamma = 0{,}00090\ ,$$

$$\gamma_1 = \gamma + \Gamma = 1{,}35690\ .$$

$$f(1{,}356) = 0{,}001326016$$

$$f'(1{,}356) = \begin{array}{r} -\ 1{,}483792 \\ 0{,}0009 \\ \hline -0{,}0013354128 \end{array}$$

$$f''(1{,}356) = \begin{array}{r} 8{,}136 \\ 0{,}0009 \\ \hline 0{,}0073224 \\ 0{,}0009 \\ \hline 0{,}00000659016 \\ 0{,}00000329508 \end{array}$$

$f'''(1,356) = 6$

0,0009

0,0054

0,0009

0,00000486

0,00000243

0,0009

0,000000002187

0,000000000729

$f(1,35690) = 0,001326016$

0,00000329508

0,000000000729

0,001329311809

— 0,0013354128

= — 0,000006100991

$f'(1,35690) = 0,0073224$

0,00000243

0,00732483

— 1,483792

= — 1,47646717

$f''(1,35690) = 8,136$

0,0054

= 8,1414

$f'''(1,35690) = 6$

$f(1,35690)$ hat mit $f(a)$ entgegengeſetztes Vorzeichen, alſo iſt 1,35690 größer wie die geſuchte Wurzel, und folglich

$$a = 1,35689,\quad b = 1,35690$$

zu ſetzen. Wir ſetzen nun $\varepsilon = -0,00001$ und rechnen weiter auf folgende Art:

$f(1,35690) = -0,000006100991$

$f'(1,35690) = -1,47646717$

— 0,00001

0,0000147646717

$f''(1,35690) = 8,1414$

— 0,00001

— 0,000081414

— 0,00001

0,00000000081414

0,00000000040707

$f'''(1,35690) = 6$

— 0,00001

— 0,00006

— 0,00001

0,0000000006

0,0000000003

— 0,0001

— 0,000000000000003

— 0,000000000000001

$$\begin{array}{rcr}
f(1{,}35689) & = & 0{,}0000147646717 \\
 & & 0{,}00000000040707 \\
\hline
 & & 0{,}00001476507877 \\
 & & -\,0{,}000006100991 \\
 & & -\,0{,}000000000000001 \\
\hline
 & & -\,0{,}000006100991001 \\
 & = & 0{,}000008664087769
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcr}
f'(1{,}35689) & = & -\,1{,}47646717 \\
 & & -\,0{,}000081414 \\
\hline
 & & -\,1{,}476548584 \\
 & & 0{,}0000000003 \\
\hline
 & = & -\,1{,}4765485837
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcr}
f''(1{,}35689) & = & 8{,}1414 \\
 & & -\,0{,}00006 \\
\hline
 & = & 8{,}14134
\end{array}$$

$$f'''(1{,}35689) = 6\,.$$

Da $f(\mathrm{a})$ und $f''(\mathrm{a})$ gleiche Vorzeichen haben, und $\mathrm{m} = 5$, k wieder, wie man leicht auf ähnliche Art, wie oben findet, $= -1$, alſo $2\mathrm{m} + \mathrm{k} = 9$ iſt; ſo iſt

$$\gamma = 1{,}35689$$

zu ſetzen, der Bruch

$$-\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} = \frac{0{,}000008664087769}{1{,}4765485837}$$

bis auf die neunte Ziffer hinter dem Komma zu entwickeln, und die letzte beibehaltene Ziffer um *eine* Einheit zu vermehren. Dies giebt

$$\Gamma = 0{,}000005868$$

und folglich

$$\gamma_1 = \gamma + \Gamma = 1{,}356895868\,.$$

Dieſer Näherungswerth der geſuchten Wurzel iſt bis auf die neunte Decimalziffer hinter dem Komma genau, ſo daß nämlich, wenn man die geſuchte Wurzel

$$\alpha = 1{,}356895868$$

ſetzt, der Fehler kleiner als

$$0{,}000000001$$

iſt. Der folgende Näherungswerth würde die geſuchte Wurzel bis auf die ſiebzehnte Stelle genau liefern. Weil aber aus dem Vorhergehenden ſchon deutlich genug erhellet, wie man weiter gehen könnte; ſo brechen wir hier ab, und bemerken nur noch, daß die beiden andern reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung bis auf die achte Ziffer hinter dem Komma genau

$$-\,3{,}04891734 \text{ und } +\,1{,}69202147$$

ſind.

Fourier hat den numeriſchen Calcul bei der Auflöſung der Zahlengleichungen noch durch eine beſondere Methode der gemeinen Diviſion ſehr erleichtert, welche allerdings vieles unnütze Rechnen erſpart. Da aber dieſer Artikel ſchon zu einer großen Ausdehnung angewachſen iſt, und namentlich die theoretiſche Begründung dieſer Methode, welche Fourier ganz unberückſichtigt gelaſſen hat, keinen geringen Raum in Anſpruch nehmen würde; ſo müſſen wir uns begnügen, im Betreff derſelben auf Fouriers ſchon in (69.) angeführtes claſſiſches Werk p. 187. und auf **Drobisch Grundzüge der Lehre von den numerischen Gleichungen. Leipzig. 1834. S. 275.** zu verweiſen. Fourier nennt dieſe Diviſionsmethode die Methode der geordneten Diviſion (division ordonnée). Ob übrigens dieſe Methode nicht in einigen Punkten noch eine genauere Beſtimmung bedürfen möchte, müſſen wir für jetzt dahin geſtellt ſeyn laſſen.

G. Von der Berechnung der imaginären Wurzeln.

88. Die wirkliche Berechnung der numeriſchen Werthe der imaginären Wurzeln hat Fourier in ſeinem Werke, ſo weit es bis jetzt nach ſeinem leider zu früh erfolgten Tode erſchienen, ganz unberückſichtigt gelaſſen, und wir werden uns deshalb im Folgenden in dieſer Beziehung vorzüglich an Lagrange halten, uns aber überhaupt nur mit einigen allgemeinen Andeutungen über dieſen Gegenſtand begnügen, indem wir zunächſt zeigen, wie ſich in jedem Falle die ſogenannte Gleichung der Quadrate der Differenzen der Wurzeln einer gegebenen Gleichung unmittelbar aus den Coefficienten derſelben bilden oder ableiten läßt, ſo daß man nämlich bei der Bildung dieſer Gleichung durchaus nicht die Wurzeln der gegebenen Gleichung ſelbſt zu kennen braucht.

Sey nämlich wieder

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0$$

die gegebene Gleichung mit lauter reellen Coefficienten und

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_n$$

ſeyen die n reellen oder imaginären Wurzeln derſelben. Die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen der zweiten Klaſſe dieſer n Wurzeln iſt bekanntlich $\frac{1}{2}n(n-1)$. Zieht man nun in jeder dieſer Combinationen die beiden Elemente, aus denen dieſelbe beſteht, von einander ab; ſo kann dies offenbar auf doppelte Weiſe geſchehen, indem man nämlich entweder das erſte von dem zweiten oder umgekehrt das zweite von dem erſten abzieht, und man ſieht alſo hieraus, daß die Anzahl aller Differenzen zweier Wurzeln der gegebenen Gleichung jederzeit $n(n-1)$ iſt. Zieht man nun alle dieſe Differenzen von der beliebigen Größe z ab und multiplicirt alle die auf dieſe Weiſe erhaltenen Ausdrücke in einander; ſo iſt die entſtehende ganze rationale algebraiſche Function von z, welche wir durch $\varphi(z)$ bezeichnen wollen,

offenbar vom $n(n-1)$ſten Grade. Nun erhellet aber leicht, daß die Function $\varphi(z)$ eine ganze rationale algebraiſche Function von z^2 iſt. Sind nämlich α_i und α_k zwei beliebige Glieder der Reihe

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_n;$$

ſo kommen unter den Differenzen der Wurzeln jederzeit die beiden Differenzen

$$\alpha_i - \alpha_k \text{ und } \alpha_k - \alpha_i,$$

unter den vorher in einander multiplicirten Factoren alſo jederzeit die beiden Factoren

$$z - (\alpha_i - \alpha_k) \text{ und } z + (\alpha_i - \alpha_k)$$

vor. Multiplicirt man nun dieſe beiden Factoren in einander; ſo erhält man das Product

$$z^2 - (\alpha_i - \alpha_k)^2,$$

und findet alſo die vorher ausgeſprochene Behauptung, daß $\varphi(z)$ eine ganze rationale algebraiſche Function von z^2 ſey, auf der Stelle gerechtfertigt. Wir wollen daher, $z^2 = v$ ſetzend, von nun an die Function $\varphi(z)$ durch $F(v)$ bezeichnen. Setzen wir nun

$$F(v) = 0;$$

ſo iſt dieſe Gleichung in Bezug auf v vom $\frac{1}{2}n(n-1)$ſten Grade, und die Wurzeln derſelben ſind die folgenden Quadrate:

$$\begin{array}{r}
(\alpha_1 - \alpha_2)^2,\ (\alpha_1 - \alpha_3)^2,\ (\alpha_1 - \alpha_4)^2, \ldots (\alpha_1 - \alpha_{n-1})^2,\ (\alpha_1 - \alpha_n)^2; \\
(\alpha_2 - \alpha_3)^2,\ (\alpha_2 - \alpha_4)^2, \ldots (\alpha_2 - \alpha_{n-1})^2,\ (\alpha_2 - \alpha_n)^2; \\
(\alpha_3 - \alpha_4)^2, \ldots (\alpha_3 - \alpha_{n-1})^2,\ (\alpha_3 - \alpha_n)^2; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1})^2, (\alpha_{n-2} - \alpha_n)^2; \\
(\alpha_{n-1} - \alpha_n)^2.
\end{array}$$

Deshalb nennt man die in Rede ſtehende Gleichung die Gleichung der Quadrate der Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung, und wir wollen nun zeigen, wie dieſelbe immer unmittelbar aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung abgeleitet werden kann. Zu dem Ende wollen wir, $\frac{1}{2}n(n-1)$, welches immer eine ganze Zahl iſt, $= m$ ſetzend,

$$F(v) = v^m + c_1 v^{m-1} + c_2 v^{m-2} + \ldots + c_{m-1} v + c_m = 0$$

ſetzen, und nun zeigen, wie

$$c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots c_m$$

jederzeit aus

$$A, B, C, D, \ldots. N$$

gefunden werden können. Bezeichnen wir die Summe der $k$ten Potenzen der Wurzeln der Gleichung $F(v) = 0$ durch Σ_k; ſo iſt nach dem in (28.) bewieſenen Newtonſchen Satze

$$c_1 = -\Sigma_1,$$
$$c_2 = -\frac{c_1\Sigma_1 + \Sigma_2}{2},$$
$$c_3 = -\frac{c_2\Sigma_1 + c_1\Sigma_2 + \Sigma_3}{3},$$
$$c_4 = -\frac{c_3\Sigma_1 + c_2\Sigma_2 + c_1\Sigma_3 + \Sigma_4}{4},$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Nun iſt aber allgemein

$$\begin{aligned}\Sigma_k = (\alpha_1-\alpha_2)^{2k} + (\alpha_1-\alpha_3)^{2k} + (\alpha_1-\alpha_4)^{2k} + \ldots + (\alpha_1-\alpha_n)^{2k} \\ + (\alpha_2-\alpha_3)^{2k} + (\alpha_2-\alpha_4)^{2k} + \ldots + (\alpha_2-\alpha_n)^{2k} \\ + (\alpha_3-\alpha_4)^{2k} + \ldots + (\alpha_3-\alpha_n)^{2k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (\alpha_{n-1}-\alpha_n)^{2k}\end{aligned}$$

und folglich offenbar

$$\begin{aligned}2\Sigma_k = (\alpha_1-\alpha_2)^{2k} + (\alpha_1-\alpha_3)^{2k} + (\alpha_1-\alpha_4)^{2k} + \ldots + (\alpha_1-\alpha_n)^{2k} \\ + (\alpha_2-\alpha_1)^{2k} + (\alpha_3-\alpha_1)^{2k} + (\alpha_4-\alpha_1)^{2k} + \ldots + (\alpha_n-\alpha_1)^{2k} \\ + (\alpha_2-\alpha_3)^{2k} + (\alpha_2-\alpha_4)^{2k} + \ldots + (\alpha_2-\alpha_n)^{2k} \\ + (\alpha_3-\alpha_2)^{2k} + (\alpha_4-\alpha_2)^{2k} + \ldots + (\alpha_n-\alpha_2)^{2k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (\alpha_{n-1}-\alpha_n)^{2k} \\ + (\alpha_n-\alpha_{n-1})^{2k}.\end{aligned}$$

Man erhält alſo offenbar $2\Sigma_k$ aus dem allgemeinen Ausdrucke

$$(\alpha_r - \alpha_s)^{2k},$$

wenn man, zuerſt s unbeſtimmt laſſend, für r die ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... n, und dann in jeder der auf dieſe Weiſe erhaltenen Größen für s ferner ebenfalls die ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... n ſetzt, wobei man nur zu bemerken hat, daß Größen wie $(\alpha_r - \alpha_r)^{2k} = 0$ ſind. Bezeichnen wir nun die Binomial-Coefficienten der 2kten Potenz nach der Reihe durch

$$(2k)_1,\ (2k)_2,\ (2k)_3,\ (2k)_4,\ \ldots\ldots;$$

ſo iſt

$$\begin{aligned}(\alpha_r-\alpha_s)^{2k} = \alpha_r{}^{2k} - (2k)_1\alpha_r{}^{2k-1}\alpha_s + (2k)_2\alpha_r{}^{2k-2}\alpha_s{}^2 - \ldots \\ \ldots - (2k)_{2k-1}\alpha_r\alpha_s{}^{2k-1} + \alpha^{2k};\end{aligned}$$

alſo iſt offenbar, wenn wir die Summe der kten Potenzen der Wurzeln

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots\ \alpha_n$$

der gegebenen Gleichung durch S_k bezeichnen:

$$\begin{aligned}2\Sigma_k = n\alpha_1{}^{2k} - (2k)_1\alpha_1{}^{2k-1}S_1 + (2k)_2\alpha_1{}^{2k-2}S_2 - \ldots + S_{2k} \\ + n\alpha_2{}^{2k} - (2k)_1\alpha_2{}^{2k-1}S_1 + (2k)_2\alpha_2{}^{2k-2}S_2 - \ldots + S_{2k} \\ + n\alpha_3{}^{2k} - (2k)_1\alpha_3{}^{2k-1}S_1 + (2k)_2\alpha_3{}^{2k-2}S_2 - \ldots + S_{2k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + n\alpha_n{}^{2k} - (2k)_1\alpha_n{}^{2k-1}S_1 + (2k)_2\alpha_n{}^{2k-2}S_2 - \ldots + S_{2k} \\ = nS_{2k} - (2k)_1 S_{2k-1}S_1 + (2k)_2 S_{2k-2}S_2 - \ldots\ldots \\ \ldots - (2k)_2 S_2 S_{2k-2} + (2k)_1 S_1 S_{2k-1} + nS_{2k}.\end{aligned}$$

Die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens hat 2k + 1 Glieder, und enthält alſo ein Mittelglied, welches das (k + 1)ſte iſt. Da nun dieſes Mittelglied offenbar

$$(-1)^k (2k)_k S_k S_k$$

iſt; ſo iſt

$$\Sigma_k = nS_{2k} - (2k)_1 S_{2k-1} S_1 + (2k)_2 S_{2k-2} S_2 - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-1}(2k)_{k-1} S_{k+1} S_{k-1} + (-1)^k (2k)_k . \tfrac{1}{2} S_k S_k,$$

und man kann alſo, weil man die Potenzenſummen S_1, S_2, S_3, S_4, ... jederzeit mittelſt der Formeln des Newtonſchen Satzes in (28.) aus den Coefficienten

$$A, B, C, D \ldots N$$

der gegebenen Gleichung berechnen kann, jederzeit auch die Potenzenſummen Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4, ..., und folglich mittelſt der oben angegebenen Formeln auch die Coefficienten

$$c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots c_m$$

der Gleichung F(v) = o der Quadrate der Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung unmittelbar aus den Coefficienten der letztern, ohne die Wurzeln derſelben ſelbſt zu kennen, berechnen, welches wir jetzt an dem folgenden Beiſpiele erläutern wollen.

Die gegebene Gleichung ſey

$$x^3 - 7x + 7 = 0;$$

ſo iſt

$$A = 0,\ B = -7,\ C = 7.$$

Die Gleichung der Quadrate der Differenzen der Wurzeln dieſer Gleichung iſt vom dritten Grade, da in dieſem Falle $\frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}.3.2 = 3$ iſt. Alſo iſt die Gleichung der Quadrate der Differenzen

$$v^3 + c_1 v^2 + c_2 v + c_3 = 0.$$

Um nun c_1, c_2, c_3 zu finden, hat man folgende Formeln:

$$c_1 = -\Sigma_1,$$
$$c_2 = -\frac{c_1\Sigma_1 + \Sigma_2}{2},$$
$$c_3 = -\frac{c_2\Sigma_1 + c_1\Sigma_2 + \Sigma_3}{3},$$

und muß alſo nun zuerſt Σ_1, Σ_2, Σ_3 ſuchen. Nach der vorher gegebenen allgemeinen Formel iſt aber

$$\Sigma_1 = 3S_2 - S_1 S_1,$$
$$\Sigma_2 = 3S_4 - 4S_3 S_1 + 3S_2 S_2,$$
$$\Sigma_3 = 3S_6 - 6S_5 S_1 + 15S_4 S_2 - 10S_3 S_3.$$

Alſo muß man nun zuerſt S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 berechnen. Dazu dienen die in (28.) angegebenen entwickelten Ausdrücke dieſer Summen durch die Coefficienten der gegebenen Glei-

chung. Man wird aber immer mit größerer Leichtigkeit nach den recurrirenden Formeln:

$$S_1 = -A,$$
$$S_2 = -AS_1 - 2B,$$
$$S_3 = -AS_2 - BS_1 - 3C,$$
$$S_4 = -AS_3 - BS_2 - CS_1 - 4D,$$
$$S_5 = -AS_4 - BS_3 - CS_2 - DS_1 - 5E,$$
$$S_6 = -AS_5 - BS_4 - CS_3 - DS_2 - ES_1 - 6F,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

rechnen. Mittelſt dieſer Formeln erhält man:

$$S_1 = 0,\ S_2 = 14,\ S_3 = -21,\ S_4 = 98,\ S_5 = -245,\ S_6 = 833.$$

Die Coefficienten D, E, F, ... ſind hier, ſo wie A, ſämmtlich $= 0$, welches die Rechnung ſehr erleichtert. Setzt man nun die gefundenen Werthe dieſer Potenzenſummen in die obigen Ausdrücke für Σ_1, Σ_2, Σ_3; ſo ergiebt ſich

$$\Sigma_1 = 42,\ \Sigma_2 = 882,\ \Sigma_3 = 18669;$$

und hieraus erhält man endlich:

$$c_1 = -42,\ c_2 = 441,\ c_3 = -49.$$

Alſo iſt

$$v^3 - 42v^2 + 441v - 49 = 0$$

die geſuchte Gleichung der Quadrate der Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Für die Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

für welche

$$n = 3,\ m = 3,\ A = 0,\ B = -2,\ C = -5,$$

iſt, erhalten wir nach und nach:

$$S_1 = 0,\ S_2 = 4,\ S_3 = 15,\ S_4 = 8,\ S_5 = 50,\ S_6 = 91;$$
$$\Sigma_1 = 12,\ \Sigma_2 = 72,\ \Sigma_3 = -1497;$$
$$c_1 = -12,\ c_2 = 36,\ c_3 = 643;$$

und die Gleichung der Quadrate der Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung iſt folglich in dieſem Falle:

$$v^3 - 12v^2 + 36v + 643 = 0.$$

89. Die gegebene Gleichung ſey wieder

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0;$$

die Gleichung der Quadrate der Differenzen ihrer Wurzeln, zu deren Bildung aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung vorher eine vollſtändige Anleitung gegeben worden iſt, ſey wie vorher

$$F(v) = v^m + c_1 v^{m-1} + c_2 v^{m-2} + \ldots + c_{m-1} v + c_m = 0,$$

wo bekanntlich $m = \frac{1}{2}n(n-1)$ iſt. Zwei beliebige reelle oder

imaginäre Wurzeln der gegebenen Gleichung können im Allgemeinen durch

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} \text{ und } \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

repräſentirt werden, indem, wenn die eine oder die andere dieſer beiden Wurzeln reell iſt, β oder β' als verſchwindend zu betrachten iſt. Das Quadrat der Differenz dieſer beiden Wurzeln iſt

$$\{\alpha + \beta\sqrt{-1} - (\alpha' + \beta'\sqrt{-1})\}^2$$

$$= (\alpha - \alpha')^2 - (\beta - \beta')^2 + 2(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')\sqrt{-1},$$

und dies iſt alſo die allgemeine Form der Wurzeln der Gleichung für die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung. Dieſe Wurzeln können alſo nicht reell ſeyn, wenn nicht wenigſtens eine der beiden Differenzen $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$ verſchwindet. Verſchwindet nun zuerſt $\beta - \beta'$, ohne daß $\alpha - \alpha'$ verſchwindet, ſo iſt die entſprechende reelle Wurzel der Gleichung der Differenzenquadrate, wie wir die Gleichung $F(v) = 0$ der Kürze wegen nennen wollen, poſitiv; verſchwindet ferner $\alpha - \alpha'$, ohne daß $\beta - \beta'$ verſchwindet, ſo iſt die entſprechende reelle Wurzel der Gleichung der Differenzenquadrate negativ, nämlich $= -(\beta - \beta')^2$; verſchwinden endlich die Differenzen $\alpha - \alpha'$ und $\beta - \beta'$ beide, ſo iſt die entſprechende reelle Wurzel der Gleichung der Differenzenquadrate $= 0$, und folglich auch als poſitiv zu betrachten. Hieraus ergiebt ſich alſo, daß die negativen reellen Wurzeln der Gleichung der Differenzenquadrate jederzeit bloß aus zwei ſolchen Wurzeln

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} \text{ und } \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

der gegebenen Gleichung entſtehen können, für welche $\alpha - \alpha' = 0$ iſt, ohne daß $\beta - \beta' = 0$ iſt, und die entſprechende negative reelle Wurzel der Gleichung der Differenzenquadrate iſt dann immer $= -(\beta - \beta')^2$. Eine negative reelle Wurzel der Gleichung der Differenzenquadrate kann folglich immer bloß durch die Verbindung zweier Wurzeln der gegebenen Gleichung von der Form

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha + \beta'\sqrt{-1},$$

wo $\beta - \beta'$ nicht $= 0$ iſt, und alſo auch β, β' nicht zugleich $= 0$ ſeyn können, entſtehen, woraus zugleich erſichtlich iſt, daß immer mindeſtens die eine der beiden Wurzeln der gegebenen Gleichung, durch deren Verbindung eine negative reelle Wurzel der Gleichung der Differenzenquadrate entſtanden iſt, imaginär ſeyn muß.

90. Zuerſt wollen wir nun den Fall näher betrachten, wenn die negativen reellen Wurzeln der Gleichung der Differenzenquadrate ſämmtlich unter einander ungleich ſind, und beginnen ſogleich mit der Behauptung, daß in dieſem Falle jede negative reelle Wurzel der Gleichung der Differenzenquadrate bloß durch die Verbindung zweier conjugirten imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung entſtanden ſeyn kann, und daß die in $\sqrt{-1}$ multiplicirten

reellen Factoren in allen imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung, dieſe imaginären Wurzeln alſo auch ſelbſt, ſämmtlich unter einander ungleich ſind.

Um dies zu beweiſen, wollen wir annehmen, daß überhaupt

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} \text{ und } \alpha + \beta'\sqrt{-1}$$

zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung ſind, durch deren Verbindung mit einander eine negative reelle Wurzel der Gleichung der Differenzenquadrate entſtanden iſt; ſo iſt, wie wir aus dem Vorhergehenden wiſſen, $\beta - \beta'$ nicht $= 0$, und eine der beiden obigen Wurzeln iſt immer imaginär. Wäre nun nicht $\beta = -\beta'$; ſo könnten die beiden folgenden Fälle Statt finden.

I. Es könnte die eine der beiden Wurzeln

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} \text{ und } \alpha + \beta'\sqrt{-1},$$

z. B. die erſte, reell, alſo $\beta = 0$ ſeyn. Dann wäre die andere Wurzel imaginär, d. i. β' nicht $= 0$, und die gegebene Gleichung hätte alſo nach (19.) auch die imaginäre Wurzel $\alpha - \beta'\sqrt{-1}$. Durch die Verbindung der beiden Wurzeln $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha + \beta'\sqrt{-1}$ mit einander entſteht in dieſem Falle, wo $\beta = 0$ iſt, die Wurzel

$$\{\alpha + \beta\sqrt{-1} - (\alpha + \beta'\sqrt{-1})\}^2 = -\beta'^2$$

der Gleichung der Differenzenquadrate, und durch Verbindung der Wurzeln $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta'\sqrt{-1}$ mit einander entſteht die Wurzel

$$\{\alpha + \beta\sqrt{-1} - (\alpha - \beta'\sqrt{-1})\}^2 = -\beta'^2$$

der Gleichung der Differenzenquadrate, ſo daß alſo dieſe Gleichung die negative reelle Wurzel $-\beta'^2$ zwei Mal enthalten würde, welches gegen die Vorausſetzung iſt.

II. Wären ferner die Wurzeln

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} \text{ und } \alpha + \beta'\sqrt{-1}$$

der gegebenen Gleichung beide imaginär; ſo würde dieſe Gleichung auch die beiden Wurzeln

$$\alpha - \beta\sqrt{-1} \text{ und } \alpha - \beta'\sqrt{-1}$$

haben. Wäre nun β nicht $= -\beta'$; ſo würde die Gleichung der Differenzenquadrate offenbar ſowohl die Wurzel

$$\{\alpha + \beta\sqrt{-1} - (\alpha + \beta'\sqrt{-1})\}^2 = -(\beta - \beta')^2,$$

als auch die Wurzel

$$\{\alpha - \beta\sqrt{-1} - (\alpha - \beta'\sqrt{-1})\}^2 = -(\beta - \beta')^2;$$

folglich die negative reelle Wurzel $-(\beta - \beta')^2$ auf jeden Fall zwei Mal enthalten, welches wieder gegen die Vorausſetzung iſt.

Es iſt alſo hierdurch der erſte Theil unſerer Behauptung, daß, wenn die Gleichung der Differenzenquadrate lauter ungleiche ne-

gative reelle Wurzeln hat, jede dieſer Wurzeln bloß durch die Verbindung zweier conjugirten imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung entſtanden ſeyn kann, vollſtändig gerechtfertigt, und der zweite Theil ergiebt ſich hieraus, wie man auf der Stelle überſehen wird, von ſelbſt.

Sind alſo jetzt

$$\alpha \pm \beta\sqrt{-1},\ \alpha' \pm \beta'\sqrt{-1},\ \alpha'' \pm \beta''\sqrt{-1},\ \alpha''' \pm \beta'''\sqrt{-1},\ \ldots.$$

ſämmtliche imaginäre Wurzeln der gegebenen Gleichung; ſo ſind

$$\{\alpha + \beta\sqrt{-1} - (\alpha - \beta\sqrt{-1})\}^2 = -4\beta^2,$$
$$\{\alpha' + \beta'\sqrt{-1} - (\alpha' - \beta'\sqrt{-1})\}^2 = -4\beta'^2,$$
$$\{\alpha'' + \beta''\sqrt{-1} - (\alpha'' - \beta''\sqrt{-1})\}^2 = -4\beta''^2,$$
$$\{\alpha''' + \beta'''\sqrt{-1} - (\alpha''' - \beta'''\sqrt{-1})\}^2 = -4\beta'''^2,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

die ſämmtlichen negativen reellen Wurzeln der Gleichung der Differenzenquadrate. Hat man alſo aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung nach der in (88.) gegebenen ausführlichen Anweiſung die Gleichung der Differenzenquadrate gebildet, nach den aus dem Obigen bekannten Methoden zur Beſtimmung der reellen Wurzeln der numeriſchen Gleichungen die ſämmtlichen negativen reellen Wurzeln der Gleichung der Differenzenquadrate gefunden, und dabei zugleich ſich überzeugt, daß alle dieſe Wurzeln unter einander ungleich ſind; ſo wird, wenn wir die abſoluten Werthe dieſer Wurzeln durch $\varrho, \varrho', \varrho'', \varrho''', \ldots.$ bezeichnen, durch die Reihe

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\varrho},\ \tfrac{1}{2}\sqrt{\varrho'},\ \tfrac{1}{2}\sqrt{\varrho''},\ \tfrac{1}{2}\sqrt{\varrho'''},\ \ldots\ldots$$

offenbar die Reihe der Größen

$$\beta,\ \beta',\ \beta'',\ \beta''',\ \ldots\ldots$$

dargeſtellt, und dieſe Größen ſind alſo auf dieſe Weiſe in dem vorliegenden Falle vollſtändig beſtimmt. Könnte man nun auch die Größen $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots.$ beſtimmen; ſo würden ſämmtliche imaginäre Wurzeln

$$\alpha \pm \beta\sqrt{-1},\ \alpha' \pm \beta'\sqrt{-1},\ \alpha'' \pm \beta''\sqrt{-1},\ \alpha''' \pm \beta'''\sqrt{-1},\ \ldots.$$

der gegebenen Gleichung gefunden ſeyn. Die Größen $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots.$ laſſen ſich aber in dem vorliegenden Falle, wo, wie wir wiſſen, die Größen $\beta, \beta', \beta'', \beta''', \ldots.$ ſämmtlich unter einander ungleich ſind, auf folgende Art beſtimmen. In die Function $f(x)$ der gegebenen Gleichung ſetze man $p \pm q\sqrt{-1}$ für x; ſo wird ſich dieſelbe immer auf die Form

$$f(p \pm q\sqrt{-1}) = \varphi(p, q) \pm \psi(p, q)\sqrt{-1}$$

bringen laſſen. Setzen wir nun für q z. B. die aus dem Vorhergehenden bekannte Größe β; ſo erhalten wir

$$f(p \pm \beta\sqrt{-1}) = \varphi(p, \beta) \pm \psi(p, \beta)\sqrt{-1}.$$

Da $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ iſt, ſo iſt

$$f(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}) = \varphi(\alpha, \beta) \pm \psi(\alpha, \beta)\sqrt{-1} = 0\,;$$

folglich

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0, \quad \psi(\alpha, \beta) = 0\,.$$

Daher iſt $p - \alpha$ ein gemeinſchaftlicher Diviſor der Functionen $\varphi(p, \beta)$ und $\psi(p, \beta)$. Einen andern gemeinſchaftlichen Diviſor als $p - \alpha$ können aber dieſe beiden Functionen überhaupt nicht haben. Hätten dieſelben nämlich den gemeinſchaftlichen Diviſor $p - \alpha_1$, und wäre alſo

$$\varphi(p, \beta) = (p - \alpha_1)\varphi_1(p, \beta), \quad \psi(p, \beta) = (p - \alpha_1)\psi_1(p, \beta)\,;$$

ſo wäre

$$f(p \pm \beta\sqrt{-1}) = (p - \alpha_1)\{\varphi_1(p, \beta) \pm \psi_1(p, \beta)\sqrt{-1}\}\,,$$

und folglich

$$f(\alpha_1 \pm \beta\sqrt{-1}) = 0\,.$$

Alſo wäre $\alpha_1 \pm \beta\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, ſo daß alſo dieſe Gleichung die imaginären Wurzeln $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha_1 \pm \beta\sqrt{-1}$ hätte, welches nach dem Obigen ungereimt iſt, da in allen imaginären Wurzeln der in Rede ſtehenden Gleichung die in $\sqrt{-1}$ multiplicirten reellen Factoren unter einander ungleich ſind. Der größte gemeinſchaftliche Diviſor der Functionen $\varphi(p, \beta)$ und $\psi(p, \beta)$ kann alſo bloß von der Form $(p - \alpha)^k$ ſeyn. Setzen wir nun

$$\varphi(p, \beta) = (p - \alpha)^k \varphi'(p, \beta), \quad \psi(p, \beta) = (p - \alpha)^k \psi'(p, \beta)\,;$$

ſo iſt

$$f(p \pm \beta\sqrt{-1}) = (p - \alpha)^k \{\varphi'(p, \beta) \pm \psi'(p, \beta)\sqrt{-1}\}\,.$$

Da $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ iſt; ſo iſt

$$f(p \pm q\sqrt{-1}) = (p - \alpha \pm (q - \beta)\sqrt{-1})f_1(p \pm q\sqrt{-1})\,,$$

und $f_1(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})$ iſt nicht $= 0$, weil die Gleichung $f(x) = 0$ die Wurzel $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ nur ein Mal enthält. Setzen wir $q = \beta$; ſo ergiebt ſich

$$f(p \pm \beta\sqrt{-1}) = (p - \alpha)f_1(p \pm \beta\sqrt{-1})\,.$$

Alſo iſt

$$f_1(p \pm \beta\sqrt{-1}) = (p - \alpha)^{k-1}\{\varphi'(p, \beta) \pm \psi'(p, \beta)\sqrt{-1}\}\,.$$

Wäre nun $k - 1$ nicht $= 0$, d. i. k nicht $= 1$; ſo wäre

$$f(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}) = 0\,,$$

welches gegen das Vorhergehende ſtreitet. Alſo iſt $k = 1$ und $p - \alpha$ iſt folglich der größte gemeinſchaftliche Diviſor der beiden Functionen $\varphi(p, \beta)$ und $\psi(p, \beta)$. Sucht man alſo den größten gemeinſchaftlichen Diviſor dieſer beiden Functionen, und ſetzt denſelben $= 0$; ſo erhält man eine bloß p als unbekannte Größe enthaltende Gleichung des erſten Grades, welche, nach p aufgelöſt, für p einen Werth giebt, der zugleich der Werth von α iſt, ſo daß alſo auf dieſe Weiſe der Werth von α beſtimmt iſt. Daß man

ganz eben ſo auch α', α'', α''', ... beſtimmen kann, wenn man nur im Vorhergehenden ſtatt der Größe β nach und nach die bekannten Größen β', β'', β''', ... ſetzt, liegt deutlich vor Augen, ſo daß man alſo auf dieſe Weiſe in dem Falle, wo alle negativen reellen Wurzeln der Gleichung der Differenzenquadrate unter einander ungleich ſind, jederzeit alle imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung finden kann. Da man in dieſem Falle beſtimmt weiß, daß es für die beiden Functionen $\varphi(p, \beta)$ und $\psi(p, \beta)$ jederzeit einen gemeinſchaftlichen Diviſor vom erſten Grade giebt; ſo muß, wenn man bei der Aufſuchung des größten gemeinſchaftlichen Diviſors der beiden genannten Functionen nach der gewöhnlichen Methode auf einen Reſt kommt, der in Bezug auf die Größe p vom erſten Grade iſt, bei dieſem Reſte, wenn man nämlich mit demſelben von Neuem dividirt, die Diviſion aufgehen, oder dieſer Reſt, bis zu welchem man alſo die Rechnung jederzeit bloß fortzuſetzen braucht, muß der geſuchte größte gemeinſchaftliche Diviſor ſeyn. Setzt man alſo dieſen Reſt $= 0$ und beſtimmt aus der dadurch entſtehenden Gleichung des erſten Grades den Werth von p; ſo iſt dieſer Werth zugleich der geſuchte Werth von α.

Allem Vorhergehenden liegt die Vorausſetzung zum Grunde, daß die negativen reellen Wurzeln der Gleichung der Differenzenquadrate ſämmtlich unter einander ungleich ſind. Ohne uns auf weitere theoretiſche Entwickelungen einzulaſſen, wollen wir nun bloß noch angeben, wie man ſich zu verhalten hat, wenn die negativen reellen Wurzeln der Gleichung der Differenzenquadrate nicht alle unter einander ungleich ſind. In dieſer Beziehung iſt zuerſt zu bemerken, daß ſich aus jeder nur ein Mal vorkommenden negativen reellen Wurzel der Gleichung der Differenzenquadrate ganz auf dieſelbe Weiſe wie vorher ein Paar conjugirter imaginärer Wurzeln der gegebenen Gleichung ergiebt, und daß man mit den nur ein Mal vorkommenden negativen reellen Wurzeln der Gleichung der Differenzenquadrate überhaupt ganz auf die vorher gelehrte Weiſe zu verfahren hat. Kommt nun aber unter den negativen reellen Wurzeln der Gleichung der Differenzenquadrate die Wurzel $-\varrho$ z. B. zwei Mal vor; ſo ſetze man wieder $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\varrho}$ und ſuche nach der gewöhnlichen Methode den größten gemeinſchaftlichen Diviſor von $\varphi(p, \beta)$ und $\psi(p, \beta)$, bleibe aber bei dem Reſte ſtehen, welcher in Bezug auf p vom zweiten Grade iſt, ſetze denſelben $= 0$, und löſe die auf dieſe Weiſe entſtehende quadratiſche Gleichung auf. Ergeben ſich nun für dieſe Gleichung die beiden reellen Wurzeln α, α_1, ſo ſind $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha_1 \pm \beta\sqrt{-1}$ vier imaginäre Wurzeln der gegebenen Gleichung; ſind dagegen die beiden Wurzeln der in Rede ſtehenden quadratiſchen Gleichung imaginär, ſo ergeben ſich aus den negativen reellen Wurzeln $-\varrho$, $-\varrho$ der Gleichung der Differenzenquadrate gar keine imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung. Hat ferner die Gleichung der Differenzenquadrate drei der Größe

—ρ gleiche negative reelle Wurzeln; ſo ſetze man wieder $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\rho}$, ſuche den größten gemeinſchaftlichen Diviſor von $\varphi(p, \beta)$ und $\psi(p, \beta)$ nach der gewöhnlichen Methode, bleibe aber bei einem Reſte ſtehen, welcher in Bezug auf p vom dritten Grade iſt, und bilde ſich, indem man dieſen Reſt = 0 ſetzt, eine Gleichung des dritten Grades, welche bekanntlich entweder drei reelle, oder eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln hat. Sind nun im erſten Falle α, α_1, α_2 die drei reellen Wurzeln der in Rede ſtehenden cubiſchen Gleichung, ſo hat die gegebene Gleichung die ſechs imaginären Wurzeln $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, $\alpha_1 \pm \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha_2 \pm \beta\sqrt{-1}$; im zweiten Falle dagegen, wenn die cubiſche Gleichung nur die eine reelle Wurzel α hat, ergeben ſich aus den drei negativen reellen Wurzeln $-\rho$, $-\rho$, $-\rho$ der Gleichung der Differenzenquadrate auch nur die beiden imaginären Wurzeln $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ der gegebenen Gleichung. Wie man ſich in ähnlichen Fällen zu verhalten hat, wird hieraus deutlich genug erhellen. Auch wird es nicht ſchwer halten, die Gründe dieſes Verfahrens aufzufinden, und ſich von der Richtigkeit deſſelben zu überzeugen. Einige ausgeführte Beiſpiele, ſo wie andere nützliche Bemerkungen über die imaginären Wurzeln der Gleichungen, ſ. m. bei Drobiſch a. a. O. S. 320 und S. 326.

91. Wir ſchließen dieſen Artikel wieder mit einigen literariſchen Bemerkungen. Die ſchönen völlig ſtrengen Beweiſe, welche Gauß und Cauchy für den wichtigen Satz in (20.) gegeben haben, ſind als die wichtigſte Vervollkommnung anzuſehen, welche der Theorie der Gleichungen in neuerer Zeit zu Theil geworden iſt, da alle ältere Beweiſe dieſes Fundamentalſatzes mehr oder weniger mangelhaft ſind, wovon ſchon in (21.) ausführlich die Rede geweſen iſt. Einen Beweis der Unmöglichkeit, algebraiſche Gleichungen von höheren Graden als dem vierten allgemein aufzulöſen, gab Abel in **Crelles Journal der reinen und angew. Math. B. I. S. 65.**; eine frühere Arbeit des italieniſchen Analyſten Ruffini über denſelben Gegenſtand findet man in den **Memorie di matematica e di fisica della societa italiana delle scienze. P. I. 1803.** Die Auflöſung der numeriſchen Gleichungen aller Grade iſt am meiſten durch Fourier vervollkommnet worden. Fouriers ſchon in (69.) angeführtes Werk iſt nach ſeinem Tode von Navier herausgegeben worden, enthält aber in dem bis jetzt erſchienenen erſten Theile, wie aus dem vorausgeſchickten **exposé synoptique des résultats demontrés dans cet ouvrage** erhellet, bei Weitem nicht alle Entdeckungen Fouriers über die Auflöſung der numeriſchen Gleichungen. Was bis jetzt von dieſen Entdeckungen in analytiſcher Vollſtändigkeit bekannt geworden, iſt in dieſem Artikel in ziemlicher Ausführlichkeit mitgetheilt worden. Fourier knüpft ſeine Unterſuchungen faſt immer an geometriſche Betrachtungen, indem wir dagegen in dieſem Artikel ſtets den rein analytiſchen Geſichtspunkt feſtzuhalten, und alle Beweiſe aus dieſem Geſichtspunkte

zu führen geſucht haben, wodurch ſich unſere Arbeit von Fouriers Werke weſentlich unterſcheidet, und ſo gern wir auch zuzugeben bereit ſind, daß dergleichen geometriſche Betrachtungen die deutliche Einſicht in die Natur des Gegenſtandes zu befördern geeignet ſind; ſo ſind wir doch auch auf der andern Seite überzeugt, daß, von dem ſtreng wiſſenſchaftlichen Standpunkte aus betrachtet, in der reinen Arithmetik auch bloß rein arithmetiſche Beweiſe und Betrachtungen an ihrer Stelle ſind. Drobiſch hat in dem ſchon in (87.) angeführten Buche nebſt den übrigen zur Theorie der Gleichungen nothwendigen Sätzen auch Fouriers Entdeckungen auf eine faßliche Weiſe vorgetragen und ebenfalls geometriſch erläutert; nur die Theorie der Elimination, namentlich bei Gleichungen des erſten Grades (ſ. den Artikel Elimination i. d. Z.), hätte wohl in dieſem Buche nicht ganz unberückſichtigt bleiben ſollen. Stern hat einige Sätze Fouriers wiederherzuſtellen geſucht (**Crelles Journal B. IX. S. 305.**); nach unſerer Meinung ein ſehr verdienſtliches Unternehmen. Von den ältern Methoden zur annähernden Auflöſung der numeriſchen Gleichungen iſt vorzüglich die auf die Theorie der höhern arithmetiſchen Reihen gegründete zu nennen, und über dieſelbe ſind vorzüglich **Kramps Elémens d'Arithmetique universelle. Cologne. 1808. p. 385.** nachzuſehen; auch iſt es dem Verfaſſer dieſer Supplemente wohl erlaubt, hier ſein eignes **Lehrbuch der Mathematik für die obern Classen höherer Lehranstalten. T. I. Zweite Auflage. Brandenburg. 1835. S. 161.** zu nennen. Ueber die Auflöſung der numeriſchen Gleichungen mittelſt der Kettenbrüche ſ. m. den Artikel Kettenbruch im dritten Theile dieſes Wörterbuchs S. 66.; **Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés par Lagrange, nouv. éd. Paris. 1808.; Legendre Théorie des nombres**, die zweite Ausgabe **Paris. 1808.**, und vorzüglich **Sterns Theorie der Kettenbrüche. Berlin. 1834.**, abgedruckt aus dem Crelleſchen Journal. Von Cauchy's Auflöſungsmethode iſt in (77—82.) ausführlich die Rede geweſen. Man vergl. aber auch **Cauchy cours d'Analyse de l'école royale polytechnique. P. I. Paris. 1821. p. 460.**, und deſſelben Verfaſſers **Leçons sur le calcul différentiel. Paris. 1829**, einem in jeder Beziehung trefflichen Buche, in dem ſich auch Vieles namentlich über die Berechnung der imaginären Wurzeln der numeriſchen Gleichungen, und über die Auflöſung der transcendenten Gleichungen findet. Eine bei gegenwärtigem Artikel mehrfach benutzte Abhandlung Cauchy's iſt ſchon in (21.) angeführt. M. Hirſch Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraiſchen Gleichungen. Thl. I. Berlin. 1809. verbreitet ſich vorzüglich über die ſymmetriſchen Functionen der Wurzeln der Gleichungen, die Theorie der Elimination und die Transformation der Gleichungen; daß der Verfaſſer die allgemeine Auflöſung der Gleichungen gefunden zu haben glaubte, iſt ſchon in dem Ar-

tikel Algebra im erſten Theile dieſer Supplemente erwähnt worden. Von den in neuerer Zeit in großer Anzahl erſchienenen Lehrbüchern über die Elemente der Algebra auch nur die beſſern zu nennen, wird man mir an dieſem Orte gewiß gern erlaſſen. Lacroix's Lehrbücher verdienen noch immer erwähnt zu werden, und unter den deutſchen Werken iſt Egen's allgemeine Arithmetik und Algebra, wovon kürzlich eine neue Auflage erſchienen, und die ſich ganz an die viel gebrauchte Beiſpielſammlung von Meier Hirſch anſchließt, beſonders zum Selbſtſtudium recht ſehr zu empfehlen. Wegen der vielen zweckmäßigen Beiſpiele verdient indeß auch noch L'Huiliers ſchon 1799 erſchienene, wie es ſcheint, nicht nach Verdienſt bekannt gewordene Anleitung zur Elementar-Algebra genannt zu werden. Von Eulers Algebra hat Garnier eine recht gute franzöſiſche Ausgabe mit den Zuſätzen von Lagrange, veranſtaltet, welche in zwei Bänden zu Paris (1807.) erſchienen iſt. Ueber Sturms Satz von den Gleichungen ſ. m. einen beſondern Artikel.

Goniometrie.

I. Erklärung des Sinus und Coſinus.

Allgemeine Entwickelung der Grundformeln.

1. Um die Lage eines Punktes in einer Ebene zu beſtimmen, denken wir uns zwei auf einander ſenkrechte gerade Linien von unbeſtimmter Länge in derſelben Ebene, welche die Axen genannt werden. Der Durchſchnittspunkt derſelben heißt der Anfang und mag im Folgenden immer durch **O** bezeichnet werden. Derſelbe theilt jede der beiden Axen in zwei Theile von unbeſtimmter Länge. Den einen dieſer beiden Theile nennt man bei jeder Axe den poſitiven, den andern den negativen Theil. Obgleich es an ſich ganz willkührlich iſt, welchen der beiden Theile man als den poſitiven, und welchen man als den negativen annehmen will; ſo iſt es doch nöthig, in dieſer Beziehung eine beſtimmte Uebereinkunft zu treffen. Wir wollen daher im Folgenden immer die eine Axe in horizontaler, die andere in vertikaler Lage annehmen, und erſtere die Abſciſſenaxe, letztere die Ordinatenaxe nennen. Bei erſterer ſoll jederzeit der links vom Anfange liegende Theil als der poſitive, der rechts vom Anfange liegende Theil dagegen als der negative Theil angenommen werden, und auf ähnliche Weiſe wollen wir den oberhalb von der Abſciſſenaxe liegenden Theil der Ordinatenaxe als den poſitiven, den unterhalb der Abſciſſenaxe liegenden Theil derſelben als den negativen Theil annehmen. Auch wollen wir die Seite einer jeden der beiden Axen, auf welcher der poſitive und negative Theil der andern Axe liegt, reſpective die poſitive und negative Seite der erſtern Axe nennen.

2. Von einem beliebigen Punkte **M** in der Ebene, in welcher die beiden Axen liegen, denke man ſich nun ein Perpendikel

MN auf die Abſciſſenaxe gefällt; ſo wird zwiſchen dem Fußpunkte N dieſes Perpendikels und dem Anfange O ein gewiſſes Stück ON der Abſciſſenaxe liegen. Dieſes Stück ON wird als poſitiv oder negativ betrachtet, jenachdem es auf dem poſitiven oder negativen Theile der Abſciſſenaxe liegt, und dies durch Vorſetzung des Zeichens + oder — vor das Symbol ON angedeutet, ſo daß alſo + ON oder — ON anzeigt, daß im erſtern Falle die Linie ON auf dem poſitiven, im zweiten Falle dagegen auf dem negativen Theile der Abſciſſenaxe liegt. Eben ſo nimmt man auch MN als poſitiv oder negativ an, jenachdem dieſe Linie auf der poſitiven oder negativen Seite der Abſciſſenaxe liegt, und bezeichnet das Erſte durch Vorſetzung des Zeichens +, das Zweite durch Vorſetzung des Zeichens —, ſo daß alſo + MN und — MN anzeigt, daß im erſten Falle das Perpendikel MN auf der poſitiven, im zweiten dagegen auf der negativen Seite der Abſciſſenaxe liegt. Die Linien ON und MN, mit Rückſicht auf die Vorzeichen, welche ihnen nach dem Vorhergehenden zukommen, d. h. die Ausdrücke ± ON und ± MN, wo keine Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander Statt findet, heißen die Coordinaten des Punktes M, und zwar heißt ± ON die Abſciſſe, dagegen ± MN die Ordinate dieſes Punktes.

3. Durch ſeine beiden Coordinaten iſt die Lage des Punktes M in der Ebene, in welcher auch die beiden Axen liegen, offenbar vollkommen beſtimmt. Um den Anfang O herum liegen nämlich vier rechte Winkel, welche von dem poſitiven Theile der Abſciſſenaxe und dem poſitiven Theile der Ordinatenaxe, von dem poſitiven Theile der Ordinatenaxe und dem negativen Theile der Abſciſſenaxe, von dem negativen Theile der Abſciſſenaxe und dem negativen Theile der Ordinatenaxe, von dem negativen Theile der Ordinatenaxe und dem poſitiven Theile der Abſciſſenaxe eingeſchloſſen werden, und nach dieſer Ordnung der erſte, zweite, dritte, vierte rechte Winkel genannt werden ſollen. Je nachdem nun der Punkt M in dem erſten, zweiten, dritten, vierten rechten Winkel liegt, ſind ſeine Coordinaten offenbar

$$+\mathrm{ON},\ +\mathrm{MN};$$
$$-\mathrm{ON},\ +\mathrm{MN};$$
$$-\mathrm{ON},\ -\mathrm{MN};$$
$$+\mathrm{ON},\ -\mathrm{MN};$$

wodurch man die obige Behauptung, daß durch ſeine beiden Coordinaten die Lage des Punktes M vollſtändig beſtimmt werde, gerechtfertigt finden wird. Liegt der Punkt M in der Ordinatenaxe, ſo iſt ſeine Abſciſſe $=0$; liegt derſelbe dagegen in der Abſciſſenaxe, ſo iſt ſeine Ordinate $=0$; die Coordinaten des Anfangs O ſind beide $=0$.

4. Man denke ſich jetzt zwei beliebige einander parallele gerade Linien oder Axen, die der Kürze wegen durch A und (A) bezeichnet werden mögen. Jeder dieſer beiden Axen legen wir eine

poſitive und eine negative Seite bei, und zwar ſollen die poſitive und negative Seite der Axe (A) von dieſer Axe an nach derſelben Gegend hin liegen, wie die poſitive und negative Seite der Axe **A** von dieſer Axe an. Die Entfernung der Axe (A) von der Axe **A**, mit gehöriger Berückſichtigung ihres Vorzeichens, ſey e. **M** ſey ein beliebiger Punkt in derſelben Ebene, in welcher die beiden Axen liegen, und t, (t) ſeyen die Entfernungen dieſes Punktes von den beiden Axen, ebenfalls mit gehöriger Berückſichtigung ihrer Vorzeichen. Iſt nun zuerſt e poſitiv, ſo können in Bezug auf die Lage des Punktes **M** gegen die beiden Axen folgende Fälle Statt finden. Liegt **M** auf der poſitiven Seite der Axe (A), ſo ſind t und (t) beide poſitiv; t iſt offenbar größer wie (t), und, wie ſogleich in die Augen fällt, $t = e + (t)$. Iſt $(t) = 0$, ſo liegt **M** in der durch (A) bezeichneten Axe, die vorhergehende Gleichung findet aber offenbar noch Statt. Liegt **M** auf der negativen Seite der Axe (A), aber auf der poſitiven Seite der Axe **A**, d. i. zwiſchen den beiden Axen; ſo iſt (t) negativ, $-(t)$ poſitiv, t poſitiv, und offenbar $t + \{-(t)\} = e$, d. i. $t - (t) = e$, oder wieder $t = e + (t)$. Liegt **M** auf der negativen Seite der Axe **A**; ſo ſind t und (t) beide negativ, $-t$ und $-(t)$ beide poſitiv, $-(t)$ iſt größer als $-t$, und offenbar $-(t) = e + (-t) = e - t$, d. i. wieder $t = e + (t)$. Iſt $t = 0$, ſo liegt **M** in der durch **A** bezeichneten Axe, und es iſt in dieſem Falle offenbar $(t) = -e$, ſo daß alſo die vorhergehende Gleichung noch Statt findet. Iſt folglich e poſitiv, ſo iſt in allen Fällen $t = e + (t)$. Iſt e negativ, ſo kann man ſich die poſitive und negative Seite einer jeden der beiden Axen mit einander vertauſcht denken. Dann iſt das poſitive $-e$ die Entfernung der Axe (A) von der Axe **A**, und $-t$, $-(t)$ ſind die Abſtände des Punktes **M** von den beiden Axen mit gehöriger Berückſichtigung ihrer Vorzeichen. Alſo iſt nach dem Vorhergehenden $-t = -e + \{-(t)\} = -e -(t)$, d. i. $t = e + (t)$. Man ſieht alſo, daß für jedes poſitive und negative e, wenn e, t, (t) die ihnen oben beigelegte Bedeutung behalten, in völliger Allgemeinheit

$$1.\quad t = e + (t)$$

iſt.

5. Nimmt man die auf einander ſenkrechten Axen in anderer Lage an, ſo ändern ſich natürlich auch die Coordinaten des Punktes **M**, und man nennt die Operation, durch welche die Coordinaten eines gegebenen Punktes in Bezug auf zwei Axen, welche man die primitiven Axen nennt, durch ſeine Coordinaten in Bezug auf zwei andere Axen, welche man die ſecundären Axen nennt, ausgedrückt werden, Veränderung, Verwandlung oder Transformation der Coordinaten, woraus nun auch von ſelbſt erhellen wird, was man unter primitiven und ſecundären Coordinaten zu verſtehen hat. Die ſecun-

dären Coordinaten ſollen im Folgenden immer durch Einſchließung in Parentheſen von den primitiven Coordinaten unterſchieden werden. Die primitive Abſciſſe und Ordinate des neuen Anfangs, d. h. des Durchſchnittspunktes der ſecundären Axen, wollen wir immer reſpective durch **a** und **b** bezeichnen.

Sind die ſecundären Axen den primitiven parallel, nämlich die ſecundäre Abſciſſenaxe der primitiven Abſciſſenaxe, die ſecundäre Ordinatenaxe der primitiven Ordinatenaxe, und werden in beiden Syſtemen die poſitiven und negativen Abſciſſen und Ordinaten von den Anfangspunkten an nach denſelben Seiten hin genommen; ſo folgt aus (1.), weil die dortigen t, (t) ſowohl die primitive und ſecundäre Abſciſſe, als auch die primitive und ſecundäre Ordinate bezeichnen können, auf der Stelle, daß immer in völliger Allgemeinheit

$$2.\quad x = a + (x),\ y = b + (y)$$

iſt, wenn x, y und (x), (y) die primitiven und ſecundären Coordinaten eines und deſſelben Punktes ſind.

6. Denkt man ſich jetzt in **Fig. 28.**, wo **Ox** und **Oy** die poſitiven Theile der beiden Axen ſind, eine beliebige durch den Anfang **O** gehende gerade Linie gezogen; ſo kann dieſelbe, wenn ſie mit keiner der beiden Axen zuſammenfällt, bloß eine der beiden in der Figur dargeſtellten Lagen haben. In dem erſten dieſer beiden Fälle iſt, wie ſogleich erhellet:

$$\left.\begin{array}{r} +ON : +MN \\ = +ON_1 : +M_1N_1 \\ = +ON_2 : +M_2N_2 \\ = +ON_3 : +M_3N_3 \\ \text{u. ſ. w.} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} -ON' : -M'N' \\ = -ON'_1 : -M'_1N'_1 \\ = -ON'_2 : -M'_2N'_2 \\ = -ON'_3 : -M'_3N'_3 \\ \text{u. ſ. w.} \end{array}\right.$$

und im zweiten Falle:

$$\left.\begin{array}{r} +ON : -MN \\ = +ON_1 : -M_1N_1 \\ = +ON_2 : -M_2N_2 \\ = +ON_3 : -M_3N_3 \\ \text{u. ſ. w.} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} -ON' : +M'N' \\ = -ON'_1 : +M'_1N'_1 \\ = -ON'_2 : +M'_2N'_2 \\ = -ON'_3 : +M'_3N'_3 \\ \text{u. ſ. w.:} \end{array}\right.$$

In beiden Fällen iſt alſo für jeden Punkt der in Rede ſtehenden geraden Linie das Verhältniß der Abſciſſe zur Ordinate ein conſtantes Verhältniß. Bezeichnen wir folglich den Exponenten dieſes Verhältniſſes durch **A**; ſo iſt für jedes **x** und **y** eines und deſſelben Punktes der geraden Linie **x:y = 1: A**, d. i.

$$3.\quad y = Ax.$$

Fiele die durch den Anfang gehende gerade Linie mit der Abſciſſenaxe zuſammen, ſo wäre für jedes **x** die entſprechende Ordinate **y** offenbar = 0, in obiger Gleichung folglich **A = 0** zu ſetzen. Den Fall, wo die in Rede ſtehende gerade Linie mit der Ordinatenaxe zuſammenfällt, ſchließen wir jetzt von der Betrachtung

ganz aus, da in demſelben offenbar von einem Verhältniſſe der Abſciſſe zur Ordinate im eigentlichen Sinne gar nicht die Rede ſeyn kann, weil in dieſem Falle die Abſciſſe immer $=0$ iſt, die Ordinate aber jeden beliebigen Werth haben kann. Man nennt die Gleichung $y=Ax$ die Gleichung einer durch den Anfang der Coordinaten gehenden geraden Linie, weil durch dieſelbe die zwiſchen der Abſciſſe und Ordinate eines jeden Punktes einer ſolchen Linie Statt findende Relation ganz allgemein algebraiſch oder analytiſch dargeſtellt wird.

Vorzüglich wichtig für das Folgende iſt die aus dem Vorhergehenden ſich unmittelbar ergebende Bemerkung, daß, wenn $y=Ax$ und $y=A'x$ die Gleichungen zweier durch den Anfang gehenden geraden Linien von den beiden in **Fig. 28.** dargeſtellten Lagen ſind, die conſtanten Größen **A** und **A'** jederzeit entgegengeſetzte Vorzeichen haben.

7. Man denke ſich jetzt zwei beliebige durch den Anfang **O** gehende auf einander ſenkrechte gerade Linien. Die Gleichungen dieſer beiden Linien ſind, wie wir aus dem Vorhergehenden wiſſen, von der Form

$$y=Ax,\ y=A'x\,.$$

Nimmt man nun auf den beiden in Rede ſtehenden in **Fig. 29.** dargeſtellten Linien $OM=OM'$, und fällt von **M** und **M'** auf die Abſciſſenaxe die Perpendikel **MN**, **M'N'**; ſo iſt, wie auf der Stelle erhellet, $ON=M'N'$ und $MN=ON'$. Die conſtanten Coefficienten in den beiden obigen Gleichungen haben nach (6.) die abſoluten Werthe

$$\frac{MN}{ON} \text{ und } \frac{M'N'}{ON'},$$

oder, weil nach der eben gemachten Bemerkung $M'N'=ON$, $ON'=MN$ iſt, die abſoluten Werthe

$$\frac{MN}{ON} \text{ und } \frac{ON}{MN},$$

ſo daß alſo, weil

$$\frac{MN}{ON}\cdot\frac{ON}{MN}=1$$

iſt, das Product der abſoluten Werthe der beiden conſtanten Coefficienten **A** und **A'** jederzeit die Einheit iſt. Weil aber die Lage der einen der beiden auf einander ſenkrechten geraden Linien jederzeit mit dem einen, die Lage der andern der beiden auf einander ſenkrechten geraden Linien dagegen jederzeit mit dem andern der beiden in (6.) betrachteten Fälle übereinſtimmt; ſo haben **A** und **A'** immer entgegengeſetzte Vorzeichen, und es iſt folglich für jede zwei durch den Anfang **O** gehende auf einander ſenkrechte gerade Linien, deren Gleichungen $y=Ax$ und $y=A'x$ ſind,

$$4.\quad AA'=-1\,.$$

Iſt alſo

$$y = Ax$$

die Gleichung einer beliebigen durch den Anfang gehenden geraden Linie; ſo iſt

$$y = -\frac{1}{A}x$$

jederzeit die Gleichung der auf derſelben ſenkrechten, ebenfalls durch den Anfang gehenden geraden Linie.

8. Wir denken uns jetzt zwei beliebige durch den Anfang gehende auf einander ſenkrechte neue Axen, und ſtellen uns folgende Aufgabe:

Die Coordinaten x, y eines beliebigen Punktes M in Bezug auf die primitiven Axen durch die Coordinaten (x), (y) dieſes Punktes in Bezug auf die ſecundären Axen auszudrücken.

Die Gleichung der ſecundären Abſciſſenaxe in Bezug auf die primitiven Axen ſey

$$y = Ax\ ;$$

ſo iſt nach (7.)

$$y = -\frac{1}{A}x$$

die Gleichung der ſecundären Ordinatenaxe.

Den poſitiven Theil der ſecundären Abſciſſenaxe wollen wir immer ſo annehmen, daß er mit dem poſitiven Theile der primitiven Abſciſſenaxe auf einer Seite der primitiven Ordinatenaxe liegt, und eben ſo wollen wir den poſitiven Theil der ſecundären Ordinatenaxe jederzeit ſo annehmen, daß er mit dem poſitiven Theile der primitiven Ordinatenaxe auf einer Seite der primitiven Abſciſſenaxe liegt.

Unter dieſen Vorausſetzungen unterſcheiden wir nun bei der Auflöſung der obigen Aufgabe die drei folgenden Fälle:

I. Wenn der Punkt M in der ſecundären Abſciſſenaxe liegt.

II. Wenn der Punkt M in der ſecundären Ordinatenaxe liegt.

III. Wenn der Punkt M in keiner der beiden ſecundären Axen liegt.

Jeden dieſer drei Fälle wollen wir im Folgenden näher betrachten.

9. Liegt der Punkt M zuerſt in der ſecundären Abſciſſenaxe, ſo bilden die den drei Coordinaten x, y, (x) entſprechenden Linien offenbar jederzeit ein rechtwinkliges Dreieck, deſſen Hypotenuſe die der ſecundären Abſciſſe (x) entſprechende Linie iſt. Weil nun jedes Quadrat poſitiv iſt; ſo iſt, wie man auf der Stelle überſieht, in völliger Allgemeinheit:

$$6.\quad x^2 + y^2 = (x)^2\ .$$

Die Gleichung der ſecundären Abſciſſenaxe, in welcher der Punkt **M** liegt, iſt nach (8.) die Gleichung $y = Ax$. Daher findet in allen Fällen zwiſchen den primitiven Coordinaten des Punktes **M** die Gleichung

$$6.\quad y = Ax$$

Statt, ſo daß man alſo jetzt zwiſchen x, y und (x) die beiden Gleichungen (5.) und (6.) hat, aus denen man ſehr leicht in völliger Allgemeinheit

$$7.\quad x^2 = \frac{(x)^2}{1 + A^2},\ y^2 = \frac{A^2 (x)^2}{1 + A^2}$$

erhält. Durch Ausziehung der Quadratwurzel würde man nun x und y ſelbſt erhalten, wobei es aber eine beſondere Unterſuchung, welche hier die Hauptſache iſt, erfordert, mit welchen Vorzeichen die Quadratwurzeln zu nehmen ſind. Dieſe Unterſuchung läßt ſich auf folgende Art anſtellen.

Die ſecundäre Abſciſſenaxe kann gegen die primitiven Axen bloß eine der beiden in **Fig. 28.** dargeſtellten Lagen haben. Im erſten Falle iſt nach (6.)

$$A = \frac{+MN}{+ON},$$

alſo poſitiv. Iſt in dieſem Falle **M** der gegebene Punkt, ſo iſt $(x) = +OM$, d. i. poſitiv, und x, y ſind beide poſitiv. Folglich iſt nach (7.)

$$x = \frac{(x)}{\sqrt{1 + A^2}},\ y = \frac{A(x)}{\sqrt{1 + A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner poſitiv genommen. Iſt dagegen in demſelben Falle **M′** der gegebene Punkt, ſo iſt $(x) = -OM'$, d. i. negativ, und x, y ſind beide negativ. Alſo iſt, da **A** poſitiv iſt, nach (7.) wieder

$$x = \frac{(x)}{\sqrt{1 + A^2}},\ y = \frac{A(x)}{\sqrt{1 + A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner poſitiv genommen.

In dem zweiten der beiden in **Fig. 28.** dargeſtellten Fälle iſt nach (6.)

$$A = \frac{-MN}{+ON},$$

d. i. negativ. Iſt in dieſem Falle **M** der gegebene Punkt, ſo iſt $(x) = +OM$, alſo poſitiv, und x iſt poſitiv, y dagegen negativ. Folglich iſt, weil **A** negativ iſt, nach (7.) wieder

$$x = \frac{(x)}{\sqrt{1 + A^2}},\ y = \frac{A(x)}{\sqrt{1 + A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner poſitiv genommen. Iſt dagegen in dieſem Falle **M′** der gegebene Punkt, ſo iſt $(x) = -OM'$, d. i. negativ, und x iſt negativ, y poſitiv. Alſo iſt, weil **A** negativ iſt, nach (7.) wieder

$$x = \frac{(x)}{\sqrt{1 + A^2}},\ y = \frac{A(x)}{\sqrt{1 + A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner poſitiv genommen.

Liegt alſo der Punkt **M** in der ſecundären Abſciſſenaxe, ſo iſt immer

$$8.\quad x = \frac{(x)}{\sqrt{1 + A^2}},\ y = \frac{A(x)}{\sqrt{1 + A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner poſitiv genommen.

10. Liegt der Punkt **M** ferner in der ſecundären Ordinatenaxe, ſo bilden wieder die den Coordinaten x, y, (y) entſprechenden Linien ein rechtwinkliges Dreieck, deſſen Hypotenuſe die der ſecundären Ordinate (y) entſprechende Linie iſt, und es iſt folglich, weil jedes Quadrat poſitiv iſt, immer in völliger Allgemeinheit

$$9.\quad x^2 + y^2 = (y)^2.$$

Da nun die Gleichung der ſecundären Ordinatenaxe, in welcher **M** liegt, bekanntlich $y = -\frac{1}{A}x$ iſt; ſo hat man zwiſchen den primitiven Coordinaten des Punktes **M** immer die Gleichung

$$10.\quad y = -\frac{1}{A}x,$$

und findet nun leicht aus (9.) und (10.) in völliger Allgemeinheit

$$11.\quad x^2 = \frac{A^2(y)^2}{1 + A^2},\ y^2 = \frac{(y)^2}{1 + A^2}.$$

Durch Ausziehung der Quadratwurzeln würde man x, y ſelbſt erhalten, muß nun aber wieder eine beſondere Unterſuchung über die Zeichen, mit denen die Quadratwurzeln zu nehmen ſind, anſtellen.

Die neue Ordinatenaxe kann gegen die primitiven Axen bloß eine der beiden in **Fig.** 28. dargeſtellten Lagen haben. In dem erſten der in **Fig.** 28. dargeſtellten Fälle iſt nach (6.)

$$-\frac{1}{A} = \frac{+MN}{+ON},$$

alſo **A** negativ. Iſt nun **M** der gegebene Punkt, ſo iſt $(y) = +$ **OM**, d. i. poſitiv, und x, y ſind poſitiv. Alſo iſt, weil **A** negativ iſt, nach (11.)

$$x = -\frac{A(y)}{\sqrt{1 + A^2}},\ y = \frac{(y)}{\sqrt{1 + A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner poſitiv genommen. Iſt **M'** der gegebene Punkt, ſo iſt $(y) = -$ **OM'**, d. i. negativ, und x, y ſind negativ. Alſo iſt nach (11.) wieder

$$x = -\frac{A(y)}{\sqrt{1 + A^2}},\ y = \frac{(y)}{\sqrt{1 + A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner poſitiv genommen.

Im zweiten Falle iſt nach (6.)

$$-\frac{1}{A}=\frac{-MN}{+ON},$$

alſo **A** poſitiv. Iſt nun in dieſem Falle **M** der gegebene Punkt, ſo iſt $(y) = -$ **OM**, d. i. negativ, und **x** iſt poſitiv, **y** dagegen negativ. Alſo iſt nach (11.)

$$x=-\frac{A(y)}{\sqrt{1+A^2}},\ y=\frac{(y)}{\sqrt{1+A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner poſitiv genommen. Iſt dagegen **M'** der gegebene Punkt, ſo iſt $(y) = +$ **OM'**, d. i. poſitiv, und **x** iſt negativ, **y** poſitiv. Alſo iſt, weil **A** poſitiv iſt, nach (11.) wieder

$$x=-\frac{A(y)}{\sqrt{1+A^2}},\ y=\frac{(y)}{\sqrt{1+A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner poſitiv genommen.

Liegt alſo der Punkt **M** in der ſecundären Ordinatenaxe, ſo iſt immer

$$12.\quad x=-\frac{A(y)}{\sqrt{1+A^2}},\ y=\frac{(y)}{\sqrt{1+A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner poſitiv genommen.

11. Wir wollen nun zu der Betrachtung des allgemeinſten Falls, wenn der Punkt **M** in keiner der beiden ſecundären Axen liegt, übergehen, wobei wir bemerken, daß, wenn wir uns größerer Deutlichkeit wegen dabei hier auf Fig. 30. beziehen, die folgenden Betrachtungen doch ſo allgemein aufgefaßt werden müſſen, wie ſie es in der That ſind. Dieſelben ſind durchaus nicht auf den in der erwähnten Figur dargeſtellten ſpeciellen Fall eingeſchränkt, ſondern gelten in der größten Allgemeinheit, und würden auch ohne dieſe Figur, die nur größerer Deutlichkeit wegen gezeichnet worden iſt, völlig verſtändlich ſeyn. Dieſelbe mag daher bei dem erſten Durchdenken des Folgenden verglichen, dann aber ganz bei Seite gelegt werden.

Durch den Punkt **M** denke man ſich eine mit der Axe der (x) parallele gerade Linie gelegt, welche die Axe der (y) in einem gewiſſen Punkte ſchneiden wird, den wir uns durch O_1 bezeichnet denken wollen. Dieſen Punkt nehme man als den Durchſchnittspunkt zweier mit den ſecundären Axen der (x) und (y), und zugleich als den Durchſchnittspunkt zweier mit den primitiven Axen der x und y parallelen Axen an, und denke ſich alſo durch den Punkt O_1 ſowohl zwei neue mit den Axen der (x) und (y), als auch zwei neue mit den Axen der x und y parallele Axen gelegt. Die poſitiven Theile der erſtern wollen wir uns durch O_1x_1, O_1y_1, die poſitiven Theile der letztern durch O_1x_2, O_1y_2 bezeichnet denken, wobei wir zugleich beſtimmen, daß die poſitiven Theile O_1x_1, O_1y_1 von O_1 aus nach denſelben Seiten hin wie die poſitiven Theile O(x), O(y) der ſecundären Axen der (x),

(y) von O aus, die poſitiven Theile O_1x_2, O_1y_2 aber von O_1 aus nach denſelben Seiten hin wie die poſitiven Theile Ox, Oy der primitiven Axen der x, y von O aus liegen ſollen. Da nun das Syſtem der Linien O_1x_2, O_1y_2, O_1x_1 offenbar bloß ſeinem Orte in der Conſtructionsebene nach von dem Syſteme der Linien Ox, Oy, O(x) verſchieden iſt; ſo iſt

$$y_2 = Ax_2$$

die Gleichung der Axe der x_1 in Bezug auf die Axen der x_2 und y_2, weil nach der in (8.) gemachten Vorausſetzung

$$y = Ax$$

die Gleichung der Axe der (x) in Bezug auf die Axen der x und y iſt. Der Punkt M liegt in der Axe der x_1. Alſo iſt nach (8.)

$$13.\quad x_2 = \frac{x_1}{\sqrt{1+A^2}},\ y_2 = \frac{Ax_1}{\sqrt{1+A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner poſitiv genommen. Es iſt aber klar, daß für jede Lage des Punktes M in völliger Allgemeinheit der Größe und dem Zeichen nach immer $x_1 = (x)$ iſt. Alſo iſt immer in völliger Allgemeinheit

$$14.\quad x_2 = \frac{(x)}{\sqrt{1+A^2}},\ y_2 = \frac{A(x)}{\sqrt{1+A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner poſitiv genommen. Sind nun a, b die Coordinaten des Punktes O_1 in Bezug auf die primitiven Axen der x und y; ſo iſt nach (2.) in völliger Allgemeinheit

$$15.\quad x = a + x_2,\ y = b + y_2.$$

Alſo iſt nach (14.)

$$16.\quad x = a + \frac{(x)}{\sqrt{1+A^2}},\ y = b + \frac{A(x)}{\sqrt{1+A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner poſitiv genommen. Der Punkt O_1 liegt aber in der Axe der (y). Alſo iſt nach (12.), da das (y) des Punktes O_1 mit dem (y) des Punktes M in allen Fällen offenbar völlig einerlei iſt,

$$17.\quad a = -\frac{A(y)}{\sqrt{1+A^2}},\ b = \frac{(y)}{\sqrt{1+A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner poſitiv genommen. Nach (16.) und (17.) iſt folglich, wenn man die Quadratwurzel im Nenner poſitiv nimmt, in größter Allgemeinheit:

$$18.\quad x = \frac{(x)-A(y)}{\sqrt{1+A^2}},\ y = \frac{(y)+A(x)}{\sqrt{1+A^2}}.$$

12. Die beiden vorhergehenden Formeln ſind völlig allgemein, wenn das primitive und ſecundäre Syſtem einerlei Anfangspunkt haben. Iſt dies aber nicht der Fall, ſo bezeichne man die Coordinaten des Anfangspunktes des neuen Syſtems in Bezug auf das primitive Syſtem durch a, b, und denke ſich durch

den Anfangspunkt des ſecundären Syſtems zwei mit den primitiven Axen parallele Axen gelegt, in Bezug auf welche die Coordinaten eines jeden Punktes durch x_1, y_1 bezeichnet werden ſollen. Dann iſt nach (18.)

$$x_1 = \frac{(x) - A(y)}{\sqrt{1+A^2}}, \quad y_1 = \frac{(y) + A(x)}{\sqrt{1+A^2}},$$

die Quadratwurzel immer poſitiv genommen. Weil nun aber nach (2.)

$$x = a + x_1, \quad y = b + y_1$$

iſt; ſo iſt für jede zwei rechtwinklige Syſteme in völliger Allgemeinheit

$$19. \quad x = a + \frac{(x) - A(y)}{\sqrt{1+A^2}}, \quad y = b + \frac{(y) + A(x)}{\sqrt{1+A^2}},$$

die Quadratwurzel poſitiv genommen. Obgleich wir dieſe Formeln zu unſerm nächſten Zwecke nicht gebrauchen, ſo haben wir ſie doch kurz entwickelt, weil ſie ſich aus dem Vorhergehenden mit größter Leichtigkeit ergeben.

13. Man denke ſich jetzt um O als Mittelpunkt mit dem beliebigen Halbmeſſer r einen Kreis beſchrieben, und nehme in deſſen Peripherie zwei ganz beliebige Punkte M und M′ an. Ferner lege man durch O zwei beliebige auf einander ſenkrechte Axen, und bezeichne die Coordinaten der Punkte M und M′ in Bezug auf dieſe Axen reſpective durch x, y und x', y'. Dann lege man durch O noch zwei neue auf einander ſenkrechte Axen und laſſe die Abſciſſenaxe dieſes Syſtems durch den Punkt M gehen. Die Coordinaten der Punkte M und M′ in Bezug auf dieſe neuen Axen ſeyen reſpective (x), (y) und (x'), (y'), wo aber augenblicklich erhellet, daß $(y) = 0$ und (x) ſeinem abſoluten Werthe nach $= r$ iſt. Die poſitiven Theile der beiden Axen werden den in (8.) gegebenen Beſtimmungen gemäß genommen. Unter dieſen Vorausſetzungen iſt nach (8.) und (18.), wenn $y = Ax$ die Gleichung der Axe der (x) oder (x') in Bezug auf die beiden primitiven Axen iſt,

$$x = \frac{(x)}{\sqrt{1+A^2}}, \quad y = \frac{A(x)}{\sqrt{1+A^2}};$$

$$x' = \frac{(x') - A(y')}{\sqrt{1+A^2}}, \quad y' = \frac{(y') + A(x')}{\sqrt{1+A^2}};$$

die Quadratwurzel poſitiv genommen. Hieraus folgt nach leichter Rechnung in völliger Allgemeinheit

$$20. \quad xx' + yy' = (x)(x'), \quad xy' - x'y = (x)(y').$$

Da (x) poſitiv iſt, wenn M im erſten oder vierten, negativ dagegen, wenn M im zweiten oder dritten Quadranten liegt, wobei man die in (1.) und (8.) gegebenen Beſtimmungen zu berückſichtigen hat; ſo iſt, weil der abſolute Werth von (x) dem Halbmeſſer r gleich iſt,

$$21. \quad xx' + yy' = \pm r(x'), \quad xy' - x'y = \pm r(y'),$$

unter der Bedingung, daß man die obern Zeichen nimmt, wenn M im erſten oder vierten, die untern dagegen, wenn M im zweiten oder dritten Quadranten liegt.

Will man aber der doppelten Vorzeichen überhoben ſeyn, ſo vertauſche man, wenn M im zweiten oder dritten Quadranten liegt, die poſitiven und negativen Theile der ſecundären Axen mit einander. Dann ändern (x′) und (y′) ihre Zeichen, und die obigen Gleichungen werden in den beiden in Rede ſtehenden Fällen

$$xx' + yy' = - r\{-(x')\}, \; xy' - x'y = - r\{-(y')\}$$

oder

$$xx' + yy' = r(x'), \; xy' - x'y = r(y'),$$

ſo daß man alſo allgemein

$$22. \quad xx' + yy' = r(x'), \quad xy' - x'y = r(y')$$

ſetzen kann, wenn man ſich nur an die folgenden Beſtimmungen hält:

Wenn M im erſten Quadranten liegt, liegt der poſitive Theil der ſecundären Abſciſſenaxe im erſten, der poſitive Theil der ſecundären Ordinatenaxe im zweiten rechten Winkel. Wenn M im zweiten Quadranten liegt, liegt der poſitive Theil der ſecundären Abſciſſenaxe im zweiten, der poſitive Theil der ſecundären Ordinatenaxe im dritten rechten Winkel. Wenn M im dritten Quadranten liegt, liegt der poſitive Theil der ſecundären Abſciſſenaxe im dritten, der poſitive Theil der ſecundären Ordinatenaxe im vierten rechten Winkel. Wenn M im vierten Quadranten liegt, liegt der poſitive Theil der ſecundären Abſciſſenaxe im vierten, der poſitive Theil der ſecundären Ordinatenaxe im erſten rechten Winkel. Ueberhaupt wird immer der von O nach M gezogene Radius als der poſitive Theil der ſecundären Abſciſſenaxe, der poſitive Theil der ſecundären Ordinatenaxe aber in dem rechten Winkel angenommen, welcher auf den Quadranten folgt, in dem der Punkt M liegt. Der erſte rechte Winkel folgt hierbei auf den vierten Quadranten. Alles dieſes iſt des Folgenden wegen wohl zu berückſichtigen.

14. Nimmt man nun in der Peripherie des um O mit dem Radius r beſchriebenenen Kreiſes einen beliebigen Punkt A an; ſo kann man von dieſem Punkte an die Peripherie offenbar ein oder mehrere Mal nach zwei verſchiedenen Richtungen hin durchlaufen, indem man nämlich entweder immer aus jedem Quadranten in den nächſt folgenden oder in den nächſt vorhergehenden übergeht, wobei immer der erſte Quadrant auf den vierten folgt. Jeder von A an nach der erſten Richtung hin durchlaufene Bogen ſoll als poſitiv, jeder von A an nach der zweiten Richtung hin durchlaufene Bogen als negativ betrachtet werden. In beiden Fällen kann man die Peripherie beliebig oft überſchreiten. Jeder auf die eine oder andere Art durchlaufene Bogen, welcher, bei A anfangend, bei dem beliebigen Punkte M der Peripherie ſich endigt, ſoll ein dem Punkte M zugehörender Bogen ge-

nannt werden, woraus ſogleich erhellet, daß jedem Punkte der Peripherie unendlich viele poſitive und negative Bogen zugehören können. **A** wird immer als Anfang betrachtet. Den abſoluten Werth der halben Peripherie eines Kreiſes, deſſen Radius $= \mathbf{r}$ iſt, wollen wir durch p, den abſoluten Werth der halben Peripherie eines Kreiſes, deſſen Radius die Einheit iſt, dagegen durch π bezeichnen. Dies vorausgeſetzt, iſt es leicht, den folgenden Satz zu beweiſen.

15. **Wenn M und M′ (Fig. 31.) zwei beliebige Punkte in der Peripherie des um O mit r als Radius beſchriebenen Kreiſes, und α, α' zwei beliebige den Punkten M, M′ für A als Anfangspunkt zugehörende Bogen ſind; ſo iſt immer $\alpha' - \alpha$ ein dem Punkte M′ zugehörender Bogen, wenn man M als Anfangspunkt betrachtet, und die poſitiven und negativen Bogen von M an nach denſelben Seiten hin nimmt, wie von A an.**

Um dieſen Satz mit völliger Strenge und Deutlichkeit zu beweiſen, wollen wir zuerſt den Fall beſonders betrachten, wenn der abſolute Werth keines der Bogen α, α' eine Peripherie überſteigt. In Bezug auf die gegenſeitige Lage des Anfangspunktes **A** und der Punkte **M, M′** können offenbar bloß die beiden in **Fig. 31.** dargeſtellten Fälle Statt finden, indem man nämlich, wenn man von **A** aus die poſitive Richtung verfolgt, entweder zuerſt auf den Punkt **M**, oder zuerſt auf den Punkt **M′** treffen muß. Rückſichtlich der Vorzeichen der von einander abzuziehenden Bogen können in den beiden ſo eben angedeuteten Hauptfällen bloß die folgenden verſchiedenen Fälle eintreten.

I. In dem erſten der beiden in **Fig. 31.** dargeſtellten Fälle:

$$(+\mathrm{AM'}) - (+\mathrm{AM}) = +(\mathrm{AMM'} - \mathrm{AM}) = +\mathrm{MM'},$$
$$(-\mathrm{AM'}) - (+\mathrm{AM}) = -(\mathrm{AM'} + \mathrm{AM}) = -\mathrm{MM'},$$
$$(+\mathrm{AM'}) - (-\mathrm{AM}) = +(\mathrm{AMM'} + \mathrm{AM'M}) = +(2\mathrm{p} + \mathrm{MM'}),$$
$$(-\mathrm{AM'}) - (-\mathrm{AM}) = +(\mathrm{AM'M} - \mathrm{AM'}) = +\mathrm{MM'}.$$

II. In dem zweiten der beiden in **Fig. 31.** dargeſtellten Fälle:

$$(+\mathrm{AM'}) - (+\mathrm{AM}) = -(\mathrm{AM'M} - \mathrm{AM'}) = -\mathrm{MM'},$$
$$(-\mathrm{AM'}) - (+\mathrm{AM}) = -(\mathrm{AMM'} + \mathrm{AM'M}) = -(2\mathrm{p} + \mathrm{MM'}),$$
$$(+\mathrm{AM'}) - (-\mathrm{AM}) = +(\mathrm{AM'} + \mathrm{AM}) = +\mathrm{MM'},$$
$$(-\mathrm{AM'}) - (-\mathrm{AM}) = -(\mathrm{AMM'} - \mathrm{AM}) = -\mathrm{MM'}.$$

Man ſieht alſo, daß, wenn die abſoluten Werthe der Bogen α, α' eine Peripherie nicht überſteigen, die Differenz $\alpha' - \alpha$ immer ein bei **M** anfangender, bei **M′** ſich endigender, d. i. ein in Bezug auf **M** als Anfangspunkt dem Punkte **M′** zugehörender Bogen iſt, indem man die poſitiven und negativen Bogen von **M** an ganz nach derſelben Richtung hin nimmt, wie von **A** an.

Ueberſteigen aber die abſoluten Werthe der Bogen α, α' eine Peripherie, ſo kann man immer

$$\alpha = 2kp + \alpha_1, \quad \alpha' = 2k'p + \alpha'_1$$

ſetzen und annehmen, daß die abſoluten Werthe von α_1 und α'_1 eine Peripherie nicht überſteigen, und daß α_1 mit k, α'_1 mit k' gleiches Vorzeichen hat. Alſo iſt

$$\alpha' - \alpha = 2(k' - k)p + \alpha'_1 - \alpha_1.$$

Den poſitiven oder negativen Bogen $2(k' - k)p$ kann man ſich immer ſowohl bei A, als auch bei M anfangend, und reſpective bei denſelben Punkten ſich endigend denken. $\alpha'_1 - \alpha_1$ iſt nach dem Vorhergehenden ein dem Punkte M' in Bezug auf M als Anfangspunkt zugehörender Bogen, weil nämlich offenbar α_1 und α'_1 reſpective den Punkten M und M' in Bezug auf A als Anfangspunkt zugehörende Bogen ſind, und nach der Vorausſetzung der abſolute Werth keines dieſer beiden Bogen eine Peripherie überſteigt. Haben alſo $2(k' - k)p$ und $\alpha'_1 - \alpha_1$ gleiche Vorzeichen, ſo iſt offenbar

$$2(k' - k)p + \alpha'_1 - \alpha_1 = \alpha' - \alpha$$

ein bei M anfangender, bei M' ſich endigender, d. i. ein dem Punkte M' in Bezug auf M als Anfangspunkt zugehörender Bogen. Haben aber $2(k' - k)p$ und $\alpha'_1 - \alpha_1$ entgegengeſetzte Vorzeichen, ſo ſey zuerſt $2(k' - k)p$ poſitiv, $\alpha'_1 - \alpha_1$ negativ. Iſt $k' - k = 0$, ſo folgt der Satz unmittelbar aus dem Obigen, weil dann $\alpha'_1 - \alpha_1 = \alpha' - \alpha$ iſt. Iſt aber $k' - k > 0$, ſo ſey zuerſt der abſolute Werth von $\alpha'_1 - \alpha_1 \overline{\overline{<}} 2p$. Dann iſt offenbar

$$2p + \alpha'_1 - \alpha_1$$

ein dem Punkte M' in Bezug auf M als Anfangspunkt zugehörender poſitiver Bogen. Alſo iſt auch, wie ſogleich erhellet,

$$2(k' - k - 1)p + 2p + \alpha'_1 - \alpha_1 = 2(k' - k)p + \alpha'_1 - \alpha_1 = \alpha' - \alpha$$

ein dem Punkte M' in Bezug auf M als Anfangspunkt zugehörender poſitiver Bogen. Iſt ferner, wie vorher, $k' - k > 0$, der abſolute Werth von $\alpha'_1 - \alpha_1$ aber $> 2p$, jedoch, weil der abſolute Werth keines der beiden Bogen α_1, α'_1 eine Peripherie überſteigt, nicht $> 4p$; ſo ſey

$$\alpha'_1 - \alpha_1 = -2p - \alpha'',$$

wo α'' ein dem Punkte M' in Bezug auf M als Anfangspunkt zugehörender poſitiver Bogen iſt, deſſen Werth, weil der abſolute Werth von $\alpha'_1 - \alpha_1$ nicht $> 4p$ iſt, eine Peripherie nicht überſteigt oder $\overline{\overline{<}} 2p$ iſt. Es iſt folglich

$$2(k' - k)p + \alpha'_1 - \alpha_1 = 2(k' - k)p - 2p - \alpha'' = 2(k' - k - 1)p - \alpha'' = \alpha' - \alpha.$$

Hier iſt $2(k' - k - 1)p$ poſitiv und $-\alpha''$ iſt ein dem Punkte M' in Bezug auf M als Anfangspunkt zugehörender Bogen, deſſen

abſoluter Werth $\overline{\overline{<}}$ 2p iſt, ſo daß wir alſo jetzt wieder ganz den vorher betrachteten Fall haben, und folglich auch in dieſem Falle $\alpha' - \alpha$ ein dem Punkte M′ in Bezug auf M als Anfangspunkt zugehörender Bogen iſt.

Ferner ſey zweitens $2(k'-k)p$ negativ, $\alpha'_1 - \alpha_1$ poſitiv. Der Bogen

$$2(k-k')p + \alpha_1 - \alpha'_1,$$

wo $2(k-k')p$ poſitiv, $\alpha_1 - \alpha'_1$ negativ iſt, iſt nach dem Vorhergehenden ein dem Punkte M in Bezug auf M′ als Anfangspunkt zugehörender Bogen. Denkt man ſich nun dieſen Bogen nach der durch ſein Vorzeichen vorgeſchriebenen Richtung von M′ bis M wirklich durchlaufen, und legt dann denſelben Weg von M bis M′ wieder nach entgegengeſetzter Richtung zurück; ſo hat man jetzt offenbar den Bogen

$$-\{2(k-k')p + \alpha_1 - \alpha'_1\} = 2(k'-k)p + \alpha'_1 - \alpha_1 = \alpha' - \alpha$$

von M bis M′ durchlaufen, woraus alſo unmittelbar hervorgeht, daß dieſer Bogen ein dem Punkte M′ in Bezug auf M als Anfangspunkt zugehörender Bogen iſt, wie bewieſen werden ſollte.

Der Bogen $\alpha' - \alpha$ iſt folglich in allen Fällen ein dem Punkte M′ in Bezug auf M als Anfangspunkt zugehörender Bogen, welches der zu beweiſende Satz war.

16. Wir denken uns nun wieder um den Durchſchnittspunkt **O** der Coordinatenaxen mit dem beliebigen Halbmeſſer r einen Kreis beſchrieben, und nehmen den Punkt A, in welchem die Peripherie dieſes Kreiſes von dem poſitiven Theile der Axe der x geſchnitten wird, als Anfangspunkt der Bogen (14.) an. Iſt nun M ein beliebiger Punkt in der Peripherie des beſchriebenen Kreiſes, ſo heißt die Abſciſſe dieſes Punktes der Coſinus, die Ordinate dagegen der Sinus eines jeden dem Punkte M in Bezug auf A als Anfangspunkt zugehörenden Bogens für den Radius r. Auch nennt man den Coſinus und Sinus eines Bogens den Coſinus und Sinus des von dieſem Bogen gemeſſenen Winkels am Mittelpunkte, wobei man zu bemerken hat, daß die Winkel immer mit demſelben Vorzeichen genommen werden, wie die Bogen, welche dieſe Winkel meſſen.

Bezeichnet α einen beliebigen poſitiven oder negativen Bogen, oder den von dieſem Bogen gemeſſenen, immer mit demſelben Vorzeichen zu nehmenden, Winkel; ſo ſoll der Sinus und Coſinus dieſes Bogens oder Winkels, wenn r der Radius iſt, durch $\mathrm{Sin}\,\alpha$ und $\mathrm{Cos}\,\alpha$ bezeichnet werden. Setzt man aber den Radius r der Einheit gleich, ſo ſollen der Sinus und Coſinus des Bogens oder Winkels α durch $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ bezeichnet werden.

Aus der obigen Erklärung des Sinus und Coſinus eines Bogens ergiebt ſich unmittelbar der für das Folgende nicht un-

wichtige Satz, daß alle ein und demſelben Punkte in der Peripherie des um **O** beſchriebenen Kreiſes zugehörende Bogen gleiche Sinus und Coſinus haben, ſo wie umgekehrt jeder Sinus und Coſinus zu unendlich vielen verſchiedenen Bogen gehören kann.

17. Sind nun α, α' zwei ganz beliebige den ganz beliebigen Punkten **M, M'** in der Peripherie des mit dem beliebigen Radius r um **O** als Mittelpunkt beſchriebenen Kreiſes in Bezug auf **A** als Anfangspunkt zugehörende Bogen; ſo iſt, wenn x, y und x', y' die Coordinaten der Punkte **M** und **M'** ſind, wobei man ſich immer den poſitiven Theil der Axe der x oder x' von **O** aus nach dem Punkte **A** gezogen denken muß, nach (16.)

$$x = \text{Cos}\,\alpha, \quad y = \text{Sin}\,\alpha; \quad x' = \text{Cos}\,\alpha', \quad y' = \text{Sin}\,\alpha'.$$

Durch **O** lege man zwei neue auf einander ſenkrechte Axen, laſſe die neue Abſciſſenaxe durch den Punkt **M** gehen, und nehme die poſitiven Theile dieſer neuen Axen ganz den in (13.) gegebenen Beſtimmungen gemäß; ſo iſt, wenn wir die Coordinaten von **M'** in Bezug auf dieſe neuen Axen durch (x'), (y') bezeichnen, nach (22.) allgemein

$$r(x') = xx' + yy', \quad r(y') = xy' - x'y.$$

Ferner iſt nach (15.) $\alpha' - \alpha$ ein dem Punkte **M'** in Bezug auf **M** als Anfangspunkt zugehörender Bogen. Denkt man ſich nun das Syſtem der ſecundären Axen nach der Ordnung der aus dem Obigen bekannten vier rechten Winkel um den Punkt **O** herumgedreht, bis es mit dem Syſteme der primitiven Axen zuſammenfällt, wobei man immer die in (13.) wegen der poſitiven Theile der ſecundären Axen gegebenen Beſtimmungen im Auge zu behalten hat; ſo iſt klar, daß in allen Fällen

$$(x') = \text{Cos}(\alpha' - \alpha), \quad (y') = \text{Sin}(\alpha' - \alpha),$$

und folglich wegen der beiden obigen Gleichungen in größter Allgemeinheit für jedes beliebige poſitive oder negative α und α'

$$23. \quad r\,\text{Cos}(\alpha' - \alpha) = \text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha' + \text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\alpha',$$

$$24. \quad r\,\text{Sin}(\alpha' - \alpha) = \text{Cos}\,\alpha\,\text{Sin}\,\alpha' - \text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha',$$

oder, wenn man größerer Einfachheit wegen jetzt α, β reſpective für α', α ſetzt, in völliger Allgemeinheit:

$$25. \quad r\,\text{Cos}(\alpha - \beta) = \text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta,$$

$$26. \quad r\,\text{Sin}(\alpha - \beta) = \text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta - \text{Cos}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta.$$

Dieſe beiden Gleichungen ſind das Fundament alles Folgenden, weshalb wir hier auf den völlig ſtrengen und allgemeinen Beweis derſelben alle nur mögliche Sorgfalt verwandt haben.

Denkt man ſich mit einem der Einheit gleichen Radius um **O** als Mittelpunkt einen zweiten Kreis beſchrieben; ſo iſt klar, daß in allen Fällen $\text{Sin}\,\alpha$, $\sin\alpha$ und $\text{Cos}\,\alpha$, $\cos\alpha$ gleiche Vorzeichen haben, und daß die den Größen r, $\text{Sin}\,\alpha$, $\text{Cos}\,\alpha$ und 1, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ entſprechenden Linien jederzeit zwei einander ähnliche rechtwinklige Dreiecke bilden. Daher iſt immer

$$1 : r = \cos\alpha : \operatorname{Cos}\alpha = \sin\alpha : \operatorname{Sin}\alpha\,;$$

d. i. in völliger Allgemeinheit

$$27.\quad \operatorname{Cos}\alpha = r\cos\alpha\,,$$

$$28.\quad \operatorname{Sin}\alpha = r\sin\alpha\,.$$

Man findet alſo $\operatorname{Cos}\alpha$, $\operatorname{Sin}\alpha$ aus $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ ſehr leicht, wenn man $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ bloß mit r multiplicirt, und iſt alſo berechtigt, im Folgenden, der Einfachheit wegen, immer $r = 1$ zu ſetzen.

Für $r = 1$ erhält man aus (25.) und (26.) auf der Stelle in völliger Allgemeinheit

$$29.\quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,,$$

$$30.\quad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\,,$$

zwei Formeln, auf denen wir nun unſere ganze Wiſſenſchaft aufbauen wollen.

II. Erklärung der übrigen goniometriſchen Functionen. Relationen der goniometriſchen Functionen unter einander.

18. Der Bruch $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ heißt die **Tangente** des Bogens oder Winkels α und wird durch

$$31.\quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

bezeichnet.

Der Bruch $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ heißt die **Cotangente** des Bogens oder Winkels α und wird durch

$$32.\quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

bezeichnet.

Der reciproke Coſinus, d. h. der Bruch $\frac{1}{\cos\alpha}$, heißt die **Secante** des Bogens oder Winkels α und wird durch

$$33.\quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

bezeichnet.

Der reciproke Sinus, d. h. der Bruch $\frac{1}{\sin\alpha}$, heißt die **Coſecante** des Bogens oder Winkels α und wird durch

$$34.\quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

bezeichnet.

Die Ergänzung des Coſinus zur Einheit, d. h. die Differenz $1 - \cos\alpha$, nennt man den **Sinus verſus** des Bogens oder Winkels α und bezeichnet dieſelbe durch

$$35.\quad \operatorname{sinv}\alpha = 1 - \cos\alpha\,.$$

Die Ergänzung des Sinus zur Einheit, d. h. die Differenz $1 - \sin\alpha$, nennt man den Coſinus verſus des Bogens oder Winkels α und bezeichnet dieſelbe durch

$$36.\quad \operatorname{cosv}\alpha = 1 - \sin\alpha\,.$$

Aus (31.) und (32.) folgt auf der Stelle

$$37.\quad \operatorname{tang}\alpha \cot\alpha = 1$$

und aus (31.), (33.), (34.) folgt

$$38.\quad \sec\alpha = \operatorname{tang}\alpha \operatorname{cosec}\alpha\,.$$

19. Jeden Winkel oder Bogen α kann man immer als die Differenz zweier andern Bogen betrachten. Setzen wir alſo

$$\alpha = \Theta - \Theta',\ -\alpha = \Theta' - \Theta\,;$$

ſo iſt nach (29.) und (30.)

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \sin\Theta\cos\Theta' - \cos\Theta\sin\Theta'\,,\\
\cos\alpha &= \cos\Theta\cos\Theta' + \sin\Theta\sin\Theta'\,,\\
\sin(-\alpha) &= \sin\Theta'\cos\Theta - \cos\Theta'\sin\Theta\\
&= -\{\sin\Theta\cos\Theta' - \cos\Theta\sin\Theta'\}\,,\\
\cos(-\alpha) &= \cos\Theta'\cos\Theta + \sin\Theta'\sin\Theta\\
&= \cos\Theta\cos\Theta' + \sin\Theta\sin\Theta'\,.
\end{aligned}$$

Alſo iſt in völliger Allgemeinheit

$$39.\quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha\,,$$

$$40.\quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha\,.$$

Setzen wir nun in den beiden Fundamentalformeln $-\beta$ für β; ſo wird

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos(-\beta) - \cos\alpha\sin(-\beta)\\
&= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,,\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)\\
&= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,,
\end{aligned}$$

und wir erhalten folglich in Verbindung mit den beiden Fundamentalformeln die beiden folgenden höchſt wichtigen ganz allgemeinen Ausdrücke:

$$41.\quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta\,,$$

$$42.\quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\,.$$

20. Aus der Definition des Sinus und Coſinus ergiebt ſich unmittelbar, daß für jedes ganze poſitive oder negative n

$$43.\quad \sin n\pi = \sin(2n\,.\,\tfrac{1}{2}\pi) = 0\,,$$

$$44.\quad \cos n\pi = \cos(2n\,.\,\tfrac{1}{2}\pi) = (-1)^n$$

iſt. Man überzeugt ſich hiervon augenblicklich, wenn man nur bedenkt, daß ſich $\sin n\pi$ und $\cos n\pi$ für jedes ganze poſitive oder negative n auf die beiden Endpunkte des durch den Anfang aller Bogen gezogenen Durchmeſſers beziehen, und daß für dieſe beiden Punkte der Sinus offenbar immer $= 0$, der Coſinus dagegen $= +1$ oder $= -1$ iſt, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl iſt. Eben ſo folgt aus der Erklärung des

Sinus und Coſinus unmittelbar die Richtigkeit der beiden folgenden Formeln:

$$45.\quad \sin\tfrac{1}{2}\pi = 1,\qquad 46.\quad \cos\tfrac{1}{2}\pi = 0.$$

Alſo iſt, wenn n immer eine beliebige poſitive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$\begin{aligned}\sin\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi\} &= \sin(2n.\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi)\\ &= \sin(2n.\tfrac{1}{2}\pi)\cos\tfrac{1}{2}\pi + \cos(2n.\tfrac{1}{2}\pi)\sin\tfrac{1}{2}\pi\\ &= \cos(2n.\tfrac{1}{2}\pi) = (-1)^n \ (44.),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi\} &= \cos(2n.\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi)\\ &= \cos(2n.\tfrac{1}{2}\pi)\cos\tfrac{1}{2}\pi - \sin(2n.\tfrac{1}{2}\pi)\sin\tfrac{1}{2}\pi\\ &= 0 \ (43.).\end{aligned}$$

Folglich iſt für jedes ganze poſitive oder negative n

$$47.\quad \sin\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi\} = (-1)^n,$$
$$48.\quad \cos\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi\} = 0.$$

Ferner iſt, wenn α einen beliebigen poſitiven oder negativen Bogen bezeichnet:

$$\sin(n\pi+\alpha) = \sin n\pi\cos\alpha + \cos n\pi\sin\alpha = \sin\alpha.(-1)^n,$$
$$\cos(n\pi+\alpha) = \cos n\pi\cos\alpha - \sin n\pi\sin\alpha = \cos\alpha.(-1)^n;$$

alſo iſt immer

$$49.\quad \sin(n\pi+\alpha) = \sin(2n.\tfrac{1}{2}\pi+\alpha) = \sin\alpha.(-1)^n,$$
$$50.\quad \cos(n\pi+\alpha) = \cos(2n.\tfrac{1}{2}\pi+\alpha) = \cos\alpha.(-1)^n,$$

und, wenn man hierin $-\alpha$ für α ſetzt, nach (39.) und (40.)

$$51.\quad \sin(n\pi-\alpha) = \sin(2n.\tfrac{1}{2}\pi-\alpha) = -\sin\alpha.(-1)^n,$$
$$52.\quad \cos(n\pi-\alpha) = \cos(2n.\tfrac{1}{2}\pi-\alpha) = \cos\alpha.(-1)^n.$$

Für $n=1$ erhält man

$$53.\quad \sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha,$$
$$54.\quad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha,$$
$$55.\quad \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha,$$
$$56.\quad \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha,$$
$$57.\quad \sin(\pi\pm\alpha) = \mp\sin\alpha,$$
$$58.\quad \cos(\pi\pm\alpha) = -\cos\alpha.$$

Auch iſt in völliger Allgemeinheit

$$59.\quad \sin(n\pi+\alpha) = -\sin(n\pi-\alpha),$$
$$60.\quad \cos(n\pi+\alpha) = \cos(n\pi-\alpha),$$
$$61.\quad \sin(2n.\tfrac{1}{2}\pi+\alpha) = -\sin(2n.\tfrac{1}{2}\pi-\alpha),$$
$$62.\quad \cos(2n.\tfrac{1}{2}\pi+\alpha) = \cos(2n.\tfrac{1}{2}\pi-\alpha).$$

Ferner iſt

$$\sin\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi+\alpha\} = \sin\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi\}\cos\alpha + \cos\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi\}\sin\alpha,$$
$$\cos\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi+\alpha\} = \cos\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi\}\cos\alpha - \sin\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi\}\sin\alpha.$$

Alſo iſt nach (47.), (48.) und, wenn man zugleich $-\alpha$ für α ſetzt, nach (39.) und (40.)

$$63.\quad \sin\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi+\alpha\} = \cos\alpha.(-1)^n,$$
$$64.\quad \cos\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi+\alpha\} = -\sin\alpha.(-1)^n,$$
$$65.\quad \sin\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi-\alpha\} = \cos\alpha.(-1)^n,$$
$$66.\quad \cos\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi-\alpha\} = \sin\alpha.(-1)^n,$$
$$67.\quad \sin\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi\pm\alpha\} = \cos\alpha.(-1)^n,$$
$$68.\quad \cos\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi\pm\alpha\} = \mp\sin\alpha.(-1)^n,$$
$$69.\quad \sin\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi+\alpha\} = \sin\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi-\alpha\},$$
$$70.\quad \cos\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi+\alpha\} = -\cos\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi-\alpha\}.$$

Für $n=0$ erhält man:

$$71.\quad \sin(\tfrac{1}{2}\pi\pm\alpha) = \cos\alpha,$$
$$72.\quad \cos(\tfrac{1}{2}\pi\pm\alpha) = \mp\sin\alpha,$$
$$73.\quad \sin(\tfrac{1}{2}\pi+\alpha) = \sin(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha),$$
$$74.\quad \cos(\tfrac{1}{2}\pi+\alpha) = -\cos(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha).$$

Da $(\frac{1}{2}\pi-\alpha)+\alpha=\frac{1}{2}\pi$ iſt, ſo iſt $\frac{1}{2}\pi-\alpha$ das Complement des Bogens α. Da nun nach (71.)

$$\cos\alpha = \sin(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)$$

iſt; ſo iſt der Coſinus eines Bogens nichts anders als der Sinus des Complements dieſes Bogens, welches zu der Benennung Coſinus (complementi sinus) Veranlaſſung gegeben haben mag.

Für die übrigen goniometriſchen Functionen erhält man nun aus deren Definitionen in (18.) und den vorher für die Sinus und Coſinus entwickelten ganz allgemeinen Formeln leicht die folgenden ebenfalls ganz allgemeinen Ausdrücke:

$$75.\quad \operatorname{tang} n\pi = \operatorname{tang}(2n.\tfrac{1}{2}\pi) = \frac{0}{(-1)^n} = 0,$$
$$76.\quad \cot n\pi = \cot(2n.\tfrac{1}{2}\pi) = \frac{1}{0}.(-1)^n = \infty.(-1)^n,$$
$$77.\quad \sec n\pi = \sec(2n.\tfrac{1}{2}\pi) = \frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n,$$
$$78.\quad \operatorname{cosec} n\pi = \operatorname{cosec}(2n.\tfrac{1}{2}\pi) = \frac{1}{0} = \infty,$$
$$79.\quad \operatorname{sinv} n\pi = \operatorname{sinv}(2n.\tfrac{1}{2}\pi) = 1-(-1)^n,$$
$$80.\quad \operatorname{cosv} n\pi = \operatorname{cosv}(2n.\tfrac{1}{2}\pi) = 1.$$

Ferner iſt

$$81.\quad \operatorname{tang}\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi\} = \frac{(-1)^n}{0} = \frac{1}{0}.(-1)^n = \infty.(-1)^n,$$
$$82.\quad \cot\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi\} = \frac{0}{(-1)^n} = 0,$$
$$83.\quad \sec\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi\} = \frac{1}{0} = \infty,$$
$$84.\quad \operatorname{cosec}\{2n+1).\tfrac{1}{2}\pi\} = \frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n,$$

85. $\text{sinv}\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi\} = 1$,

86. $\text{cosv}\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi\} = 1 - (-1)^n$.

Ferner iſt

87. $\text{tang}(n\pi+\alpha) = \text{tang}(2n.\frac{1}{2}\pi+\alpha) = \frac{\sin\alpha.(-1)^n}{\cos\alpha.(-1)^n} = \text{tang}\,\alpha$,

88. $\cot(n\pi+\alpha) = \cot(2n.\frac{1}{2}\pi+\alpha) = \frac{\cos\alpha.(-1)^n}{\sin\alpha.(-1)^n} = \cot\alpha$,

90. $\sec(n\pi+\alpha) = \sec(2n.\frac{1}{2}\pi+\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha.(-1)^n} = \sec\alpha.(-1)^n$,

90. $\text{cosec}(n\pi+\alpha) = \text{cosec}(2n.\frac{1}{2}\pi+\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha.(-1)^n} = \text{cosec}\,\alpha.(-1)^n$,

91. $\text{sinv}(n\pi+\alpha) = \text{sinv}(2n.\frac{1}{2}\pi+\alpha) = 1 - \cos\alpha.(-1)^n$,

92. $\text{cosv}(n\pi+\alpha) = \text{cosv}(2n.\frac{1}{2}\pi+\alpha) = 1 - \sin\alpha.(-1)^n$,

und auf ähnliche Art:

93. $\text{tang}(n\pi-\alpha) = \text{tang}(2n.\frac{1}{2}\pi-\alpha) = -\frac{\sin\alpha.(-1)^n}{\cos\alpha.(-1)^n} = -\text{tang}\,\alpha$,

94. $\cot(n\pi-\alpha) = \cot(2n.\frac{1}{2}\pi-\alpha) = -\frac{\cos\alpha.(-1)^n}{\sin\alpha.(-1)^n} = -\cot\alpha$,

95. $\sec(n\pi-\alpha) = \sec(2n.\frac{1}{2}\pi-\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha.(-1)^n} = \sec\alpha.(-1)^n$,

96. $\text{cosec}(n\pi-\alpha) = \text{cosec}(2n.\frac{1}{2}\pi-\alpha) = -\frac{1}{\sin\alpha.(-1)^n}$

$= -\text{cosec}\,\alpha.(-1)^n$,

97. $\text{sinv}(n\pi-\alpha) = \text{sinv}(2n.\frac{1}{2}\pi-\alpha) = 1 - \cos\alpha.(-1)^n$,

98. $\text{cosv}(n\pi-\alpha) = \text{cosv}(2n.\frac{1}{2}\pi-\alpha) = 1 + \sin\alpha.(-1)^n$.

Alſo iſt auch

99. $\text{tang}(n\pi+\alpha) = -\text{tang}(n\pi-\alpha)$,

100. $\cot(n\pi+\alpha) = -\cot(n\pi-\alpha)$,

101. $\sec(n\pi+\alpha) = \sec(n\pi-\alpha)$,

102. $\text{cosec}(n\pi+\alpha) = -\text{cosec}(n\pi-\alpha)$,

103. $\text{sinv}(n\pi+\alpha) = \text{sinv}(n\pi-\alpha)$,

104. $\text{cosv}(n\pi+\alpha) + \text{cosv}(n\pi-\alpha) = 2$.

Für $n=1$ erhält man:

105. $\text{tang}(\pi\pm\alpha) = \pm\,\text{tang}\,\alpha$,

106. $\cot(\pi\pm\alpha) = \pm\cot\alpha$,

107. $\sec(\pi\pm\alpha) = -\sec\alpha$,

108. $\text{cosec}(\pi\pm\alpha) = \mp\,\text{cosec}\,\alpha$,

109. $\text{sinv}(\pi\pm\alpha) = 1+\cos\alpha$,

110. $\text{cosv}(\pi\pm\alpha) = 1\pm\sin\alpha$.

Für n = 0 erhält man:

111. $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$,

112. $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$,

113. $\sec(-\alpha) = \sec\alpha$,

114. $\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$,

115. $\operatorname{sinv}(-\alpha) = \operatorname{sinv}\alpha$,

116. $\operatorname{cosv}(-\alpha) = 2 - \operatorname{cosv}\alpha$.

Ferner erhält man:

117. $\tan\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi + \alpha\} = -\dfrac{\cos\alpha.(-1)^n}{\sin\alpha.(-1)^n} = -\cot\alpha$,

118. $\cot\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi + \alpha\} = -\dfrac{\sin\alpha.(-1)^n}{\cos\alpha.(-1)^n} = -\tan\alpha$,

119. $\sec\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi + \alpha\} = -\dfrac{1}{\sin\alpha.(-1)^n} = -\operatorname{cosec}\alpha.(-1)^n$,

120. $\operatorname{cosec}\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi + \alpha\} = \dfrac{1}{\cos\alpha.(-1)^n} = \sec\alpha.(-1)^n$,

121. $\operatorname{sinv}\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi + \alpha\} = 1 + \sin\alpha.(-1)^n$,

122. $\operatorname{cosv}\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi + \alpha\} = 1 - \cos\alpha.(-1)^n$,

und eben ſo

123. $\tan\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi - \alpha\} = \dfrac{\cos\alpha.(-1)^n}{\sin\alpha.(-1)^n} = \cot\alpha$,

124. $\cot\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi - \alpha\} = \dfrac{\sin\alpha.(-1)^n}{\cos\alpha.(-1)^n} = \tan\alpha$,

125. $\sec\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi - \alpha\} = \dfrac{1}{\sin\alpha.(-1)^n} = \operatorname{cosec}\alpha.(-1)^n$,

126. $\operatorname{cosec}\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi - \alpha\} = \dfrac{1}{\cos\alpha.(-1)^n} = \sec\alpha.(-1)^n$,

127. $\operatorname{sinv}\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi - \alpha\} = 1 - \sin\alpha.(-1)^n$

128. $\operatorname{cosv}\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi - \alpha\} = 1 - \cos\alpha.(-1)^n$.

Alſo

129. $\tan\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi + \alpha\} = -\tan\{2n+1).\tfrac{1}{2}\pi - \alpha\}$,

130. $\cot\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi + \alpha\} = -\cot\{2n+1).\tfrac{1}{2}\pi - \alpha\}$,

131. $\sec\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi + \alpha\} = -\sec\{2n+1).\tfrac{1}{2}\pi - \alpha\}$,

132. $\operatorname{cosec}\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi + \alpha\} = \operatorname{cosec}\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi - \alpha\}$,

133. $\operatorname{sinv}\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi + \alpha\} + \operatorname{sinv}\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi - \alpha\} = 2$,

134. $\operatorname{cosv}\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi + \alpha\} = \operatorname{cosv}\{(2n+1).\tfrac{1}{2}\pi - \alpha\}$.

Für n = 0 erhält man:

$$135.\quad \tan(\tfrac{1}{2}\pi \pm \alpha) = \mp \cot\alpha\,,$$
$$136.\quad \cot(\tfrac{1}{2}\pi \pm \alpha) = \mp \tan\alpha\,,$$
$$137.\quad \sec(\tfrac{1}{2}\pi \pm \alpha) = \mp \operatorname{cosec}\alpha\,,$$
$$138.\quad \operatorname{cosec}(\tfrac{1}{2}\pi \pm \alpha) = \sec\alpha\,,$$
$$139.\quad \operatorname{sinv}(\tfrac{1}{2}\pi \pm \alpha) = 1 \pm \sin\alpha\,,$$
$$140.\quad \operatorname{cosv}(\tfrac{1}{2}\pi \pm \alpha) = 1 - \cos\alpha\,.$$

Auch iſt

$$141.\quad \operatorname{sinv}(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) = 1 - \sin\alpha = \operatorname{cosv}\alpha\,,$$
$$142.\quad \operatorname{cosv}(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) = 1 - \cos\alpha = \operatorname{sinv}\alpha\,.$$

In den Formeln

$$\cot\alpha = \tan(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha)\,,$$
$$\operatorname{cosec}\alpha = \sec(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha)\,,$$
$$\operatorname{cosv}\alpha = \operatorname{sinv}(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha)\,,$$

liegt der Grund der Benennungen Cotangente, Coſecante, Coſinus verſus, auf ähnliche Art wie beim Coſinus.

21. Nimmt man in der Formel (42.) das untere Zeichen und ſetzt $\alpha = \beta$; ſo iſt, weil nach (44.) in dieſem Falle $\cos(\alpha - \beta) = \cos 0 = 1$ iſt:

$$143.\quad \sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$$

für jedes α. Folglich iſt

$$144.\quad \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos\alpha^2}\,,$$
$$145.\quad \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin\alpha^2}\,.$$

In der Formel (144.) iſt die Quadratwurzel poſitiv zu nehmen, wenn der Endpunkt des Bogens α im erſten oder zweiten Quadranten liegt, negativ dagegen, wenn der Endpunkt des Bogens α im dritten oder vierten Quadranten liegt, welches ſich immer leicht beurtheilen laſſen wird. In der Formel (145.) iſt die Quadratwurzel poſitiv zu nehmen, wenn der Endpunkt des Bogens α im erſten oder vierten, negativ dagegen, wenn der Endpunkt dieſes Bogens im zweiten oder dritten Quadranten liegt.

Aus (31.) und (143.) und eben ſo aus (32.) und (143.) ergiebt ſich

$$1 + \tan\alpha^2 = \frac{\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2}{\cos\alpha^2} = \frac{1}{\cos\alpha^2}\,,$$
$$1 + \cot\alpha^2 = \frac{\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2}{\sin\alpha^2} = \frac{1}{\sin\alpha^2}\,.$$

Folglich iſt nach (33.) und (34.)

$$146.\quad 1 + \tan\alpha^2 = \sec\alpha^2\,,$$
$$147.\quad 1 + \cot\alpha^2 = \operatorname{cosec}\alpha^2\,.$$

Alſo

$$148.\quad \sec\alpha = \sqrt{1+\tang\alpha^2}\,,$$

$$149.\quad \mathrm{cosec}\,\alpha = \sqrt{1+\cot\alpha^2}\,.$$

Weil

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},\quad \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

iſt; ſo hat die Secante immer gleiches Zeichen mit dem Coſinus, die Coſecante immer gleiches Zeichen mit dem Sinus. In der Formel (148.) muß man daher die Quadratwurzel poſitiv nehmen, wenn der Endpunkt des Bogens α im erſten oder vierten, negativ dagegen, wenn der Endpunkt des Bogens α im zweiten oder dritten Quadranten liegt. In der Formel (149.) muß man die Quadratwurzel poſitiv nehmen, wenn der Endpunkt des Bogens α im erſten oder zweiten, negativ dagegen, wenn der Endpunkt des Bogens α im dritten oder vierten Quadranten liegt.

Auch iſt

$$150.\quad \tang\alpha = \sqrt{\sec\alpha^2 - 1}\,,$$

$$151.\quad \cot\alpha = \sqrt{\mathrm{cosec}\,\alpha^2 - 1}\,.$$

Weil nun immer

$$\tang\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

iſt; ſo iſt klar, daß die Tangente und Cotangente eines Bogens oder Winkels jederzeit poſitiv oder negativ ſind, jenachdem der Sinus und Coſinus dieſes Bogens gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. In den Formeln (150.) und (151.) ſind alſo die Quadratwurzeln poſitiv zu nehmen, wenn der Endpunkt des Bogens α im erſten oder dritten, negativ dagegen, wenn der Endpunkt des Bogens α im zweiten oder vierten Quadranten liegt.

22. Aus

$$\tang(\alpha\pm\beta) = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}\,,$$

$$\cot(\alpha\pm\beta) = \frac{\cos(\alpha\pm\beta)}{\sin(\alpha\pm\beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\cos\beta}$$

folgt leicht, wenn man Zähler und Nenner des erſten Bruchs durch $\cos\alpha\cos\beta$ oder $\sin\alpha\,\sin\beta$, Zähler und Nenner des zweiten durch $\sin\alpha\cos\beta$ oder $\sin\alpha\,\sin\beta$ dividirt:

$$152.\quad \tang(\alpha\pm\beta) = \frac{\tang\alpha \pm \tang\beta}{1 \mp \tang\alpha\,\tang\beta}\,,$$

$$153.\quad \tang(\alpha\pm\beta) = \frac{\cot\beta \pm \cot\alpha}{\cot\alpha\,\cot\beta \mp 1}\,,$$

$$154.\quad \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha \mp \tang\beta}{1 \pm \cot\alpha \tang\beta},$$

$$155.\quad \cot(a \pm \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}.$$

Setzt man in den Formeln (41.), (42.), (152.), (155.) $\alpha = \beta$, indem man zugleich die obern Zeichen nimmt; ſo erhält man:

$$156.\quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$157.\quad \cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2,$$

$$158.\quad \tang 2\alpha = \frac{2\tang\alpha}{1 - \tang\alpha^2},$$

$$159.\quad \cot 2\alpha = \frac{\cot\alpha^2 - 1}{2\cot\alpha}.$$

Da ferner nach (143.)

$$\cos\alpha^2 = 1 - \sin\alpha^2,\ \sin\alpha^2 = 1 - \cos\alpha^2$$

iſt; ſo erhält man aus (157.) leicht

$$160.\quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin\alpha^2 = 2\cos\alpha^2 - 1.$$

Setzt man in (153.) und (154.) $\alpha = \beta$, ſo erhält man, weil nach (37.) $\tang\alpha\cot\alpha = 1$ iſt:

$$161.\quad \tang 2\alpha = \frac{2\cot\alpha}{\cot\alpha^2 - 1},$$

$$162.\quad \cot 2\alpha = \tfrac{1}{2}(\cot\alpha - \tang\alpha).$$

23. Aus (160.) ergiebt ſich

$$163.\quad \sin\alpha^2 = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

$$164.\quad \cos\alpha^2 = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2},$$

oder, wenn man $\frac{1}{2}\alpha$ für α ſetzt:

$$165.\quad \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1 - \cos\alpha}{2},$$

$$166.\quad \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1 + \cos\alpha}{2}.$$

Alſo iſt

$$167.\quad \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}},$$

$$168.\quad \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}},$$

mit der Beſtimmung, daß man in der erſten dieſer beiden Formeln die Quadratwurzel poſitiv zu nehmen hat, wenn der Endpunkt des Bogens $\frac{1}{2}\alpha$ im erſten oder zweiten, negativ dagegen, wenn der Endpunkt des Bogens $\frac{1}{2}\alpha$ im dritten oder vierten Quadranten liegt. In der zweiten der beiden obigen Formeln muß man die Quadratwurzel poſitiv nehmen, wenn der Endpunkt des Bogens $\frac{1}{2}\alpha$ im erſten oder vierten, negativ dagegen, wenn der

Endpunkt des Bogens $\frac{1}{2}\alpha$ im zweiten oder dritten Quadranten liegt, welches ſich immer leicht beurtheilen laſſen wird.

Nach (143.) und (156.) iſt

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 \pm 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha + \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 = 1 \pm \sin\alpha ,$$

d. i.

$$169.\quad (\sin\tfrac{1}{2}\alpha \pm \cos\tfrac{1}{2}\alpha)^2 = 1 \pm \sin\alpha$$

und folglich

$$170.\quad \sin\tfrac{1}{2}\alpha + \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{1 + \sin\alpha} ,$$

$$171.\quad \sin\tfrac{1}{2}\alpha - \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{1 - \sin\alpha} ,$$

wo nun aber noch eine beſondere Beſtimmung nöthig iſt, mit welchen Vorzeichen man in dieſen Formeln die Quadratwurzeln zu nehmen hat, die ſich auf folgende Art geben läßt. Nach (157.) iſt immer

$$\sqrt{1 + \sin\alpha} . \sqrt{1 - \sin\alpha} = (\sin\tfrac{1}{2}\alpha + \cos\tfrac{1}{2}\alpha)(\sin\tfrac{1}{2}\alpha - \cos\tfrac{1}{2}\alpha)$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 - \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 = -\cos\alpha ;$$

alſo haben $\sqrt{1+\sin\alpha}$ und $\sqrt{1-\sin\alpha}$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen, je nachdem $\cos\alpha$ negativ oder poſitiv iſt. Kennt man alſo nur das Vorzeichen, mit dem die eine der beiden in Rede ſtehenden Quadratwurzeln genommen werden muß; ſo kennt man auch das Vorzeichen, mit dem die andere zu nehmen iſt. Haben nun zuerſt $\sin\frac{1}{2}\alpha$ und $\cos\frac{1}{2}\alpha$ gleiche Vorzeichen, ſo muß man $\sqrt{1+\sin\alpha}$ poſitiv oder negativ nehmen, jenachdem $\sin\frac{1}{2}\alpha$ und $\cos\frac{1}{2}\alpha$ beide poſitiv oder beide negativ ſind. Haben aber $\sin\frac{1}{2}\alpha$ und $\cos\frac{1}{2}\alpha$ ungleiche Vorzeichen, ſo muß man $\sqrt{1-\sin\alpha}$ poſitiv oder negativ nehmen, jenachdem $\sin\frac{1}{2}\alpha$ poſitiv oder negativ iſt. Nach dieſen Regeln wird man immer ſehr leicht beurtheilen können, mit welchen Vorzeichen die beiden Quadratwurzeln zu nehmen ſind, wie wir an folgenden Beiſpielen zeigen wollen.

Wenn $\alpha > \pi$, $\alpha < \frac{3}{2}\pi$ iſt, ſo iſt $\cos\alpha$ negativ; alſo ſind die beiden Quadratwurzeln mit gleichen Vorzeichen zu nehmen. Da ferner $\frac{1}{2}\alpha > \frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\alpha < \frac{3}{4}\pi$, d. i. $\frac{1}{2}\alpha > \frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\alpha < \pi$ iſt; ſo haben $\sin\frac{1}{2}\alpha$ und $\cos\frac{1}{2}\alpha$ entgegengeſetzte Vorzeichen, und man muß folglich $\sqrt{1-\sin\alpha}$ poſitiv nehmen, da $\sin\frac{1}{2}\alpha$ poſitiv iſt. Alſo iſt in dieſem Falle

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha + \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{1 + \sin\alpha} ,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha - \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{1 - \sin\alpha} ,$$

indem man nämlich beide Quadratwurzeln poſitiv nimmt.

Wenn $\alpha > 0$, $\alpha < \frac{1}{2}\pi$ iſt, ſo iſt $\cos\alpha$ poſitiv und die beiden Quadratwurzeln ſind folglich in dieſem Falle mit entgegengeſetzten Vorzeichen zu nehmen. Ferner iſt $\frac{1}{2}\alpha > 0$, $\frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\pi$. Alſo haben $\sin\frac{1}{2}\alpha$ und $\cos\frac{1}{2}\alpha$ gleiche Vorzeichen und ſind beide poſitiv. Daher muß man $\sqrt{1+\sin\alpha}$ poſitiv nehmen, und hat alſo in dieſem Falle:

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha + \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{1+\sin\alpha}\,,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha - \cos\tfrac{1}{2}\alpha = -\sqrt{1-\sin\alpha}\,.$$

Auf dieſe Weiſe werden ſich in allen Fällen leicht und mit völliger Sicherheit die Vorzeichen beurtheilen laſſen, mit denen die beiden Quadratwurzeln zu nehmen ſind. Eine ſolche Beurtheilung wird gewöhnlich, aber mit großem Unrecht, bei den goniometriſchen Formeln, die Quadratwurzeln enthalten, unterlaſſen, und wir wollen daher, um die Nothwendigkeit dieſer Beurtheilung recht deutlich zu zeigen, jetzt noch das folgende Beiſpiel etwas ausführlicher betrachten.

Aus (170.) und (171.) folgt durch Addition und Subtraction

172. $$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}\,,$$

173. $$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}\,,$$

wo nun aber wieder eine beſondere Beurtheilung der Vorzeichen nöthig iſt, mit denen die Quadratwurzeln zu nehmen ſind. Nach dem Vorhergehenden ſind die beiden Quadratwurzeln mit gleichen oder ungleichen Vorzeichen zu nehmen, jenachdem $\cos\alpha$ negativ oder poſitiv iſt, und aus den Vorzeichen von $\sin\tfrac{1}{2}\alpha$, $\cos\tfrac{1}{2}\alpha$, $\sin\alpha$ wird ſich nun immer leicht das Zeichen beurtheilen laſſen, mit dem jede einzelne Quadratwurzel zu nehmen iſt, wie wir an den folgenden Beiſpielen zeigen wollen.

Wenn $\alpha > 0$, $\alpha < \tfrac{1}{2}\pi$, ſo iſt $\cos\alpha$ poſitiv, und die beiden Quadratwurzeln ſind alſo mit entgegeſetzten Vorzeichen zu nehmen. Folglich iſt

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha} \mp \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}\,,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha} \pm \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}\,.$$

$\sin\tfrac{1}{2}\alpha$, $\cos\tfrac{1}{2}\alpha$, $\sin\alpha$ ſind ſämmtlich poſitiv; alſo muß man, weil $\sqrt{1+\sin\alpha}$ größer wie $\sqrt{1-\sin\alpha}$ iſt, in dieſem Falle

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}\,,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}$$

ſetzen, wo nun natürlich beide Quadratwurzeln poſitiv zu nehmen ſind.

Iſt $\alpha > \tfrac{1}{2}\pi$, $\alpha < \pi$, ſo iſt $\cos\alpha$ negativ und die beiden Quadratwurzeln ſind folglich mit gleichen Vorzeichen zu nehmen, ſo daß man alſo

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha} \pm \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}\,,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha} \mp \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}$$

ſetzen muß. $\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\cos\frac{1}{2}\alpha$, $\sin\alpha$ ſind ſämmtlich poſitiv; alſo muß man in dieſem Falle

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}{2},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}$$

ſetzen, wo nun die Quadratwurzeln natürlich wieder poſitiv zu nehmen ſind.

Iſt $\alpha > \pi$, $\alpha < \frac{3}{2}\pi$, ſo iſt $\cos\alpha$ negativ, und die Quadratwurzeln ſind folglich mit gleichen Vorzeichen zu nehmen. Alſo iſt

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha} \pm \sqrt{1-\sin\alpha}}{2},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha} \mp \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}.$$

Da aber $\frac{1}{2}\alpha > \frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\alpha < \frac{3}{4}\pi$, d. i. $\frac{1}{2}\alpha > \frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\alpha < \pi$ iſt; ſo iſt $\sin\frac{1}{2}\alpha$ poſitiv, $\cos\frac{1}{2}\alpha$ negativ, $\sin\alpha$ iſt negativ. Alſo iſt in dieſem Falle, da $\sqrt{1-\sin\alpha}$ größer wie $\sqrt{1+\sin\alpha}$ iſt,

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}{2},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}}{2},$$

die Quadratwurzeln poſitiv genommen.

Iſt $\alpha > \frac{3}{2}\pi$, $\alpha < 2\pi$, ſo iſt $\cos\alpha$ poſitiv, und man muß folglich die Quadratwurzeln mit entgegengeſetzten Vorzeichen nehmen. Alſo iſt

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha} \mp \sqrt{1-\sin\alpha}}{2},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha} \pm \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}.$$

Weil aber $\frac{1}{2}\alpha > \frac{3}{4}\pi$, $\frac{1}{2}\alpha < \pi$, d. i. $\frac{1}{2}\alpha > \frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\alpha < \pi$ iſt; ſo iſt $\sin\frac{1}{2}\alpha$ poſitiv, $\cos\frac{1}{2}\alpha$ negativ, $\sin\alpha$ iſt negativ. Alſo iſt in dieſem Falle

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{-\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}{2},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{-\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}.$$

Um nur **ein** Beiſpiel für ein negatives α zu geben, ſo ſey α negativ, und der abſolute Werth dieſes Bogens ſey $> \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$, ſo

iſt cos α negativ, und die beiden Quadratwurzeln ſind alſo mit gleichen Vorzeichen zu nehmen. Folglich iſt in dieſem Falle

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha}\pm\sqrt{1-\sin\alpha}}{2},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha}\mp\sqrt{1-\sin\alpha}}{2}.$$

Der abſolute Werth von $\frac{1}{2}\alpha$ iſt $> \frac{1}{4}\pi$, $< \frac{1}{2}\pi$, d. i. > 0, $< \frac{1}{2}\pi$. Alſo iſt $\sin\frac{1}{2}\alpha$ negativ, $\cos\frac{1}{2}\alpha$ poſitiv, $\sin\alpha$ iſt negativ. Folglich iſt in dieſem Falle

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{-\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}}{2},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{-\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}}{2}.$$

Wie man ſich in allen ähnlichen Fällen zu verhalten hat, wird aus dieſen Beiſpielen mit hinreichender Deutlichkeit erhellen.

24. Nach (165.), (166.), (156.) iſt

$$2\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 = 1-\cos\alpha,\ 2\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 = 1+\cos\alpha,\ 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sin\alpha.$$

Hieraus erhält man durch Diviſion leicht:

$$174.\quad \tang\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},$$

$$175.\quad \cot\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Weil nun, wie leicht erhellet,

$$\frac{\tang\frac{1}{2}\alpha}{\cot\frac{1}{2}\alpha} = \tang\tfrac{1}{2}\alpha^2,\ \frac{\cot\frac{1}{2}\alpha}{\tang\frac{1}{2}\alpha} = \cot\tfrac{1}{2}\alpha^2$$

iſt; ſo iſt

$$176.\quad \tang\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},$$

$$177.\quad \cot\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha},$$

oder

$$178.\quad \tang\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},$$

$$179.\quad \cot\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}},$$

mit der Beſtimmung, daß man in dieſen beiden Formeln die Quadratwurzel poſitiv oder negativ nimmt, jenachdem der Endpunkt des Bogens $\frac{1}{2}\alpha$ im erſten und dritten, oder im zweiten und vierten Quadranten liegt, welches ſich immer leicht beurtheilen laſſen wird.

Aus (176.) und (177.) ergiebt ſich ferner leicht:

$$180.\quad 1-\tang\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{2\cos\alpha}{1+\cos\alpha},\ 1+\tang\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{2}{1+\cos\alpha};$$

$$181.\quad 1-\cot\tfrac{1}{2}\alpha^2 = -\frac{2\cos\alpha}{1-\cos\alpha},\ 1+\cot\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{2}{1-\cos\alpha};$$

alſo

$$182.\quad \cos\alpha = \frac{1-\tang\frac{1}{2}\alpha^2}{1+\tang\frac{1}{2}\alpha^2} = \frac{\cot\frac{1}{2}\alpha^2-1}{\cot\frac{1}{2}\alpha^2+1}.$$

Aus (174.), (175.), (180.), (181.) folgt leicht:

$$183.\quad \sin\alpha = \frac{2\tang\frac{1}{2}\alpha}{1+\tang\frac{1}{2}\alpha^2} = \frac{2\cot\frac{1}{2}\alpha}{1+\cot\frac{1}{2}\alpha^2}.$$

Ferner ergiebt ſich aus (174.) und (175.) durch Addition und Subtraction

$$184.\quad \begin{cases} \cot\frac{1}{2}\alpha + \tang\frac{1}{2}\alpha = \dfrac{2}{\sin\alpha} = 2\operatorname{cosec}\alpha, \\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{2}(\cot\frac{1}{2}\alpha + \tang\frac{1}{2}\alpha); \end{cases}$$

$$185.\quad \begin{cases} \cot\frac{1}{2}\alpha - \tang\frac{1}{2}\alpha = 2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\cot\alpha, \\ \cot\alpha = \frac{1}{2}(\cot\frac{1}{2}\alpha - \tang\frac{1}{2}\alpha). \end{cases}$$

Auch iſt nach (174.) und (175.)

$$186.\quad \tang\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha,$$

$$187.\quad \cot\tfrac{1}{2}\alpha - \cot\alpha = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha.$$

Alſo iſt auch

$$188.\quad \sin\alpha = \frac{1}{\tang\frac{1}{2}\alpha + \cot\alpha} = \frac{1}{\cot\frac{1}{2}\alpha - \cot\alpha},$$

Ferner iſt nach (174.) und (175.)

$$\tang\tfrac{1}{2}\alpha\tang\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} - 1 = \sec\alpha - 1,$$

$$\cot\tfrac{1}{2}\alpha\tang\alpha = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} + 1 = \sec\alpha + 1,$$

alſo

$$189.\quad \sec\alpha = \tang\tfrac{1}{2}\alpha\tang\alpha + 1 = \cot\tfrac{1}{2}\alpha\tang\alpha - 1,$$

$$190.\quad \cos\alpha = \frac{1}{\tang\frac{1}{2}\alpha\tang\alpha + 1} = \frac{1}{\cot\frac{1}{2}\alpha\tang\alpha - 1}.$$

Nach (188.) und (190.) iſt alſo auch immer

$$191.\quad \tang\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\alpha = \cot\tfrac{1}{2}\alpha - \cot\alpha,$$

$$192.\quad \tang\tfrac{1}{2}\alpha\tang\alpha + 1 = \cot\tfrac{1}{2}\alpha\tang\alpha - 1.$$

Die Zahl dieſer Relationen würde ſich leicht vermehren laſſen; die vorher entwickelten ſind aber die am häufigſten in Anwendung kommenden.

25. Aus (41.) und (42.) folgt leicht

$$193.\quad \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \tang\alpha \pm \tang\beta,$$

$$194.\quad \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha \sin\beta} = \cot\beta \pm \cot\alpha\,,$$

$$195.\quad \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha \cos\beta} = 1 \pm \cot\alpha\,\mathrm{tang}\,\beta\,,$$

$$196.\quad \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \sin\beta} = \mathrm{tang}\,\alpha \cot\beta \pm 1\,,$$

$$197.\quad \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha \cos\beta} = \cot\alpha \mp \mathrm{tang}\,\beta\,,$$

$$198.\quad \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \sin\beta} = \cot\beta \mp \mathrm{tang}\,\alpha\,,$$

$$199.\quad \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cos\beta} = 1 \mp \mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\beta\,,$$

$$200.\quad \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha \sin\beta} = \cot\alpha \cot\beta \mp 1\,.$$

Alſo iſt auch

$$201.\quad \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\mathrm{tang}\,\alpha + \mathrm{tang}\,\beta}{\mathrm{tang}\,\alpha - \mathrm{tang}\,\beta} = \frac{\cot\beta + \cot\alpha}{\cot\beta - \cot\alpha}$$
$$= \frac{1 + \cot\alpha\,\mathrm{tang}\,\beta}{1 - \cot\alpha\,\mathrm{tang}\,\beta} = \frac{\mathrm{tang}\,\alpha \cot\beta + 1}{\mathrm{tang}\,\alpha \cot\beta - 1}\,,$$

$$202.\quad \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\cot\alpha - \mathrm{tang}\,\beta}{\cot\alpha + \mathrm{tang}\,\beta} = \frac{\cot\beta - \mathrm{tang}\,\alpha}{\cot\beta + \mathrm{tang}\,\alpha}$$
$$= \frac{1 - \mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\beta}{1 + \mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\beta} = \frac{\cot\alpha \cot\beta - 1}{\cot\alpha \cot\beta + 1}\,.$$

26. Aus den Gleichungen

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,,$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\,,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

folgt leicht durch Addition und Subtraction:

$$203.\quad \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta\,,$$
$$204.\quad \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta\,,$$
$$205.\quad \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta\,,$$
$$206.\quad \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta\,;$$

folglich, wenn man

$$\alpha+\beta = x,\ \alpha-\beta = y;\ \alpha = \tfrac{1}{2}(x+y),\ \beta = \tfrac{1}{2}(x-y)$$

ſetzt:

$$207.\quad \sin x + \sin y = 2\sin\tfrac{1}{2}(x+y)\cos\tfrac{1}{2}(x-y)\,,$$
$$208.\quad \sin x - \sin y = 2\cos\tfrac{1}{2}(x+y)\sin\tfrac{1}{2}(x-y)\,,$$
$$209.\quad \cos x + \cos y = 2\cos\tfrac{1}{2}(x+y)\cos\tfrac{1}{2}(x-y)\,,$$
$$210.\quad \cos x - \cos y = -2\sin\tfrac{1}{2}(x+y)\sin\tfrac{1}{2}(x-y)\,.$$

Setzt man nx für x, mx für y, ſo erhält man:

$$211.\quad \sin nx + \sin mx = 2\sin\tfrac{1}{2}(n+m)x\cos\tfrac{1}{2}(n-m)x\,,$$
$$212.\quad \sin nx - \sin mx = 2\cos\tfrac{1}{2}(n+m)x\sin\tfrac{1}{2}(n-m)x\,,$$

213. $\cos nx + \cos mx = \quad 2\cos\frac{1}{2}(n+m)x\cos\frac{1}{2}(n-m)x$,

214. $\cos nx - \cos mx = - 2\sin\frac{1}{2}(n+m)x\sin\frac{1}{2}(n-m)x$,

und, wenn man $n+1$ für n, $n-1$ für m ſetzt:

215. $\sin(n+1)x + \sin(n-1)x = \quad 2\sin nx\cos x$,

216. $\sin(n+1)x - \sin(n-1)x = \quad 2\cos nx\sin x$,

217. $\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = \quad 2\cos nx\cos x$,

218. $\cos(n+1)x - \cos(n-1)x = - 2\sin nx\sin x$.

Auch erhält man leicht:

219. $\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+y)\cot\frac{1}{2}(x-y) = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x-y)}$,

220. $\frac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y} = - \cot\frac{1}{2}(x+y)\cot\frac{1}{2}(x-y)$,

221. $\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+y)$,

222. $\frac{\sin x - \sin y}{\cos x - \cos y} = - \cot\frac{1}{2}(x+y)$,

223. $\frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} = \quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}(x-y)$,

224. $\frac{\sin x + \sin y}{\cos x - \cos y} = - \cot\frac{1}{2}(x-y)$.

Auch ergiebt ſich leicht mittelſt einiger aus dem Obigen bekannten Formeln:

225. $\sin x^2 - \sin y^2 = \cos y^2 - \cos x^2$
$= (\sin x + \sin y)(\sin x - \sin y)$
$= 4\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$
$= \sin(x+y)\sin(x-y)$,

226. $\cos x^2 - \sin y^2 = \cos y^2 - \sin x^2$
$= \cos x^2(1 - \sin y^2) - \sin y^2(1 - \cos x^2)$
$= \cos x^2\cos y^2 - \sin x^2\sin y^2$
$= (\cos x\cos y + \sin x\sin y)(\cos x\cos y - \sin x\sin y)$
$= \cos(x+y)\cos(x-y)$.

27. Bevor wir zu andern Relationen übergehen, wollen wir nun noch zeigen, wie ſich die Sinus einiger beſtimmten Winkel in algebraiſchen Ausdrücken darſtellen laſſen, wobei wir durch bloße Rechnung, ohne alle Conſtruction, wie dies wohl ſonſt gewöhnlich iſt, zu dieſen Ausdrücken zu gelangen ſuchen wollen. Zuerſt müſſen wir

$$\sin\tfrac{1}{4}\pi = \sin 45^\circ,\ \sin\tfrac{1}{5}\pi = \sin 36^\circ,\ \sin\tfrac{1}{6}\pi = \sin 30^\circ$$

zu finden ſuchen. Daß

227. $\sin\frac{1}{2}\pi = 1$

iſt, folgt aus (47.) für $n = 0$. Nach (71.) iſt

$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) = \cos\alpha .$$

Alſo iſt für $a = \frac{1}{4}\pi$:

$$\sin\tfrac{1}{4}\pi = \cos\tfrac{1}{4}\pi\ .$$

Aber bekanntlich

$$\sin\tfrac{1}{4}\pi^2 + \cos\tfrac{1}{4}\pi^2 = 1\ .$$

Alſo

$$2\sin\tfrac{1}{4}\pi^2 = 2\cos\tfrac{1}{4}\pi^2 = 1\ ,$$

und folglich

$$228.\quad \sin\tfrac{1}{4}\pi = \cos\tfrac{1}{4}\pi = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\ ,$$

die Quadratwurzel poſitiv genommen. Ferner iſt nach (207.) und (210.)

$$\sin\tfrac{1}{4}\pi + \sin\tfrac{1}{12}\pi = \quad 2\sin\tfrac{1}{6}\pi\cos\tfrac{1}{12}\pi\ ,$$
$$\cos\tfrac{1}{4}\pi - \cos\tfrac{1}{12}\pi = -2\sin\tfrac{1}{6}\pi\sin\tfrac{1}{12}\pi\ ,$$

d. i. nach (228.)

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sin\tfrac{1}{12}\pi = \quad 2\sin\tfrac{1}{6}\pi\cos\tfrac{1}{12}\pi\ ,$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \cos\tfrac{1}{12}\pi = -2\sin\tfrac{1}{6}\pi\sin\tfrac{1}{12}\pi\ ,$$

und folglich, wenn man dieſe Gleichungen von einander ſubtrahirt,

$$\sin\tfrac{1}{12}\pi + \cos\tfrac{1}{12}\pi = 2\sin\tfrac{1}{6}\pi\{\sin\tfrac{1}{12}\pi + \cos\tfrac{1}{12}\pi\}\ ;$$

alſo

$$229.\quad \sin\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2}\ .$$

Hieraus ergiebt ſich auf der Stelle:

$$230.\quad \cos\tfrac{1}{6}\pi = \sqrt{(1-\tfrac{1}{4})} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ ,$$

die Quadratwurzel poſitiv genommen.

Nach (160.) iſt, wenn wir

$$\cos\tfrac{1}{5}\pi - \cos\tfrac{2}{5}\pi = z$$

ſetzen,

$$\begin{aligned} z &= \cos\tfrac{1}{5}\pi - 2\cos\tfrac{1}{5}\pi\cos\tfrac{1}{5}\pi + 1 \\ &= \cos\tfrac{1}{5}\pi - 2(z+\cos\tfrac{2}{5}\pi)\cos\tfrac{1}{5}\pi + 1 \\ &\qquad - (z - \cos\tfrac{1}{5}\pi + \cos\tfrac{2}{5}\pi)\ , \end{aligned}$$

woraus ſehr leicht nach (205.)

$$\begin{aligned} 2z(1+\cos\tfrac{1}{5}\pi) &= 1 + \cos\tfrac{1}{5}\pi - \cos\tfrac{3}{5}\pi - \cos\tfrac{1}{5}\pi \\ &\qquad + \cos\tfrac{1}{5}\pi - \cos\tfrac{2}{5}\pi \\ &= 1 + \cos\tfrac{1}{5}\pi - \cos\tfrac{2}{5}\pi - \cos\tfrac{3}{5}\pi \end{aligned}$$

folgt. Nach (56.) iſt aber

$$\cos\tfrac{3}{5}\pi = -\cos(\pi - \tfrac{3}{5}\pi) = -\cos\tfrac{2}{5}\pi\ ;$$

folglich iſt

$$\cos\tfrac{2}{5}\pi + \cos\tfrac{3}{5}\pi = 0\ ,$$

und deshalb nach dem Vorhergehenden

$$2z(1+\cos\tfrac{1}{5}\pi) = 1 + \cos\tfrac{1}{5}\pi\ ,$$

d. i.

$$231.\quad z = \cos\tfrac{1}{5}\pi - \cos\tfrac{2}{5}\pi = \tfrac{1}{2}\ .$$

Setzen wir nun $\cos\frac{1}{5}\pi = x$, ſo iſt nach (160.)

$$\cos\tfrac{2}{5}\pi = 2x^2 - 1$$

und folglich nach (231.)

$$x - 2x^2 + 1 = \tfrac{1}{2},\ 2x^2 - x = \tfrac{1}{2},\ x^2 - \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{4}.$$

Durch Auflöſung dieſer quadratiſchen Gleichung erhält man

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Weil aber $\cos\frac{1}{5}\pi$ poſitiv iſt, ſo iſt, indem man die Quadratwurzel poſitiv nimmt,

$$232.\quad \cos\tfrac{1}{5}\pi = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Nach (144.) ergiebt ſich hieraus

$$233.\quad \sin\tfrac{1}{5}\pi = \sqrt{\left\{1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2\right\}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})},$$

indem man beide Quadratwurzeln poſitiv nimmt.

Mittelſt der Ausdrücke

$$\sin\tfrac{1}{4}\pi = \sqrt{\tfrac{1}{2}},\ \sin\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2},\ \sin\tfrac{1}{5}\pi = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})};$$
$$\cos\tfrac{1}{4}\pi = \sqrt{\tfrac{1}{2}},\ \cos\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ \cos\tfrac{1}{5}\pi = \tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{5}),$$

in denen alle Quadratwurzeln poſitiv zu nehmen ſind, und aus den Formeln

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,\ \sin\alpha = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\ \sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$$

kann man nun leicht die, in dem entſprechenden Artikel im zweiten Theile dieſes Wörterbuchs angegebenen, algebraiſchen Ausdrücke der Sinus aller poſitiven Winkel oder Bogen im erſten Quadranten von drei zu drei Graden entwickeln, wobei wir nur bemerken, daß alle Quadratwurzeln in dieſen Ausdrücken poſitiv zu nehmen ſind. Die vorkommenden Quadratwurzeln ſind nur folgende:

$$\sqrt{(2 \pm \sqrt{3})}$$
$$\sqrt{(3 \pm \sqrt{5})}$$
$$\sqrt{(5 \pm \sqrt{5})}$$
$$\sqrt{(6 \pm 2\sqrt{5})} = \sqrt{2}\,.\sqrt{(3 \pm \sqrt{5})}$$
$$\sqrt{(9 \pm 3\sqrt{5})} = \sqrt{3}\,.\sqrt{(3 \pm \sqrt{5})}$$
$$\sqrt{(18 \pm 6\sqrt{5})} = \sqrt{6}\,.\sqrt{(3 \pm \sqrt{5})}$$
$$\sqrt{(10 \pm 2\sqrt{5})} = \sqrt{2}\,.\sqrt{(5 \pm \sqrt{5})}$$
$$\sqrt{(15 \pm 3\sqrt{5})} = \sqrt{3}\,.\sqrt{(5 \pm \sqrt{5})}$$
$$\sqrt{(30 \pm 6\sqrt{5})} = \sqrt{6}\,.\sqrt{(5 \pm \sqrt{5})}.$$

Daher reduciren ſich alle vorkommenden Quadratwurzeln auf folgende drei:

$$\sqrt{(2 \pm \sqrt{3})},\ \sqrt{(3 \pm \sqrt{5})},\ \sqrt{(5 \pm \sqrt{5})}\,.$$

Weil nun bekanntlich

$$\sqrt{(a \pm \sqrt{b})} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

iſt; ſo kann man auch

$$\sqrt{(2 \pm \sqrt{3})} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,,$$
$$\sqrt{(3 \pm \sqrt{5})} = \sqrt{\tfrac{5}{2}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,,$$
$$\sqrt{(5 \pm \sqrt{5})} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{2}} \pm \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{2}}$$

ſetzen und folglich die erwähnten algebraiſchen Ausdrücke auf mannigfaltige Weiſe umgeſtalten.

28. Setzt man in (207.) und (208.) $x = 90^\circ$, $y = \alpha$; ſo erhält man, weil nach (71.)

$$\cos(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) = \sin(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)\,,$$
$$\cos(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha) = \sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha)$$

iſt:

234. $1 + \sin\alpha = 2\sin(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)^2 = 2\cos(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha)^2\,,$

235. $1 - \sin\alpha = 2\cos(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)^2 = 2\sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha)^2\,.$

Alſo iſt

236. $\dfrac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha} = \tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)^2 = \cot(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha)^2\,,$

237. $\sin\alpha = \dfrac{\tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)^2 - 1}{\tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)^2 + 1} = \dfrac{\cot(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha)^2 - 1}{\cot(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha)^2 + 1}\,,$

238. $\sin\alpha = \dfrac{1 - \cot(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)^2}{1 + \cot(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)^2} = \dfrac{1 - \tang(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha)^2}{1 + \tang(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha)^2}\,.$

Setzt man in der Gleichung (183.) $90^\circ - \alpha$ für α, ſo erhält man

239. $\cos\alpha = \dfrac{2\tang(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha)}{1 + \tang(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha)^2} = \dfrac{2\cot(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha)}{1 + \cot(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha)^2}\,,$

oder, weil bekanntlich nach dem Obigen

$$\tang(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) = \cot(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha),\ \cot(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) = \tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)$$

iſt,

240. $\cos\alpha = \dfrac{2\cot(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)}{1 + \cot(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)^2} = \dfrac{2\tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)}{1 + \tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)^2}\,.$

Setzt man in den Gleichungen (207.) und (208.) $x = \alpha$, $y = 90^\circ - \alpha$; ſo erhält man, weil nach (228.)

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

iſt, die Quadratwurzel poſitiv genommen:

241. $\sin\alpha + \cos\alpha = \cos(\alpha - 45^\circ).\sqrt{2} = \cos(45^\circ - \alpha).\sqrt{2}$,

242. $\sin\alpha - \cos\alpha = \sin(\alpha - 45^\circ).\sqrt{2} = -\sin(45^\circ - \alpha).\sqrt{2}$,

oder auch, weil bekanntlich

$$\cos(45^\circ - \alpha) = \sin(45^\circ + \alpha),\ \sin(45^\circ - \alpha) = \cos(45^\circ + \alpha)$$

iſt,

243. $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin(45^\circ + \alpha).\sqrt{2}$,

244. $\sin\alpha - \cos\alpha = -\cos(45^\circ + \alpha).\sqrt{2}$.

Alſo iſt

245. $\sin\alpha \pm \cos\alpha = \pm\sin(45^\circ \pm \alpha).\sqrt{2} = \pm\cos(45^\circ \mp \alpha).\sqrt{2}$,

die Quadratwurzel immer poſitiv genommen.

Setzt man in den Gleichungen (207.), (208.), (209.) und (210.) $x = 30^\circ + \alpha$, $y = 30^\circ - \alpha$; ſo werden dieſelben, weil nach (229.) und (230.) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ iſt:

246. $\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha) = \cos\alpha$,

247. $\sin(30^\circ + \alpha) - \sin(30^\circ - \alpha) = \sin\alpha.\sqrt{3}$,

248. $\cos(30^\circ + \alpha) + \cos(30^\circ - \alpha) = \cos\alpha.\sqrt{3}$,

249. $\cos(30^\circ + \alpha) - \cos(30^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$,

die Quadratwurzel poſitiv genommen. Auch erhellet leicht, daß man dieſe Formeln auf folgende Art ſchreiben kann:

250. $\cos(60^\circ - \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha) = \cos\alpha$,

251. $\cos(60^\circ - \alpha) - \cos(60^\circ + \alpha) = \sin\alpha.\sqrt{3}$,

252. $\sin(60^\circ - \alpha) + \sin(60^\circ + \alpha) = \cos\alpha.\sqrt{3}$,

253. $\sin(60^\circ - \alpha) - \sin(60^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$.

Setzt man in (225.) nach und nach $x = 45^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ und $y = \alpha$; ſo erhält man:

254. $\frac{1}{2} = \sin\alpha^2 + \sin(45^\circ + \alpha)\sin(45^\circ - \alpha)$
$= \sin\alpha^2 + \cos(45^\circ + \alpha)\cos(45^\circ - \alpha)$,

255. $\frac{1}{4} = \sin\alpha^2 + \sin(30^\circ + \alpha)\sin(30^\circ - \alpha)$
$= \sin\alpha^2 + \cos(60^\circ + \alpha)\cos(60^\circ - \alpha)$,

256. $\frac{3}{4} = \sin\alpha^2 + \sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ - \alpha)$
$= \sin\alpha^2 + \cos(30^\circ + \alpha)\cos(30^\circ - \alpha)$.

Aus (228.), (229.), (230.) erhält man leicht:

257. $\tang 45^\circ = 1$, 258. $\tang 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$;

259. $\cot 45^\circ = 1$, 260. $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$,

die Quadratwurzel poſitiv genommen.

Setzt man in (152.) und (154.) $\alpha = 45^\circ$ und ſchreibt α für β; ſo erhält man:

261. $\tang(45^\circ \pm \alpha) = \frac{1 \pm \tang\alpha}{1 \mp \tang\alpha}$,

262. $\cot(45^\circ \pm \alpha) = \frac{1 \mp \tang\alpha}{1 \pm \tang\alpha}$.

Alſo iſt auch

$$263.\quad \tang(45^\circ+\alpha)-\tang(45^\circ-\alpha)=\frac{4\tang\alpha}{1-\tang\alpha^2},$$

$$264.\quad \cot(45^\circ-\alpha)-\cot(45^\circ+\alpha)=\frac{4\tang\alpha}{1-\tang\alpha^2}.$$

Folglich nach (158.)

$$265.\quad 2\tang 2\alpha=\tang(45^\circ+\alpha)-\tang(45^\circ-\alpha)$$
$$=\cot(45^\circ-\alpha)-\cot(45^\circ+\alpha).$$

Ferner iſt

$$266.\quad \tang(45^\circ+\alpha)+\tang(45^\circ-\alpha)=2.\frac{1+\tang\alpha^2}{1-\tang\alpha^2},$$

$$267.\quad \cot(45^\circ+\alpha)+\cot(45^\circ-\alpha)=2.\frac{1+\tang\alpha^2}{1-\tang\alpha^2};$$

folglich, weil

$$\frac{1}{\cos 2\alpha}=\sec 2\alpha$$

iſt, nach (182.)

$$268.\quad 2\sec 2\alpha=\tang(45^\circ+\alpha)+\tang(45^\circ-\alpha)$$
$$=\cot(45^\circ+\alpha)+\cot(45^\circ-\alpha),$$

mittelſt welcher Formeln man die Secanten durch bloße Addition der Tangenten oder Cotangenten finden kann.

Aus (265.) und (268.) folgt

$$269.\quad \sec 2\alpha+\tang 2\alpha=\tang(45^\circ+\alpha)=\cot(45^\circ-\alpha),$$

$$270.\quad \sec 2\alpha-\tang 2\alpha=\cot(45^\circ+\alpha)=\tang(45^\circ-\alpha),$$

d. i.

$$271.\quad \sec 2\alpha\pm\tang 2\alpha=\tang(45^\circ\pm\alpha)=\cot(45^\circ\mp\alpha).$$

Aus (265.) und (268.) ergiebt ſich auch leicht durch Diviſion

$$272.\quad \sin\alpha=\frac{\tang(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)-\tang(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)}{\tang(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)+\tang(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)}$$
$$=\frac{\cot(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)-\cot(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)}{\cot(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)+\cot(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)}$$
$$=\frac{\tang(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)-\cot(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)}{\tang(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)+\cot(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)}$$
$$=\frac{\cot(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)-\tang(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)}{\cot(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)+\tang(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)}.$$

Setzt man in den aus dem Obigen bekannten Formeln

$$1-\cos\alpha=2\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2,\quad 1+\cos\alpha=2\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2$$

$90^\circ-\alpha$ für α; ſo wird

$$273.\quad 1-\sin\alpha=2\sin(45^\circ-\tfrac{1}{2}\alpha)^2,$$

$$274.\quad 1+\sin\alpha=2\cos(45^\circ-\tfrac{1}{2}\alpha)^2;$$

oder auch

$$275.\quad 1\mp\sin\alpha=2\sin(45^\circ\mp\tfrac{1}{2}\alpha)^2=2\cos(45^\circ\pm\tfrac{1}{2}\alpha)^2.$$

Auch iſt

276. $\operatorname{sinv} \alpha = 2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha^2$,

277. $\operatorname{cosv} \alpha = 2 \sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\alpha)^2 = 2 \cos(45^0 + \tfrac{1}{2}\alpha)^2$.

29. Zwiſchen den goniometriſchen Functionen dreier beliebigen Winkel, die wir durch α, β, γ bezeichnen wollen, finden gewiſſe merkwürdige Relationen Statt, von denen die wichtigſten jetzt entwickelt werden ſollen.

Entwickelt man zunächſt

$$\sin(\gamma-\beta),\ \sin(\alpha-\gamma),\ \sin(\beta-\alpha)$$

nach (41.), ſo erhält man ſehr leicht:

278. $\sin\alpha\sin(\gamma-\beta) + \sin\beta\sin(\alpha-\gamma) + \sin\gamma\sin(\beta-\alpha) = 0$,

279. $\cos\alpha\sin(\gamma-\beta) + \cos\beta\sin(\alpha-\gamma) + \cos\gamma\sin(\beta-\alpha) = 0$.

Nach (206.) und (205.) iſt

$$-2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) ,$$
$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) ;$$

folglich

$$-4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 2\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma - 2\cos(\alpha-\beta)\sin\gamma ,$$
$$4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 2\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma + 2\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma ;$$

alſo nach (204.) und (205.)

280. $-4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

$$= \sin(\alpha+\beta+\gamma) - \sin(\alpha+\beta-\gamma) - \sin(\alpha-\beta+\gamma) + \sin(\alpha-\beta-\gamma),$$

281. $4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$$= \cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\alpha-\beta+\gamma) + \cos(\alpha-\beta-\gamma),$$

oder auch nach (39.) und (40.)

282. $4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

$$= -\sin(\alpha+\beta+\gamma) + \sin(\beta+\gamma-\alpha) + \sin(\alpha+\gamma-\beta) + \sin(\alpha+\beta-\gamma),$$

283. $4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$$= \cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\beta+\gamma-\alpha) + \cos(\alpha+\gamma-\beta) + \cos(\alpha+\beta-\gamma).$$

Setzen wir in dieſen beiden Gleichungen x, y, z für α, β, γ; ſo ergiebt ſich

$$\sin(y+z-x) + \sin(x+z-y) + \sin(x+y-z)$$
$$= 4\sin x \sin y \sin z + \sin(x+y+z) ,$$
$$\cos(y+z-x) + \cos(x+z-y) + \cos(x+y-z)$$
$$= 4\cos x \cos y \cos z - \cos(x+y+z) .$$

Setzen wir nun

$$y+z-x=\alpha,\quad x+z-y=\beta,\quad x+y-z=\gamma ;$$

ſo ergiebt ſich durch Auflöſung dieſer drei Gleichungen

$$x = \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma),\ y = \tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma),\ z = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) ,$$

und folglich nach den beiden obigen allgemeinen Formeln:

284. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$

$$= 4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\beta+\gamma) ,$$

285. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$
$$= 4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) - \cos(\alpha+\beta+\gamma)\,.$$

Nach (193.) und (194.) iſt
$$\tang\alpha + \tang\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \cot\alpha+\cot\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\,.$$

Folglich iſt
$$\tang\alpha + \tang\beta + \tang\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} + \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$= \frac{\{\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)\}\sin\gamma + \sin(\alpha+\beta)\cos\gamma + \cos(\alpha+\beta)\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$
$$= \frac{\sin\alpha\ \sin\beta\ \sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} + \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$
$$\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma = \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} + \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$
$$= \frac{\{\sin\alpha\sin\beta + \cos(\alpha+\beta)\}\cos\gamma - \cos(\alpha+\beta)\cos\gamma + \sin(\alpha+\beta)\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$
$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} - \frac{\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}.$$

Alſo iſt immer

286. $\tang\alpha + \tang\beta + \tang\gamma = \tang\alpha\tang\beta\tang\gamma + \dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$,

287. $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma - \dfrac{\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$,

für jedes α, β, γ.

Nach (205.) und (206.) iſt
$$\begin{aligned}
2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha) &= -\cos(\beta+\gamma) + \cos\alpha\,,\\
2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) &= -\cos\alpha + \cos(\gamma-\beta)\,,\\
2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha) &= \cos(\beta+\gamma) + \cos\alpha\,,\\
2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) &= \cos\alpha + \cos(\gamma-\beta)\,.
\end{aligned}$$

Alſo iſt
$$4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$$
$$= -\cos\alpha^2 - \cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma-\beta) + \cos\alpha\{\cos(\beta+\gamma)+\cos(\gamma-\beta)\},$$
$$4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$$
$$= \cos\alpha^2 + \cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma-\beta) + \cos\alpha\{\cos(\beta+\gamma)+\cos(\gamma-\beta)\},$$
$$4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$$
$$= \cos\alpha^2 - \cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma-\beta) - \cos\alpha\{\cos(\beta+\gamma)-\cos(\gamma-\beta)\},$$
$$4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$$
$$= -\cos\alpha^2 + \cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma-\beta) - \cos\alpha\{\cos(\beta+\gamma)-\cos(\gamma-\beta)\}.$$

Aber
$$\cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma-\beta)$$
$$= \{\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\}\{\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\}$$

$$= \cos\beta^2 \cos\gamma^2 - (1 - \cos\beta^2)(1 - \cos\gamma^2)$$
$$= -1 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 ,$$

und nach (205.) und (206.)

$$\cos(\beta+\gamma) + \cos(\gamma-\beta) = 2\cos\beta\cos\gamma ,$$
$$\cos(\beta+\gamma) - \cos(\gamma-\beta) = -2\sin\beta\sin\gamma .$$

Alſo iſt

288. $4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$
$= 1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma ,$

289. $4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$
$= -1 + \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma ,$

290. $4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$
$= 1 + \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma ,$

291. $4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$
$= -1 - \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma .$

30. Wir wollen nun

$$a + \beta + \gamma = \pi$$

ſetzen; ſo iſt

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\gamma,\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma) = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\beta,\ \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha ;$$

alſo

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \cos\tfrac{1}{2}\gamma,\ \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma) = \cos\tfrac{1}{2}\beta,\ \sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = \cos\tfrac{1}{2}\alpha ;$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \sin\tfrac{1}{2}\gamma,\ \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma) = \sin\tfrac{1}{2}\beta,\ \cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = \sin\tfrac{1}{2}\alpha ;$$
$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = 0,\ \cos(\alpha+\beta+\gamma) = -1 .$$

Folglich iſt nach (284.), (285.), (286.), (287.)

292. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma ,$

293. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma ,$

294. $\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta + \operatorname{tang}\gamma = \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta\operatorname{tang}\gamma ,$

295. $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma + \operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta\operatorname{cosec}\gamma .$

Da ferner

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\pi$$

iſt; ſo iſt

$$\sin(2\alpha + 2\beta + 2\gamma) = 0,\ \cos(2\alpha + 2\beta + 2\gamma) = 1 .$$

Weil nun ferner nach aus dem Obigen bekannten Formeln

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma,\ \sin(\alpha+\gamma) = \sin\beta,\ \sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha ;$$
$$\cos(\alpha+\beta) = -\cos\gamma,\ \cos(\alpha+\gamma) = -\cos\beta,\ \cos(\beta+\gamma) = -\cos\alpha$$

iſt; ſo iſt nach (284.), (285.), (286.), (287.), wenn man 2α, 2β, 2γ für die dortigen α, β, γ ſetzt:

296. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma ,$

297. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma ,$

298. $\tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma = \tan 2\alpha \tan 2\beta \tan 2\gamma$,

299. $\cot 2\alpha + \cot 2\beta + \cot 2\gamma = \cot 2\alpha \cot 2\beta \cot 2\gamma$
$- \operatorname{cosec} 2\alpha \operatorname{cosec} 2\beta \operatorname{cosec} 2\gamma$.

Ferner iſt auch

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi,\quad \beta+\gamma-\alpha=\pi-2\alpha,\quad \alpha+\gamma-\beta=\pi-2\beta,$$
$$\alpha+\beta-\gamma=\pi-2\gamma;$$
$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)=\tfrac{1}{2}\pi,\quad \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)=\tfrac{1}{2}\pi-\alpha,\quad \tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)=\tfrac{1}{2}\pi-\beta,$$
$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)=\tfrac{1}{2}\pi-\gamma.$$

Alſo iſt

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=0,\qquad \cos(\alpha+\beta+\gamma)=-1;$$
$$\sin(\beta+\gamma-\alpha)=\sin 2\alpha,\quad \cos(\beta+\gamma-\alpha)=-\cos 2\alpha;$$
$$\sin(\alpha+\gamma-\beta)=\sin 2\beta,\quad \cos(\alpha+\gamma-\beta)=-\cos 2\beta;$$
$$\sin(\alpha+\beta-\gamma)=\sin 2\gamma,\quad \cos(\alpha+\beta-\gamma)=-\cos 2\gamma;$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)=1,\qquad \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)=0;$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)=\cos\alpha,\quad \cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)=\sin\alpha;$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)=\cos\beta,\quad \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)=\sin\beta;$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)=\cos\gamma,\quad \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)=\sin\gamma.$$

Folglich iſt nach (282.) und (283.)

$$4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma,$$
$$4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=-1-\cos 2\alpha-\cos 2\beta-\cos 2\gamma,$$

wie in (296.) und (297.) ſchon auf anderm Wege gefunden worden iſt.

Aus (289.) und (291.) folgt

300. $0=1-\cos\alpha^2-\cos\beta^2-\cos\gamma^2-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$,

301. $0=1+\cos\alpha^2-\cos\beta^2-\cos\gamma^2-2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

Dieſelben Gleichungen folgen auch aus (288.) und (290.).

31. Sey nun ferner

$$\alpha+\beta+\gamma=\tfrac{1}{2}\pi,\quad 2\alpha+2\beta+2\gamma=\pi;$$

ſo iſt nach (292.), (293.), (294.), (295.)

302. $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$,

303. $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=1+4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$,

304. $\tan 2\alpha+\tan 2\beta+\tan 2\gamma=\tan 2\alpha\tan 2\beta\tan 2\gamma$,

305. $\cot 2\alpha+\cot 2\beta+\cot 2\gamma=\cot 2\alpha\cot 2\beta\cot 2\gamma$
$+\operatorname{cosec} 2\alpha\operatorname{cosec} 2\beta\operatorname{cosec} 2\gamma$.

Nach (284.) und (285.) iſt

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=1+4\sin(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\alpha)\sin(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\beta)\sin(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\gamma),$$
$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\cos(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\alpha)\cos(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\beta)\cos(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\gamma).$$

Aber nach (41.), (42.) und (228.)

$$\sin(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\alpha)=(\cos\tfrac{1}{2}\alpha-\sin\tfrac{1}{2}\alpha).\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$
$$\cos(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\alpha)=(\cos\tfrac{1}{2}\alpha+\sin\tfrac{1}{2}\alpha).\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

die Quadratwurzel poſitiv genommen.

Alſo iſt

$$306.\quad \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$$
$$= 1 + (\cos\tfrac{1}{2}\alpha - \sin\tfrac{1}{2}\alpha)(\cos\tfrac{1}{2}\beta - \sin\tfrac{1}{2}\beta)(\cos\tfrac{1}{2}\gamma - \sin\tfrac{1}{2}\gamma).\sqrt{2},$$
$$307.\quad \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$$
$$= (\cos\tfrac{1}{2}\alpha + \sin\tfrac{1}{2}\alpha)(\cos\tfrac{1}{2}\beta + \sin\tfrac{1}{2}\beta)(\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \sin\tfrac{1}{2}\gamma).\sqrt{2}.$$

Aus (286.) und (287.) folgt

$$308.\quad \tang\alpha + \tang\beta + \tang\gamma = \tang\alpha\tang\beta\tang\gamma + \sec\alpha\sec\beta\sec\gamma,$$
$$309.\quad \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma,$$

zwei Relationen, von denen namentlich die letztere ſehr merkwürdig iſt.

Auch iſt, wie leicht erhellet,

$$\tang\alpha\tang\gamma + \tang\beta\tang\gamma = \frac{\sin(\alpha+\beta)\tang\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)\cot(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = 1 - \tang\alpha\tang\beta;$$

alſo iſt immer

$$310.\quad \tang\alpha\tang\beta + \tang\alpha\tang\gamma + \tang\beta\tang\gamma = 1.$$

32. Wir wollen nun auch noch unterſuchen, was ſich aus den Gleichungen

$$\sin x = \sin y,\quad \cos x = \cos y,\quad \tang x = \tang y,\quad \cot x = \cot y;$$
$$\sec x = \sec y,\quad \mathrm{cosec}\, x = \mathrm{cosec}\, y,\quad \mathrm{sinv}\, x = \mathrm{sinv}\, y,\quad \mathrm{cosv}\, x = \mathrm{cosv}\, y,$$

wo x und y ein Paar an ſich ganz beliebige, nur einer oder der andern der obigen Gleichungen genügende Bogen bezeichnen, in Bezug auf des gegenſeitige Verhalten dieſer Bogen ſchließen läßt.

I. Sey daher zunächſt $\sin x = \sin y$ und überhaupt

$$y = x + \Theta;$$

ſo iſt nach (41.)

$$\sin y = \sin x\cos\Theta + \cos x\sin\Theta,$$

und folglich nach der Vorausſetzung

$$\sin x = \sin x\cos\Theta + \cos x\sin\Theta;$$

alſo

$$\sin x(1 - \cos\Theta) = \cos x\sin\Theta,$$

d. i. nach (165.) und (156.)

$$2\sin x\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2 = 2\cos x\sin\tfrac{1}{2}\Theta\cos\tfrac{1}{2}\Theta,$$

woraus in völliger Allgemeinheit

$$\sin\tfrac{1}{2}\Theta(\cos x\cos\tfrac{1}{2}\Theta - \sin x\sin\tfrac{1}{2}\Theta) = 0,$$

d. i. nach (42.)

$$\sin\tfrac{1}{2}\Theta\cos(x + \tfrac{1}{2}\Theta) = 0.$$

Folglich iſt entweder

$$\sin\tfrac{1}{2}\Theta = 0$$

oder

$$\cos(x + \tfrac{1}{2}\Theta) = 0 .$$

Aus der erſten Gleichung folgt, wenn n immer eine poſitive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$\tfrac{1}{2}\Theta = n\pi,\ \Theta = 2n\pi,\ y = x + 2n\pi ,$$

und aus der zweiten der beiden obigen Gleichungen ergiebt ſich

$$x + \tfrac{1}{2}\Theta = (2n+1).\tfrac{1}{2}\pi,\ \Theta = (2n+1)\pi - 2x,\ y = (2n+1)\pi - x .$$

Iſt alſo $\sin x = \sin y$, ſo iſt immer entweder

$$y = x + 2n\pi$$

oder

$$y = (2n+1)\pi - x .$$

II. Sey ferner $\cos x = \cos y$ und wieder

$$y = x + \Theta ;$$

ſo iſt nach (42.)

$$\cos y = \cos x \cos\Theta - \sin x \sin\Theta ,$$

alſo nach der Vorausſetzung

$$\cos x = \cos x \cos\Theta - \sin x \sin\Theta ;$$

folglich

$$\cos x (1 - \cos\Theta) = - \sin x \sin\Theta ,$$

d. i. nach (165.) und (156.)

$$2 \cos x \sin \tfrac{1}{2}\Theta^2 = - 2 \sin x \sin \tfrac{1}{2}\Theta \cos \tfrac{1}{2}\Theta ,$$

woraus

$$- \sin \tfrac{1}{2}\Theta (\sin x \cos \tfrac{1}{2}\Theta + \cos x \sin \tfrac{1}{2}\Theta) = 0 ,$$

d. i. nach (41.)

$$- \sin \tfrac{1}{2}\Theta \sin(x + \tfrac{1}{2}\Theta) = 0$$

und folglich entweder

$$\sin \tfrac{1}{2}\Theta = 0$$

oder

$$\sin(x + \tfrac{1}{2}\Theta) = 0 .$$

Aus der erſten Gleichung folgt

$$\tfrac{1}{2}\Theta = n\pi,\ \Theta = 2n\pi,\ y = x + 2n\pi ,$$

und aus der zweiten Gleichung ergiebt ſich

$$x + \tfrac{1}{2}\Theta = n\pi,\ \Theta = 2n\pi - 2x,\ y = 2n\pi - x .$$

Iſt alſo $\cos x = \cos y$, ſo iſt immer, wenn n eine beliebige poſitive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$y = 2n\pi \pm x .$$

III. Für $\tan g x = \tan g y$ ſey wieder

$$y = x + \Theta ;$$

ſo iſt

$$\operatorname{tang}(x + \Theta) = \operatorname{tang} x$$

oder

$$\frac{\sin(x+\Theta)}{\cos(x+\Theta)} = \frac{\sin x}{\cos x};$$

alſo

$$\sin(x+\Theta)\cos x = \cos(x+\Theta)\sin x,$$
$$\sin(x+\Theta)\cos x - \cos(x+\Theta)\sin x = 0,$$

d. i. nach (41.) $\sin\Theta = 0$, und folglich $\Theta = n\pi$, alſo

$$y = x + n\pi.$$

IV. Für $\cot x = \cot y$ iſt nach (37.)

$$\frac{1}{\operatorname{tang} x} = \frac{1}{\operatorname{tang} y},$$

d. i.

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} y,$$

und folglich nach III.

$$y = x + n\pi.$$

V. Für $\sec x = \sec y$ iſt

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos y}, \cos x = \cos y;$$

alſo nach II.

$$y = 2n\pi \pm x.$$

VI. Für $\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} y$ iſt

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin y}, \sin x = \sin y;$$

alſo nach I.

$$y = x + 2n\pi \text{ oder } y = (2n+1)\pi - x.$$

VII. Für $\operatorname{sinv} x = \operatorname{sinv} y$ iſt

$$1 - \cos x = 1 - \cos y, \cos x = \cos y;$$

alſo iſt nach II.

$$y = 2n\pi \pm x.$$

VIII. Für $\operatorname{cosv} x = \operatorname{cosv} y$ iſt

$$1 - \sin x = 1 - \sin y, \sin x = \sin y;$$

alſo iſt nach I.

$$y = x + 2n\pi \text{ oder } y = (2n+1)\pi - x.$$

IX. Aus der Gleichung $\sin x = \cos y$ folgt

$$\sin x = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - y);$$

folglich iſt nach I.

$$\tfrac{1}{2}\pi - y = x + 2n\pi \text{ oder } \tfrac{1}{2}\pi - y = (2n+1)\pi - x,$$

d. i.

$$y = (\pm\tfrac{1}{2} - 2n)\pi \mp x.$$

Aus $\sin x = \cos y$ folgt auch

$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \cos y,$$

alſo nach **II.**

$$y = (\pm \tfrac{1}{2} + 2n)\pi \mp x,$$

welches mit dem Vorhergehenden einerlei iſt, da n poſitiv und negativ ſeyn kann.

X. Aus $\tang x = \cot y$ folgt

$$\tang x = \tang(\tfrac{1}{2}\pi - y);$$

alſo iſt nach **III.**

$$\tfrac{1}{2}\pi - y = x + n\pi,$$

d. i. $y = (\frac{1}{2} - n)\pi - x$.

Aus $\tang x = \cot y$ folgt auch

$$\cot(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \cot y;$$

alſo nach **IV.**

$$y = \tfrac{1}{2}\pi - x + n\pi = (\tfrac{1}{2} + n)\pi - x,$$

welches mit dem Vorhergehenden einerlei iſt, da n poſitiv und negativ ſeyn kann.

Wie man ſich in ähnlichen Fällen zu verhalten hat, wird aus den beiden vorhergehenden Beiſpielen **IX.** und **X.** hinreichend erhellen.

III. Sinus und Coſinus vielfacher Bogen. Summirung einiger merkwürdigen goniometriſchen Reihen. Ueber einige wichtige Producte.

33. In der Folge ſoll i immer die aus der Arithmetik bekannte imaginäre Größe $\sqrt{-1}$ bezeichnen, für welche $i^2 = -1$, alſo allgemein für jedes poſitive ganze n, wie man leicht findet,

$$311. \quad i^{2n} = (-1)^n, \quad i^{2n+1} = i.(-1)^n$$

iſt. Weil

$$i^{-2n} = \frac{1}{i^{2n}} = \frac{1}{(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{(-1)^n(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{(-1)^{2n}},$$

$$i^{-(2n+1)} = \frac{1}{i^{2n+1}} = \frac{1}{i.(-1)^n} = \frac{i.(-1)^n}{i^2.(-1)^n(-1)^n} = -\frac{i.(-1)^n}{(-1)^{2n}},$$

und $(-1)^{2n} = 1$ iſt; ſo iſt

$$312. \quad i^{-2n} = (-1)^n, \quad i^{-(2n+1)} = -i.(-1)^n.$$

34. Entwickelt man das Product

$$(\cos nx \pm i \sin nx)(\cos x \pm i \sin x)$$

durch gemeine Multiplication, ſo erhält man

$$\cos nx \cos x - \sin nx \sin x$$
$$\pm i\{\sin nx \cos x + \cos nx \sin x),$$

d. i. nach (41.) und (42.)

$$\cos(n+1)x \pm i\sin(n+1)x\,,$$

ſo daß alſo immer

313. $(\cos nx \pm i\sin nx)(\cos x \pm i\sin x) = \cos(n+1)x \pm i\sin(n+1)x$

iſt. Setzt man nun nach und nach $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$; ſo ergiebt ſich leicht

314. $(\cos x \pm i\sin x)^n = \cos nx \pm i\sin nx$

für jedes ganze poſitive n.

Entwickeln wir die Potenz

$$(\cos x \pm i\sin x)^n$$

nach dem binomiſchen Lehrſatze für poſitive ganze Exponenten, da wir jetzt immer annehmen wollen, daß n eine poſitive ganze Zahl ſey, und bezeichnen die Binomial-Coefficienten der Kürze wegen durch $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, \ldots$; ſo erhalten wir mit Rückſicht auf (311.)

315. $(\cos x \pm i\sin x)^n = \cos nx \pm i\sin nx$

$$= \cos x^n - n_2 \cos x^{n-2}\sin x^2 + n_4 \cos x^{n-4}\sin x^4 - \ldots$$

$$\pm i\{n_1 \cos x^{n-1}\sin x - n_3 \cos x^{n-3}\sin x^3 + n_5 \cos x^{n-5}\sin x^5 - \ldots\},$$

beide Reihen ſo weit fortgeſetzt, bis ſie wegen der verſchwindenden Binomial-Coefficienten abbrechen. Verbindet man nun die für

$$\cos nx + i\sin nx \text{ und } \cos nx - i\sin nx$$

erhaltenen Ausdrücke durch Addition und Subtraction mit einander; ſo erhält man:

316. $\cos nx = \cos x^n - n_2 \cos x^{n-2}\sin x^2 + n_4 \cos x^{n-4}\sin x^4 - \ldots,$

317. $\sin nx = n_1 \cos x^{n-1}\sin x - n_3 \cos x^{n-3}\sin x^3 + n_5 \cos x^{n-5}\sin x^5 - \ldots;$

beide Reihen ſo weit fortgeſetzt, bis ſie wegen der $=0$ werdenden Binomial-Coefficienten abbrechen.

Zu bemerken iſt, daß man die beiden vorigen Formeln auch auf folgende Art ausdrücken kann:

318. $\cos nx = \cos x^n\{1 - n_2 \operatorname{tang} x^2 + n_4 \operatorname{tang} x^4 - n_6 \operatorname{tang} x^6 + \ldots\},$

319. $\sin nx = \cos x^n\{n_1 \operatorname{tang} x - n_3 \operatorname{tang} x^3 + n_5 \operatorname{tang} x^5 - \ldots\},$

ſo daß alſo auch

320. $\operatorname{tang} nx = \dfrac{n_1 \operatorname{tang} x - n_3 \operatorname{tang} x^3 + n_5 \operatorname{tang} x^5 - \ldots}{1 - n_2 \operatorname{tang} x^2 + n_4 \operatorname{tang} x^4 - n_6 \operatorname{tang} x^6 + \ldots}$

iſt. Auch iſt

321. $\cos nx = \sin x^n\{\cot x^n - n_2 \cot x^{n-2} + n_4 \cot x^{n-4} - \ldots\},$

322. $\sin nx = \sin x^n\{n_1 \cot x^{n-1} - n_3 \cot x^{n-3} + n_5 \cot x^{n-5} - \ldots\},$

323. $\cot nx = \dfrac{\cot x^n - n_2 \cot x^{n-2} + n_4 \cot x^{n-4} - \ldots}{n_1 \cot x^{n-1} - n_3 \cot x^{n-3} + n_5 \cot x^{n-5} - \ldots}.$

34. Wir wollen nun die Reihen (316.) und (317.) auch nach Potenzen von $\sin x$ zu entwickeln ſuchen.

I. Zuerſt ſey n eine poſitive gerade Zahl, ſo iſt, weil

$$\cos x^2 = 1 - \sin x^2$$

iſt, nach (316.) und (317.)

$$\cos nx =$$

$$(1-\sin x^2)^{\frac{n}{2}} - n_2(1-\sin x^2)^{\frac{n-2}{2}}\sin x^2 + n_4(1-\sin x^2)^{\frac{n-4}{2}}\sin x^4 - \ldots,$$

$$\sin nx =$$

$$\cos x\{n_1(1-\sin x^2)^{\frac{n-2}{2}}\sin x - n_3(1-\sin x^2)^{\frac{n-4}{2}}\sin x^3 + \ldots\}.$$

Entwickelt man nun in der erſten dieſer beiden Reihen alle Potenzen von $1 - \sin x^2$ nach dem binomiſchen Lehrſatze für poſitive ganze Exponenten; ſo erhält man als $(p+1)$tes Glied der entſtehenden Reihe

$$\left(\frac{n}{2}\right)_p + n_2\left(\frac{n-2}{2}\right)_{p-1} + n_4\left(\frac{n-4}{2}\right)_{p-2} + \ldots + n_{2p-2}\left(\frac{n-2p+2}{2}\right)_1 + n_{2p},$$

wenn man dieſe Größe, welche wir der Kürze wegen durch P bezeichnen wollen, noch mit $(-1)^p . \sin x^{2p}$ multiplicirt. Weil aber, wie leicht erhellet, allgemein

$$n_{2k}\left(\frac{n-2k}{2}\right)_q =$$

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-2k+1)}{1.2.3\ldots 2k}.\frac{(n-2k)(n-2k-2)\ldots(n-2k-2q+2)}{2.4.6.8\ldots 2q}$$

$$= \frac{n(n-2)\ldots(n-2k-2q+2)}{1.3.5\ldots(2k+2q-1)}.\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2k+1)}{2.4.6\ldots 2k}.\frac{(2k+2q-1)\ldots(2k+1)}{2.4.6\ldots 2q}$$

$$= \frac{n(n-2)\ldots(n-2k-2q+2)}{1.3.5\ldots(2k+2q-1)}.\left(\frac{n-1}{2}\right)_k.\left(\frac{2k+2q-1}{2}\right)_q$$

iſt; ſo iſt

$$\begin{aligned}
P = {} & \frac{n(n-2)\ldots(n-2p+2)}{1.3.5\ldots(2p-1)}.\left(\frac{2p-1}{2}\right)_p \\
& + \frac{n(n-2)\ldots(n-2p+2)}{1.3.5\ldots(2p-1)}.\left(\frac{n-1}{2}\right)_1.\left(\frac{2p-1}{2}\right)_{p-1} \\
& + \frac{n(n-2)\ldots(n-2p+2)}{1.3.5\ldots(2p-1)}.\left(\frac{n-1}{2}\right)_2.\left(\frac{2p-1}{2}\right)_{p-2} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{n(n-2)\ldots(n-2p+2)}{1.3.5\ldots(2p-1)}.\left(\frac{n-1}{2}\right)_{p-1}.\left(\frac{2p-1}{2}\right)_1 \\
& + \frac{n(n-2)\ldots(n-2p+2)}{1.3.5\ldots(2p-1)}.\left(\frac{n-1}{2}\right)_p;
\end{aligned}$$

alſo nach dem im Art. Binomiſcher Lehrſatz (10.) i. d. Z. bewieſenen Satze von den Binomial-Coefficienten

$$P = \frac{n(n-2)\ldots(n-2p+2)}{1.3.5\ldots(2p-1)}.\left(\frac{n+2p-2}{2}\right)_p.$$

Da nun das erſte Glied der nach Potenzen von $\sin x$ entwickelten Reihe für $\cos nx$ offenbar die Einheit iſt; ſo iſt

$$324.\quad \cos nx = 1 - \frac{n}{1}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)_1 \cdot \sin x^2 + \frac{n(n-2)}{1.3}\cdot\left(\frac{n+2}{2}\right)_2 \cdot \sin x^4$$
$$- \frac{n(n-2)(n-4)}{1.3.5}\cdot\left(\frac{n+4}{2}\right)_3 \cdot \sin x^6 + \ldots\ldots$$

oder

$$325.\quad \cos nx =$$
$$1 - \frac{n^2}{2}\sin x^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{2.3.4}\sin x^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5.6}\sin x^6$$
$$+ \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{2.3.4.5.6.7.8}\sin x^8 - \ldots\ldots$$

für jedes n, welches poſitiv und eine gerade Zahl iſt.

Entwickelt man ferner auch in der Reihe für $\sin nx$ alle Potenzen von $1 - \sin x^2$ nach dem binomiſchen Lehrſatze für poſitive ganze Exponenten; ſo erhält man als $(p+1)$tes Glied der entſtehenden Reihe

$$n_1\left(\frac{n-2}{2}\right)_p + n_3\left(\frac{n-4}{2}\right)_{p-1} + n_5\left(\frac{n-6}{2}\right)_{p-2} + \ldots + n_{2p-1}\left(\frac{n-2p}{2}\right)_1 + n_{2p+1},$$

wenn man dieſe Größe, welche wir der Kürze wegen durch Q bezeichnen wollen, noch mit $(-1)^p \cdot \cos x \sin x^{2p+1}$ multiplicirt. Weil nun allgemein

$$n_{2k-1}\left(\frac{n-2k}{2}\right)_q = \frac{n(n-1)\ldots(n-2k+2)}{1.2.3\ldots(2k-1)}\cdot\left(\frac{n-2k}{2}\right)$$
$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-2k+1)}{1.2.3\ldots 2k}\cdot\left(\frac{n-2k}{2}\right)_q\cdot\frac{2k}{n-2k+1}$$
$$= n_{2k}\left(\frac{n-2k}{2}\right)_q\cdot\frac{2k}{n-2k+1},$$

folglich nach dem Vorhergehenden

$$n_{2k-1}\left(\frac{n-2k}{2}\right)_q =$$
$$\frac{n(n-2)\ldots(n-2k-2q+2)}{1.3.5\ldots(2k+2q-1)}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)_k\cdot\left(\frac{2k+2q-1}{2}\right)_q\cdot\frac{2k}{n-2k+1}$$
$$= \frac{n(n-2)\ldots(n-2k-2q+2)}{1.3.5\ldots(2k+2q-2)}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)_{k-1}\cdot\left(\frac{2k+2q-1}{2}\right)_q$$

iſt; ſo iſt

$$Q = \frac{n(n-2)\ldots(n-2p)}{1.3.5\ldots(2p+1)}\cdot\left(\frac{2p+1}{2}\right)_p$$
$$+\frac{n(n-2)\ldots(n-2p)}{1.3.5\ldots(2p+1)}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)_1\cdot\left(\frac{2p+1}{2}\right)_{p-1}$$
$$+\frac{n(n-2)\ldots(n-2p)}{1.3.5\ldots(2p+1)}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)_2\cdot\left(\frac{2p+1}{2}\right)_{p-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-2)\ldots(n-2p)}{1.3.5\ldots(2p+1)}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)_{p-1}\cdot\left(\frac{2p+1}{2}\right)_1$$
$$+\frac{n(n-2)\ldots(n-2p)}{1.3.5\ldots(2p+1)}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)_p,$$

d. i. nach dem angeführten Satze von den Binomial-Coefficienten

$$Q = \frac{n(n-2)\ldots(n-2p)}{1.3.5\ldots(2p+1)}\cdot\left(\frac{n+2p}{2}\right)_p.$$

Folglich iſt

$$326.\quad \sin nx = \cos x\left\{n\sin x - \frac{n(n-2)}{1.3}\cdot\left(\frac{n+2}{2}\right)_1\cdot\sin x^3 + \frac{n(n-2)(n-4)}{1.3.5}\cdot\left(\frac{n+4}{2}\right)_2\cdot\sin x^5 - \ldots\right\}$$

oder

$$327.\quad \sin nx = \cos x\left\{n\sin x - \frac{n(n^2-4)}{2.3}\sin x^3 + \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5}\sin x^5 - \frac{n(n^2-4)(n-16)(n^2-36)}{2.3.4.5.6.7}\sin x^7 + \ldots\right\}$$

für jedes n, welches poſitiv und eine gerade Zahl iſt.

II. Iſt ferner n eine poſitive ungerade Zahl, ſo iſt nach (316.) und (317.)

$$\cos nx = \cos x\{(1-\sin x^2)^{\frac{n-1}{2}} - n_2(1-\sin x^2)^{\frac{n-3}{2}}\sin x^2 + \ldots\},$$

$$\sin nx = n_1\{(1-\sin x^2)^{\frac{n-1}{2}}\sin x - n_3(1-\sin x^2)^{\frac{n-3}{2}}\sin x + \ldots.$$

Entwickelt man die Potenzen von $1-\sin x^2$ in der erſten dieſer beiden Reihen nach dem binomiſchen Lehrſatze für poſitive ganze Exponenten; ſo erhält man als $(p+1)$tes Glied der entſtehenden Reihe

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)_p + n_2\left(\frac{n-3}{2}\right)_{p-1} + n_4\left(\frac{n-5}{2}\right)_{p-2} + \ldots + n_{2p-2}\left(\frac{n-2p+1}{2}\right)_1 + n_{2p},$$

wenn man dieſe Größe, welche wir durch P′ bezeichnen wollen, noch mit $(-1)^p.\cos x\sin x^{2p}$ multiplicirt. Auf ähnliche Art wie vorher iſt nun allgemein

$$n_{2k}\left(\frac{n-2k-1}{2}\right)_q =$$

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-2k+1)}{1.2.3\ldots2k}\cdot\frac{(n-2k-1)(n-2k-3)\ldots(n-2k-2q+1)}{2.4.6.8\ldots2q}$$

$$=\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2k-2q+1)}{1.3.5\ldots(2k+2q-1)}\cdot\frac{n(n-2)\ldots(n-2k+2)}{2.4.6\ldots2k}\cdot\frac{(2k+2q-1)\ldots(2k+1)}{2.4.6\ldots2q}$$

$$=\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2k-2q+1)}{1.3.5\ldots(2k+2q-1)}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)_k\cdot\left(\frac{2k+2q-1}{2}\right)_q;$$

folglich

$$P' = \frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+1)}{1.3.5\ldots(2p-1)}\cdot\left(\frac{2p-1}{2}\right)_p$$

$$+\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+1)}{1.3.5\ldots(2p-1)}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)_1\cdot\left(\frac{2p-1}{2}\right)_{p-1}$$

$$+\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+1)}{1.3.5\ldots(2p-1)}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)_2\cdot\left(\frac{2p-1}{2}\right)_{p-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+1)}{1.3.5\ldots(2p-1)}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)_{p-1}\cdot\left(\frac{2p-1}{2}\right)_1$$

$$+\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+1)}{1.3.5\ldots(2p-1)}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)_p,$$

d. i. nach dem angeführten Satze von den Binomial-Coefficienten

$$P' = \frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+1)}{1.3.5\ldots(2p-1)}\cdot\left(\frac{n+2p-1}{2}\right)_p.$$

Folglich iſt

$$328.\quad \cos nx =$$

$$\cos x\left\{1-\frac{n-1}{1}\cdot\left(\frac{n+1}{2}\right)_1\cdot\sin x^2+\frac{(n-1)(n-3)}{1.3}\cdot\left(\frac{n+3}{2}\right)_2\cdot\sin x^4 - \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{1.3.5}\cdot\left(\frac{n+5}{2}\right)_3\cdot\sin x^6+\ldots\right\}$$

oder

$$329.\quad \cos nx = \cos x\left\{1-\frac{n^2-1}{2}\sin x^2+\frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.}\sin x^4 - \frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2.3.4.5.6}\sin x^6+\ldots\right\}$$

für jedes poſitive ungerade n.

Entwickelt man ferner die Potenzen von $1-\sin x^2$ in der Reihe für $\sin nx$ nach dem binomiſchen Lehrſatze für poſitive ganze Exponenten; ſo erhält man als $(p+1)$tes Glied der entſtehenden Reihe

$$n_1\left(\frac{n-1}{2}\right)_p+n_3\left(\frac{n-3}{2}\right)_{p-1}+n_5\left(\frac{n-5}{2}\right)_{p-2}+\ldots+n_{2p-1}\left(\frac{n-2p+1}{2}\right)_1+n_{2p+1},$$

wenn man dieſe Größe, welche wir durch Q' bezeichnen wollen, noch mit $(-1)^p \cdot \sin x^{2p+1}$ multiplicirt. Weil nun allgemein

$$n_{2k+1}\left(\frac{n-2k-1}{2}\right)_q = \frac{n(n-1)\ldots(n-2k)}{1.2.3\ldots(2k+1)}\cdot\left(\frac{n-2k-1}{2}\right)_q$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-2k+1)}{1.2.3\ldots 2k}\cdot\left(\frac{n-2k-1}{2}\right)_q\cdot\frac{n-2k}{2k+1}$$

$$= n_{2k}\left(\frac{n-2k-1}{2}\right)_q\cdot\frac{n-2k}{2k+1}$$

iſt; ſo iſt nach dem Vorhergehenden

$$n_{2k+1}\left(\frac{n-2k-1}{2}\right)_q =$$

$$\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2k-2q+1)}{1.3.5\ldots(2k+2q-1)}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)_k\cdot\left(\frac{2k+2q-1}{2}\right)_q\cdot\frac{n-2k}{2k+1}.$$

Aber

$$\left(\frac{n}{2}\right)_k = \frac{n(n-2)\ldots(n-2k+2)}{2.4.6\ldots 2k},$$

$$\left(\frac{2k+2q-1}{2}\right)_q = \frac{(2k+2q-1)(2k+2q-3)\ldots(2k+1)}{2.4.6.8\ldots 2q};$$

alſo

$$\left(\frac{n}{2}\right)_k\cdot\left(\frac{2k+2q-1}{2}\right)_q\cdot\frac{n-2k}{2k+1} =$$

$$\frac{n}{2k+2q+1}\cdot\frac{(n-2)(n-4)\ldots(n-2k)}{2.4.6\ldots 2k}\cdot\frac{(2k+2q+1)(2k+2q-1)\ldots(2k+3)}{2.4.6.8\ldots 2q}$$

$$= \frac{n}{2k+2q+1}\cdot\left(\frac{n-2}{2}\right)_k\cdot\left(\frac{2k+2q+1}{2}\right)_q,$$

und folglich

$$n_{2k+1}\left(\frac{n-2k-1}{2}\right)_q = \frac{n(n-1)(n-3)\ldots(n-2k-2q+1)}{1.3.5.7\ldots(2k+2q+1)}\cdot\left(\frac{n-2}{2}\right)_k\cdot\left(\frac{2k+2q+1}{2}\right)_q.$$

Alſo iſt

$$Q' = \frac{n(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+1)}{1.3.5.7\ldots(2p+1)}\cdot\left(\frac{2p+1}{2}\right)_p$$

$$+\frac{n(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+1)}{1.3.5.7\ldots(2p+1)}\cdot\left(\frac{n-2}{2}\right)_1\cdot\left(\frac{2p+1}{2}\right)_{p-1}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+1)}{1.3.5.7\ldots(2p+1)}\cdot\left(\frac{n-2}{2}\right)_2\cdot\left(\frac{2p+1}{2}\right)_{p-2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+1)}{1.3.5.7\ldots(2p+1)}\cdot\left(\frac{n-2}{2}\right)_{p-1}\cdot\left(\frac{2p+1}{2}\right)_1$$

$$+\frac{n(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+1)}{1.3.5.7\ldots(2p+1)}\cdot\left(\frac{n-2}{2}\right)_p,$$

d. i. nach dem angeführten Satze von den Binomial-Coefficienten

$$Q' = \frac{n(n-1)(n-3)..(n-2p+1)}{1.3.5.7...(2p+1)} \cdot \left(\frac{n+2p-1}{2}\right)_p,$$

und folglich

$$330. \quad \sin nx = n \sin x - \frac{n(n-1)}{1.3} \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)_1 . \sin x^3 + \frac{n(n-1)(n-3)}{1.3.5} \cdot \left(\frac{n+3}{2}\right)_2 . \sin x^5 - \ldots.$$

oder

$$331. \quad \sin nx = n \sin x - \frac{n(n^2-1)}{2.3} . \sin x^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5} . \sin x^5 - \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2.3.4.5.6.7} . \sin x^7 + \ldots.,$$

für jedes poſitive ungerade n.

Ueberlegt man, daß

$$\cos(-nx) = \cos nx, \quad \sin(-nx) = -\sin nx$$

iſt; ſo erhellet auf der Stelle, daß die Formeln (325.), (327.), (329.), (331.) auch gelten, wenn n eine negative gerade oder ungerade Zahl iſt.

35. Man kann nun auch leicht $\cos nx$ und $\sin nx$ nach Potenzen von $\cos x$ entwickeln. Zu dieſen Entwickelungen gelangt man nämlich, wenn man in den in (34.) gefundenen Formeln $\frac{1}{2}\pi - x$ für x ſetzt, und bemerkt, daß nach (41.), (42.), (43.), (44.), (47.), (48.) für jedes poſitive oder negative gerade n

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2} - nx\right) = \cos\frac{n\pi}{2}\cos nx + \sin\frac{n\pi}{2}\sin nx = (-1)^{\frac{n}{2}}\cos nx,$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2} - nx\right) = \sin\frac{n\pi}{2}\cos nx - \cos\frac{n\pi}{2}\sin nx = (-1)^{\frac{n}{2}+1}\sin nx,$$

und für jedes poſitive oder negative ungerade n

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2} - nx\right) = \cos\frac{n\pi}{2}\cos nx + \sin\frac{n\pi}{2}\sin nx = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin nx,$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2} - nx\right) = \sin\frac{n\pi}{2}\cos nx - \cos\frac{n\pi}{2}\sin nx = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos nx$$

iſt. Auf dieſe Weiſe erhält man aus (325.) und (327.) für jedes poſitive oder negative gerade n:

$$332. \quad (-1)^{\frac{n}{2}}\cos nx = 1 - \frac{n^2}{2}\cos x^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{2.3.4}\cos x^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5.6}\cos x^6 + \ldots.,$$

333. $$(-1)^{\frac{n}{2}+1}\sin nx = \sin x\left\{n\cos x - \frac{n(n^2-4)}{2.3}\cos x^3 + \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5}\cos x^5 - \ldots\right\},$$

und aus (329.) und (331.), wenn n eine poſitive oder negative ungerade Zahl iſt:

334. $$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin nx = \sin x\left\{1 - \frac{n^2-1}{2}\cos x^2 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4}\cos x^4 - \frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2.3.4.5.6}\cos x^6 + \ldots\right\},$$

335. $$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos nx = n\cos x - \frac{n(n^2-1)}{2.3}\cos x^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5}\cos x^5 - \ldots.$$

36. Nach (217.) und (215.) iſt

$$\cos(n+1)x = 2\cos nx\cos x - \cos(n-1)x\ ,$$
$$\sin(n+1)x = 2\sin nx\cos x - \sin(n-1)x\ .$$

Setzt man in dieſen Formeln nach und nach $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$; ſo erhält man:

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos x\\
\cos 2x &= 2\cos x^2 - 1\\
\cos 3x &= 4\cos x^3 - 3\cos x\\
\cos 4x &= 8\cos x^4 - 8\cos x^2 + 1\\
\cos 5x &= 16\cos x^5 - 20\cos x^3 + 5\cos x\\
\cos 6x &= 32\cos x^6 - 48\cos x^4 + 18\cos x^2 - 1
\end{aligned}$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

und

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin x\\
\sin 2x &= \sin x(2\cos x)\\
\sin 3x &= \sin x(4\cos x^2 - 1)\\
\sin 4x &= \sin x(8\cos x^3 - 4\cos x)\\
\sin 5x &= \sin x(16\cos x^4 - 20\cos x^2 + 1)\\
\sin 6x &= \sin x(32\cos x^5 - 32\cos x^3 + 6\cos x)
\end{aligned}$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

woraus ſich leicht die beiden folgenden für jedes ganze poſitive n geltenden Formeln ergeben:

336. $$\cos nx = 2^{n-1}\cos x^n - \frac{n}{1}2^{n-3}\cos x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}2^{n-5}\cos x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}2^{n-7}\cos x^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}2^{n-9}\cos x^{n-8} + \ldots$$

337. $\sin nx =$

$$\sin x \left\{ 2^{n-1}\cos x^{n-1} - \frac{n-2}{1} 2^{n-3}\cos x^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2} 2^{n-5}\cos x^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3} 2^{n-7}\cos x^{n-7} + \ldots \right\}$$

mit der Beſtimmung, daß man in dieſen Ausdrücken bloß die Glieder beibehält, in denen der Exponent von $\cos x$ poſitiv iſt. Der Kürze wegen unterlaſſen wir hier, dieſe Formeln allgemein zu beweiſen, weil der Beweis durch die bekannte nach Jacob Bernoulli benannte Schlußart nicht die mindeſte Schwierigkeit hat. Man zeigt nämlich, daß die beiden in Rede ſtehenden Formeln, wenn ſie für $\cos(n-1)x$, $\cos nx$ und $\sin(n-1)x$, $\sin nx$ gelten, jederzeit auch für $\cos(n+1)x$ und $\sin(n+1)x$ gelten müſſen, wodurch ihre Allgemeinheit bewieſen iſt, da man ſich mittelſt des Obigen leicht überzeugt, daß ſie bis $\cos 6x$ und $\sin 6x$ gelten. Setzt man $\frac{1}{2}\pi - x$ für x, ſo kann man für $\cos nx$ und $\sin nx$ auch leicht Reihen finden, welche nach den abſteigenden Potenzen von $\sin x$ fortſchreiten, eine Unterſuchung, welche nicht die mindeſte Schwierigkeit hat, und daher hier der Kürze wegen ebenfalls bei Seite geſetzt werden ſoll.

37. Wir wollen nun die Summirung einiger merkwürdigen goniometriſchen Reihen verſuchen. Zuerſt habe man die Reihe

$$S = \cos\frac{\pi}{2n+1} - \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} - \ldots \mp \cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1} \pm \cos\frac{n\pi}{2n+1},$$

wo n natürlich eine poſitive ganze Zahl bezeichnet; ſo iſt nach (217.)

$$\cos\frac{\pi}{2n+1} = \cos\frac{\pi}{2n+1}$$
$$-\cos\frac{2\pi}{2n+1} = -2\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} + 1$$
$$\cos\frac{3\pi}{2n+1} = 2\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} - \cos\frac{\pi}{2n+1}$$
$$-\cos\frac{4\pi}{2n+1} = -2\cos\frac{3\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{2\pi}{2n+1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mp\cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1} = \mp 2\cos\frac{(n-2)\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} \pm \cos\frac{(n-3)\pi}{2n+1}$$
$$\pm\cos\frac{n\pi}{2n+1} = \pm 2\cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} \mp \cos\frac{(n-2)\pi}{2n+1};$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten addirt,

$$S = \cos\frac{\pi}{2n+1} - 2\left\{S \mp \cos\frac{n\pi}{2n+1}\right\}\cos\frac{\pi}{2n+1} + 1 - \left\{S \pm \cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1} \mp \cos\frac{n\pi}{2n+1}\right\},$$

$$2S\left\{1+\cos\frac{\pi}{2n+1}\right\}=\cos\frac{\pi}{2n+1}\pm 2\cos\frac{n\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1}+1$$
$$\mp\cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1}\pm\cos\frac{n\pi}{2n+1};$$

alſo nach (205.) und (209.)

$$2S\left\{1+\cos\frac{\pi}{2n+1}\right\}=1+\cos\frac{\pi}{2n+1}\pm\cos\frac{(n+1)\pi}{2n+1}\pm\cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1}$$
$$\mp\cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1}\pm\cos\frac{n\pi}{2n+1}$$
$$=1+\cos\frac{\pi}{2n+1}\pm 2\cos\frac{(2n+1)\pi}{2(2n+1)}\cos\frac{\pi}{2(2n+1)}$$
$$=1+\cos\frac{\pi}{2n+1}\pm 2\cos\tfrac{1}{2}\pi\cos\frac{\pi}{2(2n+1)};$$

folglich, weil $\cos\frac{1}{2}\pi=0$ iſt, $S=\frac{1}{2}$, d. i.

338. $\cos\frac{\pi}{2n+1}-\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}-\ldots\pm\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2}.$

Ferner habe man die Reihe

$$S'=\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1},$$

wo n immer eine poſitive ganze Zahl bezeichnet; ſo iſt auf ganz ähnliche Art wie vorher nach (217.)

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}=\cos\frac{\pi}{2n+1}$$
$$\cos\frac{3\pi}{2n+1}=2\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1}-\cos\frac{\pi}{2n+1}$$
$$\cos\frac{5\pi}{2n+1}=2\cos\frac{4\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1}-\cos\frac{3\pi}{2n+1}$$
$$\cos\frac{7\pi}{2n+1}=2\cos\frac{6\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1}-\cos\frac{5\pi}{2n+1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}=2\cos\frac{(2n-2)\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1}-\cos\frac{(2n-3)\pi}{2n+1}$$

und folglich, wenn wir

$$S''=\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{6\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}$$

ſetzen:

$$S'=\cos\frac{\pi}{2n+1}+2\left\{S''-\cos\frac{2n\pi}{2n+1}\right\}\cos\frac{\pi}{2n+1}-\left\{S'-\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}\right\}.$$

Nach (56.) iſt aber

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1} = -\cos\left\{\pi - \frac{2\pi}{2n+1}\right\} = -\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}$$

$$\cos\frac{4\pi}{2n+1} = -\cos\left\{\pi - \frac{4\pi}{2n+1}\right\} = -\cos\frac{(2n-3)\pi}{2n+1}$$

$$\cos\frac{6\pi}{2n+1} = -\cos\left\{\pi - \frac{6\pi}{2n+1}\right\} = -\cos\frac{(2n-5)\pi}{2n+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos\frac{2n\pi}{2n+1} = -\cos\left\{\pi - \frac{2n\pi}{2n+1}\right\} = -\cos\frac{\pi}{2n+1};$$

alſo, wenn man auf beiden Seiten addirt, $S'' = -S'$, und folglich

$$2S'\left\{1 + \cos\frac{\pi}{2n+1}\right\} = \cos\frac{\pi}{2n+1} - 2\cos\frac{2n\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}$$

$$= \cos\frac{\pi}{2n+1} - \cos\frac{(2n+1)\pi}{2n+1} - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} + \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}$$

$$= -\cos\pi + \cos\frac{\pi}{2n+1} = 1 + \cos\frac{\pi}{2n+1}.$$

Alſo iſt $S' = \frac{1}{2}$, $S'' = -\frac{1}{2}$, $S' + S'' = 0$, d. i.

339. $\cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} + \cos\frac{5\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}$,

340. $\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \cos\frac{6\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}$,

341. $\cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = 0$.

38. Sey jetzt

$$S = \sin\alpha + \sin(\alpha+\gamma) + \sin(\alpha+2\gamma) + \ldots + \sin(\alpha+n\gamma),$$

ſo iſt nach (203.)

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \sin\alpha \\
\sin(\alpha+\gamma) &= 2\sin\alpha\cos\gamma - \sin(\alpha-\gamma) \\
\sin(\alpha+2\gamma) &= 2\sin(\alpha+\gamma)\cos\gamma - \sin\alpha \\
\sin(\alpha+3\gamma) &= 2\sin(\alpha+2\gamma)\cos\gamma - \sin(\alpha+\gamma) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\sin(\alpha+n\gamma) &= 2\sin(\alpha+(n-1)\gamma)\cos\gamma - \sin(\alpha+(n-2)\gamma);
\end{aligned}$$

alſo, wenn man addirt,

$$S = \sin\alpha + 2\{S - \sin(\alpha+n\gamma)\}\cos\gamma - \sin(\alpha-\gamma)$$
$$- \{S - \sin(\alpha+(n-1)\gamma) - \sin(\alpha+n\gamma)\},$$

$$\begin{aligned}
2S(1-\cos\gamma) &= \sin\alpha - 2\sin(\alpha+n\gamma)\cos\gamma - \sin(\alpha-\gamma) \\
&\quad + \sin(\alpha+n\gamma)\cos\gamma - \cos(\alpha+n\gamma)\sin\gamma + \sin(\alpha+n\gamma) \\
&= \sin\alpha(1-\cos\gamma) + \cos\alpha\sin\gamma \\
&\quad + \sin(\alpha+n\gamma)(1-\cos\gamma) - \cos(\alpha+n\gamma)\sin\gamma;
\end{aligned}$$

folglich, weil bekanntlich

$$1 - \cos\gamma = 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2,\quad \sin\gamma = 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$

iſt, wenn man auf beiden Seiten mit $2\sin\frac{1}{2}\gamma$ dividirt,

$$\begin{aligned}2S\sin\tfrac{1}{2}\gamma &= \sin\alpha\sin\tfrac{1}{2}\gamma + \cos\alpha\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \sin(\alpha+n\gamma)\sin\tfrac{1}{2}\gamma\\ &\qquad - \cos(\alpha+n\gamma)\cos\tfrac{1}{2}\gamma\\ &= \cos(\alpha-\tfrac{1}{2}\gamma) - \cos(\alpha+(n+\tfrac{1}{2})\gamma),\end{aligned}$$

und folglich nach (210.)

342. $$\sin\alpha + \sin(\alpha+\gamma) + \sin(\alpha+2\gamma) + .. + \sin(\alpha+n\gamma)$$
$$= \frac{\cos(\alpha-\frac{1}{2}\gamma) - \cos(\alpha+(n+\frac{1}{2})\gamma)}{2\sin\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\sin(\alpha+\frac{1}{2}n\gamma)\sin\frac{1}{2}(n+1)\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma}.$$

Für $\alpha = 0$ wird

343. $$\sin\gamma + \sin 2\gamma + \sin 3\gamma + .. + \sin n\gamma = \frac{\sin\frac{1}{2}n\gamma\sin\frac{1}{2}(n+1)\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma}.$$

Sey ferner

$$S' = \cos\alpha + \cos(\alpha+\gamma) + \cos(\alpha+2\gamma) + \ldots + \cos(\alpha+n\gamma);$$

ſo iſt nach (205.)

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos\alpha\\ \cos(\alpha+\gamma) &= 2\cos\alpha\cos\gamma - \cos(\alpha-\gamma)\\ \cos(\alpha+2\gamma) &= 2\cos(\alpha+\gamma)\cos\gamma - \cos\alpha\\ \cos(\alpha+3\gamma) &= 2\cos(\alpha+2\gamma)\cos\gamma - \cos(\alpha+\gamma)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \cos(\alpha+n\gamma) &= 2\cos(\alpha+(n-1)\gamma)\cos\gamma - \cos(\alpha+(n-2)\gamma);\end{aligned}$$

alſo, wenn man addirt,

$$\begin{aligned}S' &= \cos\alpha + 2\{S' - \cos(\alpha+n\gamma)\}\cos\gamma - \cos(\alpha-\gamma)\\ &\qquad - \{S' - \cos(\alpha+(n-1)\gamma) - \cos(\alpha+n\gamma)\},\\ 2S'(1-\cos\gamma) &= \cos\alpha - 2\cos(\alpha+n\gamma)\cos\gamma - \cos(\alpha-\gamma)\\ &\qquad + \cos(\alpha+n\gamma)\cos\gamma + \sin(\alpha+n\gamma)\sin\gamma + \cos(\alpha+n\gamma)\\ &= \cos\alpha(1-\cos\gamma) - \sin\alpha\sin\gamma\\ &\qquad + \cos(\alpha+n\gamma)(1-\cos\gamma) + \sin(\alpha+n\gamma)\sin\gamma,\\ 2S'\sin\tfrac{1}{2}\gamma &= \cos\alpha\sin\tfrac{1}{2}\gamma - \sin\alpha\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \cos(\alpha+n\gamma)\sin\tfrac{1}{2}\gamma\\ &\qquad + \sin(\alpha+n\gamma)\cos\tfrac{1}{2}\gamma\\ &= \sin(\alpha+(n+\tfrac{1}{2})\gamma) - \sin(\alpha-\tfrac{1}{2}\gamma),\end{aligned}$$

und folglich

344. $$\cos\alpha + \cos(\alpha+\gamma) + \cos(\alpha+2\gamma) + \ldots + \cos(\alpha+n\gamma)$$
$$= \frac{\sin(\alpha+(n+\frac{1}{2})\gamma) - \sin(\alpha-\frac{1}{2}\gamma)}{2\sin\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\cos(\alpha+\frac{1}{2}n\gamma)\sin\frac{1}{2}(n+1)\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma}.$$

Für $\alpha = 0$ iſt

345. $$1 + \cos\gamma + \cos 2\gamma + .. + \cos n\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}n\gamma\sin\frac{1}{2}(n+1)\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$$

oder

346. $\cos\gamma + \cos 2\gamma + \ldots + \cos n\gamma = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\gamma + \sin\frac{1}{2}\gamma}{2\sin\frac{1}{2}\gamma} - 1$

$$= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\gamma - \sin\frac{1}{2}\gamma}{2\sin\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\sin\frac{1}{2}n\gamma\cos\frac{1}{2}(n+1)\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma}.$$

39. Für die beliebigen Winkel oder Bogen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \varkappa, \lambda, \mu, \nu$ iſt nach (194.)

$$\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta} = \cot\alpha - \cot\beta,$$

$$\frac{\sin(\gamma-\beta)}{\sin\beta\sin\gamma} = \cot\beta - \cot\gamma,$$

$$\frac{\sin(\delta-\gamma)}{\sin\gamma\sin\delta} = \cot\gamma - \cot\delta,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\sin(\nu-\mu)}{\sin\mu\sin\nu} = \cot\mu - \cot\nu,$$

$$\frac{\sin(\alpha-\nu)}{\sin\nu\sin\alpha} = \cot\nu - \cot\alpha.$$

Alſo iſt immer

347. $0 = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta} + \frac{\sin(\gamma-\beta)}{\sin\beta\sin\gamma} + \frac{\sin(\delta-\gamma)}{\sin\gamma\sin\delta} + \ldots$

$$\ldots + \frac{\sin(\nu-\mu)}{\sin\mu\sin\nu} + \frac{\sin(\alpha-\nu)}{\sin\nu\sin\alpha}.$$

Auf ganz ähnliche Art iſt nach (193.)

$$\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta} = \tan\beta - \tan\alpha,$$

$$\frac{\sin(\gamma-\beta)}{\cos\beta\cos\gamma} = \tan\gamma - \tan\beta,$$

$$\frac{\sin(\delta-\gamma)}{\cos\gamma\cos\delta} = \tan\delta - \tan\gamma,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\sin(\nu-\mu)}{\cos\mu\cos\nu} = \tan\nu - \tan\mu,$$

$$\frac{\sin(\alpha-\nu)}{\cos\nu\cos\alpha} = \tan\alpha - \tan\nu,$$

und folglich immer

348. $0 = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin(\gamma-\beta)}{\cos\beta\cos\gamma} + \frac{\sin(\delta-\gamma)}{\cos\gamma\cos\delta} + \ldots$

$$\ldots + \frac{\sin(\nu-\mu)}{\cos\mu\cos\nu} + \frac{\sin(\alpha-\nu)}{\cos\nu\cos\alpha}.$$

Nach (225.) iſt

$$\begin{aligned}
\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha) &= \sin\beta^2 - \sin\alpha^2\\
\sin(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta) &= \sin\gamma^2 - \sin\beta^2\ ,\\
\sin(\delta+\gamma)\sin(\delta-\gamma) &= \sin\delta^2 - \sin\gamma^2\ ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu) &= \sin\nu^2 - \sin\mu^2\ ,\\
\sin(\alpha+\nu)\sin(\alpha-\nu) &= \sin\alpha^2 - \sin\nu^2\ ,
\end{aligned}$$

und folglich

349. $0 = \sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha) + \sin(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta) + \ldots\ldots$
$\ldots + \sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu) + \sin(\alpha+\nu)\sin(\alpha-\nu)\ .$

Auch iſt

$$\begin{aligned}
&\cos(x+y)\sin(x-y) =\\
&(\cos x\cos y - \sin x\sin y)(\sin x\cos y - \cos x\sin y)\\
&= \sin x\cos x(\sin y^2 + \cos y^2) - \sin y\cos y(\sin x^2 + \cos x^2)\\
&= \sin x\cos x - \sin y\cos y
\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
\cos(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha) &= \sin\beta\cos\beta - \sin\alpha\cos\alpha\ ,\\
\cos(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta) &= \sin\gamma\cos\gamma - \sin\beta\cos\beta\ ,\\
\cos(\delta+\gamma)\sin(\delta-\gamma) &= \sin\delta\cos\delta - \sin\gamma\cos\gamma\ ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\cos(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu) &= \sin\nu\cos\nu - \sin\mu\cos\mu\ ,\\
\cos(\alpha+\nu)\sin(\alpha-\nu) &= \sin\alpha\cos\alpha - \sin\nu\cos\nu\ ;
\end{aligned}$$

alſo

350. $0 = \cos(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha) + \cos(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta) + \ldots\ldots$
$\ldots + \cos(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu) + \cos(\alpha+\nu)\sin(\alpha-\nu)\ .$

Aehnliche Formeln würden ſich noch mehrere finden laſſen.

40. Sey jetzt n immer eine poſitive ganze Zahl.

Iſt nun zuerſt n eine gerade Zahl; ſo iſt, wenn wir der Kürze wegen $\sin x = p$ ſetzen, nach (325.)

$$\cos nx = 1 - \frac{n^2}{2}p^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{2.3.4}p^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5.6}p^6 + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + (-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{n^2(n^2-4)\ldots(n^2-(n-2)^2)}{2.3.4.5.6\ldots\ldots n}p^n\ ,$$

oder auch, weil

$$\frac{n^2(n^2-4)\ldots(n^2-(n-2)^2)}{2.3.4.5.6\ldots n} = \frac{n(n+2)\ldots(2n-2).n(n-2)\ldots 2}{2.3.4.5.6\ldots\ldots n}$$

$$= \frac{2.4.6.8\ldots n(n+2)\ldots(2n-2)}{1.2.3.4.5.6\ldots(n-1)} = 2^{n-1}$$

iſt,

351. $$\cos nx = 1 - \frac{n^2}{2} p^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{2.3.4} p^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5.6} p^6 + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} . 2^{n-1} p^n .$$

Nach (48.) verſchwindet $\cos nx$ für

$$x = \pm \frac{\pi}{2n}, \pm \frac{3\pi}{2n}, \pm \frac{5\pi}{2n}, \ldots \pm \frac{(n-1)\pi}{2n} .$$

Alſo verſchwindet auch die Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens der Gleichung (351.) für

$$p = \pm \sin \frac{\pi}{2n}, \pm \sin \frac{3\pi}{2n}, \pm \sin \frac{5\pi}{2n}, \ldots \pm \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} .$$

Alle dieſe Werthe von p, deren Anzahl $= n$ iſt, ſind unter einander ungleich, weil

$$\frac{(n-1)\pi}{2n} < \tfrac{1}{2}\pi$$

iſt. Daher iſt nach der Theorie der Gleichungen für jedes gerade n

$$\cos nx = (-1)^{\frac{n}{2}} 2^{n-1} \left\{\sin x - \sin \frac{\pi}{2n}\right\} .. \left\{\sin x - \sin \frac{(n-1)\pi}{2n}\right\}$$
$$\times \left\{\sin x + \sin \frac{\pi}{2n}\right\} .. \left\{\sin x + \sin \frac{(n-1)\pi}{2n}\right\},$$

d. i., wie leicht erhellet,

352. $$\cos nx = 2^{n-1} \left\{\left(\sin \frac{\pi}{2n}\right)^2 - \sin x^2\right\} \left\{\left(\sin \frac{3\pi}{2n}\right)^2 - \sin x^2\right\} \ldots$$
$$\ldots \left\{\left(\sin \frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2 - \sin x^2\right\} .$$

Iſt n eine ungerade Zahl, ſo iſt nach (329.)

$$\cos nx = \cos x \left\{ 1 - \frac{n^2-1}{2} p^2 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4} p^4 - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} . \frac{(n^2-1)(n^2-9)..(n^2-(n-2)^2)}{2.3.4.5\ldots(n-1)} p^{n-1} \right\},$$

oder auch, weil

$$\frac{(n^2-1)(n^2-9)..(n^2-(n-2)^2)}{2.3.4.5\ldots(n-1)} = \frac{(n+1)(n+3)..(2n-2)(n-1)(n-3)..2}{2.3.4.5\ldots(n-1)}$$
$$= \frac{2.4.6.8\ldots(n-1)(n+1)..(2n-2)}{1.2.3.4\ldots\ldots(n-1)} = 2^{n-1}$$

iſt,

353. $$\cos nx = \cos x \left\{ 1 - \frac{n^2-1}{2} p^2 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4} p^4 - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} . 2^{n-1} p^{n-1} \right\}.$$

Nach (48.) verſchwindet $\cos nx$ für

$$x = \pm\frac{\pi}{2n}, \pm\frac{3\pi}{2n}, \pm\frac{5\pi}{2n}, \ldots \pm\left(\frac{(n-2)\pi}{2n}\right).$$

Alſo verſchwindet auch die eingeklammerte Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung (353.) für

$$p = \pm\sin\frac{\pi}{2n}, \pm\sin\frac{3\pi}{2n}, \pm\sin\frac{5\pi}{2n}, \ldots \pm\sin\frac{(n-2)\pi}{2n},$$

und es iſt folglich, weil dieſe $n-1$ Werthe von p, da

$$\frac{(n-2)\pi}{2n} < \tfrac{1}{2}\pi$$

iſt, ſämmtlich unter einander verſchieden ſind, nach dem angeführten Satze von den Gleichungen für jedes ungerade n

$$\cos nx = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1}\cos x\left\{\sin x - \sin\frac{\pi}{2n}\right\}..\left\{\sin x - \sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right\}$$
$$\times\left\{\sin x + \sin\frac{\pi}{2n}\right\}..\left\{\sin x + \sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right\},$$

oder, wie leicht erhellet,

354. $$\cos nx = 2^{n-1}\cos x\left\{\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2 - \sin x^2\right\}\left\{\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2 - \sin x^2\right\}\ldots$$
$$\ldots\left\{\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2 - \sin x^2\right\}.$$

Setzt man $x = 0$, ſo erhält man aus (352.) für ein gerades n

355. $$1 = 2^{n-1}\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{5\pi}{2n}\right)^2\ldots\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2,$$

und aus (354.) für ein ungerades n

356. $$1 = 2^{n-1}\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{5\pi}{2n}\right)^2\ldots\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2.$$

Eben ſo folgt aus dem Vorhergehenden und bekannten Sätzen von den Gleichungen leicht, daß für ein gerades n immer

357. $$\frac{n^2}{2} = \frac{1}{\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sin\frac{5\pi}{2n}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2},$$

oder

358. $$\frac{n^2}{2} = \left(\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2n}\right)^2 + \left(\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{2n}\right)^2 + \left(\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{2n}\right)^2 + .. + \left(\operatorname{cosec}\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2,$$

und für ein ungerades n immer

359. $$\frac{n^2-1}{2} = \frac{1}{\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sin\frac{5\pi}{2n}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2}$$

oder

$$360.\ \frac{n^2-1}{2}=\left(\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2n}\right)^2+\left(\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{2n}\right)^2+\left(\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{2n}\right)^2+..+\left(\operatorname{cosec}\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2$$

iſt.

Ferner iſt für ein gerades n nach (327.)

$$\sin nx = p\cos x\left\{n-\frac{n(n^2-4)}{2.3}p^2+\frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5}p^4-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^{\frac{n-2}{2}}.\frac{n(n^2-4)..(n^2-(n-2)^2)}{2.3.4.5..(n-1)}p^{n-2}\right\}.$$

Aber nach dem Obigen

$$\frac{n^2(n^2-4)..(n^2-(n-2)^2)}{2.3.4.5\ldots.n}=\frac{n(n^2-4)..(n^2-(n-2)^2)}{2.3.4.5..(n-1)}=2^{n-1}.$$

Alſo

$$361.\ \sin nx=p\cos x\left\{n-\frac{n(n^2-4)}{2.3}p^2+\frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5}p^4\right.$$
$$\left.\ldots.+(-1)^{\frac{n-2}{2}}.2^{n-1}p^{n-2}\right\}.$$

Nach (43.) wird $\sin nx=0$ für

$$x=\pm\frac{2\pi}{2n},\ \pm\frac{4\pi}{2n},\ \pm\frac{6\pi}{2n},\ \ldots\pm\frac{(n-2)\pi}{2n},$$

und die eingeklammerte Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung (361.) verſchwindet alſo für

$$p=\pm\sin\frac{2\pi}{2n},\ \pm\sin\frac{4\pi}{2n},\ \pm\sin\frac{6\pi}{2n},\ \ldots\ \pm\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}.$$

Daher iſt

$$\sin nx=(-1)^{\frac{n-2}{2}}2^{n-1}\sin x\cos x\left\{\sin x-\sin\frac{2\pi}{2n}\right\}..\left\{\sin x-\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right\}$$
$$\times\left\{\sin x+\sin\frac{2\pi}{2n}\right\}..\left\{\sin x+\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right\}$$

nach einer ganz ähnlichen Schlußweiſe wie vorher, oder, wie leicht erhellet,

$$362.\ \sin nx=2^{n-1}\sin x\cos\left\{\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2-\sin x^2\right\}\left\{\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2-\sin x^2\right\}\ldots.$$
$$\ldots..\left\{\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2-\sin x^2\right\},$$

für jedes gerade n.

Für ein ungerades n iſt nach (331.)

$$\sin nx=p\left\{n-\frac{n(n^2-1)}{2.3}p^2+\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5}p^4-\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\frac{n(n^2-1)..(n^2-(n-2)^2)}{2.3.4.5\ldots..n}p^{n-1}\right\},$$

oder, weil nach dem Vorhergehenden

$$\frac{n(n^2-1)\ldots(n^2-(n-2)^2)}{2.3.4.5\ldots n} = \frac{(n^2-1)(n^2-9)\ldots(n^2-(n-2)^2)}{2.3.4.5\ldots(n-1)} = 2^{n-1}$$

iſt,

363. $$\sin nx = p\left\{n - \frac{n(n^2-1)}{2.3}p^2 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5}p^4 \ldots\ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}.2^{n-1}p^{n-1}\right\}$$

Nach (43.) verſchwindet $\sin nx$ für

$$x = \pm\frac{2\pi}{2n}, \pm\frac{4\pi}{2n}, \pm\frac{6\pi}{2n}, \ldots \pm\frac{(n-1)\pi}{2n},$$

und es verſchwindet alſo auch die eingeklammerte Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung (363.) für

$$p = \pm\sin\frac{2\pi}{2n}, \pm\sin\frac{4\pi}{2n}, \pm\sin\frac{6\pi}{2n}, \ldots \pm\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}.$$

Folglich iſt,

$$\sin nx = (-1)^{\frac{n-1}{2}}2^{n-1}\sin x\left\{\sin x - \sin\frac{2\pi}{2n}\right\}\ldots\left\{\sin x - \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right\} \times \left\{\sin x + \sin\frac{2\pi}{2n}\right\}\ldots\left\{\sin x + \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right\},$$

oder, wie leicht erhellet,

364. $$\sin nx = 2^{n-1}\sin x\left\{\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2 - \sin x^2\right\}\left\{\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2 - \sin x^2\right\}\ldots\ldots\left\{\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2 - \sin x^2\right\}.$$

Auch ergiebt ſich mittelſt des Obigen und bekannter Sätze von den Gleichungen leicht

365. $$n = 2^{n-1}\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{6\pi}{2n}\right)^2\ldots\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2$$

für ein gerades n, und

366. $$n = 2^{n-1}\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{6\pi}{2n}\right)^2\ldots\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2$$

für ein ungerades n, ſo wie

367. $$\frac{n^2-4}{2.3} = \frac{1}{\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sin\frac{6\pi}{2n}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2},$$

oder

368. $$\frac{n^2-4}{2.3} =$$

$$\left(\operatorname{cosec}\frac{2\pi}{2n}\right)^2 + \left(\operatorname{cosec}\frac{4\pi}{2n}\right)^2 + \left(\operatorname{cosec}\frac{6\pi}{2n}\right)^2 + \ldots + \left(\operatorname{cosec}\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2$$

für ein gerades n, und

369. $\frac{n^2-1}{2.3} = \frac{1}{\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sin\frac{6\pi}{2n}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2}$,

oder

370. $\frac{n^2-1}{2.3} =$

$$\left(\operatorname{cosec}\frac{2\pi}{2n}\right)^2 + \left(\operatorname{cosec}\frac{4\pi}{2n}\right)^2 + \left(\operatorname{cosec}\frac{6\pi}{2n}\right)^2 + \ldots + \left(\operatorname{cosec}\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2$$

für ein ungerades n.

Dividirt man die Gleichungen (352.), (354.), (362.), (364.) reſpective durch die Gleichungen (355.), (356.), (365.), (366.); ſo erhält man:

371. $\cos nx =$

$$\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{3\pi}{2n}}\right)^2\right\}\ldots\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}\right)^2\right\}$$

für ein gerades n;

372. $\cos nx =$

$$\cos x\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{3\pi}{2n}}\right)^2\right\}\ldots\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}}\right)^2\right\}$$

für ein ungerades n;

373. $\sin nx =$

$$n\sin x\cos x\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{2\pi}{2n}}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{4\pi}{2n}}\right)^2\right\}\ldots\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}}\right)^2\right\}$$

für ein gerades n;

374. $\sin nx =$

$$n\sin x\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{2\pi}{2n}}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{4\pi}{2n}}\right)^2\right\}\ldots\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}\right)^2\right\}$$

für ein ungerades n.

Weil, wie leicht erhellet,

375. $\sin\alpha^2 - \sin\beta^2 = \frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{2}$

iſt; ſo laſſen ſich die Gleichungen (352.), (354.), (362.), (364.) auch auf folgende Art darſtellen:

376. $\cos nx =$

$$2^{\frac{n}{2}-1}\left\{\cos 2x - \cos\frac{\pi}{n}\right\}\left\{\cos 2x - \cos\frac{3\pi}{n}\right\}\ldots\left\{\cos 2x - \cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right\}$$

für jedes gerade n;

377. $\cos nx =$

$$2^{\frac{n-1}{2}}\cos x\left\{\cos 2x-\cos\frac{\pi}{n}\right\}\left\{\cos 2x-\cos\frac{3\pi}{n}\right\}\ldots\left\{\cos 2x-\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right\}$$

für jedes ungerade n;

378. $\sin nx =$

$$2^{\frac{n}{2}-1}\sin 2x\left\{\cos 2x-\cos\frac{2\pi}{n}\right\}\left\{\cos 2x-\cos\frac{4\pi}{n}\right\}\ldots\left\{\cos 2x-\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right\}$$

für jedes gerade n;

379. $\sin nx =$

$$2^{\frac{n-1}{2}}\sin x\left\{\cos 2x-\cos\frac{2\pi}{n}\right\}\left\{\cos 2x-\cos\frac{4\pi}{n}\right\}\ldots\left\{\cos 2x-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right\}$$

für jedes ungerade n.

41. Nach (217.) iſt

$$2\cos(n+1)x = 2\cos x\,.\,2\cos nx - 2\cos(n-1)x.$$

Aus dieſer Gleichung erhält man, wenn man

$$2\cos x = 1 + \frac{1}{y}$$

ſetzt, nach und nach

$$2\cos 2x = 2\cos x\,.\,2\cos x - 2$$

$$= \left\{y+\frac{1}{y}\right\}\left\{y+\frac{1}{y}\right\} - 2 = y^2 + \frac{1}{y^2},$$

$$2\cos 3x = 2\cos x\,.\,2\cos 2x - 2\cos x$$

$$= \left\{y+\frac{1}{y}\right\}\left\{y^2+\frac{1}{y^2}\right\} - \left\{y+\frac{1}{y}\right\} = y^3 + \frac{1}{y^3},$$

$$2\cos 4x = 2\cos x\,.\,2\cos 3x - 2\cos 2x$$

$$= \left\{y+\frac{1}{y}\right\}\left\{y^3+\frac{1}{y^3}\right\} - \left\{y^2+\frac{1}{y^2}\right\} = y^4 + \frac{1}{y^4},$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Wie man auf dieſe Art weiter gehen kann, iſt klar, und es ergiebt ſich alſo jetzt aus dem Vorhergehenden das merkwürdige Theorem, daß, wenn

380. $2\cos x = y + \frac{1}{y}$

iſt, für jedes poſitive ganze n immer

381. $2\cos nx = y^n + \frac{1}{y^n}$,

oder, was daſſelbe iſt, daß, wenn

382. $y^2 - 2y\cos x + 1 = 0$

iſt, für jedes poſitive ganze n immer

383. $y^{2n} - 2y^n\cos nx + 1 = 0$

iſt. Die beiden Gleichungen (382.) und (383.) exiſtiren alſo immer zuſammen, ſo daß nämlich jede Wurzel der erſten immer auch eine Wurzel der zweiten iſt.

Löſt man die quadratiſche Gleichung (382.) nach bekannten Regeln der Algebra auf, ſo erhält man ohne alle Schwierigkeit

$$y = \cos x \pm i \sin x$$

für die beiden Wurzeln dieſer Gleichung, welche alſo auch Wurzeln der Gleichung (383.) ſind. Iſt $\sin x$ nicht $= 0$, ſo ſind dieſe beiden Wurzeln ungleich, und nach einem ſehr bekannten Satze aus der Theorie der Gleichungen iſt alſo

$$y^{2n} - 2y^n \cos nx + 1$$

durch das Product

$$\{y - \cos x - i \sin x\}\{y - \cos x + i \sin x\}$$
$$= y^2 - 2y \cos x + 1$$

theilbar. Daß dies aber auch dann noch Statt findet, wenn $\sin x = 0$ iſt, läßt ſich auf folgende Art überſehen. Für jedes x iſt

$$y^{2n} - 2y^n \cos nx + 1$$
$$= \{y^n - \cos nx - i \sin nx\}\{y^n - \cos nx + i \sin nx\},$$

und folglich, wenn man $n = 1$ ſetzt, wie wir auch ſchon kurz vorher geſehen haben,

$$y^2 - 2y \cos x + 1$$
$$= \{y - \cos x - i \sin x\}\{y - \cos x + i \sin x\}.$$

Iſt nun $\sin x = 0$, ſo iſt, wenn k eine gewiſſe poſitive oder negative ganze Zahl bezeichnet, $x = k\pi$, alſo $nx = nk\pi$, $\sin nx = 0$, und für $\sin x = 0$ iſt folglich nach dem Vorhergehenden

$$y^2 - 2y \cos x + 1 = (y - \cos x)^2,$$
$$y^{2n} - 2y^n \cos nx + 1 = (y^n - \cos nx)^2.$$

Für $y = \cos x$ iſt $(y - \cos x)^2 = 0$. Alſo iſt $y = \cos x$ in dem vorliegenden Falle ein Wurzel der Gleichung

$$y^2 - 2y \cos x + 1 = 0,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden auch eine Wurzel der Gleichung

$$y^{2n} - 2y^n \cos nx + 1 = 0,$$

d. i. eine Wurzel der Gleichung

$$(y^n - \cos nx)^2 = 0;$$

folglich offenbar auch eine Wurzel der Gleichung

$$y^n - \cos nx = 0.$$

Daher iſt die Function $y^n - \cos nx$ durch $y - \cos x$, alſo natürlich auch $(y^n - \cos nx)^2$ durch $(y - \cos x)^2$, d. i. nach dem Obigen

$$y^{2n} - 2y^n \cos nx + 1$$

durch

$$y^2 - 2y \cos x + 1$$

theilbar.

Hieraus ſieht man alſo, daß in völliger Allgemeinheit die Größe

$$y^{2n} - 2y^n \cos nx + 1$$

immer durch die Größe

$$y^2 - 2y \cos x + 1$$

theilbar iſt.

Alſo iſt auch, wenn man x für nx ſetzt, die Function

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1$$

jederzeit durch die Function

$$y^2 - 2y \cos \frac{x}{n} + 1$$

theilbar. Weil nun aber für jedes poſitive oder negative ganze k bekanntlich

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \cos 2k\pi - \sin x \sin 2k\pi = \cos x\,,$$

folglich auch für jedes poſitive oder negative ganze k

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1 = y^{2n} - 2y^n \cos(x + 2k\pi) + 1$$

iſt; ſo ergiebt ſich aus dem Vorhergehenden unmittelbar das in jeder Beziehung höchſt merkwürdige Theorem, daß die Function

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1$$

für jedes poſitive oder negative ganze k durch

$$y^2 - 2y \cos \frac{x + 2k\pi}{n} + 1$$

ohne Reſt theilbar iſt.

Setzt man alſo

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots (n-1)\,;$$

ſo ſind

$$y^2 - 2y \cos \frac{x}{n} + 1\,,$$

$$y^2 - 2y \cos \frac{x + 2\pi}{n} + 1\,,$$

$$y^2 - 2y \cos \frac{x + 4\pi}{n} + 1\,,$$

$$y^2 - 2y \cos \frac{x + 6\pi}{n} + 1\,,$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^2 - 2y \cos \frac{x + 2(n-1)\pi}{n} + 1$$

n reelle Factoren des zweiten Grades der Function

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1\,.$$

Zerlegt man jeden dieſer reellen Factoren, wie ſehr leicht geſchehen kann, in zwei Factoren des erſten Grades; ſo findet man, daß die Function

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1$$

jederzeit die folgenden 2n Factoren des erſten Grades hat:

$$y - \cos\frac{x}{n} \mp i\sin\frac{x}{n},$$

$$y - \cos\frac{x+2\pi}{n} \mp i\sin\frac{x+2\pi}{n},$$

$$y - \cos\frac{x+4\pi}{n} \mp i\sin\frac{x+4\pi}{n},$$

$$y - \cos\frac{x+6\pi}{2} \mp i\sin\frac{x+6\pi}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y - \cos\frac{x+2(n-1)\pi}{n} \mp i\sin\frac{x+2(n-1)\pi}{n}.$$

Die Reihe der Factoren, welche man erhält, wenn man die obern Zeichen nimmt, wollen wir die erſte, die Reihe der Factoren dagegen, welche man erhält, wenn man die untern Zeichen nimmt, die zweite Reihe nennen, und das Product aller Factoren der erſten Reihe durch **P**, das Product aller Factoren der zweiten Reihe dagegen durch **P′** bezeichnen.

Zuerſt erhellet nun leicht, daß alle Factoren in jeder der beiden Reihen unter einander ungleich ſind. Sollten nämlich irgend zwei Factoren einer und derſelben Reihe einander gleich ſeyn; ſo müßte für zwei poſitive ganze Θ und Θ', deren keines größer als $n-1$ iſt, zugleich

$$\cos\frac{x+2\Theta\pi}{n} = \cos\frac{x+2\Theta'\pi}{n},\ \sin\frac{x+2\Theta\pi}{n} = \sin\frac{x+2\Theta'\pi}{n}$$

ſeyn. Wegen der erſten dieſer beiden Gleichungen wäre nach (32. II.), wenn k eine poſitive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$\frac{x+2\Theta'\pi}{n} = 2k\pi \pm \frac{x+2\Theta\pi}{n}.$$

Wegen der zweiten der beiden in Rede ſtehenden Gleichungen wäre dagegen, wenn auch k′ eine poſitive oder negative ganze Zahl bezeichnet, nach (32. I.) entweder

$$\frac{x+2\Theta'\pi}{n} = 2k'\pi + \frac{x+2\Theta\pi}{n}$$

oder

$$\frac{x+2\Theta'\pi}{n} = (2k'+1)\pi - \frac{x+2\Theta\pi}{n}.$$

Weil aber nun beide Gleichungen zugleich Statt finden, ſo müßte offenbar für ein gewiſſes poſitives oder negatives ganzes k

$$\frac{x+2\Theta'\pi}{n} = 2k\pi + \frac{x+2\Theta\pi}{n}$$

ſeyn, woraus leicht

$$\Theta' - \Theta = nk$$

folgt. Daß dies ungereimt iſt, fällt ſogleich in die Augen, indem nämlich der abſolute Werth von nk mindeſtens $= n$, der abſolute Werth von $\Theta' - \Theta$ dagegen offenbar immer kleiner als n iſt. Man ſieht alſo, daß die beiden obigen Gleichungen nie zugleich Statt finden können, und daß folglich die Factoren in jeder der beiden obigen Reihen ſämmtlich unter einander ungleich ſind.

Es könnte aber auch ſeyn, daß ein Factor der erſten Reihe einem Factor der zweiten Reihe gleich wäre, ein Fall, der offenbar nur dann eintreten könnte, wenn für ein gewiſſes Θ

$$\sin\frac{x + 2\Theta\pi}{n} = 0$$

wäre. In dieſer Beziehung muß man zwei Fälle unterſcheiden, deren jeden wir jetzt vollſtändig beleuchten wollen.

Iſt nämlich zuerſt $\sin x$ nicht $= 0$, ſo kann nie

$$\sin\frac{x + 2\Theta\pi}{n} = 0$$

ſeyn, weil ſonſt für ein gewiſſes poſitives oder negatives k

$$\frac{x + 2\Theta\pi}{n} = k\pi,$$

folglich

$$x = (nk - 2\Theta)\pi,$$

alſo $\sin x = 0$ ſeyn müßte, welches gegen die Vorausſetzung iſt. Wenn alſo $\sin x$ nicht $= 0$ iſt, ſo iſt kein Factor der erſten Reihe einem Factor der zweiten Reihe gleich, und die obigen 2n Factoren des erſten Grades der Function

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1$$

ſind alſo, weil auch alle Factoren jeder der beiden Reihen unter einander ungleich ſind, ſämmtlich unter einander ungleich. Alſo iſt nach bekannten Sätzen von den Gleichungen, wenn $\sin x$ nicht $= 0$ iſt,

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1 = PP'.$$

Iſt aber $\sin x = 0$, ſo iſt, weil

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1$$

für jedes x dem Producte

$$\{y^n - \cos x - i\sin x\}\{y^n - \cos x + i\sin x\}$$

gleich iſt:

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1 = (y^n - \cos x)^2,$$

und jede Wurzel der Gleichung

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1 = 0$$

iſt alſo in dieſem Falle auch eine Wurzel der Gleichung

$$y^n - \cos x = 0\,,$$

folglich auch jeder Factor des erſten Grades der Function

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1$$

ein Factor des erſten Grades der Function

$$y^n - \cos x\,.$$

Nach dem Obigen ſind alſo ſowohl die Factoren der erſten Reihe, als auch die Factoren der zweiten Reihe n Factoren des erſten Grades der Function $y^n - \cos x$, und es iſt folglich, weil wir geſehen haben, daß für jedes x ſämmtliche Factoren in jeder der beiden Reihen unter einander ungleich ſind, nach der Theorie der Gleichungen ſowohl

$$y^n - \cos x = P\,,$$

als auch

$$y^n - \cos x = P'\,,$$

folglich

$$(y^n - \cos x)^2 = PP'\,,$$

d. i. nach dem Vorhergehenden auch in dieſem Falle, wo $\sin x = 0$ iſt,

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1 = PP'\,.$$

Man ſieht alſo, daß für jedes x

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1 = PP'\,,$$

und folglich, wie nun aus dem Obigen leicht folgt,

384. $$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1 = \left\{y^2 - 2y\cos\frac{x}{n} + 1\right\}$$
$$\times\left\{y^2 - 2y\cos\frac{x+2\pi}{n} + 1\right\}$$
$$\times\left\{y^2 - 2y\cos\frac{x+4\pi}{n} + 1\right\}$$
$$\times\left\{y^2 - 2y\cos\frac{x+6\pi}{n} + 1\right\}$$
$$\vdots$$
$$\times\left\{y^2 - 2y\cos\frac{x+2(n-1)\pi}{n} + 1\right\}$$

iſt. Dieſe Gleichung gilt für jedes n. Wir wollen nun aber auch die beiden Fälle, wenn n eine gerade oder eine ungerade Zahl iſt, beſonders betrachten.

Iſt zuerſt n eine gerade Zahl, ſo kann man die Factoren des Products auf der rechten Seite der Gleichung (384.) auf folgende Art in zwei Klaſſen theilen:

$$y^2 - 2y\cos\frac{x}{n} + 1,$$

$$y^2 - 2y\cos\frac{x+2\pi}{n} + 1,$$

$$y^2 - 2y\cos\frac{x+4\pi}{n} + 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y^2 - 2y\cos\frac{x+(n-2)\pi}{n} + 1$$

und

$$y^2 - 2y\cos\frac{x+n\pi}{n} + 1,$$

$$y^2 - 2y\cos\frac{x+(n+2)\pi}{n} + 1,$$

$$y^2 - 2y\cos\frac{x+(n+4)\pi}{n} + 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y^2 - 2y\cos\frac{x+2(n-1)\pi}{n} + 1.$$

Nun iſt aber

$$\frac{x+2(n-1)\pi}{n} + \frac{2\pi - x}{n} = 2\pi,$$

$$\frac{x+2(n-2)\pi}{n} + \frac{4\pi - x}{n} = 2\pi,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x+(n+2)\pi}{n} + \frac{(n-2)\pi - x}{n} = 2\pi,$$

$$\frac{x+n\pi}{n} + \frac{n\pi - x}{n} = 2\pi;$$

alſo nach (60.)

$$\cos\frac{x+2(n-1)\pi}{n} = \cos\frac{2\pi - x}{n},$$

$$\cos\frac{x+2(n-2)\pi}{n} = \cos\frac{4\pi - x}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos\frac{x+(n+2)\pi}{n} = \cos\frac{(n-2)\pi - x}{n},$$

$$\cos\frac{x+n\pi}{n} = \cos\frac{n\pi - x}{n},$$

und folglich nach (384.), wenn n eine gerade Zahl iſt:

$$385.\quad y^{2n} - 2y^n \cos x + 1 = \left\{y^2 - 2y\cos\frac{x}{n} + 1\right\}$$
$$\times\left\{y^2 - 2y\cos\frac{2\pi - x}{n} + 1\right\}$$
$$\times\left\{y^2 - 2y\cos\frac{2\pi + x}{n} + 1\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\times\left\{y^2 - 2y\cos\frac{(n-2)\pi - x}{n} + 1\right\}$$
$$\times\left\{y^2 - 2y\cos\frac{(n-2)\pi + x}{n} + 1\right\}$$
$$\times\left\{y^2 - 2y\cos\frac{n\pi - x}{n} + 1\right\}.$$

Iſt n eine ungerade Zahl, ſo kann man die Factoren des Products auf der rechten Seite der Gleichung (384.) auf folgende Art in zwei Klaſſen theilen:

$$y^2 - 2y\cos\frac{x}{n} + 1,$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{x + 2\pi}{n} + 1,$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{x + 4\pi}{n} + 1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{x + (n-1)\pi}{n} + 1$$

und

$$y^2 - 2y\cos\frac{x + (n+1)\pi}{n} + 1,$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{x + (n+3)\pi}{n} + 1,$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{x + (n+5)\pi}{n} + 1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{x + 2(n-1)\pi}{n} + 1.$$

Nun iſt aber

$$\frac{x + 2(n-1)\pi}{n} + \frac{2\pi - x}{n} = 2\pi,$$
$$\frac{x + 2(n-2)\pi}{n} + \frac{4\pi - x}{n} = 2\pi,$$

$$\frac{x+(n+3)\pi}{n} + \frac{(n-3)\pi - x}{n} = 2\pi,$$

$$\frac{x+(n+1)\pi}{n} + \frac{(n-1)\pi - x}{n} = 2\pi,$$

folglich nach (60.)

$$\cos\frac{x+2(n-1)\pi}{n} = \cos\frac{2\pi - x}{n},$$

$$\cos\frac{x+2(n-2)\pi}{n} = \cos\frac{4\pi - x}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos\frac{x+(n+3)\pi}{n} = \cos\frac{(n-3)\pi - x}{n},$$

$$\cos\frac{x+(n+1)\pi}{n} = \cos\frac{(n-1)\pi - x}{n},$$

und daher nach (384.), wenn n eine ungerade Zahl iſt:

386. $$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1 = \left\{y^2 - 2y\cos\frac{x}{n} + 1\right\}$$
$$\times \left\{y^2 - 2y\cos\frac{2\pi - x}{n} + 1\right\}$$
$$\times \left\{y^2 - 2y\cos\frac{2\pi + x}{n} + 1\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\times \left\{y^2 - 2y\cos\frac{(n-1)\pi - x}{n} + 1\right\}$$
$$\times \left\{y^2 - 2y\cos\frac{(n-1)\pi + x}{n} + 1\right\}.$$

Weil

$$y^{2n} + 2y^n \cos x + 1 = y^{2n} - 2y^n \cos(\pi - x) + 1$$

iſt; ſo ergiebt ſich aus (385.) und (386.), wenn n eine gerade Zahl iſt:

387. $$y^{2n} + 2y^n \cos x + 1 = \left\{y^2 - 2y\cos\frac{\pi - x}{n} + 1\right\}$$
$$\times \left\{y^2 - 2y\cos\frac{\pi + x}{n} + 1\right\}$$
$$\times \left\{y^2 - 2y\cos\frac{3\pi - x}{n} + 1\right\}$$
$$\times \left\{y^2 - 2y\cos\frac{3\pi + x}{n} + 1\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\times \left\{y^2 - 2y\cos\frac{(n-1)\pi - x}{n} + 1\right\}$$

$$\times \left\{y^2 - 2y\cos\frac{(n-1)\pi + x}{n} + 1\right\},$$

und, wenn n eine ungerade Zahl iſt:

388. $$y^{2n} + 2y^n\cos x + 1 = \left\{y^2 - 2y\cos\frac{\pi - x}{n} + 1\right\}$$
$$\times \left\{y^2 - 2y\cos\frac{\pi + x}{n} + 1\right\}$$
$$\times \left\{y^2 - 2y\cos\frac{3\pi - x}{n} + 1\right\}$$
$$\times \left\{y^2 - 2y\cos\frac{3\pi + x}{n} + 1\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\times \left\{y^2 - 2y\cos\frac{(n-2)\pi - x}{n} + 1\right\}$$
$$\times \left\{y^2 - 2y\cos\frac{(n-2)\pi + x}{n} + 1\right\}$$
$$\times \left\{y^2 - 2y\cos\frac{n\pi - x}{n} + 1\right\}.$$

Weil

$$y^{2n} - 2a^n y^n \cos x + a^{2n} = a^{2n}\left\{\left(\frac{y}{a}\right)^{2n} - 2\left(\frac{y}{a}\right)^n \cos x + 1\right\}$$

iſt; ſo erhält man aus den Gleichungen (384.), (385.), (386.), (387.), (388.) auch leicht:

389. $$y^{2n} - 2a^n y^n \cos x + a^{2n} = \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{x}{n} + a^2\right\}$$
$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{x + 2\pi}{n} + a^2\right\}$$
$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{x + 4\pi}{n} + a^2\right\}$$
$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{x + 6\pi}{n} + a^2\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{x + 2(n-1)\pi}{n} + a^2\right\}$$

für jedes n.

390. $$y^{2n} - 2a^n y^n \cos x + a^{2n} = \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{x}{n} + a^2\right\}$$
$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{2\pi - x}{n} + a^2\right\}$$
$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{2\pi + x}{n} + a^2\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{(n-2)\pi - x}{n} + a^2 \right\}$$
$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{(n-2)\pi + x}{n} + a^2 \right\}$$
$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{n\pi - x}{n} + a^2 \right\}$$

für ein gerades n.

391. $$y^{2n} - 2a^n y^n \cos x + a^{2n} = \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{x}{n} + a^2 \right\}$$
$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{2\pi - x}{n} + a^2 \right\}$$
$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{2\pi + x}{n} + a^2 \right\}$$
. . . .
$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{(n-1)\pi - x}{n} + a^2 \right\}$$
$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{(n-1)\pi + x}{n} + a^2 \right\}$$

für ein ungerades n.

392. $$y^{2n} + 2a^n y^n \cos x + a^{2n} = \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{\pi - x}{n} + a^2 \right\}$$
$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{\pi + x}{n} + a^2 \right\}$$
$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{3\pi - x}{n} + a^2 \right\}$$
$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{3\pi + x}{n} + a^2 \right\}$$
. . . .
$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{(n-1)\pi - x}{n} + a^2 \right\}$$
$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{(n-1)\pi + x}{n} + a^2 \right\}$$

für ein gerades n.

393. $$y^{2n} + 2a^n y^n \cos x + a^{2n} = \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{\pi - x}{n} + a^2 \right\}$$
$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{\pi + x}{n} + a^2 \right\}$$
$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{3\pi - x}{n} + a^2 \right\}$$
$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{3\pi + x}{n} + a^2 \right\}$$
. . . .

$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{(n-2)\pi - x}{n} + a^2\right\}$$

$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{(n-2)\pi + x}{n} + a^2\right\}$$

$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{n\pi - x}{n} + a^2\right\}$$

für ein ungerades n.

Setzt man $x = 0$, ſo erhält man aus den Gleichungen (390.), (391.), (392.), (393.) leicht:

$$394.\quad y^n - a^n = (y^2 - a^2)\left\{y^2 - 2ay\cos\frac{2\pi}{n} + a^2\right\}$$
$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{4\pi}{n} + a^2\right\}$$
$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{6\pi}{n} + a^2\right\}$$
$$\cdots\cdots$$
$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + a^2\right\}$$

für ein gerades n.

$$395.\quad y^n - a^n = (y - a)\left\{y^2 - 2ay\cos\frac{2\pi}{n} + a^2\right\}$$
$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{4\pi}{n} + a^2\right\}$$
$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{6\pi}{n} + a^2\right\}$$
$$\cdots\cdots$$
$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + a^2\right\}$$

für ein ungerades n.

$$396.\quad y^n + a^n = \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{\pi}{n} + a^2\right\}$$
$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{3\pi}{n} + a^2\right\}$$
$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{5\pi}{n} + a^2\right\}$$
$$\cdots\cdots$$
$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + a^2\right\}$$

für ein gerades n.

$$397. \quad y^n + a^n = (y+a)\left\{y^2 - 2ay\cos\frac{\pi}{n} + a^2\right\}$$
$$\times\left\{y^2 - 2ay\cos\frac{3\pi}{n} + a^2\right\}$$
$$\times\left\{y^2 - 2ay\cos\frac{5\pi}{n} + a^2\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\times\left\{y^2 - 2ay\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + a^2\right\}$$

für ein ungerades n.

Da die vorhergehenden vier Gleichungen durch Ausziehung von Quadratwurzeln erhalten worden ſind; ſo kann man noch fragen, ob in denſelben die Größen auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen mit den richtigen Vorzeichen genommen worden ſind. Daß dies wirklich der Fall iſt, läßt ſich auf folgende Art überſehen. Weil

$$y^2 - 2ay + a^2 = (y-a)^2$$

eine poſitive Größe iſt; ſo iſt um ſo mehr für jeden Winkel α die Größe

$$y^2 - 2ay\cos\alpha + a^2$$

ſtets poſitiv. Daher ſind in den Producten auf den rechten Seiten der Gleichheitszeichen in den in Rede ſtehenden Gleichungen die quadratiſchen trinomiſchen Factoren ſämmtlich poſitive Größen, und in den Gleichungen (394.), (395.), (397.) hängen alſo die Vorzeichen der Producte auf den rechten Seiten der Gleichheitszeichen reſpective bloß von den Factoren $y^2 - a^2$, $y - a$, $y + a$ ab, das Product auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung (396.) iſt aber ſtets poſitiv. Weil nun, wie leicht erhellet,

$$y^n - a^n = (y^2 - a^2)(y^{n-2} + y^{n-4}a^2 + \ldots + y^2 a^{n-4} + a^{n-2}),$$

und für ein gerades n die Größe

$$y^{n-2} + y^{n-4}a^2 + \ldots + y^2 a^{n-4} + a^{n-2}$$

offenbar ſtets poſitiv iſt; ſo hat, wenn n eine gerade Zahl iſt, $y^n - a^n$ mit $y^2 - a^2$ jederzeit einerlei Vorzeichen. Wenn ferner n eine ungerade Zahl iſt, ſo hat $y^n - a^n$ mit $y - a$ ſtets einerlei Vorzeichen, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann. Wir wollen annehmen, daß $y - a$ poſitiv oder $y - a > 0$, alſo $y > a$ ſey; ſo ſind y und a entweder beide poſitiv oder beide negativ, oder y iſt poſitiv und a negativ. Im erſten Falle iſt offenbar $y^n > a^n$, $y^n - a^n > 0$. Im zweiten Falle iſt der abſolute Werth von y kleiner wie der abſolute Werth von a, alſo auch der abſolute Werth von y^n kleiner als der abſolute Werth von a^n; da aber n eine ungerade Zahl iſt, und y und a beide negativ ſind, ſo ſind auch y^n und a^n beide negativ, und folglich offenbar $y^n > a^n$ oder wieder $y^n - a^n > 0$. Im dritten Falle

iſt y^n poſitiv, a^n dagegen, weil n eine ungerade Zahl iſt, negativ; folglich wieder $y^n > a^n$, $y^n - a^n > 0$. Iſt alſo $y - a > 0$, ſo iſt, wenn n eine ungerade Zahl iſt, immer auch $y^n - a^n > 0$. Iſt $y - a < 0$, ſo iſt $a - y > 0$; alſo, wenn n eine ungerade Zahl iſt, nach dem Vorhergehenden $a^n - y^n > 0$, d. i. $y^n - a^n < 0$. Wäre $y - a = 0$, d. i. $y = a$, ſo wäre offenbar auch $y^n = a^n$, $y^n - a^n = 0$, und man ſieht alſo, daß $y - a$ und $y^n - a^n$, wenn n eine ungerade Zahl iſt, jederzeit gleiche Vorzeichen haben. Weil nun

$$(y^n - a^n)(y^n + a^n) = y^{2n} - a^{2n}, \quad (y - a)(y + a) = y^2 - a^2$$

iſt, und $y^{2n} - a^{2n}$ und $y^2 - a^2$ nach dem Obigen gleiche Vorzeichen haben; ſo haben auch die Producte

$$(y^n - a^n)(y^n + a^n) \text{ und } (y - a)(y + a)$$

jederzeit gleiche Vorzeichen. Für ein ungerades n haben aber, wie ſo eben bewieſen worden iſt, $y^n - a^n$ und $y - a$ gleiche Vorzeichen; alſo haben für ein ungerades n jederzeit auch $y^n + a^n$ und $y + a$ gleiche Vorzeichen. Aus allen dieſen Betrachtungen erhellet nun auf der Stelle, daß die Gleichungen (394.), (395.), (397.) völlig richtig ſind. Weil aber nach dem Obigen das Product auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung (396.) ſtets poſitiv, und, weil in dieſer Gleichung n als eine gerade Zahl angenommen wird, auch $y^n + a^n$ offenbar ſtets poſitiv iſt; ſo erhellet auch die völlige Richtigkeit dieſer Gleichung. Dieſe oft mit Unrecht vernachläſſigten Bemerkungen ſchien uns die Strenge der Darſtellung noch nothwendig zu fordern.

Setzt man in der Gleichung (396.) $a = y = 1$, ſo erhält man

$$2 = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1 - \cos\frac{3\pi}{n}\right)\left(1 - \cos\frac{5\pi}{n}\right)\ldots\left(1 - \cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right),$$

oder

$$1 = 2^{n-1}\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{5\pi}{2n}\right)^2\ldots\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2$$

für ein gerades n, welches die ſchon in (355.) auf anderm Wege gefundene Gleichung iſt. Zieht man auf beiden Seiten die Wurzel aus, ſo erhält man

$$1 = 2^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{\pi}{2n} \sin\frac{3\pi}{2n} \sin\frac{5\pi}{2n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{2n},$$

wo die Wurzelgröße $2^{\frac{n-1}{2}} = \sqrt{2^{n-1}}$ poſitiv zu nehmen iſt, da das Product

$$\sin\frac{\pi}{2n} \sin\frac{3\pi}{2n} \sin\frac{5\pi}{2n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}$$

poſitiv iſt, indem keiner der Bogen

$$\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \frac{5\pi}{2n}, \ldots \frac{(n-1)\pi}{2n}$$

$\frac{1}{2}\pi$ überſteigt

Setzt man in der Formel (397.) $a = y = 1$, ſo erhält man

$$2 = 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1 - \cos\frac{3\pi}{n}\right)\left(1 - \cos\frac{5\pi}{n}\right)\ldots\left(1 - \cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right),$$

oder

$$1 = 2^{n-1}\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{5\pi}{2n}\right)^2\ldots\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2$$

für ein ungerades n, welches die ſchon in (356.) auf anderm Wege gefundene Formel iſt. Durch Ausziehung der Quadratwurzel erhält man

$$1 = 2^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{\pi}{2n} \sin\frac{3\pi}{2n} \sin\frac{5\pi}{2n} \ldots \sin\frac{(n-2)\pi}{2n},$$

wobei man wieder zu bemerken hat, daß das Product

$$\sin\frac{\pi}{2n} \sin\frac{3\pi}{2n} \sin\frac{5\pi}{2n} \ldots \sin\frac{(n-2)\pi}{2n}$$

poſitiv iſt und alſo auch $2^{\frac{n-1}{2}} = \sqrt{2^{n-1}}$ poſitiv genommen werden muß.

Dividirt man auf beiden Seiten der Gleichung (394.) durch $y^2 - a^2$, ſo findet man, weil

$$\frac{y^n - a^n}{y^2 - a^2} = y^{n-2} + y^{n-4}a^2 + \ldots + y^2 a^{n-4} + a^{n-2}$$

iſt, für $a = y = 1$ leicht:

$$\frac{n}{2} = 2^{\frac{n-2}{2}}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(1 - \cos\frac{4\pi}{n}\right)\left(1 - \cos\frac{6\pi}{n}\right)\ldots\left(1 - \cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right)$$

oder

$$n = 2^{n-1}\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{6\pi}{2n}\right)^2\ldots\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2$$

für ein gerades n, welches die ſchon in (365.) gefundene Gleichung iſt. Durch Ausziehung der Quadratwurzel ergiebt ſich

$$\sqrt{n} = 2^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{2\pi}{2n} \sin\frac{4\pi}{2n} \sin\frac{6\pi}{2n} \ldots \sin\frac{(n-2)\pi}{2n},$$

wobei alle Quadratwurzeln poſitiv zu nehmen ſind.

Weil

$$\frac{y^n - a^n}{y - a} = y^{n-1} + y^{n-2}a + \ldots + ya^{n-2} + a^{n-1}$$

iſt, ſo giebt die Gleichung (395.) für $a = y = 1$

$$n = 2^{\frac{n-1}{2}}\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{6\pi}{n}\right)\cdot\cdot\left(1-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right),$$

oder

$$n = 2^{n-1}\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{6\pi}{2n}\right)^2\ldots\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2$$

für ein ungerades n, welches die ſchon in (366.) gefundene Gleichung iſt. Durch Ausziehung der Quadratwurzel erhält man

$$\sqrt{n} = 2^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{6\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n},$$

die Quadratwurzeln poſitiv genommen.

Man vergleiche hierbei die Artikel Anwendung auf die Algebra. VI. VII. und Coteſiſcher Lehrſatz.

42. Setzt man in den Formeln (390.), (391.), (392.), (393.) $a = \frac{1}{y}$ und

$$y + \frac{1}{y} = 2\cos\varphi;$$

ſo erhält man, weil nach (41.),

$$y^2 + \frac{1}{y^2} = 2\cos 2\varphi,\ y^{2n} + \frac{1}{y^{2n}} = 2\cos 2n\varphi$$

iſt:

398. $$\cos 2n\varphi - \cos x = 2^{n-1}\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{2\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{2\pi + x}{n}\right\}$$
$$\cdots\cdots$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{(n-2)\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{(n-2)\pi + x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{n\pi - x}{n}\right\},$$

wenn n eine gerade Zahl iſt.

399. $$\cos 2n\varphi - \cos x = 2^{n-1}\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{2\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{2\pi + x}{n}\right\}$$
$$\cdots\cdots$$

$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{(n-1)\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{(n-1)\pi + x}{n}\right\},$$

wenn n eine ungerade Zahl iſt.

400. $$\cos 2n\varphi + \cos x = 2^{n-1}\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{\pi + x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{3\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{3\pi + x}{n}\right\}$$
$$\cdots\cdots$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{(n-1)\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{(n-1)\pi + x}{n}\right\},$$

wenn n eine gerade Zahl iſt.

401. $$\cos 2n\varphi + \cos x = 2^{n-1}\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{\pi + x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{3\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{3\pi + x}{n}\right\}$$
$$\cdots\cdots$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{(n-2)\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{(n-2)\pi + x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{n\pi - x}{n}\right\},$$

wenn n eine ungerade Zahl iſt.

Setzt man φ für $2n\varphi$, ſo gehen die vorhergehenden vier Formeln in folgende über:

402. $$\cos\varphi - \cos x = 2^{n-1}\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{2\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{2\pi + x}{n}\right\}$$
$$\cdots\cdots$$

$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{(n-2)\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{(n-2)\pi + x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{n\pi - x}{n}\right\},$$

wenn n eine gerade Zahl iſt.

403. $$\cos\varphi - \cos x = 2^{n-1}\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{2\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{2\pi + x}{n}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{(n-1)\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{(n-1)\pi + x}{n}\right\},$$

wenn n eine ungerade Zahl iſt.

404. $$\cos\varphi + \cos x = 2^{n-1}\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{\pi + x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{3\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{3\pi + x}{n}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{(n-1)\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{(n-1)\pi + x}{n}\right\},$$

wenn n eine gerade Zahl iſt.

405. $$\cos\varphi + \cos x = 2^{n-1}\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{\pi + x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{3\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{3\pi + x}{n}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{(n-2)\pi-x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{(n-2)\pi+x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{n\pi-x}{n}\right\},$$

wenn n eine ungerade Zahl iſt.

Setzt man $\varphi = 0$, ſo erhält man, weil bekanntlich

$$1-\cos x = 2\sin\tfrac{1}{2}x^2,\quad 1+\cos x = 2\cos\tfrac{1}{2}x^2$$

iſt:

406. $$\sin\tfrac{1}{2}x^2 = 2^{2(n-1)}.\left\{\sin\frac{x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{2\pi-x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{2\pi+x}{2n}\right\}^2\ldots\ldots$$
$$\ldots\left\{\sin\frac{(n-2)\pi-x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{(n-2)\pi+x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{n\pi-x}{2n}\right\}^2,$$

wenn n eine gerade Zahl iſt.

407. $$\sin\tfrac{1}{2}x^2 = 2^{2(n-1)}.\left\{\sin\frac{x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{2\pi-x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{2\pi+x}{2n}\right\}^2\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\left\{\sin\frac{(n-1)\pi-x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{(n-1)\pi+x}{2n}\right\}^2,$$

wenn n eine ungerade Zahl iſt.

408. $$\cos\tfrac{1}{2}x^2 = 2^{2(n-1)}.\left\{\sin\frac{\pi-x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{\pi+x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{3\pi-x}{2n}\right\}^2\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\left\{\sin\frac{(n-1)\pi-x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{(n-1)\pi+x}{2n}\right\}^2,$$

wenn n eine gerade Zahl iſt.

409. $$\cos\tfrac{1}{2}x^2 = 2^{2(n-1)}.\left\{\sin\frac{\pi-x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{\pi+x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{3\pi-x}{2n}\right\}^2\ldots\ldots$$
$$\ldots\left\{\frac{(n-2)\pi-x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{n-2)\pi+x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{n\pi-x}{2n}\right\}^2,$$

wenn n eine ungerade Zahl iſt.

Dieſe Formeln werden auf eine noch etwas einfachere Geſtalt gebracht, wenn man 2x für x ſetzt. Bei weitern Entwickelungen über dieſen Gegenſtand wollen wir indeß nicht länger verweilen.

43. Wir wollen nun nochmals zu den Gleichungen (316.) und (317.) zurückkehren, und wollen die dortigen in dem Falle, wo n eine poſitive ganze Zahl iſt, ſummirten Reihen nun auch in den Fällen, wo n eine negative ganze oder eine beliebige gebrochene Zahl iſt und dieſelben convergiren, zu ſummiren ſuchen, wobei wir jetzt α ſtatt des dortigen n ſetzen wollen. Zuerſt bemerken wir, daß die beiden Reihen

I. $\cos x^{\alpha} - \alpha_2 \cos x^{\alpha-2}\sin x^2 + \alpha_4 \cos x^{\alpha-4}\sin x^4 - \ldots\ldots,$

II. $\alpha_1 \cos x^{\alpha-1}\sin x - \alpha_3 \cos x^{\alpha-3}\sin x^3 + \alpha_5 \cos x^{\alpha-5}\sin x^5 - \ldots\ldots$

ſich auch auf die Form

$$\text{I*.}\quad \cos x^\alpha \{1 - \alpha_2 \operatorname{tang} x^2 + \alpha_4 \operatorname{tang} x^4 - \alpha_6 \operatorname{tang} x^6 + \ldots\},$$

$$\text{II*.}\quad \cos x^\alpha \{\alpha_1 \operatorname{tang} x - \alpha_3 \operatorname{tang} x^3 + \alpha_5 \operatorname{tang} x^5 - \alpha_7 \operatorname{tang} x^7 + \ldots\}$$

bringen und daher ſummiren laſſen, wenn man im Stande iſt, die beiden Reihen

$$\text{I**.}\quad 1 - \alpha_2 \operatorname{tang} x^2 + \alpha_4 \operatorname{tang} x^4 - \alpha_6 \operatorname{tang} x^6 + \ldots,$$

$$\text{II**.}\quad \alpha_1 \operatorname{tang} x - \alpha_3 \operatorname{tang} x^3 + \alpha_5 \operatorname{tang} x^5 - \alpha_7 \operatorname{tang} x^7 + \ldots$$

zu ſummiren, wobei es nun zunächſt darauf ankommt, zu unterſuchen, unter welchen Bedingungen dieſe beiden Reihen convergiren, indem natürlich bloß im Falle der Convergenz von einer Summation derſelben die Rede ſeyn kann. Betrachten wir zu dem Ende überhaupt das Verhältniß der beiden Binomial-Coefficienten α_n, α_{n+2} zu einander; ſo finden wir leicht

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{(\alpha - n)(\alpha - n - 1)}{(n+1)(n+2)} = \left\{1 - \frac{\alpha+1}{n+1}\right\}\left\{1 - \frac{\alpha+1}{n+2}\right\},$$

und ſchließen hieraus, daß der numeriſche Werth dieſes Verhältniſſes ſich, wenn n wächſt, der Einheit immer mehr und mehr nähert und derſelben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n groß genug werden läßt. Daher ſind nach dem im Artikel Convergenz der Reihen (21.) i. d. Z. bewieſenen Lehrſatze für jedes zwiſchen den Gränzen -1 und $+1$ enthaltene $\operatorname{tang} x$ die beiden obigen Reihen nicht bloß convergent, ſondern bleiben offenbar auch convergent, wenn man jedes ihrer Glieder auf ſeinen abſoluten Werth reducirt, wobei es übrigens auf die Beſchaffenheit der Größe α, vorausgeſetzt daß dieſelbe nur reell iſt, gar nicht ankommt. Soll aber $\operatorname{tang} x$ zwiſchen den Gränzen -1 und $+1$ enthalten ſeyn, ſo muß der Endpunkt des Bogens x nothwendig entweder in dem Bogen $-\frac{1}{4}\pi$ oder in dem Bogen $+\frac{1}{4}\pi$ liegen, d. h. der Bogen x muß, wenn k eine beliebige poſitive oder negative ganze Zahl bezeichnet, zwiſchen den beiden Gränzen $2k\pi - \frac{1}{4}\pi$ und $2k\pi + \frac{1}{4}\pi$ enthalten ſeyn, welches wir von nun an in allen den Fällen, wo α keine poſitive ganze Zahl iſt, auch ſtets vorausſetzen wollen. Iſt α eine poſitive ganze Zahl, ſo brechen die beiden obigen Reihen jederzeit ab, und ſind daher für jedes beliebige reelle x als convergent zu betrachten, wie ſich von ſelbſt verſteht. Zu bemerken iſt hierbei noch, daß in allen den Fällen, wo α keine poſitive ganze Zahl iſt, wegen der Bedingung, daß x zwiſchen den Gränzen $(2k - \frac{1}{4})\pi$ und $(2k + \frac{1}{4})\pi$ enthalten ſeyn muß, $\cos x$ jederzeit poſitiv, die Potenz $\cos x^\alpha$ folglich immer eine reelle Größe iſt. In allen den Fällen, wo die Reihen I**. und II**. convergent ſind und convergent bleiben, wenn man jedes Glied auf ſeinen abſoluten Werth reducirt, ſind natürlich auch die Reihen I. und II. convergent und bleiben convergent, wenn man jedes ihrer Glieder auf ſeinen abſoluten Werth reducirt, ſo daß alſo in allen dieſen Fällen die Reihen I. und II. eine Summe haben, die

wir als Functionen von α durch $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$ bezeichnen und nun näher beſtimmen wollen.

44. Immer unter der Vorausſetzung, daß der Bogen x ſo beſchaffen iſt, daß alle folgende Reihen convergent ſind und convergent bleiben, wenn man jedes ihrer Glieder auf ſeinen abſoluten Werth reducirt, haben wir nun in der eingeführten Bezeichnung:

I. $f(\alpha) = \cos x^{\alpha} - \alpha_2 \cos x^{\alpha-2} \sin x^2 + \alpha_4 \cos x^{\alpha-4} \sin x^4 - \ldots\ldots,$

II. $\varphi(\alpha) = \alpha_1 \cos x^{\alpha-1} \sin x - \alpha_3 \cos x^{\alpha-3} \sin x^3 + \alpha_5 \cos x^{\alpha-5} \sin x^5 - \ldots\ldots,$

und eben ſo

I*. $f(\gamma) = \cos x^{\gamma} - \gamma_2 \cos x^{\gamma-2} \sin x^2 + \gamma_4 \cos x^{\gamma-4} \sin x^4 - \ldots\ldots,$

II*. $\varphi(\gamma) = \gamma_1 \cos x^{\gamma-1} \sin x - \gamma_3 \cos x^{\gamma-3} \sin x^3 + \gamma_5 \cos x^{\gamma-5} \sin x^5 - \ldots$

Wenden wir auf dieſe Reihen, wozu wir nach der gemachten Vorausſetzung berechtigt ſind, die im Artikel Convergenz der Reihen (19.) und (20.) i. d. Z. bewieſenen Sätze an; ſo erhalten wir nach leichter Rechnung:

$$f(\alpha).f(\gamma) - \varphi(\alpha).\varphi(\gamma)$$

$$\begin{aligned}
= \; & \cos x^{\alpha+\gamma} \\
& - \{\alpha_2 + \alpha_1\gamma_1 + \gamma_2\} \cos x^{\alpha+\gamma-2} \sin x^2 \\
& + \{\alpha_4 + \alpha_3\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_1\gamma_3 + \gamma_4\} \cos x^{\alpha+\gamma-4} \sin x^4 \\
& - \{\alpha_6 + \alpha_5\gamma_1 + \alpha_4\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 + \alpha_2\gamma_4 + \alpha_1\gamma_5 + \gamma_6\} \cos x^{\alpha+\gamma-6} \sin x^6 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$$\varphi(\alpha).f(\gamma) + f(\alpha).\varphi(\gamma)$$

$$\begin{aligned}
= \; & \{\alpha_1 + \gamma_1\} \cos x^{\alpha+\gamma-1} \sin x \\
& - \{\alpha_3 + \alpha_2\gamma_1 + \alpha_1\gamma_2 + \gamma_3\} \cos x^{\alpha+\gamma-3} \sin x^3 \\
& + \{\alpha_5 + \alpha_4\gamma_1 + \alpha_3\gamma_2 + \alpha_2\gamma_3 + \alpha_1\gamma_4 + \gamma_5\} \cos x^{\alpha+\gamma-5} \sin x^5 \\
& - \{\alpha_7 + \alpha_6\gamma_1 + \alpha_5\gamma_2 + \alpha_4\gamma_3 + \alpha_3\gamma_4 + \alpha_2\gamma_5 + \alpha_1\gamma_6 + \gamma_7\} \cos x^{\alpha+\gamma-7} \sin x^7 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

d. i. nach dem im Artikel Binomiſcher Lehrſatz (10.) i. d. Z. bewieſenen, auch ſchon aus dem Artikel Binomial-Coefficienten bekannten, Lehrſatze von den Binomial-Coefficienten:

$$f(\alpha).f(\gamma) - \varphi(\alpha).\varphi(\gamma)$$

$$\begin{aligned}
= \; & \cos x^{\alpha+\gamma} - (\alpha+\gamma)_2 . \cos x^{\alpha+\gamma-2} \sin x^2 + (\alpha+\gamma)_4 . \cos x^{\alpha+\gamma-4} \sin x^4 \\
& - (\alpha+\gamma)_6 . \cos x^{\alpha+\gamma-6} \sin x^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$$\varphi(\alpha).f(\gamma) + f(\alpha).\varphi(\gamma)$$

$$=(\alpha+\gamma)_1 . \cos x^{\alpha+\gamma-1} \sin x - (\alpha+\gamma)_3 . \cos x^{\alpha+\gamma-3} \sin x^3$$

$$+ (\alpha+\gamma)_5 . \cos x^{\alpha+\gamma-5} \sin x^5 - (\alpha+\gamma)_7 . \cos x^{\alpha+\gamma-7} \sin x^7 + \ldots,$$

d. i. in der eingeführten Bezeichnung

410. $f(\alpha+\gamma) = f(\alpha).f(\gamma) - \varphi(\alpha).\varphi(\gamma)$,

411. $\varphi(\alpha+\gamma) = \varphi(\alpha).f(\gamma) + f(\alpha).\varphi(\gamma)$,

wodurch wir alſo ſchon eine wichtige und merkwürdige Eigenſchaft der durch die Functionszeichen f und φ bezeichneten Functionen gefunden haben. Setzen wir in den beiden vorhergehenden Gleichungen $\alpha = \gamma$; ſo gehen dieſelben in folgende über:

412. $f(2\alpha) = \{f(\alpha)\}^2 - \{\varphi(\alpha)\}^2$,

413. $\varphi(2\alpha) = 2\varphi(\alpha).f(\alpha)$,

oder, was daſſelbe iſt,

414. $f(\alpha) = \{f(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 - \{\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2$,

415. $\varphi(\alpha) = 2f(\tfrac{1}{2}\alpha).\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)$.

45. Zuerſt wollen wir nun annehmen, daß α und γ poſitive ganze Zahlen ſeyen. Dann gelten die Gleichungen (410.) und (411.) für jedes reelle x. Für $\alpha = 0$ iſt, wie auf der Stelle erhellet,

416. $f(0) = 1$, $\varphi(0) = 0$,

und eben ſo leicht erhellet, daß für $\alpha = 1$

$$f(1) = \cos x, \quad \varphi(1) = \sin x$$

iſt. Setzen wir nun ferner $\alpha = 1$, $\gamma = 1$; ſo iſt nach den Gleichungen (410.) und (411.)

$$f(2) = f(1).f(1) - \varphi(1).\varphi(1)$$
$$= \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos 2x,$$
$$\varphi(2) = \varphi(1).f(1) + f(1).\varphi(1)$$
$$= \sin x \cos x + \cos x \sin x = \sin 2x.$$

Für $\alpha = 2$, $\gamma = 1$ ergiebt ſich eben ſo:

$$f(3) = f(2).f(1) - \varphi(2).\varphi(1)$$
$$= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \cos 3x,$$
$$\varphi(3) = \varphi(2).f(1) + f(2).\varphi(1)$$
$$= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = \sin 3x.$$

Für $\alpha = 3$, $\gamma = 1$ erhält man ferner:

$$f(4) = f(3).f(1) - \varphi(3).\varphi(1)$$
$$= \cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x = \cos 4x,$$
$$\varphi(4) = \varphi(3).f(1) + f(3).\varphi(1)$$
$$= \sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x = \sin 4x.$$

Wie man auf dieſe Art weiter gehen kann, erhellet hieraus deutlich genug, und es iſt folglich für jedes reelle x und jedes poſitive ganze α

417. $f(\alpha) = \cos\alpha x$, $\varphi(\alpha) = \sin\alpha x$,

wie ſchon in (316.) und (317.) auf anderm Wege mittelſt der imaginären Größen gefunden worden iſt.

46. Iſt α wieder eine poſitive ganze Zahl, aber $\gamma = -\alpha$; ſo gelten, wenn k wie oben wieder eine beliebige poſitive oder negative ganze Zahl bezeichnet, die Gleichungen (410.) und (411.) bloß für alle zwiſchen $(2k - \frac{1}{4})\pi$ und $(2k + \frac{1}{4})\pi$ enthaltene Werthe von x, und für alle ſolche Werthe von x iſt alſo nach (416.)

$$f(\alpha).f(-\alpha) - \varphi(\alpha).\varphi(-\alpha) = 1,$$
$$\varphi(\alpha).f(-\alpha) + f(\alpha).\varphi(-\alpha) = 0,$$

d. i., weil α eine poſitive ganze Zahl iſt, nach (417.)

$$\cos\alpha x.f(-\alpha) - \sin\alpha x.\varphi(-\alpha) = 1,$$
$$\sin\alpha x.f(-\alpha) + \cos\alpha x.\varphi(-\alpha) = 0.$$

Multiplicirt man dieſe Gleichungen reſpective mit $\cos\alpha x$, $\sin\alpha x$ und mit $\sin\alpha x$, $\cos\alpha x$; ſo erhält man

$$\cos\alpha x^2.f(-\alpha) - \sin\alpha x\cos\alpha x.\varphi(-\alpha) = \cos\alpha x,$$
$$\sin\alpha x^2.f(-\alpha) + \sin\alpha x\cos\alpha x.\varphi(-\alpha) = 0;$$

und

$$\sin\alpha x\cos\alpha x.f(-\alpha) - \sin\alpha x^2.\varphi(-\alpha) = \sin\alpha x,$$
$$\sin\alpha x\cos\alpha x.f(-\alpha) + \cos\alpha x^2.\varphi(-\alpha) = 0.$$

Folglich, wenn man die beiden erſten Gleichungen zu einander addirt, im letztern Falle dagegen die obere Gleichung von der untern abzieht, weil bekanntlich

$$\sin\alpha x^2 + \cos\alpha x^2 = 1$$

iſt:

$$f(-\alpha) = \cos\alpha x, \quad \varphi(-\alpha) = -\sin\alpha x,$$

oder, weil bekanntlich

$$\cos\alpha x = \cos(-\alpha x), \quad \sin\alpha x = -\sin(-\alpha x)$$

iſt, für jedes poſitive ganze α und jedes zwiſchen $(2k - \frac{1}{4})\pi$ und $(2k + \frac{1}{4})\pi$ enthaltene x:

418. $f(-\alpha) = \cos(-\alpha x)$, $\varphi(-\alpha) = \sin(-\alpha x)$.

47. Sey jetzt α eine poſitive oder negative ganze Zahl; ſo iſt nach (417.) und (418.) für jedes zwiſchen $(2k - \frac{1}{4})\pi$ und $(2k + \frac{1}{4})\pi$ enthaltene x

$$f(\alpha) = \cos\alpha x, \quad \varphi(\alpha) = \sin\alpha x.$$

Für jedes beliebige γ und jedes zwiſchen den angegebenen Gränzen enthaltene x iſt nach (414.) und (415.)

$$f(\gamma) = \{f(\tfrac{1}{2}\gamma)\}^2 - \{\varphi(\tfrac{1}{2}\gamma)\}^2,$$
$$\varphi(\gamma) = 2f(\tfrac{1}{2}\gamma).\varphi(\tfrac{1}{2}\gamma).$$

Quadrirt man auf beiden Seiten dieſer Gleichungen und addirt die Quadrate zu einander; ſo erhält man nach leichter Rechnung

419. $\{f(\gamma)\}^2 + \{\varphi(\gamma)\}^2 = \left\{\{f(\tfrac{1}{2}\gamma)\}^2 + \{\varphi(\tfrac{1}{2}\gamma)\}^2\right\}^2$.

Alſo iſt auch, wie man durch mehrfache ſucceſſive Anwendung dieſer Gleichung leicht findet:

$$\begin{aligned}\{f(\alpha)\}^2 + \{\varphi(\alpha)\}^2 &= \left\{\{f(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 + \{\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2\right\}^2 \\ &= \left\{\{f(\tfrac{1}{4}\alpha)\}^2 + \{\varphi(\tfrac{1}{4}\alpha)\}^2\right\}^4 \\ &= \left\{\{f(\tfrac{1}{8}\alpha)\}^2 + \{\varphi(\tfrac{1}{8}\alpha)\}^2\right\}^8 \\ &\text{u. ſ. w. u. ſ. w.} \\ &= \left\{\left\{f\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right)\right\}^2 + \left\{\varphi\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right)\right\}^2\right\}^{2^n},\end{aligned}$$

wo man die poſitive ganze Zahl n beliebig groß annehmen kann. Nach dem Obigen iſt aber

$$\{f(\alpha)\}^2 + \{\varphi(\alpha)\}^2 = \sin\alpha x^2 + \cos\alpha x^2 = 1.$$

Alſo iſt auch für jedes poſitive oder negative ganze α, jedes zwiſchen $(2k - \frac{1}{4})\pi$ und $(2k + \frac{1}{4})\pi$ enthaltene x und jedes poſitive ganze beliebig große n

$$\left\{\left\{f\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right)\right\}^2 + \left\{\varphi\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right)\right\}^2\right\}^{2^n} = 1;$$

alſo auch unter denſelben Vorausſetzungen

$$\left\{f\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right)\right\}^2 + \left\{\varphi\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right)\right\}^2 = 1.$$

Aus dem im Artikel Function (15.) i. d. Z., oben S. 354, bewieſenen Satze, den wir hier nicht wiederholen wollen, geht aber hervor, daß man ſich die ganzen Zahlen α und n, von denen die erſtere poſitiv und negativ ſeyn kann, die andere ſtets poſitiv iſt, immer ſo verändern laſſen kann, daß ſich der Bruch $\frac{\alpha}{2^n}$ der beliebigen reellen poſitiven Größe μ immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert. Läßt man alſo α und n ſich auf dieſe Weiſe verändern und geht dann zu den Gränzen über; ſo erhält man aus der vorhergehenden Gleichung auf der Stelle

$$\{f(\mu)\}^2 + \{\varphi(\mu)\}^2 = 1,$$

oder, wenn wir jetzt wieder α für μ ſetzen,

$$420.\quad \{f(\alpha)\}^2 + \{\varphi(\alpha)\}^2 = 1,$$

für jedes beliebige poſitive oder negative α und jedes zwiſchen $(2k - \frac{1}{4})\pi$ und $(2k + \frac{1}{4})\pi$ enthaltene x.

Setzen wir jetzt in den Gleichungen (410.) und (411.) $\gamma = -\alpha$, ſo gehen dieſelben in folgende über:

$$421.\quad f(\alpha).f(-\alpha) - \varphi(\alpha).\varphi(-\alpha) = 1,$$

$$422.\quad \varphi(\alpha).f(-\alpha) + f(\alpha).\varphi(-\alpha) = 0.$$

Aus der zweiten dieſer beiden Gleichungen ergiebt ſich

$$\varphi(-\alpha) = -\frac{\varphi(\alpha).f(-\alpha)}{f(\alpha)},\ f(-\alpha) = -\frac{f(\alpha).\varphi(-\alpha)}{\varphi(\alpha)}.$$

Setzt man dieſe Ausdrücke für $\varphi(-\alpha)$ und $f(-\alpha)$ in die Gleichung (421.); ſo erhält man:

$$f(-\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\{f(\alpha)\}^2 + \{\varphi(\alpha)\}^2},\ \varphi(-\alpha) = -\frac{\varphi(\alpha)}{\{f(\alpha)\}^2 + \{\varphi(\alpha)\}^2},$$

d. i. nach (420.)

$$423.\quad f(-\alpha) = f(\alpha),\ \varphi(-\alpha) = -\varphi(\alpha).$$

Aus den Gleichungen (414.) und (420.) ergiebt ſich endlich

$$f(\alpha) = 2.\{f(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 - 1,\ f(\alpha) = 1 - 2.\{\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2;$$

folglich

$$424.\quad \{f(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 = \frac{1+f(\alpha)}{2},\ \{\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 = \frac{1-f(\alpha)}{2},$$

immer für jedes zwiſchen den angegebenen Gränzen enthaltene x.

Wir wollen nun einmal ſetzen, daß für jedes zwiſchen den Gränzen $(2k-\frac{1}{4})\pi$ und $(2k+\frac{1}{4})\pi$ enthaltene x, und für ein gewiſſes, übrigens beliebiges, α

$$f(\alpha) = \cos\alpha x,\ \varphi(\alpha) = \sin\alpha x$$

ſey; ſo iſt nach (424.)

$$\{f(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 = \frac{1+f(\alpha)}{2} = \frac{1+\cos\alpha x}{2},$$

$$\{\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 = \frac{1-f(\alpha)}{2} = \frac{1-\cos\alpha x}{2},$$

und folglich nach (165.) und (166.)

$$\{f(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 = \cos\tfrac{1}{2}\alpha x^2,\ \{\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 = \sin\tfrac{1}{2}\alpha x^2;$$

alſo für jedes x zwiſchen den angegebenen Gränzen

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \pm\cos\tfrac{1}{2}\alpha x,\ \varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = \pm\sin\tfrac{1}{2}\alpha x,$$

wo nun zunächſt zu beſtimmen iſt, wie in dieſen beiden Formeln die Vorzeichen auf einander zu beziehen ſind. Dazu gelangt man ſehr leicht auf folgende Art. Wäre nämlich mit Beziehung der obern und untern Vorzeichen auf einander

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \pm\cos\tfrac{1}{2}\alpha x,\ \varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = \mp\sin\tfrac{1}{2}\alpha x;$$

ſo wäre

$$2f(\tfrac{1}{2}\alpha).\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = -2\sin\tfrac{1}{2}\alpha x\cos\tfrac{1}{2}\alpha x = -\sin\alpha x,$$

d. i., weil nach der Vorausſetzung $\varphi(\alpha) = \sin\alpha x$ iſt,

$$2f(\tfrac{1}{2}\alpha).\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = -\varphi(\alpha),$$

da doch im Gegentheil nach (415.)

$$2f(\tfrac{1}{2}\alpha).\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = \varphi(\alpha)$$

iſt. Alſo iſt mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander nicht

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \pm\cos\tfrac{1}{2}\alpha x,\ \varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = \mp\sin\tfrac{1}{2}\alpha x,$$

ſondern jederzeit

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \pm \cos\tfrac{1}{2}\alpha x,\quad \varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = \pm \sin\tfrac{1}{2}\alpha x\,.$$

Ferner kommt es nun darauf an, zu beſtimmen, ob in dieſen Formeln die obern oder die untern Zeichen zu nehmen ſind. Um zu dieſer Beſtimmung zu gelangen, wollen wir ſowohl $\cos\frac{1}{2}\alpha x$ und $\sin\frac{1}{2}\alpha x$, als auch $f(\frac{1}{2}\alpha)$ und $\varphi(\frac{1}{2}\alpha)$, als Functionen von x betrachten, und deshalb von jetzt an

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = F(x),\quad \varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = \Phi(x)$$

ſetzen. Stellen wir uns nun vor, daß x ſich von $(2k-\frac{1}{2})\pi$ bis $(2k+\frac{1}{2})\pi$ ſtetig verändert; ſo werden ſich zwiſchen dieſen beiden Gränzen offenbar auch ſowohl $\cos\frac{1}{2}\alpha x$ und $\sin\frac{1}{2}\alpha x$, als auch $F(x)$ und $\Phi(x)$ ſtetig verändern, weil die den letztern Functionen entſprechenden Reihen für jedes x zwiſchen den angegebenen Gränzen convergent ſind. Wäre aber für irgend zwei einander unendlich nahe liegende Werthe von x zwiſchen dieſen Gränzen, die wir, wenn jetzt i eine unendlich kleine poſitive Größe bezeichnet, durch $\xi - i$ und $\xi + i$ bezeichnen wollen,

$$F(\xi-i) = \pm \cos\tfrac{1}{2}\alpha(\xi-i),\quad F(\xi+i) = \mp \cos\tfrac{1}{2}\alpha(\xi+i)\,;$$

ſo wäre, immer mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander, nach dem Vorhergehenden auch

$$\Phi(\xi-i) = \pm \sin\tfrac{1}{2}\alpha(\xi-i),\quad \Phi(\xi+i) = \mp \sin\tfrac{1}{2}\alpha(\xi+i)\,.$$

Hätten nun

I. $\cos\frac{1}{2}\alpha(\xi-i)$ und $\cos\frac{1}{2}\alpha(\xi+i)$ gleiche Vorzeichen; ſo hätten $\pm\cos\frac{1}{2}\alpha(\xi-i)$ und $\mp\cos\frac{1}{2}\alpha(\xi+i)$ ungleiche Vorzeichen, und es müßte folglich, wegen der ſtetigen Veränderung der Function $F(x)$, offenbar $F(\xi)$, d. i. $\cos\frac{1}{2}\alpha\xi = 0$ ſeyn.

Hätten dagegen

II. $\cos\frac{1}{2}\alpha(\xi-i)$ und $\cos\frac{1}{2}\alpha(\xi+i)$ ungleiche Vorzeichen; ſo müßte wieder, wegen der ſtetigen Veränderung der Function $\cos\frac{1}{2}\alpha x$, offenbar $\cos\frac{1}{2}\alpha\xi = 0$ ſeyn.

Hätten auf dieſelbe Weiſe ferner

I. $\sin\frac{1}{2}\alpha(\xi-i)$ und $\sin\frac{1}{2}\alpha(\xi+i)$ gleiche Vorzeichen; ſo hätten $\pm\sin\frac{1}{2}\alpha(\xi-i)$ und $\mp\sin\frac{1}{2}\alpha(\xi+i)$ ungleiche Vorzeichen, und es müßte folglich, wegen der ſtetigen Veränderung der Function $\Phi(x)$, offenbar $\Phi(\xi)$, d. i. $\sin\frac{1}{2}\alpha\xi = 0$ ſeyn.

Hätten dagegen

II. $\sin\frac{1}{2}\alpha(\xi-i)$ und $\sin\frac{1}{2}\alpha(\xi+i)$ ungleiche Vorzeichen; ſo müßte wieder, wegen der ſtetigen Veränderung von $\sin\frac{1}{2}\alpha x$, offenbar $\sin\frac{1}{2}\alpha\xi = 0$ ſeyn.

Hieraus ſieht man alſo, daß, wenn

$$F(\xi-i) = \pm \cos\tfrac{1}{2}\alpha(\xi-i),\quad F(\xi+i) = \mp \cos\tfrac{1}{2}\alpha(\xi+i)\,;$$
$$\Phi(\xi-i) = \pm \sin\tfrac{1}{2}\alpha(\xi-i),\quad \Phi(\xi+i) = \mp \sin\tfrac{1}{2}\alpha(\xi+i)$$

ſeyn könnte, jederzeit

$$\cos \tfrac{1}{2}\alpha\xi = 0, \quad \sin \tfrac{1}{2}\alpha\xi = 0$$

ſeyn müßte, welches offenbar ungereimt iſt, da der Coſinus und Sinus eines Winkels niemals zugleich verſchwinden können. Daher iſt nie

$$F(\xi - i) = \pm \cos \tfrac{1}{2}\alpha(\xi - i), \quad F(\xi + i) = \mp \cos \tfrac{1}{2}\alpha(\xi + i)\ ;$$
$$\Phi(\xi - i) = \pm \sin \tfrac{1}{2}\alpha(\xi - i), \quad \Phi(\xi + i) = \mp \sin \tfrac{1}{2}\alpha(\xi + i)\ ;$$

ſondern jederzeit

$$F(\xi - i) = \pm \cos \tfrac{1}{2}\alpha(\xi - i), \quad F(\xi + i) = \pm \cos \tfrac{1}{2}\alpha(\xi + i)\ ;$$
$$\Phi(\xi - i) = \pm \sin \tfrac{1}{2}\alpha(\xi - i), \quad \Phi(\xi + i) = \pm \sin \tfrac{1}{2}\alpha(\xi + i)\ .$$

Aus dieſer Betrachtung geht auf die deutlichſte und unzweideutigſte Weiſe hervor, daß die Functionen $F(x)$ oder $f(\frac{1}{2}\alpha)$ und $\Phi(x)$ oder $\varphi(\frac{1}{2}\alpha)$ für alle Werthe von x zwiſchen $(2k - \frac{1}{4})\pi$ und $(2k + \frac{1}{4})\pi$ reſpective mit $\cos \frac{1}{2}\alpha x$ und $\sin \frac{1}{2}\alpha x$ immer entweder gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben. Iſt nun $k = 0$, ſo iſt 0 ein zwiſchen den Gränzen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ liegender Werth des Bogens x, und für dieſen Werth von x iſt alſo, weil $F(0)$ offenbar $= 1$ iſt, $f(\frac{1}{2}\alpha) = \cos \frac{1}{2}\alpha x$. Folglich iſt nach dem ſo eben Bewieſenen für alle zwiſchen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ liegenden Werthe von x

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \cos \tfrac{1}{2}\alpha x\ ;$$

alſo nach dem Vorhergehenden auch

$$\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = \sin \tfrac{1}{2}\alpha x\ .$$

Faſſen wir nun alles Vorhergehende nochmals im Zuſammenhange gehörig in's Auge; ſo haben wir jetzt eigentlich folgenden Satz bewieſen:

Wenn für ein gewiſſes α und ein jedes zwiſchen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ liegendes x

$$f(\alpha) = \cos \alpha x, \quad \varphi(\alpha) = \sin \alpha x$$

iſt; ſo iſt immer auch für jedes x zwiſchen den angegebenen Gränzen

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \cos \tfrac{1}{2}\alpha x, \quad \varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = \sin \tfrac{1}{2}\alpha x\ .$$

Nach (45.) und (46.) iſt aber für jedes poſitive oder negative ganze α und jedes zwiſchen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ liegende x in der That

$$f(\alpha) = \cos \alpha x, \quad \varphi(\alpha) = \sin \alpha x\ ;$$

alſo iſt nach dem ſo eben Bewieſenen für dieſelben Werthe von α und x auch

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \cos \tfrac{1}{2}\alpha x, \quad \varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = \sin \tfrac{1}{2}\alpha x\ ;$$

folglich auf dieſelbe Weiſe

$$f(\tfrac{1}{4}\alpha) = \cos \tfrac{1}{4}\alpha x, \quad \varphi(\tfrac{1}{4}\alpha) = \sin \tfrac{1}{4}\alpha x\ ;$$

alſo ferner eben ſo

$$f(\tfrac{1}{8}\alpha) = \cos \tfrac{1}{8}\alpha x, \quad \varphi(\tfrac{1}{8}\alpha) = \sin \tfrac{1}{8}\alpha x\ ;$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Wie man auf dieſe Art weiter gehen kann, iſt klar, und man

ſchließt alſo hieraus im Allgemeinen, daß für jedes poſitive oder negative ganze α, für jedes poſitive ganze n und jedes zwiſchen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthaltene x,

$$f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = \cos\frac{\alpha}{2^n}x,\ \varphi\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = \sin\frac{\alpha}{2^n}x$$

iſt.

Nach dem ſchon oben angewandten im Artikel Function (15.) i. d. Z. bewieſenen Satze kann man nun die ganzen Zahlen α und n ſich jederzeit ſo verändern laſſen, daß der Bruch $\frac{\alpha}{2^n}$ ſich der beliebigen reellen poſitiven oder negativen Größe μ immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert. Läßt man alſo α und n ſich auf dieſe Weiſe verändern, und geht dann zu den Gränzen über; ſo findet man mittelſt des Vorhergehenden, daß für jedes reelle poſitive oder negative μ und jedes zwiſchen den Gränzen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthaltene x

$$f(\mu) = \cos\mu x,\ \varphi(\mu) = \sin\mu x$$

iſt.

Setzen wir nun wieder α für μ; ſo iſt alſo für jedes reelle α und jeden zwiſchen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthaltenen Bogen x

425. $$f(\alpha) = \cos\alpha x,\ \varphi(\alpha) = \sin\alpha x;$$

d. i.

426. $$\cos\alpha x = \cos x^{\alpha} - \alpha_2 \cos x^{\alpha-2}\sin x^2 + \alpha_4 \cos x^{\alpha-4}\sin x^4 - \ldots\ldots,$$

427. $$\sin\alpha x = \alpha_1 \cos x^{\alpha-1}\sin x - \alpha_3 \cos x^{\alpha-3}\sin x^3 + \alpha_5 \cos x^{\alpha-5}\sin x^5 - \ldots,$$

oder

428. $$\cos\alpha x = \cos x^{\alpha}\{1 - \alpha_2 \operatorname{tang} x^2 + \alpha_4 \operatorname{tang} x^4 - \alpha_6 \operatorname{tang} x^6 + \ldots\ldots\},$$

429. $$\sin\alpha x = \cos x^{\alpha}\{\alpha_1 \operatorname{tang} x - \alpha_3 \operatorname{tang} x^3 + \alpha_5 \operatorname{tang} x^5 - \ldots\ldots\},$$

immer unter der Bedingung, daß x zwiſchen den Gränzen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthalten iſt.

48. Die Reihe (429.) läßt ſich, immer unter der Vorausſetzung, daß x zwiſchen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthalten iſt, wie man leicht findet, auch auf folgenden Ausdruck bringen:

$$\frac{\sin\alpha x}{\alpha\cos x^{\alpha}} = \operatorname{tang} x - \tfrac{1}{3}(1-\alpha)(1-\tfrac{1}{2}\alpha)\operatorname{tang} x^3$$
$$+ \tfrac{1}{5}(1-\alpha)(1-\tfrac{1}{2}\alpha)(1-\tfrac{1}{3}\alpha)(1-\tfrac{1}{4}\alpha)\operatorname{tang} x^5$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Läßt man nun α, welches bekanntlich jeden beliebigen reellen Werth haben kann, ſich immer mehr und mehr der Null nähern; ſo nähert die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ſich offenbar immer mehr und mehr der Reihe

$$\operatorname{tang} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{tang} x^3 + \tfrac{1}{5}\operatorname{tang} x^5 - \tfrac{1}{7}\operatorname{tang} x^7 + \ldots\ldots$$

als ihrer Gränze, und kann derſelben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur α nahe genug bei Null annimmt. Bezeichnen wir alſo die Gränze, welcher ſich

$$\frac{\sin \alpha x}{\alpha \cos x^\alpha}$$

nähert, wenn α ſich der Null nähert, durch

$$\text{Lim} \frac{\sin \alpha x}{\alpha \cos x^\alpha};$$

ſo iſt

$$\text{Lim} \frac{\sin \alpha x}{\alpha \cos x^\alpha} = \text{tang}\, x - \tfrac{1}{3} \text{tang}\, x^3 + \tfrac{1}{5} \text{tang}\, x^5 - \tfrac{1}{7} \text{tang}\, x^7 + \ldots$$

Weil nun aber $\cos x^\alpha$ ſich der Einheit nähert, wenn α ſich der Null nähert, und der Einheit offenbar auch beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur α nahe genug bei Null annimmt; ſo erhellet leicht, daß

$$\text{Lim} \frac{\sin \alpha x}{\alpha \cos x^\alpha} = \text{Lim} \frac{\sin \alpha x}{\alpha},$$

und folglich auch

$$\text{Lim} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} = \text{tang}\, x - \tfrac{1}{3} \text{tang}\, x^3 + \tfrac{1}{5} \text{tang}\, x^5 - \tfrac{1}{7} \text{tang}\, x^7 + \ldots\ldots$$

Bezeichnet jetzt z einen beliebigen Bogen; ſo kann man z offenbar immer ſo nahe bei Null annehmen, daß in Bezug auf die abſoluten Werthe der drei folgenden Größen

$$\sin z < z < \text{tang}\, z$$

iſt. Dann iſt

$$\frac{\sin z}{\sin z} > \frac{\sin z}{z} > \frac{\sin z}{\text{tang}\, z},$$

oder

$$1 > \frac{\sin z}{z} > \cos z,$$

und folglich der Bruch $\frac{\sin z}{z}$ zwiſchen 1 und $\cos z$ enthalten. Da nun, wenn z ſich der Null nähert, $\cos z$ ſich immer mehr und mehr der Einheit nähert und derſelben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur z nahe genug bei Null annimmt; ſo gilt dies nach dem ſo eben Bewieſenen offenbar um ſo mehr von dem Bruche $\frac{\sin z}{z}$, welcher ſich alſo, wenn z ſich der Null nähert, der Einheit als ſeiner Gränze nähert. Alſo iſt, wenn man ſich jetzt vorſtellt, daß α ſich der Null nähert, offenbar auch

$$\text{Lim} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = 1.$$

Weil nun aber augenſcheinlich

$$\text{Lim} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \frac{1}{x} \text{Lim} \frac{\sin \alpha x}{\alpha}$$

iſt; ſo iſt

$$\frac{1}{x} \text{Lim} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} = 1, \quad \text{Lim} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} = x,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$x = \tang x - \tfrac{1}{3}\tang x^3 + \tfrac{1}{5}\tang x^5 - \tfrac{1}{7}\tang x^7 + \ldots,$$

für jedes zwiſchen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthaltene x. Bezeichnet man den zwiſchen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthaltenen Bogen, deſſen trigonometriſche Tangente $= x$ iſt, wobei alſo x zwiſchen -1 und $+1$ enthalten iſt, durch $\mathrm{Arc}\tang x$; ſo verwandelt ſich die vorhergehende Gleichung in die für jedes zwiſchen -1 und $+1$ enthaltene x geltende Gleichung:

$$430.\quad \mathrm{Arc}\tang x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots.$$

Da nach dem im Artikel Convergenz der Reihen (15.) bewieſenen Satze die Reihe

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots.$$

convergirt, ſo erhellet leicht, daß die vorſtehende Gleichung auch noch für $x = \pm 1$ gilt, und daß folglich

$$431.\quad \tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \ldots.$$

iſt.

Obgleich der hier behandelte Gegenſtand nicht eigentlich zur Goniometrie gehört; ſo halten wir doch die obige Ableitung der Reihe (430.) aus der Reihe (429.) für einen ſehr genügenden Beweis der erſtern, und haben denſelben daher bei dieſer Gelegenheit hier mitzutheilen uns erlaubt.

49. Nehmen wir nun immer an, daß x zwiſchen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthalten iſt; ſo iſt nach (426.)

$$\cos\alpha x = (1-\sin x^2)^{\frac{\alpha}{2}} - \alpha_2(1-\sin x^2)^{\frac{\alpha-2}{2}}\sin x^2 + \alpha_4(1-\sin x^2)^{\frac{\alpha-4}{2}}\sin x^4 - \ldots..$$

oder auch

$$\cos\alpha x = \cos x\left\{(1-\sin x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} - \alpha_2(1-\sin x^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}\sin x^2 + \alpha_4(1-\sin x^2)^{\frac{\alpha-5}{2}}\sin x^4 - \ldots..\right\}.$$

Entwickelt man nun in der erſten dieſer beiden Reihen alle Potenzen von $1-\sin x^2$ nach dem binomiſchen Lehrſatze, deſſen Anwendung hier verſtattet iſt, da nach der Vorausſetzung x zwiſchen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthalten, und folglich $\sin x^2$ kleiner als die Einheit iſt (Binomiſcher Lehrſatz. 42. i. d. Z.), und ordnet die Reihe nach Potenzen von $\sin x$; ſo erhält man als $(p+1)$tes Glied dieſer Reihe

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)_p + \alpha_2\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)_{p-1} + \alpha_4\left(\frac{\alpha-4}{2}\right)_{p-2} + \ldots + \alpha_{2p-2}\left(\frac{\alpha-2p+2}{2}\right)_1 + \alpha_{2p},$$

wenn man dieſe Größe noch mit $(-1)^p \cdot \sin x^{2p}$ multiplicirt. Hieraus findet man nun ferner ganz auf dieſelbe Art wie in (34. I.), daß für jedes reelle α und jedes zwiſchen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthaltene x

432. $$\cos\alpha x = 1 - \frac{\alpha^2}{2}\sin x^2 + \frac{\alpha^2(\alpha^2-4)}{2.3.4}\sin x^4 - \frac{\alpha^2(\alpha^2-4)(\alpha^2-16)}{2.3.4.5.6}\sin x^6 + \ldots$$

iſt.

Entwickelt man eben ſo in der zweiten der beiden obigen für $\cos\alpha x$ gefundenen Reihen alle Potenzen von $1 - \sin x^2$ nach dem binomiſchen Lehrſatze, und ordnet die Reihe nach Potenzen von $\sin x$; ſo erhält man als $(p+1)$tes Glied

$$\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)_p + \alpha_2\left(\frac{\alpha-3}{2}\right)_{p-1} + \alpha_4\left(\frac{\alpha-5}{2}\right)_{p-2} + \ldots + \alpha_{2p-2}\left(\frac{\alpha-2p+1}{2}\right)_1 + \alpha_{2p},$$

wenn man dieſe Größe noch mit dem Producte $(-1)^p . \cos x \sin x^{2p}$ multiplicirt, und findet hieraus nun ferner auf ganze ähnliche Art wie in (34. II.), daß für jedes reelle α und jedes zwiſchen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthaltene x

433. $$\cos\alpha x = \cos x \left\{ 1 - \frac{\alpha^2-1}{2}\sin x^2 + \frac{(\alpha^2-1)(\alpha^2-9)}{2.3.4}\sin x^4 - \frac{(\alpha^2-1)(\alpha^2-9)(\alpha^2-25)}{2.3.4.5.6}\sin x^6 + \ldots \right\}$$

iſt.

Nach (427.) iſt auf ähnliche Art

$$\sin\alpha x = \cos x \left\{ \alpha_1 (1-\sin x^2)^{\frac{\alpha-2}{2}} \sin x - \alpha_3 (1-\sin x^2)^{\frac{\alpha-4}{2}} \sin x^3 + \alpha_5 (1-\sin x^2)^{\frac{\alpha-6}{2}} \sin x^5 - \ldots\ldots \right\}$$

oder auch

$$\sin\alpha x = \alpha_1 (1-\sin x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} \sin x - \alpha_3 (1-\sin x^2)^{\frac{\alpha-3}{2}} \sin x^3 + \alpha_5 (1-\sin x^2)^{\frac{\alpha-5}{2}} \sin x^5 - \ldots\ldots$$

Entwickelt man nun in der erſten dieſer beiden Reihen wieder alle Potenzen von $1 - \sin x^2$ nach dem binomiſchen Lehrſatze, und ordnet die Reihe nach Potenzen von $\sin x$; ſo findet man als $(p+1)$ Glied derſelben

$$\alpha_1\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)_p + \alpha_3\left(\frac{\alpha-4}{2}\right)_{p-1} + \alpha_5\left(\frac{\alpha-6}{2}\right)_{p-2} + \ldots + \alpha_{2p-1}\left(\frac{\alpha-2p}{2}\right)_1 + \alpha_{2p+1},$$

wenn man dieſe Größe noch mit $(-1)^p . \cos x \sin x^{2p+1}$ multiplicirt, und ſchließt hieraus ferner auf ganz ähnliche Art wie in (34. I.), daß für jedes reelle α und jedes zwiſchen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthaltene x immer

434. $$\sin\alpha x = \cos x \left\{ \alpha \sin x - \frac{\alpha(\alpha^2-4)}{2.3}\sin x^3 + \frac{\alpha(\alpha^2-4)(\alpha^2-16)}{2.3.4.5}\sin x^5 - \frac{\alpha(\alpha^2-4)(\alpha^2-16)(\alpha^2-36)}{2.3.4.5.6.7}\sin x^7 + \ldots \right\}$$

iſt.

Entwickelt man eben ſo in der zweiten der beiden obigen für $\sin \alpha x$ angegebenen Reihen alle Potenzen von $1 - \sin x^2$ nach dem binomiſchen Lehrſatze, und ordnet die Reihe nach Potenzen von $\sin x$; ſo erhält man als $(p+1)$tes Glied derſelben

$$\alpha_1 \left(\frac{\alpha-1}{2}\right)_p + \alpha_3 \left(\frac{\alpha-3}{2}\right)_{p-1} + \alpha_5 \left(\frac{\alpha-5}{2}\right)_{p-2} + \ldots + \alpha_{2p-1} \left(\frac{\alpha-2p+1}{2}\right)_1 + \alpha_{2p+1},$$

wenn man dieſe Größe noch mit $(-1)^p \cdot \sin x^{2p+1}$ multiplicirt, und findet dann hieraus ferner auf ganz ähnliche Art wie in (34. II.), daß für jedes reelle α und jedes zwiſchen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthaltene x immer

435. $$\sin \alpha x = \alpha \sin x - \frac{\alpha(\alpha^2-1)}{2.3} \sin x^3 + \frac{\alpha(\alpha^2-1)(\alpha^2-9)}{2.3.4.5} \sin x^5 - \frac{\alpha(\alpha^2-1)(\alpha^2-9)(\alpha^2-25)}{2.3.4.5.6.7} \sin x^7 + \ldots\ldots$$

iſt.

IV. Potenzen der Sinus und Coſinus.

50. Wir nehmen jetzt wieder an, daß n eine poſitive ganze Zahl ſey und ſtellen uns die Aufgabe, die Potenzen $\cos x^n$ und $\sin x^n$ durch die Coſinus und Sinus der Vielfachen des Winkels oder Bogens x auszudrücken. Zu dem Ende ſetze man

$$u = \cos x + i \sin x,$$
$$v = \cos x - i \sin x;$$

ſo iſt, wie man durch Addition und Subtraction dieſer Gleichungen leicht findet,

$$2\cos x = u + v, \quad 2i \sin x = u - v.$$

Alſo iſt nach dem Binomial-Theorem für poſitive ganze Exponenten

$$2^n \cos x^n = (u+v)^n$$
$$= u^n + n_1 u^{n-1} v + n_2 u^{n-2} v^2 + \ldots + n_{n-1} u v^{n-1} + n_n v^n,$$

und, wenn man, welches offenbar verſtattet iſt, u und v gegen einander vertauſcht,

$$2^n \cos x^n = (v+u)^n$$
$$= v^n + n_1 v^{n-1} u + n_2 v^{n-2} u^2 + \ldots + n_{n-1} v u^{n-1} + n_n u^n.$$

Addirt man dieſe beiden Ausdrücke von $2^n \cos x^n$ zu einander; ſo erhält man

$$2^{n+1} \cos x^n = u^n + v^n + n_1 (u^{n-1} v + v^{n-1} u)$$
$$+ n_2 (u^{n-2} v^2 + v^{n-2} n^2)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$+ n_{n-1} (u v^{n-1} + v u^{n-1})$$
$$+ n_n (v^n + u^n).$$

Ein allgemeines Glied dieſer Reihe iſt

$$n_k (u^{n-k} v^k + v^{n-k} u^k),$$

wo k nicht größer als n iſt. Dieſes allgemeine Glied kann man auch auf den Ausdruck

$$n_k (uv)^k (u^{n-2k} + v^{n-2k}),$$

oder, weil

$$uv = \cos x^2 + \sin x^2 = 1$$

iſt, auf den noch einfachern Ausdruck

$$n_k (u^{n-2k} + v^{n-2k})$$

bringen.

Weil nun

$$n_{n-k} = \frac{n(n-1)..(k+1)}{1...(n-k)}, \quad n_k = \frac{n(n-1)..(n-k+1)}{1....k}$$

iſt; ſo iſt

$$\frac{n_k}{n_{n-k}} = \frac{1.2.3...n}{1.2.3...n} = 1,$$

folglich $n_k = n_{n-k}$.

Ferner iſt, wenn m eine beliebige poſitive ganze Zahl bezeichnet,

$$u^{-m} + v^{-m} = \frac{1}{u^m} + \frac{1}{v^m} = \frac{u^m + v^m}{(uv)^m} = u^m + v^m.$$

Nach (314.) iſt aber

$$u^m = (\cos x + i \sin x)^m = \cos mx + i \sin mx,$$
$$v^m = (\cos x - i \sin x)^m = \cos mx - i \sin mx;$$

alſo

$$u^m + v^m = 2 \cos mx.$$

I. Iſt nun n zuerſt eine gerade Zahl, ſo iſt

$$\begin{aligned} 2^{n+1} \cos x^n = \; & u^n + v^n + n_n (u^{-n} + v^{-n}) \\ & + n_1 (u^{n-2} + v^{n-2}) + n_{n-1} (u^{-(n-2)} + v^{-(n-2)}) \\ & + n_2 (u^{n-4} + v^{n-4}) + n_{n-2} (u^{-(n-4)} + v^{-(n-4)}) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + n_{\frac{1}{2}n-1} (u^2 + v^2) + n_{\frac{1}{2}n+1} (u^{-2} + v^{-2}) \\ & + n_{\frac{1}{2}n} (u^0 + v^0) \\ = \; & 2(u^n + v^n) + 2n_1 (u^{n-2} + v^{n-2}) + 2n_2 (u^{n-4} + v^{n-4}) + \ldots\ldots \\ & \ldots\ldots + 2n_{\frac{1}{2}n-1} (u^2 + v^2) + 2n_{\frac{1}{2}n}; \end{aligned}$$

alſo

436. $$2^{n-1} \cos x^n = \cos nx + n_1 \cos(n-2)x + n_2 \cos(n-4)x + \ldots \ldots + n_{\frac{1}{2}n-1} \cos 2x + \tfrac{1}{2} . n_{\frac{1}{2}n}.$$

II. Iſt ferner n eine ungerade Zahl, ſo iſt

$$\begin{aligned} 2^{n+1} \cos x^n = \; & u^n + v^n + n_n (u^{-n} + v^{-n}) \\ & + n_1 (u^{n-2} + v^{n-2}) + n_{n-1} (u^{-(n-2)} + v^{-(n-2)}) \\ & + n_2 (u^{n-4} + v^{n-4}) + n_{n-2} (u^{-(n-4)} + v^{-(n-4)}) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$+ n_{\frac{1}{2}(n-1)}(u+v) + n_{\frac{1}{2}(n+1)}(u^{-1}+v^{-1})$$

$$= 2(u^n+v^n) + 2n_1(u^{n-2}+v^{n-2}) + 2n_2(u^{n-4}+v^{n-4}) + \ldots$$

$$\ldots\ldots + 2n_{\frac{1}{2}(n-1)}(u+v)\,;$$

alſo

437. $2^{n-1}\cos x^n = \cos nx + n_1\cos(n-2)x + n_2\cos(n-4)x + \ldots\ldots + n_{\frac{1}{2}(n-1)}\cos x\,.$

Nach dem Obigen iſt ferner

$$2^n i^n \sin x^n = (u-v)^n$$

$$= u^n - n_1 u^{n-1}v + n_2 u^{n-2}v^2 - n_3 u^{n-3}v^3 + \ldots + (-1)^n n_n v^n\,.$$

I. Iſt nun wieder zuerſt n eine gerade Zahl; ſo iſt, weil nach (311.) $i^n = (-1)^{\frac{n}{2}}$ iſt,

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\,.\,2^n\sin x^n = (u-v)^n$$

$$= u^n - n_1 u^{n-1}v + n_2 u^{n-2}v^2 - \ldots - n_{n-1}uv^{n-1} + n_n v^n\,.$$

Weil aber in dieſem Falle $(u-v)^n = (v-u)^n$ iſt; ſo kann man u und v gegen einander vertauſchen, wodurch man

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\,.\,2^n\sin x^n = (v-u)^n$$

$$= v^n - n_1 v^{n-1}u + n_2 v^{n-2}u^2 - \ldots - n_{n-1}vu^{n-1} + n_n u^n$$

erhält. Addirt man nun die beiden für $(-1)^{\frac{n}{2}}2^n\sin x^n$ gefundenen Ausdrucke zu einander; ſo ergiebt ſich

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{n}{2}}2^{n+1}\sin x^n = u^n + v^n &- n_1(u^{n-1}v + v^{n-1}u)\\ &+ n_2(u^{n-2}v^2 + v^{n-2}u^2)\\ &- n_3(u^{n-3}v^3 + v^{n-3}u^3)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &- n_{n-1}(uv^{n-1} + vu^{n-1})\\ &+ n_n(v^n + u^n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= \quad & u^n + v^n && + n_n(u^{-n}+v^{-n})\\ & - n_1(u^{n-2}+v^{n-2}) && - n_{n-1}(u^{-(n-2)}+v^{-(n-2)})\\ & + n_2(u^{n-4}+v^{n-4}) && + n_{n-2}(u^{-(n-4)}+v^{-(n-4)})\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

$$+ (-1)^{\frac{n-2}{2}} n_{\frac{1}{2}n-1}(u^2+v^2) + (-1)^{\frac{n-2}{2}} n_{\frac{1}{2}n+1}(u^{-2}+v^{-2})$$

$$+ (-1)^{\frac{n}{2}} n_{\frac{1}{2}n}(u^0+v^0)$$

$$= 2(u^n+v^n) - 2n_1(u^{n-2}+v^{n-2}) + 2n_2(u^{n-4}+v^{n-4}) - \ldots$$

$$\ldots + 2(-1)^{\frac{n-2}{2}} n_{\frac{1}{2}n-1}(u^2+v^2) + 2(-1)^{\frac{n}{2}} n_{\frac{1}{2}n}\,;$$

alſo

438. $(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot 2^{n-1} \sin x^n = \cos nx - n_1 \cos(n-2)x + n_2 \cos(n-4)x - \ldots$

$$\ldots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} n_{\frac{1}{2}n-1} \cos 2x + \tfrac{1}{2}(-1)^{\frac{n}{2}} n_{\frac{1}{2}n}\,.$$

II. Wenn n eine ungerade Zahl iſt; ſo iſt, weil $i^n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} i$ iſt,

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} i \cdot 2^n \sin x^n = (u-v)^n$$
$$= u^n - n_1 u^{n-1} v + n_2 u^{n-2} v^2 - \ldots + n_{n-1} u v^{n-1} - n_n v^n\,.$$

Weil nun in dieſem Falle

$$(u-v)^n = -(v-u)^n$$

iſt; ſo iſt auch

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} i \cdot 2^n \sin x^n = -(v-u)^n$$
$$= -v^n + n_1 v^{n-1} u - n_2 v^{n-2} u^2 + \ldots - n_{n-1} v u^{n-1} + n_n u^n\,,$$

und folglich, wenn man die beiden Ausdrücke von $(-1)^{\frac{n-1}{2}} i \cdot 2^n \sin x^n$ zu einander addirt,

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{n-1}{2}} i \cdot 2^{n+1} \sin x^n = u^n - v^n & - n_1 (u^{n-1} v - v^{n-1} u) \\ & + n_2 (u^{n-2} v^2 - v^{n-2} u^2) \\ & - n_3 (u^{n-3} v^3 - v^{n-3} u^3) \\ & \quad \ldots\ldots\ldots \\ & + n_{n-1} (u v^{n-1} - v u^{n-1}) \\ & - n_n (v^n - u^n)\,.\end{aligned}$$

Ein allgemeines Glied dieſer Reihe, ohne Rückſicht auf ſein Vorzeichen, iſt

$$n_k (u^{n-k} v^k - v^{n-k} u^k)\,,$$

wo k nicht größer als n iſt, und es erhellet nun wieder leicht, daß man dieſes allgemeine Glied auch auf den Ausdruck

$$n_k (uv)^k (u^{n-2k} - v^{n-2k})\,,$$

oder, weil

$$uv = \cos x^2 + \sin x^2 = 1$$

iſt, auf den noch einfachern Ausdruck

$$n_k (u^{n-2k} - v^{n-2k})$$

bringen kann. Alſo iſt

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{n-1}{2}} i \cdot 2^{n+1} \sin x^n = u^n - v^n \quad & - n_n (u^{-n} - v^{-n}) \\ - n_1 (u^{n-2} - v^{n-2}) & + n_{n-1} (u^{-(n-2)} - v^{-(n-2)}) \\ + n_2 (u^{n-4} - v^{n-3}) & - n_{n-2} (u^{-(n-4)} - v^{-(n-4)}) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n_{\frac{1}{2}(n-1)} (u-v) & - (-1)^{\frac{n-1}{2}} n_{\frac{1}{2}(n+1)} (u^{-1} - v^{-1})\,.\end{aligned}$$

Nun iſt aber

$$u^{-m} - v^{-m} = \frac{1}{u^m} - \frac{1}{v^m} = - \frac{u^m - v^m}{(uv)^m} = -(u^m - v^m).$$

Alſo iſt

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} . i . 2^{n+1} \sin x^n = 2(u^n - v^n) - 2n_1(u^{n-2} - v^{n-2})$$
$$+ 2n_2(u^{n-4} - v^{n-4}) - \ldots + 2(-1)^{\frac{n-1}{2}} n_{\frac{1}{2}(n-1)}(u-v).$$

Weil nun ferner nach (314.)

$$u^m = (\cos x + i \sin x)^m = \cos mx + i \sin mx,$$
$$v^m = (\cos x - i \sin x)^m = \cos mx - i \sin mx$$

iſt; ſo iſt

$$u^m - v^m = 2 i \sin mx,$$

und folglich, wenn man zugleich auf beiden Seiten mit 4i dividirt:

439. $$(-1)^{\frac{n-1}{2}} . 2^{n-1} \sin x^n = \sin nx - n_1 \sin(n-2)x + n_2 \sin(n-4)x - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} . n_{\frac{1}{2}(n-1)} \sin x.$$

Mittelſt der vier merkwürdigen Formeln (436.), (437.), (438.) und (439.), die wir nachher noch auf eine andere Art ohne Beihülfe der imaginären Größen beweiſen werden, kann man alſo immer, wenn n eine poſitive ganze Zahl iſt, die Potenzen $\cos x^n$ und $\sin x^n$ durch die Coſinus und Sinus der Vielfachen des Bogens oder Winkels x ausdrücken, welches die vorgelegte Aufgabe war. Man erhält mittelſt dieſer Formeln leicht:

$$\cos x = \cos x$$
$$2\cos x^2 = \cos 2x + 1$$
$$4\cos x^3 = \cos 3x + 3\cos x$$
$$8\cos x^4 = \cos 4x + 4\cos 2x + 3$$
$$16\cos x^5 = \cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x$$
$$32\cos x^6 = \cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10$$
$$64\cos x^7 = \cos 7x + 7\cos 5x + 21\cos 3x + 35\cos x$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

und

$$\sin x = \sin x$$
$$2\sin x^2 = -\cos 2x + 1$$
$$4\sin x^3 = -\sin 3x + 3\sin x$$
$$8\sin x^4 = \cos 4x - 4\cos 2x + 3$$
$$16\sin x^5 = \sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x$$
$$32\sin x^6 = -\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10$$
$$64\sin x^7 = -\sin 7x + 7\sin 5x - 21\sin 3x + 35\sin x$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

51. Wir wollen nun überhaupt die beiden Reihen

$\cos \alpha x + \alpha_1 \cos(\alpha - 2)x + \alpha_2 \cos(\alpha - 4)x + \alpha_3 \cos(\alpha - 6)x + \ldots\ldots,$

$\sin \alpha x + \alpha_1 \sin(\alpha - 2)x + \alpha_2 \sin(\alpha - 4)x + \alpha_3 \sin(\alpha - 6)x + \ldots\ldots,$

wo α eine beliebige poſitive oder negative Zahl bezeichnet, für die Werthe von α, für welche dieſelben convergiren, zu ſummiren ſuchen. Nach dem Artikel Binomiſcher Lehrſatz (42.) i. d. Z. iſt die Reihe

$$1, -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_4, \ldots (-1)^n . \alpha^n, \ldots.$$

für jedes poſitive α convergent. Da nun, wie leicht erhellet,

$$\alpha_{n+1} = -\alpha_n . \frac{n-\alpha}{n+1},$$

$$\alpha_{n+2} = \alpha_n . \frac{n-\alpha}{n+1} . \frac{n+1-\alpha}{n+2},$$

$$\alpha_{n+3} = -\alpha_n . \frac{n-\alpha}{n+1} . \frac{n+1-\alpha}{n+2} . \frac{n+2-\alpha}{n+3},$$

$$\alpha_{n+4} = \alpha_n . \frac{n-\alpha}{n+1} . \frac{n+1-\alpha}{n+2} . \frac{n+2-\alpha}{n+3} . \frac{n+3-\alpha}{n+4},$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

iſt; ſo iſt

$$(-1)^{n+1} . \alpha_{n+1} = (-1)^n . \alpha_n . \frac{n-\alpha}{n+1},$$

$$(-1)^{n+2} . \alpha_{n+2} = (-1)^n . \alpha_n . \frac{n-\alpha}{n+1} . \frac{n+1-\alpha}{n+2},$$

$$(-1)^{n+3} . \alpha_{n+3} = (-1)^n . \alpha_n . \frac{n-\alpha}{n+1} . \frac{n+1-\alpha}{n+2} . \frac{n+2-\alpha}{n+3},$$

$$(-1)^{n+4} . \alpha_{n+4} = (-1)^n . \alpha_n . \frac{n-\alpha}{n+1} . \frac{n+1-\alpha}{n+2} . \frac{n+2-\alpha}{n+3} . \frac{n+3-\alpha}{n+4},$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

und die Glieder

$$(-1^n . \alpha_n, (-1)^{n+1} . \alpha_{n+1}, (-1)^{n+2} . \alpha_{n+2}, (-1)^{n+3} . \alpha_{n+3}, \ldots\ldots.$$

unſerer obigen Reihe haben alſo, wenn, wie wir von jetzt an immer annehmen wollen, $n > \alpha$ iſt, ſämmtlich einerlei Vorzeichen. Da nun die Reihe

$$1, -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_4, \ldots. (-1)^n . \alpha_n, \ldots\ldots$$

für jedes poſitive α convergirt; ſo convergirt natürlich auch die Reihe

$$(-1)^n . \alpha_n, (-1)^{n+1} . \alpha_{n+1}, (-1)^{n+2} . \alpha_{n+2}, (-1)^{n+3} . \alpha_{n+3}, \ldots\ldots$$

für jedes poſitive α, indem die letztere Reihe offenbar eine endliche beſtimmte Summe hat, die man erhält, wenn man von der Summe der erſtern Reihe, welche nach dem Artikel Binomiſcher Lehrſatz i. d. Z. = 0 iſt, die endliche beſtimmte Größe

$$1 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \ldots + (-1)^{n-1} . \alpha_{n-1}$$

abzieht. Die Glieder der convergirenden Reihe

$(-1)^n . \alpha_n$, $(-1)^{n+1} . \alpha_{n+1}$, $(-1)^{n+2} . \alpha_{n+2}$, $(-1)^{n+3} . \alpha_{n+3}$, ...

haben, wie vorher gezeigt worden iſt, ſämmtlich einerlei Vorzeichen, und ihre abſoluten Werthe, die mit den abſoluten Werthen der Coefficienten α_n, α_{n+1}, α_{n+2}, α_{n+3}, ..., welche wir durch

$$(\alpha_n), (\alpha_{n+1}), (\alpha_{n+2}), (\alpha_{n+3}), ...$$

bezeichnen wollen, offenbar einerlei ſind, bilden alſo natürlich eine convergente Reihe, wenn α poſitiv iſt. Bezeichnen wir nun die abſoluten Werthe der Glieder der beiden folgenden Reihen:

$$\cos(\alpha-2n)x, \ \cos(\alpha-2(n+1))x, \ \cos(\alpha-2(n+2))x, \ ..... ;$$
$$\sin(\alpha-2n)x, \ \sin(\alpha-2(n+1))x, \ \sin(\alpha-2(n+2))x, \ .....$$

durch

$$C_n, C_{n+1}, C_{n+2}, C_{n+3}, ... ;$$
$$S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, S_{n+3}, ... ;$$

ſo ſind nach dem im Artikel Convergenz der Reihen (5.) i. d. Z. bewieſenen Satze auch die Reihen

$$(\alpha_n) C_n, (\alpha_{n+1}) C_{n+1}, (\alpha_{n+2}) C_{n+2}, (\alpha_{n+3}) C_{n+3}, ... ;$$
$$(\alpha_n) S_n, (\alpha_{n+1}) S_{n+1}, (\alpha_{n+2}) S_{n+2}, (\alpha_{n+3}) S_{n+3}, ...$$

für jedes poſitive α convergent. Alſo convergiren nach dem in demſelben Artikel (13.) bewieſenen Satze auch die Reihen

$$\alpha_n \cos(\alpha-2n)x, \ \alpha_{n+1}\cos(\alpha-2(n+1))x, \ \alpha_{n+2}\cos(\alpha-2(n+2))x, ...,$$
$$\alpha_n \sin(\alpha-2n)x, \ \alpha_{n+1}\sin(\alpha-2(n+1))x, \ \alpha_{n+2}\sin(\alpha-2(n+2))x, ...$$

für jedes poſitive α, und bleiben, wie ſich aus dem Vorhergehenden unmittelbar ergiebt, auch convergent, wenn man für jedes Glied ſeinen abſoluten Werth ſetzt, oder, wie man gewöhnlich zu ſagen pflegt, jedes Glied auf ſeinen abſoluten Werth reducirt. Hieraus folgt nun auf der Stelle, daß auch die beiden gegebenen Reihen

$$\cos\alpha x, \ \alpha_1\cos(\alpha-2)x, \ \alpha_2\cos(\alpha-4)x, \ \alpha_3\cos(\alpha-6)x, \ ..... ;$$
$$\sin\alpha x, \ \alpha_1\sin(\alpha-2)x, \ \alpha_2\sin(\alpha-4)x, \ \alpha_3\sin(\alpha-6)x, \ ......$$

für jedes poſitive α convergent ſind und convergent bleiben, wenn man jedes Glied auf ſeinen abſoluten Werth reducirt. Wenn α negativ iſt, ſo läßt ſich nicht im Allgemeinen behaupten, daß die beiden gegebenen Reihen convergent ſind und convergent bleiben, wenn man jedes Glied auf ſeinen abſoluten Werth reducirt, weshalb wir alſo im Folgenden immer α als poſitiv annehmen wollen. Bezeichnen wir nun für ein poſitives α die Summen der beiden gegebenen Reihen durch $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$; ſo iſt

$$f(\alpha)=\cos\alpha x+\alpha_1\cos(\alpha-2)x+\alpha_2\cos(\alpha-4)x+\alpha_3\cos(\alpha-6)x+...,$$
$$\varphi(\alpha)=\sin\alpha x+\alpha_1\sin(\alpha-2)x+\alpha_2\sin(\alpha-4)x+\alpha_3\sin(\alpha-6)x+...,$$

und eben ſo, wenn auch γ poſitiv iſt,

$$f(\gamma)=\cos\gamma x+\gamma_1\cos(\gamma-2)x+\gamma_2\cos(\gamma-4)x+\gamma_3\cos(\gamma-6)x+...,$$
$$\varphi(\gamma)=\sin\gamma x+\gamma_1\sin(\gamma-2)x+\gamma_2\sin(\gamma-4)x+\gamma_3\sin(\gamma-6)x+....$$

Da alle dieſe Reihen für jedes poſitive α und γ convergent ſind,

und convergent bleiben, wenn man jedes ihrer Glieder auf ſeinen abſoluten Werth reducirt; ſo kann man auf dieſelben die im Artikel Convergenz der Reihen (19.) und (20.) i. d. Z. bewieſenen Sätze anwenden, und erhält mittelſt derſelben leicht:

$$f(\alpha).f(\gamma) - \varphi(\alpha).\varphi(\gamma)$$
$$= \cos\alpha x \cos\gamma x + \alpha_1 \cos(\alpha-2)x \cos\gamma x + \alpha_2 \cos(\alpha-4)x \cos\gamma x + \ldots\ldots$$
$$+ \gamma_1 \cos\alpha x \cos(\gamma-2)x + \alpha_1\gamma_1 \cos(\alpha-2)x \cos(\gamma-2)x + \ldots\ldots$$
$$+ \gamma_2 \cos\alpha x \cos(\gamma-4)x + \ldots\ldots$$
$$- \sin\alpha x \sin\gamma x - \alpha_1 \sin(\alpha-2)x \sin\gamma x - \alpha_2 \sin(\alpha-4)x \sin\gamma x - \ldots\ldots$$
$$- \gamma_1 \sin\alpha x \sin(\gamma-2)x - \alpha_1\gamma_1 \sin(\alpha-2)x \sin(\gamma-2)x - \ldots\ldots$$
$$- \gamma_2 \sin\alpha x \sin(\gamma-4)x - \ldots\ldots$$

$$\varphi(\alpha).f(\gamma) + f(\alpha).\varphi(\gamma)$$
$$= \sin\alpha x \cos\gamma x + \alpha_1 \sin(\alpha-2)x \cos\gamma x + \alpha_2 \sin(\alpha-4)x \cos\gamma x + \ldots\ldots$$
$$+ \gamma_1 \sin\alpha x \cos(\gamma-2)x + \alpha_1\gamma_1 \sin(\alpha-2)x \cos(\gamma-2)x + \ldots\ldots$$
$$+ \gamma_2 \sin\alpha x \cos(\gamma-4)x + \ldots\ldots$$
$$+ \cos\alpha x \sin\gamma x + \alpha_1 \cos(\alpha-2)x \sin\gamma x + \alpha_2 \cos(\alpha-4)x \sin\gamma x + \ldots\ldots$$
$$+ \gamma_1 \cos\alpha x \sin(\gamma-2)x + \alpha_1\gamma_1 \cos(\alpha-2)x \sin(\gamma-2)x + \ldots\ldots$$
$$+ \gamma_2 \cos\alpha x \sin(\gamma-4)x + \ldots\ldots$$

und folglich nach (41.) und (42.)

$$f(\alpha).f(\gamma) - \varphi(\alpha).\varphi(\gamma)$$
$$= \cos(\alpha+\gamma)x$$
$$+ (\alpha_1 + \gamma_1)\cos(\alpha+\gamma-2)x$$
$$+ (\alpha_2 + \alpha_1\gamma_1 + \gamma_2)\cos(\alpha+\gamma-4)x$$
$$+ (\alpha_3 + \alpha_2\gamma_1 + \alpha_1\gamma_2 + \gamma_3)\cos(\alpha+\gamma-6)x$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi(\alpha).f(\gamma) + f(\alpha).\varphi(\gamma)$$
$$= \sin(\alpha+\gamma)x$$
$$+ (\alpha_1 + \gamma)_1)\sin(\alpha+\gamma-2)x$$
$$+ (\alpha_2 + \alpha_1\gamma_1 + \gamma_2)\sin(\alpha+\gamma-4)x$$
$$+ (\alpha_3 + \alpha_2\gamma_1 + \alpha_1\gamma_2 + \gamma_3)\sin(\alpha+\gamma-6)x$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

alſo nach dem im Artikel Binomiſcher Lehrſatz (10.) i. d. Z. bewieſenen Satze von den Binomial-Coefficienten:

$$f(\alpha).f(\gamma) - \varphi(\alpha).\varphi(\gamma)$$
$$= \cos(\alpha+\gamma)x + (\alpha+\gamma)_1 \cos(\alpha+\gamma-2)x + (\alpha+\gamma)_2 \cos(\alpha+\gamma-4)x + \ldots\ldots,$$
$$\varphi(\alpha).f(\gamma) + f(\alpha).\varphi(\gamma)$$
$$= \sin(\alpha+\gamma) + (\alpha+\gamma)_1 \sin(\alpha+\gamma-2)x + (\alpha+\gamma)_2 \sin(\alpha+\gamma-4)x + \ldots\ldots;$$

folglich für jedes poſitive α und γ:

440. $f(\alpha).f(\gamma) - \varphi(\alpha).\varphi(\gamma) = f(\alpha+\gamma)$,

441. $\varphi(\alpha).f(\gamma) + f(\alpha).\varphi(\gamma) = \varphi(\alpha+\gamma)$.

Setzt man $\alpha = \gamma$; ſo erhält man für jedes poſitive α:

442. $f(2\alpha) = \{f(\alpha)\}^2 - \{\varphi(\alpha)\}^2$,

$$443. \quad \varphi(2\alpha) = 2f(\alpha).\varphi(\alpha)\,,$$

oder auch für jedes poſitive α:

$$444. \quad f(\alpha) = \{f(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 - \{\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2;$$

$$445. \quad \varphi(\alpha) = 2f(\tfrac{1}{2}\alpha).\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\,.$$

Auch iſt, wie auf der Stelle erhellet,

$$446. \quad f(0) = 1,\ \varphi(0) = 0\,.$$

Ferner iſt

$$f(1) = \cos x + \cos(-x) = \cos x + \cos x = 2\cos x\,,$$

$$\varphi(1) = \sin x + \sin(-x) = \sin x - \sin x = 0\,.$$

Setzen wir nun in den Gleichungen (440.) und (441.) $\alpha = 1$, $\gamma = 1$; ſo erhalten wir

$$f(2) = 2\cos x.2\cos x = (2\cos x)^2,\ \varphi(2) = 0\,.$$

Setzen wir ferner in denſelben Gleichungen $\alpha = 1$, $\gamma = 2$; ſo ergiebt ſich

$$f(3) = 2\cos x.(2\cos x)^2 = (2\cos x)^3,\ \varphi(3) = 0\,.$$

Setzen wir eben ſo in denſelben Gleichungen $\alpha = 1$, $\gamma = 3$; ſo ergiebt ſich

$$f(4) = 2\cos x.(2\cos x)^3 = (2\cos x)^4,\ \varphi(4) = 0\,.$$

Wie man auf dieſe Art weiter gehen kann, iſt klar, und wir ſchließen alſo hieraus, daß für jedes poſitive ganze α

$$f(\alpha) = (2\cos x)^\alpha,\ \varphi(\alpha) = 0\,,$$

d. i. für jedes poſitive ganze α

$$447. \quad (2\cos x)^\alpha = \cos\alpha x + \alpha_1\cos(\alpha-2)x + \alpha_2\cos(\alpha-4)x + \ldots,$$

$$448. \quad 0 = \sin\alpha x + \alpha_1\sin(\alpha-2)x + \alpha_2\sin(\alpha-4)x + \ldots$$

iſt. Daß ſich aus der Gleichung (447.) leicht die Gleichungen (436.) und (437.) ableiten laſſen würden, wird ohne weitere Erläuterung auf der Stelle erhellen, ſo daß wir alſo hier zu den beiden in Rede ſtehenden Gleichungen noch auf eine ganz andere Art wie oben, und zwar ohne Beihülfe der imaginären Quantitäten, gelangt ſind. Die Gleichung (448.) haben wir oben noch nicht gefunden, und dieſe Gleichung iſt daher als ein neues Reſultat zu betrachten.

Wir wiſſen alſo, daß für jedes poſitive ganze α

$$f(\alpha) = (2\cos x)^\alpha,\ \varphi(\alpha) = 0$$

iſt. Nach (445.) iſt aber

$$\varphi(\alpha) = 2f(\tfrac{1}{2}\alpha).\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\,:$$

Alſo iſt

$$2f(\tfrac{1}{2}\alpha).\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = 0\,,$$

und es iſt folglich entweder $f(\frac{1}{2}\alpha) = 0$, oder $\varphi(\frac{1}{2}\alpha) = 0$,

oder $f(\frac{1}{2}\alpha)$ und $\varphi(\frac{1}{2}\alpha)$ ſind beide $= 0$. Wäre aber $f(\frac{1}{2}\alpha) = 0$; ſo wäre, weil nach (444.)

$$f(\alpha) = \{f(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 - \{\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2$$

iſt,

$$f(\alpha) = -\{\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2,$$

und $f(\alpha)$ wäre folglich entweder $= 0$ oder eine negative Größe. Iſt aber x zwiſchen $(2k - \frac{1}{2})\pi$ und $(2k + \frac{1}{2})\pi$, wo k eine beliebige poſitive oder negative ganze Zahl bezeichnet, enthalten, d. i. $x > (2k - \frac{1}{2})\pi$, $x < (2k + \frac{1}{2})\pi$; ſo iſt $\cos x$ poſitiv und nicht $= 0$; alſo iſt für ſolche Werthe von x auch $f(\alpha) = (2\cos x)^\alpha$ weder null, noch negativ, und es kann folglich für ſolche Werthe von x die Größe $f(\frac{1}{2}\alpha)$ nicht $= 0$ ſeyn, woraus nach dem Obigen unmittelbar

$$\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = 0$$

folgt, immer unter der Vorausſetzung, daß x zwiſchen $(2k - \frac{1}{2})\pi$ und $(2k + \frac{1}{2})\pi$ enthalten iſt. Da nun, wie wir wiſſen,

$$f(\alpha) = \{f(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 - \{\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2$$

und $\varphi(\frac{1}{2}\alpha) = 0$ iſt; ſo iſt

$$f(\alpha) = \{f(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2,$$

woraus auf der Stelle

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \pm \{f(\alpha)\}^{\frac{1}{2}} = \pm (2\cos x)^{\frac{\alpha}{2}}$$

folgt, vorausgeſetzt, daß x zwiſchen $(2k - \frac{1}{2})\pi$ und $(2k + \frac{1}{2})\pi$ enthalten iſt. Hier entſteht nun die Frage, ob man in vorſtehender Gleichung das obere oder das untere Zeichen zu nehmen hat. Um dieſe Frage zu beantworten, betrachte man $f(\frac{1}{2}\alpha)$ als Function von x und ſetze in dieſer Beziehung auch $f(\frac{1}{2}\alpha) = F(x)$. Nun laſſe man ſich x von $(2k - \frac{1}{2})\pi$ bis $(2k + \frac{1}{2})\pi$ ſtetig verändern, denke ſich auf ähnliche Art wie in (47.) zwei einander unendlich nahe liegende Werthe $\xi - i$ und $\xi + i$ von x in dem angegebenen Intervall, und nehme an, daß mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$F(\xi - i) = \pm \{2\cos(\xi - i)\}^{\frac{\alpha}{2}},\ F(\xi + i) = \mp \{2\cos(\xi + i)^{\frac{\alpha}{2}}\}$$

ſeyn könnte, wobei man nicht zu überſehen hat, daß nach dem Obigen in dem in Rede ſtehenden Intervall immer

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = F(x) = \pm (2\cos x)^{\frac{\alpha}{2}}$$

iſt, und daß $\cos(\xi - i)$ und $\cos(\xi + i)$ beide poſitiv ſind. Alſo hätten $F(\xi - i)$ und $F(\xi + i)$ entgegengeſetzte Vorzeichen, und es müßte folglich, wegen der Stetigkeit der Function $F(x)$ in dem angegebenen Intervall $F(\xi) = 0$ ſeyn. Nun iſt aber nach dem Obigen

$$F(\xi) = \pm (2\cos\xi)^{\frac{\alpha}{2}};$$

alſo müßte nothwendig auch $\cos \xi = 0$ ſeyn, welches ungereimt iſt, da ξ zwiſchen $(2k - \frac{1}{2})\pi$ und $(2k + \frac{1}{2})\pi$ liegt. Alſo kann mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander nie

$$F(\xi - i) = \pm \{2\cos(\xi - i)\}^{\frac{\alpha}{2}},\ F(\xi + i) = \mp \{2\cos(\xi + i)\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

ſeyn, ſondern es muß immer mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$F(\xi - i) = \pm \{2\cos(\xi - i)\}^{\frac{\alpha}{2}},\ F(\xi + i) = \pm \{2\cos(\xi + i)\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

ſeyn. Hieraus ſieht man, daß $F(x)$, wenn man ſich x von $(2k - \frac{1}{2})\pi$ bis $(2k + \frac{1}{2})\pi$ ſtetig verändern läßt, mit $(2\cos x)^{\frac{\alpha}{2}}$, dieſe Größe immer poſitiv genommen, entweder immer einerlei, oder immer entgegengeſetztes Vorzeichen hat. Iſt nun $k = 0$, d. h. x zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten; ſo liegt in dieſem Intervall der Werth 0 von x. Für $x = 0$ iſt aber

$$F(0) = 1 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)_1 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)_2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)_3 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)_4 + \ldots,$$

d. i., weil $\frac{\alpha}{2}$ poſitiv iſt, nach dem Artikel Binomiſcher Lehrſatz (42.) i. d. Z.

$$F(0) = 2^{\frac{\alpha}{2}},$$

woraus ſich ergiebt, daß für $x = 0$ nicht

$$F(x) = -(2\cos x)^{\frac{\alpha}{2}},$$

ſondern

$$F(x) = (2\cos x)^{\frac{\alpha}{2}}$$

iſt. Daher iſt nach dem Vorhergehenden für jedes zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegende x

$$F(x) = (2\cos x)^{\frac{\alpha}{2}},$$

oder, was daſſelbe iſt,

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = (2\cos x)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Iſt alſo α eine poſitive ganze Zahl, ſo iſt für jedes zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegende x

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = (2\cos x)^{\frac{\alpha}{2}},\ \varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = 0.$$

Nach (445.) iſt aber

$$\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = 2f(\tfrac{1}{4}\alpha) \cdot \varphi(\tfrac{1}{4}\alpha).$$

Alſo iſt

$$2f(\tfrac{1}{4}\alpha) \cdot \varphi(\tfrac{1}{4}\alpha) = 0,$$

und es iſt folglich entweder $f(\frac{1}{4}\alpha) = 0$, oder $\varphi(\frac{1}{4}\alpha) = 0$,

oder $f(\frac{1}{4}\alpha)$ und $\varphi(\frac{1}{4}\alpha)$ ſind beide $= 0$. Wäre aber $f(\frac{1}{4}\alpha) = 0$; ſo wäre, weil nach (444.)

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \{f(\tfrac{1}{4}\alpha)\}^2 - \{\varphi(\tfrac{1}{4}\alpha)\}^2$$

iſt,

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = -\{\varphi(\tfrac{1}{4}\alpha)\}^2,$$

und $f(\frac{1}{2}\alpha)$ wäre folglich entweder $= 0$ oder eine negative Größe. Da aber

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = (2\cos x)^{\frac{\alpha}{2}}$$

und x zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten iſt; ſo iſt keins von beiden der Fall, und es kann folglich $f(\frac{1}{4}\alpha)$ nicht $= 0$ ſeyn, woraus ſich nach dem Obigen unmitelbar

$$\varphi(\tfrac{1}{4}\alpha) = 0$$

ergiebt. Da nun, wie wir wiſſen,

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \{f(\tfrac{1}{4}\alpha)\}^2 - \{\varphi(\tfrac{1}{4}\alpha)\}^2$$

und $\varphi(\frac{1}{4}\alpha) = 0$ iſt; ſo iſt

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \{f(\tfrac{1}{4}\alpha)\}^2;$$

woraus auf der Stelle

$$f(\tfrac{1}{4}\alpha) = \pm\{f(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^{\frac{1}{2}} = \pm(2\cos x)^{\frac{\alpha}{4}}$$

folgt, und nun wieder die Frage entſteht, welches Zeichen man in dieſer Gleichung zu nehmen hat. Um dieſe Frage zu beantworten, betrachte man $f(\frac{1}{4}\alpha)$ als Function von x und ſetze in dieſer Beziehung $f(\frac{1}{4}\alpha) = F_1(x)$. Nun laſſe man x ſich von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ ſtetig verändern, denke ſich wieder zwei unendlich nahe bei einander liegende Werthe $\xi - i$ und $\xi + i$ von x in dem angegebenen Intervall, und nehme an, daß mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$F_1(\xi - i) = \pm\{2\cos(\xi - i)\}^{\frac{\alpha}{4}},\ F_1(\xi + i) = \mp\{2\cos(\xi + i)\}^{\frac{\alpha}{4}}$$

ſeyn könnte, wobei man nicht zu überſehen hat, daß nach dem Obigen in dem in Rede ſtehenden Intervall immer

$$f(\tfrac{1}{4}\alpha) = F_1(x) = \pm(2\cos x)^{\frac{\alpha}{4}}$$

iſt, und daß $\cos(\xi - i)$ und $\cos(\xi + i)$ beide poſitiv ſind. Alſo hätten $F_1(\xi - i)$ und $F_1(\xi + i)$ entgegengeſetzte Vorzeichen, und es müßte folglich $F_1(\xi) = 0$ ſeyn. Nun iſt aber nach dem Obigen

$$F_1(\xi) = \pm(2\cos\xi)^{\frac{\alpha}{4}};$$

alſo müßte nothwendig auch $\cos\xi = 0$ ſeyn, welches ungereimt iſt, da ξ zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt. Folglich kann mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander nie

$$F_1(\xi-i) = \pm \{2\cos(\xi-i)\}^{\frac{\alpha}{4}},\ F_1(\xi+i) = \mp \{2\cos(\xi+i)\}^{\frac{\alpha}{4}}$$

ſeyn, ſondern es muß mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander immer

$$F_1(\xi-i) = \pm \{2\cos(\xi-i)\}^{\frac{\alpha}{4}},\ F_1(\xi+i) = \pm \{2\cos(\xi+i)\}^{\frac{\alpha}{4}}$$

ſeyn. Hieraus ſieht man, daß $F_1(x)$, wenn man ſich x von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ ſtetig verändern läßt, mit $(2\cos x)^{\frac{\alpha}{4}}$, dieſe Größe immer poſitiv genommen, entweder immer einerlei oder immer entgegengeſetztes Vorzeichen hat. Für $x=0$ iſt nun

$$F_1(0) = 1 + \left(\frac{\alpha}{4}\right)_1 + \left(\frac{\alpha}{4}\right)_2 + \left(\frac{\alpha}{4}\right)_3 + \left(\frac{\alpha}{4}\right)_4 + \ldots\ldots,$$

d. i., weil $\frac{\alpha}{4}$ poſitiv iſt, nach dem Artikel Binomiſcher Lehrſatz (42.) i. d. Z.

$$F_1(0) = 2^{\frac{\alpha}{4}},$$

woraus ſich ergiebt, daß für $x=0$ nicht

$$F_1(x) = -(2\cos x)^{\frac{\alpha}{4}},$$

ſondern

$$F_1(x) = (2\cos x)^{\frac{\alpha}{4}}$$

iſt. Daher iſt nach dem Vorhergehenden für jedes zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegende x

$$F_1(x) = (2\cos x)^{\frac{\alpha}{4}},$$

oder, was daſſelbe iſt,

$$f(\tfrac{1}{4}\alpha) = (2\cos x)^{\frac{\alpha}{4}}.$$

Iſt alſo α eine poſitive ganze Zahl, ſo iſt für jedes zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegende x

$$f(\tfrac{1}{4}\alpha) = (2\cos x)^{\frac{\alpha}{4}},\ \varphi(\tfrac{1}{4}\alpha) = 0.$$

Wie man auf die obige Weiſe immer weiter gehen kann, bedarf keiner Erläuterung mehr, und man ſchließt alſo aus dem Vorhergehenden ſehr leicht, daß für jedes poſitive ganze α und n, und für jedes zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegende x immer

$$f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = (2\cos x)^{\frac{\alpha}{2^n}},\ \varphi\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = 0$$

iſt, woraus ſich dann ferner durch eine der in (47.) gebrauchten ganz ähnliche Schlußweiſe ſehr leicht ergiebt, daß für jedes beliebige poſitive α und jedes zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthaltene x

449. $f(\alpha) = (2\cos x)^{\alpha}, \ \varphi(\alpha) = 0$,

oder

450. $(2\cos x)^{\alpha} = \cos\alpha x + \alpha_1 \cos(\alpha-2)x + \alpha_2 \cos(\alpha-4)x + \ldots,$

451. $0 = \sin\alpha x + \alpha_1 \sin(\alpha-2)x + \alpha_2 \sin(\alpha-4)x + \ldots.$

iſt, welches unſtreitig ein ſehr merkwürdiges und wichtiges analytiſches Reſultat iſt.

52. Wir wollen nun, indem Θ einen beliebigen zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegenden Bogen, n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, überhaupt

$$x = \Theta \pm n\pi$$

ſetzen; ſo iſt

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha x + \alpha_1 \cos(\alpha-2)x + \alpha_2 \cos(\alpha-4)x + \ldots\\
= &\cos\alpha(\Theta \pm n\pi) + \alpha_1 \cos(\alpha-2)(\Theta \pm n\pi) + \ldots\\
= &\cos\alpha\Theta \cos\alpha n\pi + \alpha_1 \cos(\alpha-2)\Theta \cos(\alpha-2)n\pi + \ldots\\
\mp &\sin\alpha\Theta \sin\alpha n\pi \mp \alpha_1 \sin(\alpha-2)\Theta \sin(\alpha-2)n\pi \mp \ldots\\
= &\cos\alpha\Theta \cos\alpha n\pi + \alpha_1 \cos(\alpha-2)\Theta \cos\alpha n\pi \cos 2n\pi + \ldots\\
&\qquad + \alpha_1 \cos(\alpha-2)\Theta \sin\alpha n\pi \sin 2n\pi + \ldots\\
\mp &\sin\alpha\Theta \sin\alpha n\pi \mp \alpha_1 \sin(\alpha-2)\Theta \sin\alpha n\pi \cos 2n\pi \mp \ldots\\
&\qquad \pm \alpha_1 \sin(\alpha-2)\Theta \cos\alpha n\pi \sin 2n\pi \pm \ldots
\end{aligned}$$

Weil nun nach (43.) und (44.)

$$\cos 2n\pi = \cos 4n\pi = \cos 6n\pi = \ldots = 1,$$
$$\sin 2n\pi = \sin 4n\pi = \sin 6n\pi = \ldots = 0$$

iſt; ſo iſt

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha x + \alpha_1 \cos(\alpha-2)x + \alpha_2 \cos(\alpha-4)x + \ldots\\
= &\{\cos\alpha\Theta + \alpha_1 \cos(\alpha-2)\Theta + \alpha_2 \cos(\alpha-4)\Theta + \ldots\} \cos\alpha n\pi\\
\mp &\{\sin\alpha\Theta + \alpha_1 \sin(\alpha-2)\Theta + \alpha_2 \sin(\alpha-4)\Theta + \ldots\} \sin\alpha n\pi.
\end{aligned}$$

Nach (450.) und (451.) iſt aber, da Θ zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt, und α, wie ſich von ſelbſt verſteht, poſitiv iſt:

$$(2\cos\Theta)^{\alpha} = \cos\alpha\Theta + \alpha_1 \cos(\alpha-2)\Theta + \alpha_2 \cos(\alpha-4)\Theta + \ldots,$$
$$0 = \sin\alpha\Theta + \alpha_1 \sin(\alpha-2)\Theta + \alpha_2 \sin(\alpha-4)\Theta + \ldots$$

Alſo iſt

$$\begin{aligned}
&(2\cos\Theta)^{\alpha} \cos\alpha n\pi\\
= &\cos\alpha x + \alpha_1 \cos(\alpha-2)x + \alpha_2 \cos(\alpha-4)x + \ldots
\end{aligned}$$

Auf ähnliche Art iſt

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha x + \alpha_1 \sin(\alpha-2)x + \alpha_2 \sin(\alpha-4)x + \ldots\\
= &\sin\alpha(\Theta \pm n\pi) + \alpha_1 \sin(\alpha-2)(\Theta \pm n\pi) + \ldots\\
= &\sin\alpha\Theta \cos\alpha n\pi + \alpha_1 \sin(\alpha-2)\Theta \cos(\alpha-2)n\pi + \ldots\\
\pm &\cos\alpha\Theta \sin\alpha n\pi \pm \alpha_1 \cos(\alpha-2)\Theta \sin(\alpha-2)n\pi \pm \ldots\\
= &\sin\alpha\Theta \cos\alpha n\pi + \alpha_1 \sin(\alpha-2)\Theta \cos\alpha n\pi \cos 2n\pi + \ldots\\
&\qquad + \alpha_1 \sin(\alpha-2)\Theta \sin\alpha n\pi \sin 2n\pi + \ldots\\
\pm &\cos\alpha\Theta \sin\alpha n\pi \pm \alpha_1 \cos(\alpha-2)\Theta \sin\alpha n\pi \cos 2n\pi \pm \ldots\\
&\qquad \mp \alpha_1 \cos(\alpha-2)\Theta \cos\alpha n\pi \sin 2n\pi \mp \ldots\\
= &\{\sin\alpha\Theta + \alpha_1 \sin(\alpha-2)\Theta + \alpha_2 \sin(\alpha-4)\Theta + \ldots\} \cos\alpha n\pi\\
\pm &\{\cos\alpha\Theta + \alpha_1 \cos(\alpha-2)\Theta + \alpha_2 \cos(\alpha-4)\Theta + \ldots\} \sin\alpha n\pi;
\end{aligned}$$

alſo nach (450.) und (451.)

$$\pm (2\cos\Theta)^\alpha \sin\alpha n\pi$$
$$= \sin\alpha x + \alpha_1 \sin(\alpha-2)x + \alpha_2 \sin(\alpha-4)x + \ldots\ldots$$

Iſt alſo Θ zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten, α poſitiv, n eine beliebige ganze Zahl; ſo iſt für

$$x = \Theta \pm n\pi$$

jederzeit

$$452.\quad (2\cos\Theta)^\alpha \cos\alpha n\pi$$
$$= \cos\alpha x + \alpha_1 \cos(\alpha-2)x + \alpha_2 \cos(\alpha-4)x + \ldots\ldots,$$
$$453.\quad \pm (2\cos\Theta)^\alpha \sin\alpha n\pi$$
$$= \sin\alpha x + \alpha_1 \sin(\alpha-2)x + \alpha_2 \sin(\alpha-4)x + \ldots\ldots$$

Obgleich aus allen vorhergehenden Betrachtungen ſchon von ſelbſt unmittelbar hervorgeht, daß in (51.) unter $(2\cos x)^\alpha$, und eben ſo im Obigen unter $(2\cos\Theta)^\alpha$, immer die reellen poſitiven Werthe dieſer Potenzen zu verſtehen ſind; ſo bemerken wir dies doch des Folgenden wegen hier noch beſonders.

53. Jetzt ſoll m immer eine poſitive oder negative, n eine poſitive ganze Zahl bezeichnen, und zugleich wollen wir annehmen, daß m und n keinen gemeinſchaftlichen Factor haben, ſo daß $\frac{m}{n}$ ein in den kleinſten Zahlen ausgedrückter Bruch iſt.

I. Nach der Gleichung (314.) iſt, wenn k eine ganze Zahl bezeichnet,

$$\left(\cos\frac{2km\pi}{n} \pm i\sin\frac{2km\pi}{n}\right)^n = \cos 2km\pi \pm i\sin 2km\pi;$$

folglich nach (43.) und (44.)

$$\left(\cos\frac{2km\pi}{n} \pm i\sin\frac{2km\pi}{n}\right)^n = (-1)^{2km} = (+1)^m,$$

und man ſieht alſo, daß die Größe

$$\cos\frac{2km\pi}{n} \pm i\sin\frac{2km\pi}{n}$$

für jedes ganze k ein Werth der Potenz $(+1)^{\frac{m}{n}}$ iſt.

Sind nun k′ und k″ zwei ungleiche poſitive ganze Zahlen, deren jede kleiner als $\frac{1}{2}$n iſt; ſo ſind die beiden Coſinus

$$\cos\frac{2k'm\pi}{n} \text{ und } \cos\frac{2k''m\pi}{n}$$

nie einander gleich. Wäre nämlich

$$\cos\frac{2k'm\pi}{n} = \cos\frac{2k''m\pi}{n};$$

ſo wäre, wenn λ eine beliebige poſitive oder negative ganze Zahl bezeichnet, nach (32. II.)

$$\frac{2k''m\pi}{n} = 2\lambda\pi \pm \frac{2k'm\pi}{n},$$

und folglich

$$\frac{(k'' \mp k')m}{n} = \lambda,$$

alſo der Bruch auf der linken Seite des Gleichheitszeichens eine ganze Zahl, welches ungereimt iſt, da nach der Vorausſetzung m und n relative Primzahlen und k', k'' zwei ungleiche poſitive ganze Zahlen ſind, deren jede kleiner als $\frac{1}{2}n$ iſt. Folglich ſind die beiden Coſinus

$$\cos\frac{2k'm\pi}{n} \text{ und } \cos\frac{2k''m\pi}{n}$$

nicht einander gleich, wie behauptet wurde.

Ferner läßt ſich behaupten, daß $\sin\frac{2k'm\pi}{n}$ bloß dann verſchwindet, wenn $k' = 0$ iſt. Für

$$\sin\frac{2k'm\pi}{n} = 0$$

wäre nämlich

$$\frac{2k'm\pi}{n} = \lambda\pi,\ \frac{2k'm}{n} = \lambda,$$

alſo $\frac{2k'm}{n}$ eine ganze Zahl, welches wegen der gemachten Vorausſetzungen bloß dann möglich iſt, wenn $k' = 0$ iſt.

Setzt man nun in der Formel

$$\cos\frac{2km\pi}{n} \pm i\sin\frac{2km\pi}{n}$$

für k alle poſitive ganze Zahlen, welche kleiner als $\frac{1}{2}n$ ſind; ſo ſind, wie aus den vorhergehenden Betrachtungen erhellet, alle Werthe der Größe $(+1)^{\frac{m}{n}}$, welche man auf dieſe Weiſe erhält, mit Ausnahme der beiden erſten dem Werthe $k = 0$ entſprechenden, unter einander ungleich. Iſt n eine ungerade Zahl, ſo iſt die Anzahl dieſer ſämmtlich unter einander ungleichen Werthe

$$2.\frac{n-1}{2} + 1 = n,$$

welches gerade die Anzahl der verſchiedenen Werthe iſt, welche die Größe $(+1)^{\frac{m}{n}}$ nach der allgemeinen Theorie der Gleichungen überhaupt bloß haben kann. Iſt n eine gerade Zahl, ſo iſt die Anzahl der in Rede ſtehenden ſämmtlich unter einander verſchiedenen Werthe

$$2.\frac{n-2}{2} + 1 = n - 1.$$

Setzt man nun aber noch $k = \frac{1}{2}n$, ſo erhält man den Doppelwerth

$$\cos m\pi \pm i \sin m\pi,$$

welcher ſich jedoch, weil $\sin m\pi = 0$ iſt, auf den einen Werth

$$\cos m\pi = (-1)^m = -1$$

reducirt, wobei man zu bemerken hat, daß m in dieſem Falle, weil m und n relative Primzahlen ſind, nothwendig eine ungerade Zahl ſeyn muß. Nimmt man alſo dieſen Werth, welcher unter den vorhergehenden offenbar noch nicht vorgekommen iſt, zu letztern hinzu; ſo hat man wieder n verſchiedene Werthe der Größe $(+1)^{\frac{m}{n}}$, und mehr von einander verſchiedene Werthe kann dieſe Größe nach der Theorie der Gleichungen nicht haben.

Faſſen wir alſo alles Vorhergehende zuſammen; ſo ergiebt ſich, daß man aus der Formel

$$\cos \frac{2km\pi}{n} \pm i \sin \frac{2km\pi}{n}$$

alle n Werthe der Größe $(+1)^{\frac{m}{n}}$ erhält, wenn man für k alle poſitive ganze Zahlen ſetzt, die nicht größer als $\frac{1}{2}n$ ſind, wobei denn auch zugleich erhellet, daß dieſe n Werthe ſämmtlich unter einander verſchieden ſind.

Den Inbegriff aller verſchiedenen Werthe, welche die αte Potenz der beliebigen Größe a überhaupt bloß haben kann, wollen wir im Folgenden durch $((a))^\alpha$, einen beſtimmten Werth dieſer Potenz dagegen, der übrigens an ſich völlig willkührlich iſt, nur immer im ganzen Laufe der Rechnung als unverändert bleibend gedacht wird, auf die gewöhnliche Weiſe durch a^α oder $(a)^\alpha$ bezeichnen. Mit Anwendung dieſer Bezeichnung erhalten wir alſo aus dem Vorhergehenden

$$((+1))^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{2km\pi}{n} \pm i \sin \frac{2km\pi}{n},$$

indem man für k alle poſitive ganze Zahlen ſetzt, die nicht größer als $\frac{1}{2}n$ ſind, wobei zugleich zu bemerken iſt, daß die n Werthe der Größe $(+1)^{\frac{m}{n}}$, welche man auf dieſe Weiſe erhält, ſämmtlich unter einander verſchieden ſind.

II. Nach der Gleichung (314.) iſt wieder, wenn k eine ganze Zahl bezeichnet,

$$\left(\cos \frac{(2k+1)m\pi}{n} \pm i \sin \frac{(2k+1)m\pi}{n}\right)^n = \cos(2k+1)m\pi \pm i \sin(2k+1)m\pi;$$

folglich nach (43.) und (44.)

$$\left(\cos \frac{(2k+1)m\pi}{n} \pm i \sin \frac{(2k+1)m\pi}{n}\right)^n = (-1)^{(2k+1)m} = (-1)^m.$$

Alſo liefert die Größe

$$\cos\frac{(2k+1)m\pi}{n} \pm i \sin\frac{(2k+1)m\pi}{n}$$

für jedes ganze k einen Werth der Potenz $(-1)^{\frac{m}{n}}$.

Sind nun wieder k' und k'' zwei ungleiche poſitive ganze Zahlen, deren jede kleiner als $\frac{1}{2}n$ iſt; ſo können die beiden Coſinus

$$\cos\frac{(2k'+1)m\pi}{n} \text{ und } \cos\frac{(2k''+1)m\pi}{n}$$

nie einander gleich ſeyn. Wäre nämlich

$$\cos\frac{(2k'+1)m\pi}{n} = \cos\frac{(2k''+1)m\pi}{n};$$

ſo wäre, wenn λ wieder eine poſitive oder negative ganze Zahl bezeichnet, nach (32. II.)

$$\frac{(2k''+1)m\pi}{n} = 2\lambda\pi \pm \frac{(2k'+1)m\pi}{n},$$

und folglich entweder

$$\frac{(k''-k')m}{n} = \lambda,$$

oder

$$\frac{(k''+k'+1)m}{n} = \lambda,$$

ſo daß alſo entweder

$$\frac{(k''-k')m}{n} \text{ oder } \frac{(k''+k'+1)m}{n}$$

eine ganze Zahl wäre, welches beides nicht möglich iſt, da nach der Vorausſetzung m und n relative Primzahlen, und die poſitiven ganzen Zahlen k', k'' beide kleiner als $\frac{1}{2}n$ ſind, weshalb alſo ſowohl der abſolute Werth von $k''-k'$, als auch $k''+k'+1$, immer kleiner als n iſt. Auch iſt $k''-k'$ nicht $=0$, da k' und k'' ungleich ſind.

Ferner läßt ſich behaupten, daß $\sin\frac{(2k'+1)m\pi}{n}$ bloß dann verſchwindet, wenn $2k'+1=n$ iſt, welches bloß dann der Fall ſeyn kann, wenn n eine ungerade Zahl iſt. Aus

$$\sin\frac{(2k'+1)m\pi}{n} = 0$$

folgt nämlich

$$\frac{(2k'+1)m\pi}{n} = \lambda\pi, \quad \frac{(2k'+1)m}{n} = \lambda,$$

ſo daß alſo $\frac{(2k'+1)m}{n}$ eine ganze Zahl iſt, welches wegen der gemachten Vorausſetzungen bloß dann möglich iſt, wenn n eine ungerade Zahl und $2k'+1=n$ iſt.

Aus dieſen Betrachtungen ergiebt ſich nun, daß alle Werthe von $(-1)^{\frac{m}{n}}$, welche man erhält, wenn man in der Formel

$$\cos\frac{(2k+1)m\pi}{n} \pm i\sin\frac{(2k+1)m\pi}{n}$$

für k alle poſitive ganze Zahlen ſetzt, die kleiner als $\frac{1}{2}n$ ſind, mit Ausnahme der beiden letzten dem Werthe $k=\frac{n-1}{2}$ in dem Falle eines ungeraden n entſprechenden Werthe, unter einander ungleich ſind. Iſt n eine ungerade Zahl, ſo iſt die Anzahl der von einander verſchiedenen Werthe der Größe $(-1)^{\frac{m}{n}}$, welche man auf dieſe Weiſe erhält, offenbar

$$2.\frac{n-1}{2}+2-1=2.\frac{n-1}{2}+1=n,$$

und dies iſt gerade die Anzahl der verſchiedenen Werthe, welche nach der allgemeinen Theorie der Gleichungen die Größe $(-1)^{\frac{m}{n}}$ überhaupt haben kann. Iſt n eine gerade Zahl, ſo iſt die Anzahl der von einander verſchiedenen Werthe der Größe $(-1)^{\frac{m}{n}}$, welche man auf die obige Weiſe erhält,

$$2.\frac{n-2}{2}+2=n,$$

und dies iſt wieder die Anzahl der von einander verſchiedenen Werthe, welche nach der allgemeinen Theorie der Gleichungen die Größe $(-1)^{\frac{m}{n}}$ überhaupt haben kann. In der oben eingeführten Bezeichnung iſt alſo

$$((-1))^{\frac{m}{n}}=\cos\frac{(2k+1)m\pi}{n}\pm i\sin\frac{(2k+1)m\pi}{n},$$

wenn man für k alle poſitiven ganzen Zahlen ſetzt, welche kleiner als $\frac{1}{2}n$ ſind, wobei zugleich erhellet, daß alle n Werthe der Größe $(-1)^{\frac{m}{n}}$, welche man auf dieſe Weiſe erhält, unter einander ungleich ſind.

III. Bezeichnet nun α einen beliebigen poſitiven oder negativen in den kleinſten Zahlen ausgedrückten Bruch; ſo iſt nach I.

$$454.\quad ((+1))^{\alpha}=\cos 2k\alpha\pi \pm i\sin 2k\alpha\pi,$$

wenn man für k alle poſitiven ganzen Zahlen ſetzt, welche nicht größer als der halbe Nenner von α ſind; und nach **II.** iſt

$$455.\quad ((-1))^{\alpha}=\cos(2k+1)\alpha\pi \pm i\sin(2k+1)\alpha\pi,$$

wenn man für k alle poſitiven ganzen Zahlen ſetzt, welche kleiner als der halbe Nenner von α ſind.

Die Anzahl der Werthe, welche die Potenzen $(+1)^{\alpha}$ und (-1) überhaupt haben können, wird nach der allgemeinen Theorie

der Gleichungen durch den Nenner von α beſtimmt, und aus dem Vorhergehenden erhellet, daß jede dieſer Potenzen in der That auch eben ſo viele ſämmtlich von einander verſchiedene Werthe hat, wie der Nenner des Exponenten α Einheiten enthält.

IV. Iſt nun $\pm$ a eine beliebige poſitive oder negative Größe und α ein in den kleinſten Zahlen ausgedrückter poſitiver oder negativer Bruch; ſo iſt

$$((\pm a))^\alpha = ((\pm 1))^\alpha . a^\alpha ,$$

d. h. man erhält jederzeit alle in $((\pm a))^\alpha$ enthaltene Werthe, wenn man alle in $((\pm 1))^\alpha$ enthaltene Werthe mit ein und demſelben beſtimmten, übrigens an ſich beliebigen, Werthe der αten Potenz von a multiplicirt.

Um dies zu beweiſen, wollen wir zuerſt zeigen, daß jeder in $((\pm 1))^\alpha . a^\alpha$ enthaltene Werth ein Werth der αten Potenz von $\pm$ a iſt. Zu dem Ende ſetze man $\alpha = \frac{m}{n}$ und bezeichne einen beliebigen der in $((\pm 1))^\alpha$ enthaltenen Werthe durch p, einen beliebigen der in $((\pm 1))^\alpha . a^\alpha$ enthaltenen Werthe folglich durch pa^α. Weil p einer der in $((\pm 1))^\alpha$ enthaltenen Werthe iſt; ſo iſt $p^n = (\pm 1)^m$, und eben ſo iſt $(a^\alpha)^n = a^m$. Alſo iſt

$$p^n . (a^\alpha)^n = (\pm 1)^m . a^m ,$$

d. i. $(pa^\alpha)^n = (\pm a)^m$, ſo daß alſo pa^α wirklich ein Werth der $\frac{m}{n}$ten oder αten Potenz von $\pm$ a iſt, wie behauptet wurde. Nach **III.** hat $((\pm 1))^\alpha$ n ſämmtlich unter einander verſchiedene Werthe; alſo hat auch $((\pm 1))^\alpha . a^\alpha$ n ſämmtlich unter einander verſchiedene Werthe; nach der allgemeinen Theorie der Gleichungen kann $((\pm a))^\alpha$ nicht mehr als n unter einander verſchiedene Werthe haben; nach dem Vorhergehenden iſt jeder in $((\pm 1))^\alpha . a^\alpha$ enthaltene Werth ein Werth von $((\pm a))^\alpha$; alſo iſt offenbar

$$((\pm a))^\alpha = ((\pm 1))^\alpha . a^\alpha ,$$

wie bewieſen werden ſollte. Folglich hat man nach **III.**

456. $((+ a))^\alpha = \{\cos 2k\alpha\pi \pm i \sin 2k\alpha\pi\} . a^\alpha ,$

wenn man für k alle poſitiven ganzen Zahlen ſetzt, die nicht größer als der halbe Nenner des in den kleinſten Zahlen ausgedrückten Exponenten α ſind; und

457. $((- a))^\alpha = \{\cos (2k + 1)\alpha\pi \pm i \sin (2k + 1) \alpha\pi\} . a^\alpha ,$

wenn man für k alle poſitiven ganzen Zahlen ſetzt, die kleiner als der halbe Nenner des in den kleinſten Zahlen ausgedrückten Exponenten α ſind.

54. Dieſe Principien wollen wir jetzt zur vollſtändigen Entwickelung der Potenzen der Coſinus und Sinus durch die Coſinus und Sinus der vielfachen Bogen anwenden, wobei wir ein für alle Mal bemerken, daß im Folgenden α immer ein poſitiver in

den kleinſten Zahlen ausgedrückter Bruch ſeyn ſoll. Wären Potenzen mit negativen Exponenten zu entwickeln; ſo würde man

$$(2\cos x)^{-\alpha} = \frac{1}{(2\cos x)^\alpha},\ (2\sin x)^{-\alpha} = \frac{1}{(2\sin x)^\alpha}$$

zu ſetzen, und auf die Nenner dieſer Brüche die Formeln, welche wir ſogleich kennen lernen werden, anzuwenden haben.

I. Wenn $\cos x$ poſitiv und nicht $= 0$ iſt; ſo kann man

$$x = \Theta \pm 2n\pi$$

ſetzen, wo Θ ein zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthaltener Bogen und n eine ganze Zahl iſt. Alſo iſt nach (50.)

$$\cos x = \cos\Theta = (+1).\cos\Theta,$$

und folglich nach (53. IV.)

$$((2\cos x))^\alpha = ((+1))^\alpha.(2\cos\Theta)^\alpha,$$

wo $(2\cos\Theta)^\alpha$ der reelle poſitive Werth der αten Potenz von $2\cos\Theta$ ſeyn ſoll. Alſo iſt nach (452.) und (453.)

$$458.\quad ((2\cos x))^\alpha = \frac{((+1))^\alpha}{\cos 2n\alpha\pi}\{\cos\alpha x + \alpha_1\cos(\alpha-2)x + \alpha_2\cos(\alpha-4)x + \ldots\},$$

$$459.\quad ((2\cos x))^\alpha = \pm\frac{((+1))^\alpha}{\sin 2n\alpha\pi}\{\sin\alpha x + \alpha_1\sin(\alpha-2)x + \alpha_2\sin(\alpha-4)x + \ldots\},$$

oder auch nach (454.), wenn wir die beiden eingeklammerten Reihen der Kürze wegen durch S_α und Σ_α bezeichnen:

$$460.\quad ((2\cos x))^\alpha = \frac{\cos 2k\alpha\pi \pm i\sin 2k\alpha\pi}{\cos 2n\alpha\pi}S_\alpha,$$

$$461.\quad ((2\cos x))^\alpha = \pm\frac{\cos 2k\alpha\pi \pm i\sin 2k\alpha\pi}{\sin 2n\alpha\pi}\Sigma_\alpha,$$

wenn man für k alle poſitiven ganzen Zahlen ſetzt, die nicht größer als der halbe Nenner des Exponenten α ſind, wobei man nur noch zu bemerken hat, daß das doppelte Zeichen vor dem Bruche in der Gleichung (461.) bloß mit dem doppelten Zeichen in der Gleichung $x = \Theta \pm 2n\pi$ correſpondirt, welches in ähnlichen Fällen auch im Folgenden gilt, und daher ein für alle Mal bemerkt ſeyn mag.

II. Wenn $\cos x$ negativ iſt, ſo kann man

$$x = \Theta \pm (2n+1)\pi$$

ſetzen, wo wieder Θ zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten und n eine ganze Zahl iſt. Alſo iſt nach (50.)

$$\cos x = -\cos\Theta = (-1).\cos\Theta,$$

und folglich nach (53. IV.)

$$((2\cos x))^\alpha = ((-1))^\alpha.(2\cos\Theta)^\alpha,$$

wo nun wieder $(2\cos\Theta)$ der reelle poſitive Werth der αten Potenz von $2\cos\Theta$ ſeyn ſoll. Alſo iſt nach (452.) und (453.)

$$462.\quad ((2\cos x))^\alpha =$$

$$\frac{((-1))^\alpha}{\cos(2n+1)\alpha\pi}\{\cos\alpha x + \alpha_1\cos(\alpha-2)x + \alpha_2\cos(\alpha-4)x + \ldots\},$$

$$463.\quad ((2\cos x))^\alpha =$$

$$\pm\frac{((-1))^\alpha}{\sin(2n+1)\alpha\pi}\{\sin\alpha x + \alpha_1\sin(\alpha-2)x + \alpha_2\sin(\alpha-4)x + \ldots\},$$

oder nach (455.)

$$464.\quad ((2\cos x))^\alpha = \frac{\cos(2k+1)\alpha\pi \pm i\sin(2k+1)\alpha\pi}{\cos(2n+1)\alpha\pi}S_\alpha,$$

$$465.\quad ((2\cos x))^\alpha = \pm\frac{\cos(2k+1)\alpha\pi \pm i\sin(2k+1)\alpha\pi}{\sin(2n+1)\alpha\pi}\Sigma_\alpha,$$

wenn man für k alle poſitiven ganzen Zahlen ſetzt, die kleiner als der halbe Nenner des Exponenten α ſind.

III. Der Kürze wegen bezeichne man die beiden Reihen

$$\cos\alpha(\tfrac{1}{2}\pi - x) + \alpha_1\cos(\alpha-2)(\tfrac{1}{2}\pi - x) + \alpha_2\cos(\alpha-4)(\tfrac{1}{2}\pi - x) + \ldots,$$
$$\sin\alpha(\tfrac{1}{2}\pi - x) + \alpha_1\sin(\alpha-2)(\tfrac{1}{2}\pi - x) + \alpha_2\sin(\alpha-4)(\tfrac{1}{2}\pi - x) + \ldots.$$

reſpective durch S'_α und Σ'_α. Iſt nun zuerſt $\sin x$ poſitiv und nicht $= 0$; ſo iſt auch $\cos(\tfrac{1}{2}\pi - x)$ poſitiv und nicht $= 0$, und man kann alſo

$$\tfrac{1}{2}\pi - x = \Theta \pm 2n\pi$$

ſetzen, wo Θ zwiſchen $-\tfrac{1}{2}\pi$ und $+\tfrac{1}{2}\pi$ enthalten und n eine ganze Zahl iſt. Da nun bekanntlich $\sin x = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - x)$ iſt; ſo erhält man aus (460.) und (461.) auf der Stelle

$$466.\quad ((2\sin x))^\alpha = \frac{\cos 2k\alpha\pi \pm i\sin 2k\alpha\pi}{\cos 2n\alpha\pi}S'_\alpha,$$

$$467.\quad ((2\sin x))^\alpha = \pm\frac{\cos 2k\alpha\pi \pm i\sin 2k\alpha\pi}{\sin 2n\alpha\pi}\Sigma'_\alpha,$$

wenn man für k alle poſitiven ganzen Zahlen ſetzt, die nicht größer als der halbe Nenner des Exponenten α ſind.

IV. Iſt $\sin x$ negativ, ſo kann man

$$\tfrac{1}{2}\pi - x = \Theta \pm (2n+1)\pi$$

ſetzen, wo Θ zwiſchen $-\tfrac{1}{2}\pi$ und $+\tfrac{1}{2}\pi$ enthalten und n eine ganze Zahl iſt. Da nun bekanntlich $\sin x = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - x)$ iſt; ſo erhält man aus (464.) und (465.)

$$468.\quad ((2\sin x))^\alpha = \frac{\cos(2k+1)\alpha\pi \pm i\sin(2k+1)\alpha\pi}{\cos(2n+1)\alpha\pi}S'_\alpha,$$

$$469.\quad ((2\sin x))^\alpha = \pm\frac{\cos(2k+1)\alpha\pi \pm i\sin(2k+1)\alpha\pi}{\sin(2n+1)\alpha\pi}\Sigma'_\alpha,$$

wenn man für k alle poſitiven ganzen Zahlen ſetzt, die kleiner als der halbe Nenner des Exponenten α ſind.

55. Dieſe allgemeinen Formeln wollen wir nun zunächſt auf ein Paar Beiſpiele anwenden, und wollen zuerſt einmal

$x = \pi$, $\alpha = \frac{1}{3}$ ſetzen. Um nun $((2\cos\pi))^{\frac{1}{3}}$ zu entwickeln, überlege man zuerſt, daß

$$x = \pi = 0 + 1.\pi$$

und folglich in (54. II.) $\Theta = 0$, $2n + 1 = 1$ oder $n = 0$ iſt. Für k hat man in der Formel (464.) bloß die Werthe 0 und 1 zu ſetzen. Ferner erhält man leicht

$$S_\alpha = \cos\tfrac{1}{3}\pi + (\tfrac{1}{3})_1 . \cos\tfrac{5}{3}\pi + (\tfrac{1}{3})_2 . \cos\tfrac{11}{3}\pi + (\tfrac{1}{3})_5 \cos\tfrac{17}{3}\pi + \ldots.$$
$$= \cos\tfrac{1}{3}\pi . \{1 + (\tfrac{1}{3})_1 + (\tfrac{1}{3})_2 + (\tfrac{1}{3})_3 + \ldots\},$$

d. i. nach dem Artikel Binomiſcher Lehrſatz (42.) i. d. Z.

$$S_\alpha = \cos\tfrac{1}{3}\pi . \sqrt[3]{2}.$$

Die verſchiedenen Werthe von $((2\cos\pi))^{\frac{1}{3}}$ ſind alſo nach (464.)

$$\frac{\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi}{\cos\frac{1}{3}\pi} . \cos\tfrac{1}{3}\pi . \sqrt[3]{2},$$
$$\frac{\cos\pi \pm i\sin\pi}{\cos\frac{1}{3}\pi} . \cos\tfrac{1}{3}\pi . \sqrt[3]{2},$$

d. i.

$$(\cos\tfrac{1}{3}\pi \pm i\sin\tfrac{1}{3}\pi) . \sqrt[3]{2} \text{ und } -\sqrt[3]{2}.$$

Aus (229.) und (230.) ergiebt ſich aber auf der Stelle:

$$\cos\tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2}, \quad \sin\tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Alſo ſind

$$(1 \pm i\sqrt{3}) . \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2} \text{ und } -\sqrt[3]{2}$$

die drei Werthe von $((2\cos\pi))^{\frac{1}{3}} = ((-2))^{\frac{1}{3}}$. Man überzeugt ſich aber durch leichte Rechnung, daß in der That die dritten Potenzen von

$$(1 + i\sqrt{3}) . \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}, \quad (1 - i\sqrt{3}) . \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}, \quad -\sqrt[3]{2}$$

ſämmtlich $= -2$ ſind, und die Reſultate, welche die allgemeine Formel (464.) liefert, alſo ganz richtig ſind.

Bedienen wir uns der allgemeinen Formel (465.); ſo erhalten wir zuvörderſt

$$\Sigma_\alpha = \sin\tfrac{1}{3}\pi - (\tfrac{1}{3})_1 . \sin\tfrac{5}{3}\pi + (\tfrac{1}{3})_1 . \sin\tfrac{11}{3}\pi - (\tfrac{1}{3})_3 . \sin\tfrac{17}{3}\pi - \ldots.$$
$$= \sin\tfrac{1}{3}\pi . \{1 + (\tfrac{1}{3})_1 + (\tfrac{1}{3})_2 + (\tfrac{1}{3})_3 + \ldots\},$$

d. i. wieder nach dem Binomiſchen Lehrſatze

$$\Sigma_\alpha = \sin\tfrac{1}{3}\pi . \sqrt[3]{2}.$$

Die verſchiedenen Werthe von $((2\cos\pi))^{\frac{1}{3}}$ ſind nun nach (465.), da man im vorliegenden Falle, weil $x = 0 + 1.\pi$ iſt, das obere Zeichen nehmen muß:

$$\frac{\cos\frac{1}{3}\pi \pm i\sin\frac{1}{3}\pi}{\sin\frac{1}{3}\pi} . \sin\tfrac{1}{3}\pi . \sqrt[3]{2},$$
$$\frac{\cos\pi \pm i\sin\pi}{\sin\frac{1}{3}\pi} . \sin\tfrac{1}{3}\pi . \sqrt[3]{2};$$

d. i.

$$(\cos\tfrac{1}{3}\pi \pm i\sin\tfrac{1}{3}\pi).\sqrt[3]{2} \text{ und } -\sqrt[3]{2},$$

alſo ganz dieſelben wie vorher.

Wir wollen ferner $x = 2\pi$, $\alpha = \frac{1}{4}$ ſetzen. In dieſem Falle, wo $\cos x$ poſitiv und $x = 0 + 2\pi$ iſt, hat man in (54. I.) $\Theta = 0$, $n = 1$, und es iſt folglich $\cos 2n\alpha\pi = \cos\frac{1}{2}\pi = 0$, ſo daß alſo jetzt die Formel (458.) oder (460.) nicht brauchbar iſt, ſondern die Formel (459.) oder (461.) angewandt werden muß, welches eine in allen ähnlichen Fällen, auch bei den Formeln (464.) und (465.), (466.) und (467.), (468.) und (469.), wohl zu beachtende Bemerkung iſt. Man überſieht auch auf der Stelle, daß in dem vorliegenden Falle $S_\alpha = 0$ wird, und die Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung (458.) oder (460.) alſo den völlig unbeſtimmten Werth $\frac{0}{0}$ erhält. Gebrauchen wir nun die Formel (461.), indem wir jetzt in derſelben das obere Zeichen vor dem Bruche auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nehmen müſſen; ſo iſt, weil $\sin 2n\alpha\pi = \sin\frac{1}{2}\pi = 1$ iſt:

$$((2\cos 2\pi))^{\frac{1}{4}} = (\cos\tfrac{1}{2}k\pi \pm i\sin\tfrac{1}{2}k\pi)\Sigma_\alpha,$$

wo man $k = 0, 1, 2$ zu ſetzen hat. Da nun

$$\Sigma_\alpha = \sin\tfrac{1}{2}\pi + (\tfrac{1}{4})_1.\sin(-\tfrac{7}{4}\pi) + (\tfrac{1}{4})_2.\sin(-\tfrac{15}{4}\pi) + \ldots$$
$$= 1 + (\tfrac{1}{4})_1 + (\tfrac{1}{4})_2 + (\tfrac{1}{4})_3 + (\tfrac{1}{4})_4 + \ldots,$$

d. i. nach dem binomiſchen Lehrſatze

$$\Sigma_\alpha = (1+1)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

iſt; ſo erhält man für

$$((2\cos 2\pi))^{\frac{1}{4}} = ((2))^{\frac{1}{4}}$$

die folgenden vier Werthe:

$$\sqrt[4]{2},\ \pm i\sqrt[4]{2},\ -\sqrt[4]{2},$$

und durch eine leichte Rechnung überzeugt man ſich auch auf der Stelle, daß alle dieſe vier Größen, auf die vierte Potenz erhoben, in der That 2 geben, unſere obigen Formeln alſo wieder völlig richtige Reſultate liefern.

Es wird nicht nöthig ſeyn, dieſe Anwendungen zu vervielfältigen, indem ſchon die beiden obigen Beiſpiele deutlich genug zeigen, wie man ſich in allen Fällen zu verhalten hat.

56. Die Mathematiker haben ſich in neueſter Zeit ſehr viel mit der Analyſis der goniometriſchen Functionen, namentlich mit der Entwickelung der Potenzen der Sinus und Coſinus eines Bogens durch die Sinus und Coſinus der Vielfachen dieſes Bogens, und umgekehrt mit der Entwickelung der Sinus und Coſinus der vielfachen Bogen durch die Potenzen der Sinus und Coſinus des einfachen Bogens, beſchäftigt. Den erſten Anſtoß zu

dieſen Beſchäftigungen, welche der Analyſis ſchon manche ſchöne Frucht getragen haben, gab ein Aufſatz, welchen der ſcharfſinnige Poiſſon im Jahre 1811 in der Correspondance sur l' école polytechnique T. II. p. 212. bekannt machte. Euler hatte nämlich ſchon im Jahre 1755 in den Nov. Comment. Petrop. T. V. p. 164. nach einer der oben in (50.) in dem Falle eines poſitiven ganzen Exponenten angewandten ganz ähnlichen Methode die Gleichung

$$2^n \cos x^n = \cos nx + n_1 \cos(n-2)x + n_2 \cos(n-4)x + \ldots..$$

entwickelt, und dieſelbe als ganz allgemein für jedes poſitive oder negative ganze oder gebrochene n und jedes beliebige x gültig ausgegeben. Lagrange wiederholte noch im Jahre 1806, wo derſelbe in den Leçons sur le calcul des fonctions. Leçon X. XI. eine neue Zuſammenſtellung und Begründung der wichtigſten goniometriſchen Reihen zu geben verſuchte, dieſelbe Behauptung, und ſelbſt noch im Jahre 1810 ſchrieb Lacroix in der neuen Ausgabe ſeines Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. T. I. p. 88.: „la valeur que nous venons de trouver pour $\cos x^n$ n'est pas restreinte au seul cas ou n'est un nombre entier; elle conviendrait également à ceux ou n serait fractionnaire ou negatif.“ Und in der That ſcheint auch die von Euler angewandte Methode auf alle Arten des Exponenten und jeden beliebigen Bogen anwendbar, und ſomit auch die von derſelben gelieferten Reſultate ganz allgemein gültig zu ſeyn, wenn man nämlich, was man hier wohl zu beachten hat, das Binomialtheorem als ganz allgemein gültig betrachtet und ſich überhaupt um die Convergenz und Divergenz der in Betrachtung kommenden Reihen nicht bekümmert. Sobald man aber dem Binomialtheorem, wie wir in dem Artikel Binomiſcher Lehrſatz in dieſen Supplementen zu thun gezwungen geweſen ſind, ſeine allgemeine Gültigkeit abſpricht, und die wohl nicht mehr zurückzuweiſende Berückſichtigung der Convergenz und Divergenz der in Betrachtung kommenden Reihen hinzu tritt, muß natürlich auch die ſo oft und ſo hoch geprieſene völlig allgemeine Gültigkeit der oben für $(2\cos x)^n$ angegebenen Reihe, deren Entwickelung namentlich das als völlig allgemein betrachtete Binomialtheorem zum Grunde liegt, in Zweifel gezogen werden. Poiſſon war es nun, welcher zuerſt in dem oben erwähnten Aufſatze zeigte, daß die in Rede ſtehende Reihe wirklich in gewiſſen Fällen en défaut iſt. Er zeigte dies an dem Falle, wo $x=\pi$, $n=\frac{1}{2}$ iſt, den wir daher abſichtlich auch ſchon in (55.) mittelſt der oben von uns entwickelten Formeln in Unterſuchung genommen haben. Setzt man in der als allgemein gültig angenommenen Reihe

$$2^n \cos x^n = \cos nx + n_1 \cos(n-2)x + n_2 \cos(n-4)x + \ldots$$

$x=\pi$ und $n=\frac{1}{2}$, und wendet dann den Binomiſchen Lehrſatz an; ſo erhält man

$$2^{\frac{1}{3}}\cos\pi^{\frac{1}{3}} = \cos\tfrac{1}{3}\pi + (\tfrac{1}{3})_1 . \cos\tfrac{5}{3}\pi + (\tfrac{1}{3})_2 . \cos\tfrac{11}{3}\pi + \ldots\ldots$$
$$= \cos\tfrac{1}{3}\pi . \{1 + (\tfrac{1}{3})_1 + (\tfrac{1}{3})_2 + (\tfrac{1}{3})_3 + \ldots\ldots\}$$
$$= \cos\tfrac{1}{3}\pi . (1+1)^{\frac{1}{3}} = \cos\tfrac{1}{3}\pi . \sqrt[3]{2},$$

oder, weil

$$\cos\pi = -1, \ \cos\tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2}$$

iſt,

$$2^{\frac{1}{3}} . (-1)^{\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{2} . \sqrt[3]{2},$$

welches offenbar ungereimt iſt. Man hat ſich, und namentlich zuerſt Poiſſon ſelbſt, viele Mühe gegeben, die Gründe aufzufinden, aus denen die in Rede ſtehende Reihe in gewiſſen Fällen falſche Reſultate liefert oder en défaut iſt, Bemühungen, denen wir wenigſtens, ſo ſehr wir auch den auf dieſe Unterſuchungen von einigen franzöſiſchen Geometern verwandten Scharfſinn ehren und anerkennen, unſern Beifall nicht ganz ſchenken können, weil dieſe Gründe, unſerer Meinung nach, im Ganzen ſehr nahe liegend, und bei Weitem hauptſächlich in der unerlaubten Anwendung des Binomialtheorems über ſeine Gränzen hinaus und der völlig unterlaſſenen Berückſichtigung der Convergenz und Divergenz der zur Betrachtung kommenden Reihen zu ſuchen ſind; und daß aus unſichern Gründen auch unſichere Reſultate hervorgehen müſſen, unterliegt wohl keinem Zweifel. Am beſten wird man ſich indeß über Poiſſons Anſichten aus Münchows in ſo vieler Beziehung trefflichen Grundlehren der ebenen und ſphäriſchen Trigonometrie, Bonn 1826, S. 231., ſo wie auch aus dem dritten Theile von Lacroix's oben angeführten Werke (p. 605.), wo der Verfaſſer ebenfalls ſchon auf die Falſchheit der obigen Reihe für $2^n \cos x^n$ aufmerkſam macht, belehren können. In neueſter Zeit hat ſich auf jeden Fall Crelle in zwei Abhandlungen (Annales de Mathematiques, T. XIII. No. VII. und vorzüglich Journal für reine und angewandte Mathematik, V. 5. 197.) das meiſte Verdienſt um dieſen Gegenſtand erworben, und auch Poinſots beſondere unter dem Titel: Recherches sur l'Analyse des sections angulaires. Paris. 1825. 4. erſchienene Schrift iſt in vielen Beziehungen ſehr lehrreich, da ſich dieſelbe überhaupt ſehr ausführlich über den in Rede ſtehenden wichtigen Gegenſtand verbreitet, und namentlich auch eine Beurtheilung aller ältern von Euler und Lagrange angewandten Methoden enthält. Ueber einige neue Erörterungen, welche dieſe Schrift von Seiten Poiſſons veranlaßte, ſ. m. Bulletin des sciences mathématiques. Septbr. 1825. p. 140, Décembre 1825. p. 344. Ueber die Bemühungen von Deflers ſ. m. Lacroix a. a. O. T. III. p. 620. Außerdem haben ſich mit dieſem Gegenſtande noch beſchäftigt: Plana (Annales des Mathématiques. T. XI. p. 84.), L. Olivier (Crelles Journal. I. 5. 16.), Abel (daſ. S. 338.), Cauchy (Exercices de Mathématiques. Livr. 1. p. 1.). Ich

habe in dieſem Artikel (43.) — (44.) und (51.) — (55.) den in Rede ſtehenden Gegenſtand nach einer von den bisher angewandten ganz verſchiedenen Methode behandelt, und möchte daher dieſe Partie dieſes Wörterbuchs der Berückſichtigung und Beurtheilung gründlicher Kenner vorzüglich empfehlen. Namentlich ſind auch die Formeln (458.) — (469.) noch nicht unter der hier ihnen von mir gegebenen Form, die mir wegen ihrer Bequemlichkeit empfehlenswerth ſcheint, dargeſtellt worden.

57. Es ſind nun noch einige Formeln zurück, die wir, um den Gang der vorhergehenden Unterſuchung nicht zu unterbrechen, bis hierher verſpart haben. Iſt nämlich α poſitiv und x zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten; ſo iſt nach (451.)

$$\sin \alpha x + \alpha_1 \sin(\alpha-2)x + \alpha_2 \sin(\alpha-4)x + \ldots\ldots = 0\,.$$

Entwickelt man dieſe Gleichung, ſo erhält man ſehr leicht:

$$470.\quad \tang \alpha x = \frac{\alpha_1 \sin 2x + \alpha_2 \sin 4x + \alpha_3 \sin 6x + \ldots\ldots}{1 + \alpha_1 \cos 2x + \alpha_2 \cos 4x + \alpha_3 \cos 6x + \ldots\ldots}$$

für jedes poſitive α und jedes zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthaltene x.

Differentiirt man die obige Gleichung nach x; ſo erhält man:

$$\alpha \cos \alpha x + \alpha_1(\alpha-2)\cos(\alpha-2)x + \alpha_2(\alpha-4)\cos(\alpha-4)x + \ldots\ldots = 0\,,$$
$$\alpha^2 \sin \alpha x + \alpha_1(\alpha-2)^2 \sin(\alpha-2)x + \alpha_2(\alpha-4)^2 \sin(\alpha-4)x + \ldots\ldots = 0\,,$$
$$\alpha^3 \cos \alpha x + \alpha_1(\alpha-2)^3 \cos(\alpha-2)x + \alpha_2(\alpha-4)^3 \cos(\alpha-4)x + \ldots\ldots = 0\,,$$
$$\alpha^4 \sin \alpha x + \alpha_1(\alpha-2)^4 \sin(\alpha-2)x + \alpha_2(\alpha-4)^4 \sin(\alpha-4)x + \ldots\ldots = 0\,,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Alſo iſt für jedes poſitive α und jedes zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegende x:

$$471.\quad 0 = \alpha^{2k} \sin \alpha x + \alpha_1(\alpha-2)^{2k} \sin(\alpha-2)x + \alpha_2(\alpha-4)^{2k} \sin(\alpha-4)x + \ldots,$$
$$472.\quad 0 = \alpha^{2k+1} \cos \alpha x + \alpha_1(\alpha-2)^{2k+1} \cos(\alpha-2)x + \alpha_2(\alpha-4)^{2k+1} \cos(\alpha-4)x + \ldots,$$

und aus dieſen Gleichungen folgt leicht:

$$473.\quad \tang \alpha x = \frac{\alpha_1(\alpha-2)^{2k} \sin 2x + \alpha_2(\alpha-4)^{2k} \sin 4x + \alpha_3(\alpha-6)^{2k} \sin 6x + \ldots\ldots}{\alpha^{2k} + \alpha_1(\alpha-2)^{2k} \cos 2x + \alpha_2(\alpha-4)^{2k} \cos 4x + \ldots\ldots},$$

$$474.\quad \tang \alpha x = -\frac{\alpha^{2k+1} + \alpha_1(\alpha-2)^{2k+1} \cos 2x + \alpha_2(\alpha-4)^{2k+1} \cos 4x + \ldots\ldots}{\alpha_1(\alpha-2)^{2k+1} \sin 2x + \alpha_2(\alpha-4)^{2k+1} \sin 4x + \ldots\ldots},$$

immer unter der Vorausſetzung, daß α poſitiv und x zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten iſt.

Setzt man in der Gleichung (472.) $x = 0$; ſo erhält man

$$475.\quad 0 = \alpha^{2k+1} + \alpha_1(\alpha-2)^{2k+1} + \alpha_2(\alpha-4)^{2k+1} + \ldots\ldots,$$

für jedes poſitive α.

58. Endlich haben wir nun noch, um das in (50.) gegebene Verſprechen vollſtändig zu erfüllen, zu zeigen, wie auch die Formeln (438.) und (439.) ohne Hülfe der imaginären Quantitäten

erhalten werden können. Betrachten wir alſo jetzt, unter der Vorausſetzung, daß α eine poſitive ganze Zahl iſt, die beiden Reihen

$$\cos\alpha x - \alpha_1 \cos(\alpha-2)x + \alpha_2 \cos(\alpha-4)x - \alpha_3 \cos(\alpha-6)x + \ldots\ldots,$$

$$\sin\alpha x - \alpha_1 \sin(\alpha-2)x + \alpha_2 \sin(\alpha-4)x - \alpha_3 \sin(\alpha-6)x + \ldots\ldots,$$

welche unter der gemachten Vorausſetzung jederzeit abbrechen oder endlich ſind, und daher für jedes x als convergent und als convergent bleibend zu betrachten ſind, wenn man jedes Glied auf ſeinen abſoluten Werth reducirt, eine Bemerkung, die wir hier deshalb machen, weil wir der Leichtigkeit der folgenden Entwickelung wegen auf die Glieder, mit denen die beiden Reihen abbrechen, nicht beſonders Rückſicht nehmen, ſondern die Reihen als in's Unendliche fortlaufend betrachten wollen. Setzen wir nun

$$f(\alpha) = \cos\alpha x - \alpha_1 \cos(\alpha-2)x + \alpha_2 \cos(\alpha-4)x - \ldots\ldots,$$

$$\varphi(\alpha) = \sin\alpha x - \alpha_1 \sin(\alpha-2)x + \alpha_2 \sin(\alpha-4)x - \ldots\ldots,$$

und eben ſo für ein beliebiges poſitives γ

$$f(\gamma) = \cos\gamma x - \gamma_1 \cos(\gamma-2)x + \gamma_2 \cos(\gamma-4)x - \ldots\ldots,$$

$$\varphi(\gamma) = \sin\gamma x - \gamma_1 \sin(\gamma-2)x + \gamma_2 \sin(\gamma-4)x - \ldots\ldots;$$

ſo erhalten wir nach bekannten, oben ſchon mehrmals angewandten, Sätzen aus dem Artikel Convergenz der Reihen:

$$\begin{aligned}
& f(\alpha).f(\gamma) - \varphi(\alpha).\varphi(\gamma) \\
= & \cos\alpha x\cos\gamma x - \alpha_1\cos(\alpha-2)x\cos\gamma x + \alpha_2\cos(\alpha-4)x\cos\gamma x - \ldots\ldots \\
& - \gamma_1\cos\alpha x\cos(\gamma-2)x + \alpha_1\gamma_1\cos(\alpha-2)x\cos(\gamma-2)x - \ldots\ldots \\
& + \gamma_2\cos\alpha x\cos(\gamma-4)x - \ldots\ldots \\
& - \sin\alpha x\sin\gamma x + \alpha_1\sin(\alpha-2)x\sin\gamma x - \alpha_2\sin(\alpha-4)x\sin\gamma x + \ldots\ldots \\
& + \gamma_1\sin\alpha x\sin(\gamma-2)x - \alpha_1\gamma_1\sin(\alpha-2)x\sin(\gamma-2)x + \ldots\ldots \\
& - \gamma_2\sin\alpha x\sin(\gamma-4)x + \ldots\ldots \\
= & \cos(\alpha+\gamma)x \\
& -(\alpha_1+\gamma_1)\cos(\alpha+\gamma-2)x \\
& +(\alpha_2+\alpha_1\gamma_1+\gamma_2)\cos(\alpha+\gamma-4)x \\
& -(\alpha_3+\alpha_2\gamma_1+\alpha_1\gamma_2+\gamma_3)\cos(\alpha+\gamma-6)x \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
= & \cos(\alpha+\gamma)x - (\alpha+\gamma)_1.\cos(\alpha+\gamma-2)x + (\alpha+\gamma)_2.\cos(\alpha+\gamma-4)x \\
& - (\alpha+\gamma)_3.\cos(\alpha+\gamma-6)x + \ldots\ldots,
\end{aligned}$$

nach dem bekannten, oben ebenfalls ſchon angewandten, Satze von den Binomial-Coefficienten.

Ferner iſt auf ähnliche Art

$$\begin{aligned}
& \varphi(\alpha).f(\gamma) + f(\alpha).\varphi(\gamma) \\
= & \sin\alpha x\cos\gamma x - \alpha_1\sin(\alpha-2)x\cos\gamma x + \alpha_2\sin(\alpha-4)x\cos\gamma x - \ldots\ldots \\
& - \gamma_1\sin\alpha x\cos(\gamma-2)x + \alpha_1\gamma_1\sin(\alpha-2)x\cos(\gamma-2)x - \ldots\ldots \\
& + \gamma_2\sin\alpha x\cos(\gamma-4)x - \ldots\ldots \\
& + \cos\alpha x\sin\gamma x - \alpha_1\cos(\alpha-2)x\sin\gamma x + \alpha_2\cos(\alpha-4)x\sin\gamma x - \ldots\ldots \\
& - \gamma_1\cos\alpha x\sin(\gamma-2)x + \alpha_1\gamma_1\cos(\alpha-2)x\sin(\gamma-2)x - \ldots\ldots \\
& + \gamma_2\cos\alpha x\sin(\gamma-4)x - \ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$= \sin(\alpha+\gamma)x$$
$$- (\alpha_1+\gamma_1)\sin(\alpha+\gamma-2)x$$
$$+ (\alpha_2+\alpha_1\gamma_1+\gamma_2)\sin(\alpha+\gamma-4)x$$
$$- (\alpha_3+\alpha_2\gamma_1+\alpha_1\gamma_2+\gamma_3)\sin(\alpha+\gamma-6)x$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \sin(\alpha+\gamma)x - (\alpha+\gamma)_1 . \sin(\alpha+\gamma-2)x + (\alpha+\gamma)_2 . \sin(\alpha+\gamma-4)x$$
$$- (\alpha+\gamma)_3 . \sin(\alpha+\gamma)_3 . \sin(\alpha+\gamma-6)x + \ldots.$$

Alſo iſt für jedes poſitive ganze α und γ:

$$476.\quad f(\alpha).f(\gamma) - \varphi(\alpha).\varphi(\gamma) = f(\alpha+\gamma),$$

$$477.\quad \varphi(\alpha).f(\gamma) + f(\alpha).\varphi(\gamma) = \varphi(\alpha+\gamma).$$

Auf der Stelle erhellet nun, daß

$$f(0) = 1,\ \varphi(0) = 0$$

iſt. Ferner iſt

$$f(1) = \cos x - \cos(-x) = \cos x - \cos x = 0,$$
$$\varphi(1) = \sin x - \sin(-x) = \sin x + \sin x = 2\sin x.$$

Setzt man nun in (476.) und (477.) $\alpha = 1$, $\gamma = 1$; ſo erhält man ſehr leicht:

$$f(2) = -2^2 \sin x^2,\ \varphi(2) = 0.$$

Setzt man in (476.) und (477.) $\alpha = 1$, $\gamma = 2$; ſo ergiebt ſich:

$$f(3) = 0,\ \varphi(3) = -2^3 \sin x^3.$$

Setzt man in denſelben Formeln $\alpha=1$, $\gamma=3$; ſo erhält man:

$$f(4) = 2^4 \sin x^4,\ \varphi(4) = 0.$$

Für $\alpha = 1$, $\gamma = 4$ ergiebt ſich:

$$f(5) = 0,\ \varphi(5) = 2^5 \sin x^5.$$

Für $\alpha = 1$, $\gamma = 5$ erhält man.

$$f(6) = -2^6 \sin x^6,\ \varphi(6) = 0.$$

Für $\alpha = 1$, $\gamma = 6$ ergiebt ſich:

$$f(7) = 0,\ \varphi(7) = -2^7 \sin x^7.$$

Wie man auf dieſe Art weiter gehen kann, iſt klar, und man erhält nun hieraus leicht die folgenden allgemeinen Formeln:

Wenn die poſitive ganze Zahl α gerade iſt; ſo iſt

$$478.\quad f(\alpha) = (-1)^{\frac{\alpha}{2}} . 2^\alpha \sin x^\alpha,\ \varphi(\alpha) = 0.$$

Wenn die poſitive ganze Zahl α ungerade iſt; ſo iſt

$$479.\quad f(\alpha) = 0,\ \varphi(\alpha) = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} . 2^\alpha \sin x^\alpha;$$

oder:

Wenn die poſitive ganze Zahl α gerade iſt; ſo iſt

$$480.\quad (-1)^{\frac{\alpha}{2}} . 2^\alpha \sin x^\alpha$$
$$= \cos\alpha x - \alpha_1 \cos(\alpha-2)x + \alpha_2 \cos(\alpha-4)x - \ldots..,$$

$$481.\quad 0 = \sin\alpha x - \alpha_1 \sin(\alpha-2)x + \alpha_2 \sin(\alpha-4)x - \ldots.$$

Wenn aber die poſitive ganze Zahl α ungerade iſt; ſo iſt

$$482.\quad (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} . 2^{\alpha} \sin x^{\alpha}$$
$$= \sin \alpha x - \alpha_1 \sin(\alpha-2)x + \alpha_2 \sin(\alpha-4)x - \ldots ,$$

$$483.\quad 0 = \cos \alpha x - \alpha_1 \cos(\alpha-2)x + \alpha_2 \cos(\alpha-4)x - \ldots .$$

Daß die Formeln (480.) und (482.) mit den Formeln (438.) und (439.) identiſch ſind, oder daß ſich wenigſtens letztere ſehr leicht aus erſtern ableiten laſſen würden, bedarf hier keiner weitern Erläuterung. Wir ſind alſo hier, unſerm in (50.) gegebenen Verſprechen gemäß, zu den Formeln (438.) und (439.) ganz ohne Hülfe der imaginären Quantitäten gelangt, und überdies hat uns unſere Analyſis noch zu den beiden neuen Reſultaten (481.) und (483.) geführt.

Indem wir dieſen Artikel hiermit ſchließen, bemerken wir nur noch, daß wir bei Bearbeitung deſſelben unſere Bemühung vorzüglich auch dahin gerichtet haben, die Formeln (41.) und (42.), welche als das Fundament der ganzen Goniometrie zu betrachten ſind, in völliger Allgemeinheit und Strenge zu beweiſen, weil unſers Erachtens ohne einen ſolchen völlig allgemeinen Beweis die Goniometrie einer ſichern Grundlage ermangelt. Dieſen Beweis haben wir in I. gegeben, und bemerken, daß auch Sarrus in den Annales de Mathématiques. T. XI. p. 323. einen völlig allgemeinen Beweis der in Rede ſtehenden Formeln zu geben verſucht hat, mit dem aber der unſrige nicht die entfernteſte Aehnlichkeit hat. Der unſrige iſt möglichſt rein analytiſch gefaßt. Der von Sarrus, den man auch in Münchows ſchon erwähnter Trigonometrie (S. 85—89) findet, möchte ſich mehr für einen elementaren Vortrag eignen. Einige Bemerkungen ſ. m. auch in **Cauchy cours d' Analyse de l'école royale polytechnique. Paris. 1821. p. 433.**; der in dieſem Werke angedeutete elementare Beweis ſcheint eine weitere Entwickelung zu verdienen, aber auch zu bedürfen.

Gränzcurven, ſ. einhüllende Curven und Flächen (I.) i. d. Z.

Gränzflächen, ſ. einhüllende Curven und Flächen (II.) i. d. Z.

Größtes und Kleinſtes. Wir betrachten in dieſem Artikel bloß die analytiſchen Methoden zur Beſtimmung der Maxima und Minima, welche die Differentialrechnung darbietet, indem die mehr elementaren Verfahrungsarten ſchon in dem entſprechenden Artikel im zweiten Theile dieſes Wörterbuchs ausführlich genug betrachtet worden ſind, die Darſtellung der in Rede ſtehenden ſo überaus wichtigen analytiſchen Methoden in dieſem Artikel uns aber Manches zu wünſchen übrig zu laſſen ſcheint.

I. Functionen mit einer unabhängigen veränderlichen Größe.

1. Der Kürze wegen bemerken wir hier zuvörderſt ein für alle Mal, daß alle Größen, welche wir im Folgenden betrachten werden, wofern nicht ausdrücklich eine andere Beſtimmung gegeben wird, reelle Größen ſeyn ſollen. Iſt nun $y = f(x)$ eine beliebige Function einer unabhängigen veränderlichen Größe, und laſſen wir jetzt x ſelbſt einen gewiſſen beſtimmten Werth dieſer veränderlichen Größe bedeuten; ſo ſagt man, daß der entſprechende Werth $f(x)$ der Function ein Maximum oder ein Minimum ſey, wenn derſelbe reſpective größer oder kleiner als alle ihm benachbarte Werthe der Function iſt. Um alſo zu beurtheilen, ob $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum iſt, laſſe man x um eine unendlich kleine poſitive Größe i zu- und abnehmen, wodurch $f(x)$ in $f(x+i)$ und $f(x-i)$ übergeht. Iſt nun, immer für unendlich kleine Werthe von i,

$$f(x) > f(x+i), \quad f(x) > f(x-i);$$

ſo iſt $f(x)$ ein Maximum oder ein größter Werth der gegebenen Function. Iſt dagegen für unendlich kleine i

$$f(x) < f(x+i), \quad f(x) < f(x-i);$$

ſo iſt $f(x)$ ein Minimum oder ein kleinſter Werth der in Rede ſtehenden Function. Iſt aber, mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander, für unendlich kleine i

$$f(x) \gtrless f(x+i), \quad f(x) \lessgtr f(x-i);$$

ſo iſt $f(x)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum. Unmittelbar geht aus dem Obigen auch hervor, daß eine Function mehrere Maxima und Minima, auch Maxima und Minima zugleich, haben kann, weil es ſich immer bloß um das Verhalten der Werthe der Function zu den ihnen benachbarten Werthen derſelben handelt.

2. Wenn die Function $f(x)$ für den beſtimmten Werth x ihrer veränderlichen Größe nicht $= 0$, und in dem Intervall $x-i$, $x+i$, wo i eine unendlich kleine poſitive Größe bezeichnet, ſtetig iſt; ſo behält dieſelbe in dem in Rede ſtehenden unendlich kleinen Intervall ſtets daſſelbe Vorzeichen. Dies erhellet auf der Stelle, wenn man bedenkt, daß die Function, welche in dem unendlich kleinen Intervall $x-i$, $x+i$ ſtetig iſt, ihr Zeichen nur ändern kann, wenn ſie durch Null hindurch geht.

3. Sind $f(x)$ und $f'(x)$ zwei in dem unendlich kleinen Intervall $x-i$, $x+i$, d. h. in der Nachbarſchaft des beſtimmten Werthes x der unabhängigen veränderlichen Größe, ſtetige Functionen; ſo iſt nach dem Artikel Taylors Lehrſatz (8.) i. d. Z.

$$f(x-i) = f(x) - if'(x-\varrho i),$$
$$f(x+i) = f(x) + if'(x+\varrho' i),$$

wo ϱ, ϱ' zwei poſitive Größen bezeichnen, die beide kleiner als die Einheit ſind. Iſt nun $f'(x)$ nicht $=0$, ſo haben nach (2.)

$$f'(x-\varrho i) \text{ und } f'(x+\varrho' i)$$

gleiche Vorzeichen, und es iſt folglich offenbar, mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander,

$$f(x-i) \lesseqgtr f(x),\ f(x+i) \gtreqless f(x),$$

oder

$$f(x) \gtreqless f(x-i),\ f(x) \lesseqgtr f(x+i);$$

alſo $f(x)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum. Soll demnach $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum ſeyn, ſo muß

$$f'(x) = 0$$

ſeyn. Dies vorausgeſetzt, iſt nach dem Artikel Taylors Lehrſatz (8.) i. d. Z., wenn auch $f''(x)$ eine in dem unendlich kleinen Intervall $x-i$, $x+i$ ſtetige Function iſt,

$$f(x-i) = f(x) + \frac{i^2}{1.2} f''(x-\varrho i),$$

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i^2}{1.2} f''(x+\varrho' i),$$

wo ϱ, ϱ' wieder zwei poſitive Größen bezeichnen, welche beide kleiner als die Einheit ſind. Iſt nun $f''(x)$ nicht $=0$, ſo haben nach (2.)

$$f''(x-\varrho i) \text{ und } f''(x+\varrho' i)$$

mit einander und mit $f''(x)$ einerlei Vorzeichen. Iſt alſo $f''(x)$ poſitiv, ſo iſt

$$f(x-i) > f(x);\ f(x+i) > f(x),$$

d. i.

$$f(x) < f(x-i),\ f(x) < f(x+i),$$

und folglich $f(x)$ ein Minimum. Iſt aber $f''(x)$ negativ, ſo iſt

$$f(x-i) < f(x),\ f(x+i) < f(x),$$

d. i.

$$f(x) > f(x-i),\ f(x) > f(x+i),$$

und folglich $f(x)$ ein Maximum. Wenn aber $f''(x) = 0$ und auch $f'''(x)$ eine in dem unendlich kleinen Intervall $x-i$, $x+i$ ſtetige Function iſt; ſo iſt nach dem Artikel Taylors Lehrſatz (8.) i. d. Z.

$$f(x-i) = f(x) - \frac{i^3}{1.2.3} f'''(x-\varrho i),$$

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i^3}{1.2.3} f'''(x+\varrho' i),$$

wo ϱ, ϱ' dieſelbe Bedeutung haben, wie oben. Iſt nun $f'''(x)$ nicht $=0$, ſo haben nach (2.)

$$f'''(x-\varrho i) \text{ und } f'''(x+\varrho' i)$$

gleiche Vorzeichen. Alſo iſt

$$f(x-i) \lesseqgtr f(x),\ f(x+i) \gtreqless f(x)$$

oder

$$f(x) \gtreqless f(x-i),\ f(x) \lesseqgtr f(x+i),$$

und folglich f(x) weder ein Maximum, noch ein Minimum. Soll alſo f(x) ein Maximum oder ein Minimum ſeyn, ſo muß

$$f'''(x) = 0$$

ſeyn. Iſt dann auch $f^{IV}(x)$ zwiſchen den Gränzen $x-i$, $x+i$ ſtetig, ſo iſt nach dem mehrmals angeführten Artikel

$$f(x-i) = f(x) + \frac{i^4}{1 \ldots 4} f^{IV}(x-\varrho i),$$

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i^4}{1 \ldots 4} f^{IV}(x+\varrho' i).$$

Iſt nun $f^{IV}(x)$ nicht $=0$, ſo haben nach (2.)

$$f^{IV}(x-\varrho i) \text{ und } f^{IV}(x+\varrho' i)$$

ſowohl mit einander, als auch mit $f^{IV}(x)$, einerlei Vorzeichen. Iſt alſo $f^{IV}(x)$ poſitiv, ſo iſt

$$f(x-i) > f(x),\ f(x+i) > f(x)$$

oder

$$f(x) < f(x-i),\ f(x) < f(x+i),$$

d. i. f(x) ein Minimum. Iſt $f^{IV}(x)$ negativ, ſo iſt

$$f(x-i) < f(x),\ f(x+i) < f(x)$$

oder

$$f(x) > f(x-i),\ f(x) > f(x+i),$$

d. i. f(x) ein Maximum. Iſt aber $f^{IV}(x) = 0$ und zugleich $f^{V}(x)$ in dem unendlich kleinen Intervall $x-i$, $x+i$ ſtetig; ſo iſt, nach dem Artikel Taylors Lehrſatz (8.) i. d. Z.

$$f(x-i) = f(x) - \frac{i^5}{1 \ldots 5} f^{V}(x-\varrho i),$$

$$f(x-i) = f(x) + \frac{i^5}{1 \ldots 5} f^{V}(x+\varrho' i),$$

woraus wieder auf ganz ähnliche Art wie oben folgt, daß, wenn $f^{V}(x)$ nicht $=0$ iſt, f(x) weder ein Maximum, noch ein Minimum ſeyn kann. Iſt aber $f^{V}(x) = 0$, ſo iſt, wenn zugleich $f^{VI}(x)$ in dem unendlich kleinen Intervall $x-i$, $x+i$ ſtetig iſt nach dem angeführten Artikel,

$$f(x-i) = f(x) + \frac{i^6}{1 \ldots 6} f^{VI}(x-\varrho i)$$

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i^6}{1 \ldots 6} f^{VI}(x+\varrho' i).$$

Iſt nun $f^{VI}(x)$ nicht $=0$, ſo haben nach (2.)

$$f^{VI}(x - \varrho i) \text{ und } f^{VI}(x + \varrho' i)$$

ſowohl mit einander, als auch mit $f^{VI}(x)$ einerlei Vorzeichen. Iſt nun $f^{VI}(x)$ poſitiv, ſo iſt

$$f(x-i) > f(x),\ f(x+i) > f(x);$$
$$f(x) < f(x-i),\ f(x) < f(x+i),$$

d. i. $f(x)$ ein Minimum. Iſt aber $f^{VI}(x)$ negativ, ſo iſt

$$f(x-i) < f(x),\ f(x+i) < f(x);$$
$$f(x) > f(x-i),\ f(x) > f(x+i),$$

d. i. $f(x)$ ein Maximum. Wie man auf dieſe Art immer weiter gehen kann, erhellet aus dem Vorhergehenden mit vollkommener Deutlichkeit.

Faßt man alles Vorhergehende zuſammen, ſo ergiebt ſich der folgende allgemeine Lehrſatz:

Wenn für den beſtimmten Werth x der unabhängigen veränderlichen Größe die Functionen

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots\ f^{(n-1)}(x)$$

ſämmtlich verſchwinden, und, ſo wie $f(x)$ und $f^{(n)}(x)$, in dem unendlich kleinen Intervall $x-i$, $x+i$ ſtetig ſind, aber $f^{(n)}(x)$ nicht $=0$ iſt; ſo iſt

I. wenn n eine ungerade Zahl iſt, $f(x)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum. Iſt aber

II. n eine gerade Zahl, ſo iſt $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem $f^{(n)}(x)$ eine negative oder eine poſitive Größe iſt.

Iſt z. B.

$$f(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x},$$

ſo iſt

$$f'(x) = e^x - 2\sin x - e^{-x},$$
$$f''(x) = e^x - 2\cos x + e^{-x},$$
$$f'''(x) = e^x + 2\sin x - e^{-x},$$
$$f^{IV}(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x}.$$

Für $x=0$ verſchwinden

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)$$

ſämmtlich; dagegen iſt

$$f^{IV}(0) = 1 + 2 + 1 = 4,$$

d. i. eine poſitive Größe. Folglich iſt

$$f(0) = 1 + 2 + 1 = 4$$

ein Minimum der gegebenen Function, da im vorliegenden Falle an der Stetigkeit der Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ f^{IV}(x)$$

in dem unendlich kleinen Intervall $-i$, $+i$ nicht zu zweifeln iſt.

4. Im Allgemeinen bedient man ſich des vorhergehenden allgemeinen Lehrſatzes zur Auffindung größter und kleinſter Werthe

einer gegebenen Function auf folgende Art. Iſt f(x) wieder die gegebene Function, ſo entwickelt man den erſten Differentialquotienten f′(x), ſetzt

$$f'(x) = 0,$$

und ſucht die reellen Wurzeln dieſer Gleichung, ſofern es deren giebt. Iſt nun ξ eine reelle Wurzel dieſer Gleichung, ſo ſetzt man dieſelbe für x auch in die folgenden Differentialquotienten

$$f''(x),\ f'''(x),\ f^{IV}(x),\ f^{V}(x),\ \ldots,$$

wodurch man

$$f''(\xi),\ f'''(\xi),\ f^{IV}(\xi),\ f^{V}(\xi),\ \ldots\ldots$$

erhält. In dieſer Reihe bleibt man jederzeit bei dem erſten nicht verſchwindenden Gliede, wofern es ein ſolches Glied giebt, ſtehen. Iſt nun $f^{(n)}(\xi)$ dieſes erſte nicht verſchwindende Glied; ſo iſt

I. wenn n eine ungerade Zahl iſt, f(ξ) weder ein Maximum, noch ein Minimum. Iſt aber

II. n eine gerade Zahl, ſo iſt f(ξ) ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem $f^{(n)}(\xi)$ eine negative oder eine poſitive Größe iſt.

Alles dieſes gilt aber bloß unter der Vorausſetzung, daß die Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots\ f^{(n)}(x)$$

in dem unendlich kleinen Intervall $\xi - i$, $\xi + i$ ſämmtlich ſtetig ſind, wovon man ſich alſo in jedem einzelnen Falle beſonders verſichern muß. Häufig leuchtet indeß die Stetigkeit der obigen Functionen in dem angegebenen unendlich kleinen Intervall auf der Stelle von ſelbſt ein, wo man dann der Kürze wegen eine beſondere Unterſuchung in dieſer Beziehung nicht weiter anſtellt.

5. Soll man z. B. unter allen in eine Kugel mit dem gegebenen Halbmeſſer r beſchriebenen geraden Cylindern denjenigen finden, welcher entweder die größte Seitenfläche oder den größten körperlichen Inhalt hat; ſo ſetze man in beiden Fällen die Höhe des geſuchten Cylinders $= 2x$, die Seitenfläche $= s$, den körperlichen Inhalt $= v$. Dann iſt, wie leicht erhellet, der Halbmeſſer der Grundfläche $= \sqrt{r^2 - x^2}$, und folglich

$$s = 4\pi x \sqrt{r^2 - x^2},\quad v = 2\pi x (r^2 - x^2).$$

Entwickelt man die erſten Differentialquotienten, ſo erhält man:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 4\pi \frac{r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}},\quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2\pi (r^2 - 3x^2).$$

Setzt man nun zuerſt

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 0,$$

ſo wird

$$r^2 - 2x^2 = 0,\ x = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Setzt man dagegen

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 ,$$

ſo wird

$$r^2 - 3x^2 = 0, \quad x = \frac{r}{\sqrt{3}} .$$

Entwickelt man nun noch die zweiten Differentialquotienten, ſo wird

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 4\pi x \frac{2x^2 - 3r^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -12\pi x .$$

Für $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ wird

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -16\pi .$$

Für $x = \frac{r}{\sqrt{3}}$ wird

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{12\pi r}{\sqrt{3}} .$$

Da nun keiner dieſer beiden Werthe verſchwindet, und beide negativ ſind, ſo hat für $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ der eingeſchriebene gerade Cylinder die größte Seitenfläche, für $x = \frac{r}{\sqrt{3}}$ dagegen den größten körperlichen Inhalt. Der Inhalt der Seitenfläche des eingeſchriebenen Cylinders, welcher die größte Seitenfläche hat, findet ſich nach dem Vorhergehenden leicht $= 2r^2\pi$, d. h. doppelt ſo groß als der Inhalt eines größten Kreiſes der Kugel. Der körperliche Inhalt des eingeſchriebenen Cylinders, welcher den größten körperlichen Inhalt hat, iſt $= 4\pi \left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^3$, d. h. drei Mal ſo groß, wie der Inhalt einer Kugel, welche die Höhe dieſes Cylinders zum Durchmeſſer hat.

6. Um zu finden, ob es für die Function

$$f(x) = x^a e^{-x} ,$$

wo a eine poſitive Größe ſeyn ſoll, ein Maximum oder ein Minimum giebt, entwickele man den erſten Differentialquotienten

$$f'(x) = x^a e^{-x} \left(\frac{a}{x} - 1\right) .$$

Dieſer Differentialquotient verſchwindet, wie man ſogleich überſieht, für $x = a$. Nun entwickele man den zweiten Differentialquotienten, welchen man am leichteſten findet, wenn man

$$f'(x) = \left(\frac{a}{x} - 1\right) f(x)$$

ſetzt. Es ergiebt ſich nämlich

$$f''(x) = \left(\frac{a}{x} - 1\right) f'(x) - \frac{a}{x^2} f(x)$$
$$= \left(\frac{a}{x} - 1\right)^2 f(x) - \frac{a}{x^2} f(x) \,.$$

Alſo iſt für $x = a$

$$f''(a) = -\frac{1}{a} f(a) = -a^{a-1} e^{-a} \,,$$

und unſere Function wird alſo, da dieſe Größe negativ iſt, weil wir a als poſitiv angenommen haben, für $x = a$ ein Maximum.

7. Sey ferner

$$f(x) = \frac{A^x}{x} \,,$$

wo A größer als die Einheit ſeyn ſoll; ſo iſt, wenn wir die Logarithmen in einem Syſteme, deſſen Baſis A iſt, durch log bezeichnen:

$$f'(x) = \frac{A^x}{x} \left\{ \frac{1}{\log e} - \frac{1}{x} \right\} = \left\{ \frac{1}{\log e} - \frac{1}{x} \right\} f(x) \,.$$

Für $x = \log e$ verſchwindet alſo $f'(x)$ offenbar. Für den zweiten Differentialquotienten erhalten wir

$$f''(x) = \left\{ \frac{1}{\log e} - \frac{1}{x} \right\} f'(x) + \frac{1}{x^2} f(x)$$
$$= \left\{ \frac{1}{\log e} - \frac{1}{x} \right\}^2 f(x) + \frac{1}{x^2} f(x) \,.$$

Für $x = \log e$ iſt alſo

$$f''(\log e) = \frac{1}{(\log e)^2} \cdot \frac{A^{\log e}}{\log e} = \frac{e}{(\log e)^3} \,,$$

d. i. eine poſitive Größe, ſo daß alſo für $x = \log e$ unſere Function ein Minimum wird.

Um noch ein zuſammengeſetzteres Beiſpiel anzuführen, ſo ſey

$$f(x) = 6x^7 - 70x^6 + 336x^5 - 861x^4 + 1274x^3 - 1092x^2 + 504x - 27$$

die gegebene Function. Durch Differentiation erhält man:

$$f'(x) = 42(x^6 - 10x^5 + 40x^4 - 82x^3 + 91x^2 - 52x + 12)$$
$$= 42(x-1)^3(x-2)^2(x-3) \,,$$
$$f''(x) = 84(3x^5 - 25x^4 + 80x^3 - 123x^2 + 91x - 26)$$
$$= 84(x-1)^2(x-2)(3x^2 - 13x + 13) \,,$$
$$f'''(x) = 84(15x^4 - 100x^3 + 240x^2 - 246x + 91)$$
$$= 84(x-1)(15x^3 - 85x^2 + 155x - 91) \,,$$
$$f^{\mathrm{IV}}(x) = 168(30x^3 - 150x^2 + 240x - 123) \,.$$

Weiter bedarf man in dieſem Falle der Differentialquotienten nicht, wie wir gleich nachher ſehen werden. Der erſte Differentialquotient verſchwindet für

$$x = 1, \; x = 2, \; x = 3 \,.$$

Der erſte Differentialquotient, welcher für $x = 1$ nicht verſchwindet, iſt der vierte, und es iſt für $x = 1$

$$f^{IV}(1) = -504,$$

d. i. negativ. Daher iſt nach (3.)

$$f(1) = 70$$

ein Maximum.

Der erſte Differentialquotient, welcher für $x = 2$ nicht verſchwindet, iſt der dritte. Daher iſt nach (3.) $f(2)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum.

Der erſte Differentialquotient, welcher für $x = 3$ nicht verſchwindet, iſt der zweite, und es iſt

$$f'''(3) = 326,$$

d. i. poſitiv. Daher iſt nach (3.)

$$f(3) = 54$$

ein Minimum.

Wie man ſich in ähnlichen Fällen zu verhalten hat, geht hieraus mit hinlänglicher Deutlichkeit hervor.

8. Bei gebrochenen Functionen kann man ſich die Unterſuchung über die Maxima und Minima auf folgende Art erleichtern, wobei wir hier jedoch bloß den Fall betrachten wollen, wenn der zweite Differentialquotient der erſte Differentialquotient iſt, welcher für die Werthe von x, für welche der erſte Differentialquotient null wird, nicht verſchwindet. Die gegebene Function ſey überhaupt

$$y = \frac{p}{q},$$

wo p und q beide Functionen von x ſind. Bekanntlich iſt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{q\frac{\partial p}{\partial x} - p\frac{\partial q}{\partial x}}{q^2},$$

und es iſt folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

wenn

$$q\frac{\partial p}{\partial x} - p\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

iſt, weshalb man die der letzten Gleichung genügenden Werthe von x beſtimmen wird. Entwickeln wir nun ferner den zweiten Differentialquotienten, ſo erhalten wir

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{q^2\left\{q\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - p\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\right\} - 2q\left\{q\frac{\partial p}{\partial x} - p\frac{\partial q}{\partial x}\right\}\frac{\partial q}{\partial x}}{q^4}.$$

Da nun für die vorher gefundenen Werthe von x

$$q\frac{\partial p}{\partial x} - p\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

iſt; ſo iſt für dieſe Werthe von x

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{q\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - p\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}}{q^2}.$$

Nach dem Obigen kommt es bloſs darauf an, ob der zweite Differentialquotient für die in Rede ſtehenden Werthe von x poſitiv oder negativ iſt. Daher braucht man, weil q^2 immer poſitiv iſt, dieſe Werthe von x bloſs in die Gröſse

$$q\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - p\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

zu ſetzen, und die Vorzeichen der entſprechenden Werthe derſelben zu unterſuchen.

Für die Function

$$y = \frac{x^2 - 10x + 9}{x^2 + 10x + 9}$$

iſt z. B.

$$p = x^2 - 10x + 9, \; q = x^2 + 10x + 9;$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2x - 10, \; \frac{\partial q}{\partial x} = 2x + 10;$$

$$q\frac{\partial p}{\partial x} - p\frac{\partial q}{\partial x} = 20(x^2 - 9).$$

Setzt man nun

$$x^2 - 9 = 0,$$

ſo erhält man $x = \pm 3$. Ferner iſt

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 2, \; \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 2;$$

$$q\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - p\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 2(x^2 + 10x + 9) - 2(x^2 - 10x + 9) = 40x.$$

Für $x = \pm 3$ iſt alſo

$$q\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - p\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \pm 120,$$

und folglich unſere Function für $x = +3$ ein Minimum, für $x = -3$ dagegen ein Maximum. Für $x = +3$ wird $y = -\frac{1}{4}$, für $x = -3$ iſt dagegen $y = -4$.

9. Die Werthe von x, für welche eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $y = f(x)$ Statt findet, muſs man beſonders aufſuchen, und in jedem einzelnen Falle beſtimmen, ob einem ſolchen Werthe von x, wie es ſich oft trifft, vielleicht ein Maximum oder ein Minimum der Function entſpricht. Iſt z. B.

$$y = \sqrt{x};$$

ſo findet, wenn man ſich vorſtellt, daſs die unabhängige veränderliche Gröſse x von $+\infty$ bis $-\infty$ ſtetig abnimmt, bei dem Uebergange derſelben vom Poſitiven durch Null zum Negativen offenbar eine Unterbrechung der Stetigkeit der gegebenen Function

Statt, weil dieſelbe dann vom Reellen zum Imaginären übergeht. Für $x = 0$ iſt $y = 0$. Für ein jedes poſitive x, welches nicht $= 0$ iſt, iſt $y > 0$, und man ſieht leicht, daß überhaupt, wenn x von Null an ſtetig wächſt, auch y von Null an fortwährend ſtetig wachſen wird. Daher kann der dem Werthe $x = 0$ der unabhängigen veränderlichen Größe entſprechende Werth $y = 0$ der Function offenbar als ein Minimum derſelben betrachtet werden.

Auch für die Function

$$y = \frac{1}{lx}$$

findet, wenn $x = 0$ wird, eine Unterbrechung der Stetigkeit Statt. Sind nun x, x' beide poſitiv, aber beide kleiner als die Einheit, und $x' > x$; ſo iſt, weil

$$x = e^{lx},\ x' = e^{lx'}$$

iſt, auch

$$e^{lx'} > e^{lx}.$$

lx und lx' ſind nach der Vorausſetzung beide negativ, $-lx$ und $-lx'$ alſo beide poſitiv. Nach dem Vorhergehenden iſt

$$\frac{1}{e^{lx'}} < \frac{1}{e^{lx}}, \text{ d. i. } e^{-lx'} < e^{-lx},$$

und folglich, weil $-lx$ und $-lx'$ beide poſitiv ſind,

$$-lx' < -lx;$$

folglich

$$-\frac{1}{lx'} > -\frac{1}{lx};$$

alſo, da dieſe Größen beide poſitiv, folglich

$$\frac{1}{lx'} \text{ und } \frac{1}{lx}$$

beide negativ ſind,

$$\frac{1}{lx'} < \frac{1}{lx}.$$

Hieraus erhellet, daß man den dem Werthe $x = 0$ entſprechenden Werth der gegebenen Function als ein Maximum derſelben zu betrachten hat.

Auch für $x = 1$ findet eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function

$$y = \frac{1}{lx}$$

Statt, und man ſieht leicht, daß man auch den Werth dieſer Function, welcher dem in Rede ſtehenden Werthe von x entſpricht, und, wie ſogleich in die Augen fällt, $= \infty$ iſt, als ein Maximum der Function zu betrachten hat.

Für $x = \infty$ wird dagegen die Function

$$y = \frac{1}{lx}$$

offenbar ein Minimum.

10. Es möge jetzt wieder x irgend einen beliebigen, aber beſtimmten, Werth der unabhängigen veränderlichen Größe, und f(x), wie gewöhnlich, der entſprechende Werth der gegebenen Function ſeyn. Will man nun beurtheilen, ob f(x) vielleicht ein Maximum oder Minimum der in Rede ſtehenden Function iſt; ſo kann man auf folgende Art verfahren. Man laſſe x ſich um die der Null unendlich nahe kommende Größe Δx verändern; ſo iſt, wenn $\Delta f(x)$, wie gewöhnlich, die entſprechende Aenderung der Function bezeichnet,

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\Delta x.$$

Iſt nun, immer für der Null unendlich nahe kommende Δx,

I. $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ poſitiv oder negativ, jenachdem reſpective Δx negativ oder poſitiv iſt; ſo iſt offenbar f(x) ein Maximum. Iſt aber

II. $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ poſitiv oder negativ, jenachdem reſpective Δx poſitiv oder negativ iſt; ſo iſt f(x) ein Minimum.

Dies kann man auch auf folgende Art ausdrücken:

I. Wenn für der Null unendlich nahe kommende poſitive oder negative Δx die Größen Δx und $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ ſtets ungleiche Zeichen haben; ſo iſt f(x) ein Maximum.

II. Wenn aber für der Null unendlich nahe kommende poſitive oder negative Δx die Größen Δx und $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ ſtets gleiche Vorzeichen haben; ſo iſt f(x) ein Minimum.

Nach dem Begriffe des Differentialquotienten nähern die Größen

$$f'(x + \Delta x) \text{ und } \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

ſich einander deſto mehr, je mehr Δx ſich der Null nähert, und können einander beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx nahe genug bei Null annimmt. Daher werden für der Null unendlich nahe kommende Δx dieſe Größen offenbar gleiche Vorzeichen haben, ſo daß man alſo die beiden obigen Sätze auch auf folgende Art ausdrücken kann:

I. Wenn für der Null unendlich nahe kommende poſitive oder negative Δx die Größen Δx und $f'(x + \Delta x)$ ſtets ungleiche Vorzeichen haben; ſo iſt f(x) ein Maximum.

II. Wenn aber für der Null unendlich nahe kommende poſitive oder negative Δx die Größen Δx und $f'(x + \Delta x)$ ſtets gleiche Vorzeichen haben; ſo iſt $f(x)$ ein Minimum.

Laſſen wir, wie ſchon früher öfters, i wieder eine unendlich kleine poſitive Größe bezeichnen; ſo können dieſe beiden Sätze auch auf folgende Art ausgedrückt werden:

I. Wenn für unendlich kleine poſitive i die Größe $f'(x-i)$ poſitiv, die Größe $f'(x+i)$ dagegen negativ iſt; ſo iſt $f(x)$ ein Maximum.

II. Wenn aber für unendlich kleine poſitive i die Größe $f'(x-i)$ negativ, die Größe $f'(x+i)$ dagegen poſitiv iſt; ſo iſt $f(x)$ ein Minimum.

Auf dieſe Art kann man alſo immer beurtheilen, ob der dem gegebenen Werthe x der unabhängigen veränderlichen Größe entſprechende Werth $f(x)$ der Function ein Maximum oder ein Minimum, oder keines von beiden iſt. Hätten nämlich für unendlich kleine poſitive i die Größen $f'(x-i)$ und $f'(x+i)$ gleiche Vorzeichen; ſo würde $f(x)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum ſeyn.

Da das Vorhergehende, wie leicht erhellet, auch gültig bleibt, wenn für den Werth x der unabhängigen veränderlichen Größe eine Unterbrechung der Stetigkeit der erſten derivirten Function der gegebenen Function Statt findet; ſo bedient man ſich der vorhergehenden Methode vorzüglich auch, um zu beurtheilen, ob den Werthen der unabhängigen veränderlichen Größe, für welche die Stetigkeit der erſten derivirten Function der gegebenen Function unterbrochen wird, Maxima oder Minima der gegebenen Function entſprechen. Die Werthe von x, für welche eine Unterbrechung der Stetigkeit der erſten derivirten Function Statt findet, namentlich die Werthe von x, für welche

$$f'(x) = \pm \infty \text{ oder } \frac{1}{f'(x)} = 0$$

iſt, werden daher auch immer beſonders aufgeſucht, und die Beurtheilung, ob Maxima oder Minima der gegebenen Function Statt finden, auf die obige Weiſe angeſtellt, wie wir jetzt durch ein Paar Beiſpiele erläutern wollen.

Iſt z. B. die Function

$$y = f(x) = b + c(x-a)^{\frac{2}{3}}$$

gegeben; ſo iſt

$$f'(x) = \tfrac{2}{3}c(x-a)^{-\frac{1}{3}}.$$

Für $x = a$ wird dieſer Ausdruck unendlich. Da nun

$$f'(a-i) = \tfrac{2}{3}c(-i)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2c}{3\sqrt[3]{i}},$$

$$f'(a+i) = \tfrac{2}{3}c(+i)^{-\frac{1}{3}} = +\frac{2c}{3\sqrt[3]{i}}$$

iſt; ſo iſt

I. wenn c negativ iſt, $f'(a-i)$ poſitiv, $f'(a+i)$ dagegen negativ, folglich $f(a)$ ein Maximum. Iſt aber

II. c poſitiv, ſo iſt $f'(a-i)$ negativ, $f'(a+i)$ dagegen poſitiv, alſo $f(a)$ ein Minimum.

Iſt die gegebene Function

$$y = f(x) = b + (x-a)^{\frac{5}{3}};$$

ſo iſt

$$f'(x) = \tfrac{5}{3}(x-a)^{\frac{2}{3}}.$$

Setzt man dieſe derivirte Function $= 0$ und beſtimmt demgemäß x, ſo erhält man $x = a$. Entwickelt man nun noch die zweite derivirte Function oder den zweiten Differentialquotienten; ſo erhält man

$$f''(x) = \tfrac{10}{9}(x-a)^{-\frac{1}{3}}.$$

Für $x = a$ wird dieſer zweite Differentialquotient unendlich, und es läßt ſich alſo wegen Unterbrechung der Stetigkeit nicht mittelſt deſſelben entſcheiden, ob $f(a)$ ein Maximum oder ein Minimum iſt. Wir müſſen folglich in dieſem Falle unſere obige Regel anwenden. Nach dem Vorhergehenden iſt nun

$$f'(a-i) = \tfrac{5}{3}(-i)^{\frac{2}{3}} = \tfrac{5}{3}\sqrt[3]{i^2},$$

$$f'(a+i) = \tfrac{5}{3}(+i)^{\frac{2}{3}} = \tfrac{5}{3}\sqrt[3]{i^2}.$$

ſo daß alſo dieſe beiden Größen einerlei Vorzeichen haben, und nach dem Obigen folglich weder ein Maximum, noch ein Minimum, Statt findet.

Iſt dagegen

$$y = f(x) = b + (x-a)^{\frac{4}{3}}$$

die gegebene Function, ſo iſt

$$f'(x) = \tfrac{4}{3}(x-a)^{\frac{1}{3}},$$

Dieſe Größe verſchwindet für $x = a$. Der zweite Differentialquotient iſt

$$f''(x) = \tfrac{4}{9}(x-a)^{-\frac{2}{3}},$$

und wird alſo für $x = a$ unendlich. Da nun

$$f'(a-i) = \tfrac{4}{3}(-i)^{\frac{1}{3}} = -\tfrac{4}{3}\sqrt[3]{i},$$

$$f'(a+i) = \tfrac{4}{3}(+i)^{\frac{1}{3}} = +\tfrac{4}{3}\sqrt[3]{i},$$

die erſte dieſer beiden Größen alſo negativ, die zweite poſitiv iſt, ſo iſt nach dem Obigen $f(a)$ ein Minimum.

Für
$$y = f(x) = b - (x - a)^{\frac{4}{3}}$$
iſt
$$f'(x) = -\tfrac{4}{3}(x - a)^{\frac{1}{3}}.$$
Alſo iſt
$$f'(a-i) = -\tfrac{4}{3}(-i)^{\frac{1}{3}} = +\tfrac{4}{3}\sqrt[3]{i},$$
$$f'(a+i) = -\tfrac{4}{3}(+i)^{\frac{1}{3}} = -\tfrac{4}{3}\sqrt[3]{i},$$
und folglich f(a) ein Maximum.

II. Functionen mit mehreren von einander unabhängigen veränderlichen Größen.

11. Wenn ein gewiſſer beſtimmter Werth der Function
$$u = f(x, y, z, v, \ldots)$$
der von einander unabhängigen veränderlichen Größen x, y, z, v, ... ſo beſchaffen iſt, daß derſelbe entweder größer oder kleiner als alle ihm benachbarte Werthe dieſer Function, d. h. größer oder kleiner wie alle diejenigen Werthe iſt, welche dieſelbe erhält, wenn man alle von einander unabhängige veränderliche Größen ſich um der Null unendlich nahe kommende poſitive oder negative Größen verändern läßt; ſo heißt der in Rede ſtehende Werth der gegebenen Function im erſten Falle ein Maximum, im zweiten ein Minimum.

Die Lehre von den Maximis und Minimis der Functionen mit mehreren von einander unabhängigen veränderlichen Größen läßt ſich durch die folgende einfache Betrachtung auf die Lehre von den Maximis und Minimis der Functionen mit einer veränderlichen Größe zurückführen. Man kann ſich nämlich vorſtellen, daß alle veränderliche Größen x, y, z, v, ... der Function
$$u = f(x, y, z, v, \ldots)$$
von einer beliebigen ganz unbeſtimmt bleibenden veränderlichen Größe, die wir im Folgenden immer durch s bezeichnen wollen, abhängen, und daß alle Veränderungen der Größen x, y, z, v, ... durch eine Veränderung der Größe s herbeigeführt werden. Scheint es nun auch, als wenn auf dieſe Weiſe die Größen x, y, z, v, ... ſelbſt in eine gegenſeitige Abhängigkeit von einander geſetzt würden; ſo iſt dies doch, wie leicht erhellet, durchaus nicht der Fall, wenn man nur die Art der Abhängigkeit einer jeden der Größen x, y, z, v, ... von der Größe s ganz unbeſtimmt läßt, oder, was daſſelbe iſt, die Größen x, y, z, v, ... als ganz unbeſtimmte Functionen von s betrachtet. Der Kürze wegen wollen wir in der Folge die Differentialquotienten
$$\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial s}, \ldots,$$
welche nach dem eben Geſagten ganz unbeſtimmte Größen ſind,

bloß durch ∂x, ∂y, ∂z, ∂v, ... bezeichnen. Alle Differentialquotienten, die von u in Bezug auf x, y, z, v, ... genommen ſind, ſind partielle Differentialquotienten. Auch wollen wir immer annehmen, daß alle vorkommenden Größen reelle endliche völlig beſtimmte Werthe haben, oder daß nirgends eine Unterbrechung der Stetigkeit Statt findet.

12. Zuerſt betrachten wir bloß die Function

$$u = f(x, y)$$

mit den zwei von einander unabhängigen veränderlichen Größen x, y. Soll u für einen gewiſſen beſtimmten Werth der Größe s, den wir der Kürze wegen durch s ſelbſt bezeichnen wollen, ein Maximum oder ein Minimum ſeyn; ſo muß bekanntlich

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 0$$

ſeyn. Iſt dies nicht der Fall, ſo kann auch weder ein Maximum, noch ein Minimum, Statt finden. Nun iſt aber nach dem Artikel Differentialrechnung (47.) i. d. Z. bekanntlich

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\partial x + \frac{\partial u}{\partial y}\partial y\,,$$

und es muß alſo, wenn überhaupt ein Maximum oder ein Minimum Statt finden ſoll,

$$\frac{\partial u}{\partial x}\partial x + \frac{\partial u}{\partial y}\partial y = 0$$

ſeyn. Da aber die Art der Abhängigkeit der Größen x, y von s ganz unbeſtimmt bleiben ſoll, alſo ∂x und ∂y ganz unbeſtimmte Größen ſind, und die obige Gleichung folglich für jedes ganz beliebige ∂x und ∂y gelten muß; ſo muß, wenn überhaupt ein Maximum oder ein Minimum ſoll Statt finden können, abgeſondert

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ſeyn. Sind dieſe beiden Gleichungen nicht zugleich erfüllt, ſo findet weder ein Maximum, noch ein Minimum Statt. Wirklich wird aber, wenn dieſe Gleichungen zugleich erfüllt ſind, ein Maximum oder ein Minimum dann Statt finden, wenn $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$ nicht $= 0$ und reſpective negativ oder poſitiv iſt. Mit Berückſichtigung der Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

erhält man aber

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\partial x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\partial x\,\partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\partial y^2\,.$$

Dieſe Größe wird wegen der völligen Unbeſtimmtheit von ∂x, ∂y, dz bloß dann $= 0$, wenn zugleich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Soll alſo die in Rede ſtehende Gröſse nicht $=0$ ſeyn, ſo darf nicht zugleich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

ſeyn. Iſt dieſe Bedingung erfüllt, ſo wird ferner ein Maximum oder ein Minimum nur dann Statt finden, wenn

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\delta x^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\delta x\,\delta y+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\delta y^2$$

für alle δx, δy reſpective negativ oder poſitiv iſt, für alle δx, δy alſo auch einerlei Vorzeichen behält. Letzteres wird der Fall ſeyn, wenn die beiden Wurzeln der quadratiſchen Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\delta x}{\delta y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\delta x}{\delta y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

imaginär ſind, wie aus bekannten einfachen Sätzen von den Gleichungen erhellet. Aus vorſtehender Gleichung erhält man aber

$$\frac{\delta x}{\delta y}=\frac{-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\pm\sqrt{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}},$$

und die in Rede ſtehende Gröſse wird daher für alle δx, δy einerlei Vorzeichen behalten, wenn

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}<0$$

iſt. Iſt dies aber der Fall, ſo haben offenbar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \text{und}\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

einerlei Vorzeichen. Auch iſt, wenn die obige Bedingung erfüllt iſt, zugleich auch die Bedingung erfüllt, daſs nicht zugleich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

iſt.

Da nun, wenn

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}<0$$

iſt, die Gröſse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\delta x^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\delta x\,\delta y+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\delta y^2$$

für alle δx und δy einerlei Vorzeichen hat; ſo ſieht man, wenn man $\delta x=0$ ſetzt, daſs dieſe Gröſse immer mit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\delta y^2,$$

d. i. mit $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, alſo mit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

einerlei Vorzeichen hat, folglich poſitiv oder negativ iſt, jenachdem die beiden letztern Differentialquotienten reſpective poſitiv oder negativ ſind.

Nimmt man nun alles Vorhergehende zuſammen; ſo ergiebt ſich folgender Satz:

Wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

und

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

iſt; ſo iſt die Function

$$u = f(x, y)$$

ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem die beiden Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

beide negativ oder beide poſitiv ſind.

Iſt z. B.

$$u = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F;$$

ſo iſt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2Ax + 2By + 2D, \; \frac{\partial u}{\partial y} = 2Bx + 2Cy + 2E;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2A, \; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2C, \; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2B.$$

Aus den Gleichungen

$$Ax + By + D = 0, \; Bx + Cy + E = 0$$

erhält man:

$$x = \frac{BE - CD}{AC - B^2}, \; y = \frac{BD - AE}{AC - B^2}.$$

Für dieſe Werthe von x und y iſt nun u ein Maximum, wenn

$$A < 0, \; B^2 - AC < 0,$$

ein Minimum dagegen, wenn

$$A > 0, \; B^2 - AC < 0$$

iſt.

Soll man die gegebene Zahl a auf eine ſolche Art in drei Theile theilen, daß deren Product ein Maximum wird; ſo bezeichne man zwei dieſer Theile durch x, y, den dritten alſo durch a — x — y. Es ſoll nun

$$u = xy(a - x - y)$$

ein Maximum werden. Für die Differentialquotienten erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y(a-x-y) - xy = ay - 2xy - y^2 ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x(a-x-y) - xy = ax - 2xy - x^2 ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - 2y, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - 2x, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a - 2y - 2x .$$

Zur Beſtimmung der x und y, für welche ein Maximum oder Minimum von u Statt finden kann, hat man:

$$ay - 2xy - y^2 = 0 ,$$

$$ax - 2xy - x^2 = 0 ,$$

d. i.

$$a - 2x - y = 0, \; a - 2y - x = 0 .$$

Beſtimmt man aus dieſen beiden Gleichungen x und y; ſo ergiebt ſich

$$x = y = \tfrac{1}{3} a .$$

Für dieſen gemeinſchaftlichen Werth von x und y iſt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \tfrac{2}{3} a, \; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = - \tfrac{1}{3} a .$$

Alſo ſind die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

beide negativ. Auch iſt

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0 ,$$

für $x = y = \frac{1}{3} a$. Folglich iſt u für $x = y = \frac{1}{3} a$ ein Maximum. Der dritte Theil iſt $a - x - y = \frac{1}{3} a$, ſo daß alſo, wenn das Product der drei Theile ein Maximum ſeyn ſoll, dieſe drei Theile einander gleich ſeyn müſſen.

Bemerkt kann hierbei noch werden, daß die beiden Gleichungen

$$ay - 2xy - y^2 = 0,$$

$$ax - 2xy - x^2 = 0$$

auch erfüllt werden, wenn man $x = y = 0$ ſetzt. Dann wird das Product $u = 0$, alſo offenbar ein Minimum.

Auf dieſe Aufgabe läßt ſich die folgende zurückführen: Unter allen Dreiecken, deren Umfang eine gegebene Größe iſt, dasjenige zu finden, welches den größten Flächeninhalt hat. Setzen wir den gegebenen Umfang $= s$, den Flächeninhalt, welcher ein Maximum werden ſoll, $= u$, und bezeichnen die drei Seiten durch x, y, z; ſo iſt bekanntlich

$$u^2 = \tfrac{1}{2} s (\tfrac{1}{2} s - x)(\tfrac{1}{2} s - y)(\tfrac{1}{2} s - z) .$$

Da nun s eine gegebene conſtante Größe iſt, ſo müſſen x, y, z ſo beſtimmt werden, daß das Product

$$(\tfrac{1}{2}s - x)(\tfrac{1}{2}s - y)(\tfrac{1}{2}s - z)$$

ein Maximum wird. Die Summe der drei Factoren dieſes Products iſt

$$\tfrac{3}{2}s - (x + y + z) = \tfrac{3}{2}s - s = \tfrac{1}{2}s\,,$$

d. i. eine gegebene Größe. Man muß alſo die gegebene Größe $\tfrac{1}{2}s$ in drei Theile theilen, deren Product ein Maximum iſt, und hat folglich nach dem Vorhergehenden

$$\tfrac{1}{2}s - x = \tfrac{1}{6}s\,,$$
$$\tfrac{1}{2}s - y = \tfrac{1}{6}s\,,$$
$$\tfrac{1}{2}s - z = \tfrac{1}{6}s\,.$$

woraus

$$x = y = z = \tfrac{1}{3}s$$

folgt. Die drei Seiten des geſuchten Dreiecks müſſen folglich einander gleich, oder dieſes Dreieck ein gleichſeitiges ſeyn. Dies giebt den folgenden Satz:

Unter allen Dreiecken von gleichem Umfange hat das gleichſeitige den größten Flächeninhalt,

ein Satz, der bekanntlich auch ohne große Schwierigkeit auf elementarem Wege bewieſen werden kann.

Wenn nun aber die Größen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

zugleich verſchwinden; ſo erhält man leicht

$$\frac{\partial^3 u}{\partial s^3} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\delta x^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}\delta x^2\,\delta y + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}\delta x\,\delta y^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\delta y^3\,.$$

Bekanntlich kann bloß dann ein Maximum oder ein Minimum Statt finden, wenn dieſe Größe für jedes δx und δy null, d. h. wenn zugleich

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = 0,\ \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} = 0,\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0$$

iſt. Iſt dies der Fall, ſo erhält man

$$\frac{\partial^4 u}{\partial s^4} =$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\delta x^4 + 4\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\,\partial y}\delta x^3\delta y + 6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}\delta x^2\,\delta y^2 + 4\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3}\delta x\,\delta y^3 + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\delta y^4$$

und es wird nun ein Maximum oder ein Minimum Statt finden, wenn dieſe Größe nicht $= 0$, und für jedes δx und δy reſpective negativ oder poſitiv iſt, alſo auch für jedes δx und δy einerlei Vorzeichen behält. Letzteres wird dann Statt finden, wenn alle Wurzeln der Gleichung

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\left(\frac{\delta x}{\delta y}\right)^4 + 4\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}\left(\frac{\delta x}{\delta y}\right)^3 + 6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\left(\frac{\delta x}{\delta y}\right)^2 + 4\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3}\cdot\frac{\delta x}{\delta y} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$$

imaginär ſind, eine Bedingung, die ſich auf keinen einfachen analytiſchen Ausdruck bringen läßt. Es genügt uns, hier den Weg angedeutet zu haben, auf welchem man auf die obige Art weiter fortſchreiten kann.

13. Bei Functionen mit drei von einander unabhängigen veränderlichen Größen kann man auf eine ganz ähnliche Art wie vorher verfahren. Iſt nämlich

$$u = f(x, y, z)$$

eine beliebige Function der drei von einander unabhängigen veränderlichen Größen x, y, z; ſo muß, wenn überhaupt ein Maximum oder ein Minimum Statt finden ſoll, für jedes δx, δy, δz

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z = 0\,,$$

d. h. zugleich

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

ſeyn. Wirklich wird aber, wenn dieſe drei Gleichungen erfüllt ſind, ein Maximum oder Minimum jederzeit dann Statt finden, wenn $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$ nicht $= 0$ und reſpective negativ oder poſitiv iſt. Mit Berückſichtigung der drei obigen Gleichungen iſt aber

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\delta x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\delta y^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\delta z^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\delta x\,\delta y$$
$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\delta x\,\delta z + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\delta y\,\delta z\,,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen immer

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b,\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = c\,;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \alpha,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \beta,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \gamma$$

ſetzen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = a\delta x^2 + b\delta y^2 + c\delta z^2 + 2\alpha\,\delta x\,\delta y + 2\beta\,\delta x\,\delta z + 2\gamma\,\delta y\,\delta z\,,$$

eine Größe, welche wegen der Unbeſtimmtheit von δx, δy, δz nur dann nicht $= 0$ wird, wenn nicht zugleich

$$a = 0,\ b = 0,\ c = 0,\ \alpha = 0,\ \beta = 0,\ \delta = 0$$

iſt. Behält obige Größe für jedes δx, δy, δz einerlei Vorzeichen; ſo findet ein Maximum oder ein Minimum Statt, jenachdem dieſelbe immer negativ oder immer poſitiv iſt. Die in Rede ſtehende Größe behält aber, wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{\delta x}{\delta z} = p,\ \frac{\delta y}{\delta z} = q$$

ſetzen, für jedes δx, δy, δz einerlei Vorzeichen, wenn die beiden Wurzeln der quadratiſchen Gleichung

$$ap^2 + 2(\alpha q + \beta)p + bq^2 + 2\gamma q + c = 0,$$

indem man dieſelbe nach p auflöſt, für jedes q imaginär ſind, d. h., wie man leicht findet, wenn für jedes q

$$(\alpha^2 - ab)q^2 + 2(\alpha\beta - a\gamma)q + \beta^2 - ac < 0$$

iſt. Iſt nun aber

$$(\alpha\beta - a\gamma)^2 - (\alpha^2 - ab)(\beta^2 - ac) < 0,$$

ſo hat die obige Größe nach (12.) mit den beiden Größen

$$\alpha^2 - ab, \quad \beta^2 - ac,$$

welche unter der obigen Vorausſetzung offenbar entweder beide poſitiv oder beide negativ ſind, einerlei Vorzeichen. Iſt alſo

$$\alpha^2 - ab < 0$$

und

$$(\alpha\beta - a\gamma)^2 - (\alpha^2 - ab)(\beta^2 - ac) < 0;$$

ſo iſt für jedes q

$$(\alpha^2 - ab)q^2 + 2(\alpha\beta - a\gamma)q + \beta^2 - ac < 0,$$

und die Größe

$$a\delta x^2 + b\delta y^2 + c\delta z^2 + 2\alpha\delta x\delta y + 2\beta\delta x\delta z + 2\gamma\delta y\delta z$$

hat für alle δx, δy, δz einerlei Vorzeichen.

Aus den beiden Bedingungen

$$\alpha^2 - ab < 0,$$
$$(\alpha\beta - a\gamma)^2 - (\alpha^2 - ab)(\beta^2 - ac) < 0$$

folgt, daß auch

$$\beta^2 - ac < 0$$

iſt, und aus

$$\alpha^2 - ab < 0, \quad \beta^2 - ac < 0$$

ergiebt ſich, daß ſowohl a und b, als auch a und c, daß alſo die drei Größen a, b, c einerlei Vorzeichen haben. Aus der Bedingung

$$(\alpha\beta - a\gamma)^2 - (\alpha^2 - ab)(\beta^2 - ac) < 0$$

folgt ferner

$$-2a\alpha\beta\gamma + a^2\gamma^2 + ab\beta^2 + ac\alpha^2 - a^2bc < 0,$$

oder

$$a(-2\alpha\beta\gamma + a\gamma^2 + b\beta^2 + c\alpha^2 - abc) < 0.$$

Weil nun a und b einerlei Vorzeichen haben, ſo iſt auch

$$b(-2\alpha\beta\gamma + a\gamma^2 + b\beta^2 + c\alpha^2 - abc) < 0$$

oder

$$\alpha^2\gamma^2 - 2\alpha\gamma b\beta + b^2\beta^2 - (\alpha^2 - ab)\gamma^2 + (\alpha^2 - ab)bc < 0,$$

d. i.

$$(\alpha\gamma - b\beta)^2 - (\alpha^2 - ab)(\gamma^2 - bc) < 0,$$

ſo daß alſo

$$\alpha^2 - ab \text{ und } \gamma^2 - bc$$

gleiche Vorzeichen haben, d. i. auch

$$\gamma^2 - bc < 0$$

iſt.

Weil a und c gleiche Vorzeichen haben, ſo iſt nach dem Vorhergehenden auch

$$c(-2\alpha\beta\gamma + a\gamma^2 + b\beta^2 + c\alpha^2 - abc) < 0$$

oder

$$\beta^2\gamma^2 - 2\beta\gamma ca + c^2\alpha^2 - (\beta^2 - ac)\gamma^2 + (\beta^2 - ac)bc < 0,$$

d. i.

$$(\beta\gamma - c\alpha)^2 - (\beta^2 - ac)(\gamma^2 - bc) < 0.$$

Hieraus ſieht man, daß, wenn

$$\alpha^2 - ab < 0,$$

$$(\alpha\beta - a\gamma)^2 - (\alpha^2 - ab)(\beta^2 - ac) < 0$$

iſt, immer auch

$$\beta^2 - ac < 0, \quad \gamma^2 - bc < 0;$$

$$(\alpha\gamma - b\beta)^2 - (\alpha^2 - ab)(\gamma^2 - bc) < 0,$$

$$(\beta\gamma - c\alpha)^2 - (\beta^2 - ac)(\gamma^2 - bc) < 0$$

iſt, und a, b, c gleiche Vorzeichen haben.

Da nun, wenn die obigen Bedingungen erfüllt ſind, die Größe

$$a\delta x^2 + b\delta y^2 + c\delta z^2 + 2\alpha\delta x\delta y + 2\beta\delta x\delta z + 2\gamma\delta y\delta z$$

für alle δx, δy, δz einerlei Vorzeichen hat; ſo überzeugt man ſich, wenn man nur $\delta x = \delta y = 0$ ſetzt, auf der Stelle, daß dieſe Größe immer mit $c\delta z^2$, d. i. mit c, alſo, weil a, b, c gleiche Vorzeichen haben, für jedes δx, δy, δz mit a, b, c einerlei Vorzeichen hat, folglich poſitiv oder negativ iſt, jenachdem reſpective a, b, c poſitiv oder negativ ſind.

Nimmt man nun alles Vorhergehende zuſammen; ſo ergiebt ſich, indem a, b, c, α, β, γ immer ihre obige Bedeutung behalten, folgender Satz:

Wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

und

$$\alpha^2 - ab < 0,$$

$$(\alpha\beta - a\gamma)^2 - (\alpha^2 - ab)(\beta^2 - ac) < 0$$

iſt; *ſo haben* a, b, c *einerlei Vorzeichen, und die Function*

$$u = f(x, y, z)$$

iſt ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem die

drei Größen a, b, c reſpective negativ oder poſitiv ſind.

Uebrigens erhellet aus dem Vorhergehenden auch, daß, wenn die beiden Bedingungen

$$\alpha^2 - ab < 0,$$
$$(\alpha\beta - a\gamma)^2 - (\alpha^2 - ab)(\beta^2 - ac) < 0$$

erfüllt ſind, jederzeit die ſechs Bedingungen

$$\alpha^2 - ab < 0, \quad \beta^2 - ca < 0, \quad \gamma^2 - bc < 0:$$
$$(\alpha\beta - a\gamma)^2 - (\alpha^2 - ab)(\beta^2 - ca) < 0,$$
$$(\gamma\alpha - b\beta)^2 - (\gamma^2 - bc)(\alpha^2 - ab) < 0,$$
$$(\beta\gamma - c\alpha)^2 - (\beta^2 - ca)(\gamma^2 - bc) < 0$$

zugleich erfüllt ſind.

Obigen Satz kann man auch noch auf einen andern Ausdruck bringen. Wenn nämlich $\alpha^2 - ab < 0$ iſt, ſo kann offenbar a nicht $= 0$ ſeyn. Wenn dann auch die Größe

$$-2\alpha\beta\gamma + a\gamma^2 + b\beta^2 + c\alpha^2 - abc$$

oder

$$a\gamma^2 + b\beta^2 + c\alpha^2 - abc - 2\alpha\beta\gamma$$

nicht $= 0$ iſt, und a mit dieſer Größe entgegengeſetztes Vorzeichen hat; ſo iſt jederzeit

$$a(-2\alpha\beta\gamma + a\gamma^2 + b\beta^2 + c\alpha^2 - abc) < 0,$$

oder, wie aus dem Obigen erhellet,

$$(\alpha\beta - a\gamma)^2 - (\alpha^2 - ab)(\beta^2 - ac) < 0,$$

und die beiden Bedingungen

$$\alpha^2 - ab < 0.$$
$$(\alpha\beta - a\gamma)^2 - (\alpha^2 - ab)(\beta^2 - ac) < 0$$

ſind folglich erfüllt.

Wenn alſo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

und $\alpha^2 - ab < 0$ iſt, die Größe a aber mit der nicht verſchwindenden Größe

$$a\gamma^2 + b\beta^2 + c\alpha^2 - abc - 2\alpha\beta\gamma$$

entgegengeſetztes Vorzeichen hat; ſo haben a, b, c jederzeit einerlei Vorzeichen, und die Function

$$u = f(x, y, z)$$

iſt ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem a, b, c negativ oder poſitiv ſind.

13*. Um einen Fall zu betrachten, welcher ſich nach den vorhergehenden Regeln nicht unmittelbar beurtheilen läßt, wollen wir die Bedingungen aufſuchen, unter denen die Function

$$u = (Cy - Bz + L)^2 + (Az - Cx + M)^2 + (Bx - Ay + N)^2,$$

wo A, B, C, L, M, N conſtante Größen und A, B, C nicht $= 0$ ſeyn ſollen, ein Maximum oder ein Minimum wird.

Setzt man die partiellen erſten Differentialquotienten der gegebenen Function in Bezug auf x, y, z gleich 0, ſo erhält man die drei Gleichungen

$$\frac{Bx - Ay + N}{C} = \frac{Az - Cx + M}{B},$$

$$\frac{Cy - Bz + L}{A} = \frac{Bx - Ay + N}{C},$$

$$\frac{Az - Cx + M}{B} = \frac{Cy - Bz + L}{A},$$

wo nun aber ſogleich in die Augen fällt, daß dies nur zwei von einander unabhängige Gleichungen zwiſchen den drei unbekannten Größen x, y, z ſind, da jede derſelben eine unmittelbare Folge aus den beiden andern iſt, ſo daß es alſo unendlich viele Werthe von x, y, z giebt, welche dieſen drei, oder eigentlich bloß zwei Gleichungen, die man kürzer unter der Form

$$\frac{Cy - Bz + L}{A} = \frac{Az - Cx + M}{B} = \frac{Bx - Ay + N}{C}$$

ſchreibt, genügen.

Um nun zu unterſuchen, ob den dieſen Gleichungen genügenden Werthen von x, y, z Maxima oder Minima der Function u entſprechen, muß man die zweiten partiellen Differentialquotienten entwickeln, und erhält, wenn wir die oben eingeführte Bezeichnung beibehalten, leicht:

$$a = 2(B^2 + C^2),\ b = 2(A^2 + C^2),\ c = 2(A^2 + B^2);$$
$$\alpha = -2AB,\ \beta = -2AC,\ \gamma = -2BC;$$

folglich

$$\alpha^2 - ab = -4(A^2 + B^2 + C^2)C^2, \text{ d. i. } \alpha^2 - ab < 0,$$

und, wie man leicht findet,

$$a\gamma^2 + b\beta^2 + c\alpha^2 - abc - 2\alpha\beta\gamma = 0;$$

alſo auch

$$(\alpha\beta - a\gamma)^2 - (\alpha^2 - ab)(\beta^2 - ac) = 0.$$

Hieraus ſieht man, daß ſich in dieſem Falle nach den obigen Regeln nicht beurtheilen läßt, ob den, den beiden obigen Gleichungen genügenden Werthen von x, y, z ein Maximum oder ein Minimum der gegebenen Function entſpricht.

Entwickelt man aber aus dem erſten Differential von u, welches für die in Rede ſtehenden Werthe von x, y, z verſchwindet, das zweite vollſtändige Differential von u; ſo erhält man

$$\partial^2 u = 2\{(A\partial z - C\partial x)^2 + (B\partial x - A\partial y)^2 + (C\partial y - B\partial z)^2\}$$

und ſieht alſo, daß dieſes Differential für alle x, y, z und alle ∂x, ∂y, ∂z poſitiv iſt. Hieraus ſchließt man mittelſt der Lehre von den Maximis und Minimis der Functionen mit einer veränderlichen Größe, indem man nur immer die Vorſtellung feſthält, daß die Veränderungen von u durch die Veränderungen einer veränderlichen Größe, von der man ſich x, y, z abhängend denkt, herbeigeführt werde, auf der Stelle, daß für alle den beiden obigen Gleichungen genügende Werthe von x, y, z die Function u ein Minimum wird. Zugleich findet man durch leichte Rechnung, daß für alle ſolche Werthe von x, y, z die Function u den conſtanten Werth

$$\frac{(AL + BM + CN)^2}{A^2 + B^2 + C^2}$$

hat, welcher alſo jederzeit ein Minimum dieſer Function iſt. Wir haben alſo hier zugleich einen Fall, in dem es unendlich viele Minima einer Function giebt.

III. Functionen, deren veränderliche Größen nicht ganz unabhängig von einander ſind.

14. Wir wollen zuerſt bloß die Function

$$u = f(x, y)$$

der beiden veränderlichen Größen x, y betrachten, nehmen aber an, daß dieſe beiden veränderlichen Größen nicht unabhängig von einander ſind, ſondern daß zwiſchen denſelben eine Gleichung, welche wir im Allgemeinen durch

$$\varphi(x, y) = V = 0$$

bezeichnen wollen, gegeben iſt. Es kommt nun darauf an, die Werthe von x und y zu finden, welche der Gleichung $V = 0$ genügen und die Function u zu einem Maximo oder Minimo machen. Der Weg, welcher ſich zur Auflöſung dieſes Problems zuerſt darbietet, iſt folgender. Mittelſt der Gleichung $V = 0$ beſtimmt man die eine der beiden Größen x, y durch die andere, etwa y durch x, ſetzt den gefundenen Ausdruck für y in die gegebene Function $u = f(x, y)$, und hat nun eine bloß von der veränderlichen Größe x abhängende Function, ſo daß alſo jetzt die Aufgabe auf den in I. ausführlich betrachteten Fall zurückgeführt iſt. Setzen wir nämlich $u = F(x)$; ſo beſtimmt man nun nach I. den Werth von x, für welchen u ein Maximum oder ein Minimum wird, führt den gefundenen Werth von x in den vorher für y gefundenen Ausdruck ein, und erhält ſo auch den entſprechenden Werth von y, wodurch alſo die Aufgabe vollſtändig aufgelöſt iſt. Man ſieht aber, daß dieſe Aunflöſung unſerer Aufgabe auf der Auflöſung der Gleichung $V = 0$ beruhet,

und daher die allgemeine Auflöſung der Gleichungen als gegeben vorausſetzt, welches bekanntlich nicht verſtattet iſt. Dadurch wird die Nothwendigkeit einer andern die allgemeine Auflöſung der Gleichungen wenigſtens in ſo fern nicht in Anſpruch nehmenden Auflöſung fühlbar, daß man in jedem Falle zwei völlig entwickelte Gleichungen finden kann, welche bloß die geſuchten Werthe von x und y, für welche die Function u ein Maximum oder ein Minimum wird, als unbekannte Größen enthalten. Durch eine ſolche Auflöſung, die wir nun zu geben verſuchen wollen, iſt die Aufgabe dann auf ein bloßes Problem der Algebra zurückgeführt.

15. Betrachten wir wie vorher y und folglich auch u als eine Function von x, ſo iſt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

die gemeinſchaftliche Bedingung des Maximums und Minimums. Schließen wir aber jetzt größerer Deutlichkeit wegen, wie dies auch ſonſt gewöhnlich iſt, die partiellen Differentialquotienten in Parentheſen ein; ſo iſt bekanntlich

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x},$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

die gemeinſchaftliche Bedingung des Maximums und Minimums. Ferner iſt nach der Vorausſetzung $V = 0$. Folglich iſt

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

ſo daß wir alſo jetzt die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x},\ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = -\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x}$$

haben, aus denen durch Diviſion

$$\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)}$$

oder

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0$$

folgt. Aus dieſer Gleichung, verbunden mit der Gleichung $V = 0$, laſſen ſich x und y beſtimmen. Hat man ſo x und y gefunden, ſo laſſen ſich auch mittelſt der Gleichungen

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

und

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

die entſprechenden Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ beſtimmen. Mittelſt dieſer Werthe ergiebt ſich dann auch nach der Formel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

der den oben gefundenen Werthen von x und y entſprechende Werth von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Iſt dieſer Werth nun nicht $= 0$, ſo iſt der den gefundenen Werthen von x und y entſprechende Werth von u ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem der in Rede ſtehende Werth von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ negativ oder poſitiv iſt.

Seyen z. B. x, y ſo zu beſtimmen, daß die Function

$$u = ax + by$$

ein Maximum oder ein Minimum wird, und zugleich

$$x^2 + y^2 = r^2$$

iſt. In dieſem Falle iſt

$$V = x^2 + y^2 - r^2 = 0 .$$

Da nun

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = a,\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = b,\ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 2x,\ \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = 2y$$

iſt; ſo hat man zur Beſtimmung von x und y die Gleichungen

$$ay - bx = 0,\ x^2 + y^2 - r^2 = 0 .$$

Setzt man nun den Werth

$$y = \frac{b}{a}x$$

aus der erſten Gleichung in die zweite Gleichung; ſo erhält man mit Uebereinſtimmung der obern und untern Zeichen:

$$x = \pm\frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}},\ y = \pm\frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}} .$$

Der entſprechende Werth von u iſt

$$u = \pm r\sqrt{a^2 + b^2} .$$

Ferner hat man nun im vorliegenden Falle

$$x + y\frac{\partial y}{\partial x} = 0 ,$$

$$1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 .$$

Alſo iſt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{r^2}{y^3}.$$

Für die obigen Werthe von x und y iſt folglich

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mp\frac{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{rb^3}.$$

Alſo iſt nach dem Obigen für die in Rede ſtehenden Werthe von x und y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mp\frac{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{rb^2}.$$

Für

$$x = \frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}},\ y = \frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

iſt alſo, wenn r poſitiv iſt,

$$u = r\sqrt{a^2+b^2}$$

ein Maximum; für

$$x = -\frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}},\ y = -\frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

iſt dagegen, wenn r poſitiv iſt,

$$u = -r\sqrt{a^2+b^2}$$

ein Minimum. Iſt r negativ, ſo findet das Umgekehrte Statt.

Man kann dieſe Aufgabe auch leicht auf die in (14.) angedeutete Art auflöſen. Aus der Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

folgt nämlich

$$y = \pm\sqrt{r^2-x^2}.$$

Alſo iſt

$$u = ax + by = ax \pm b\sqrt{r^2-x^2}$$

und folglich, wenn man differentiirt,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a\sqrt{r^2-x^2} \mp bx}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Zur Beſtimmung von x hat man alſo die Gleichung

$$a\sqrt{r^2-x^2} \mp bx = 0 \text{ oder } a\sqrt{r^2-x^2} = \pm bx,$$

woraus ſich

$$x^2 = \frac{a^2r^2}{a^2+b^2}$$

ergiebt. Setzt man nun

$$x = \pm\frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

ſo muß man, mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander,

$$y = \pm\frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ſetzen, wie leicht auf folgende Art erhellet. Nach dem Obigen iſt nämlich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2},\ a\sqrt{r^2 - x^2} \mp bx = 0\,,$$

d. i.

$$\pm\, ay \mp bx = 0 \text{ oder } ay - bx = 0\,,$$

und dieſe Gleichung würde nicht erfüllt werden, wenn man

$$x = \pm \frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}},\ y = \mp \frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ſetzen wollte.

Für

$$x = \pm \frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}},\ y = \pm \frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

iſt $u = \pm\, r\sqrt{a^2+b^2}$, und durch Entwickelung des zweiten Differentialquotienten von u erhält man

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mp \frac{br^2}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-x^2}}\,;$$

alſo für den obigen Werth von x, wenn man, wie es nach dem Obigen erforderlich iſt,

$$\sqrt{r^2-x^2} = +\,y = \frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

ſetzt,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mp \frac{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{rb^2}\,,$$

woraus ſich nun, wie ſogleich erhellet, ganz mit den vorher gefundenen übereinſtimmende Reſultate ergeben.

Wir wollen jetzt ferner zwei Zahlen x, y, zwiſchen denen die Gleichung

$$ax + by = k$$

gegeben iſt, ſo zu beſtimmen ſuchen, daß die Summe der Quadrate dieſer beiden Zahlen ein Minimum wird. In dieſem Falle iſt alſo

$$V = ax + by - k,\ u = x^2 + y^2\,;$$

folglich

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2x,\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2y,\ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = a,\ \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = b\,.$$

Alſo haben wir zur Beſtimmung von x und y die Gleichungen

$$bx - ay = 0,\ ax + by - k = 0\,.$$

Aus dieſen beiden Gleichungen erhält man:

$$x = \frac{ak}{a^2 + b^2},\ y = \frac{bk}{a^2 + b^2}.$$

Der entſprechende Werth von u iſt

$$u = \frac{k^2}{a^2 + b^2}.$$

Es iſt nun in dieſem Falle

$$a + b\frac{\partial y}{\partial x} = 0,\ b\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0;$$

folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{a}{b},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Alſo iſt, weil

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 2,\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

iſt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 + \frac{2a^2}{b^2} = \frac{2(a^2 + b^2)}{b^2},$$

d. i. poſitiv. Folglich iſt

$$u = \frac{k^2}{a^2 + b^2}$$

ein Minimum.

Soll man eine Zahl k ſo in zwei Theile theilen, daß die Summe der Quadrate derſelben ein Minimum wird; ſo hat man in der vorigen Aufgabe $a = b = 1$ zu ſetzen. Dies giebt

$$x = y = \tfrac{1}{2}k,$$

ſo daß alſo die beiden Theile einander gleich ſeyn müſſen, wenn die Summe ihrer Quadrate ein Minimum ſeyn ſoll.

Auch dieſe Aufgabe läßt ſich noch ganz leicht nach der in (14.) angegebenen Methode auflöſen. Aus der Gleichung

$$ax + by = k$$

folgt nämlich

$$y = \frac{k - ax}{b}.$$

Folglich iſt

$$u = x^2 + y^2 = \frac{(a^2 + b^2)x^2 - 2akx + k^2}{b}.$$

Alſo iſt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2(a^2 + b^2)x - 2ak}{b^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2(a^2 + b^2)}{b^2}.$$

Zur Beſtimmung von x hat man

$$(a^2 + b^2)x - ak = 0;$$

folglich

$$x = \frac{ak}{a^2 + b^2}.$$

Weil der zweite Differentialquotient poſitiv iſt, ſo findet ein Minimum Statt, Alles ganz übereinſtimmend mit dem Vorhergehenden.

Wir wollen jetzt x und y ſo beſtimmen, daß

$$ax + by = k \text{ und } u = x^p y^q = \text{Max}.$$

iſt. Da $V = ax + by - k$ iſt, ſo iſt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = px^{p-1}y^q, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = qx^p y^{q-1}, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = a, \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = b.$$

Alſo haben wir zur Beſtimmung von x und y nach dem Obigen die Gleichungen

$$ax + by - k = 0, \; bpx^{p-1}y^q - aqx^p y^{q-1} = 0$$

oder

$$ax + by - k = 0, \; bpy - aqx = 0.$$

Aus dieſen beiden Gleichungen erhält man:

$$x = \frac{kp}{a(p+q)}, \; y = \frac{kq}{b(p+q)}.$$

Es iſt nun

$$a + b\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{a}{b}, \; \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Auch iſt

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = p(p-1)x^{p-2}y^q, \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = q(q-1)x^p y^{q-2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = pqx^{p-1}y^{q-1}.$$

Es iſt nun nach dem Obigen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$$

$$p(p-1)x^{p-2}y^q - \frac{2a}{b}\cdot pqx^{p-1}y^{q-1} + \frac{a^2}{b^2}\cdot q(q-1)x^p y^{q-2}.$$

und folglich, wenn man die obigen Werthe von x und y einführt, nach gehöriger Reduction:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{k^{p+q-2}p^{p-1}q^{q-1}}{a^{p-2}b^q(q+q)^{p+q-3}}.$$

Alſo iſt dieſer zweite Differentialquotient, wenn nur, wie wir vorausſetzen wollen, die Größen k, a, b, p, q ſämmtlich poſitiv ſind, negativ und folglich

$$u = \frac{k^{p+q}p^p q^q}{a^p b^q (p+q)^{p+q}}$$

ein Maximum.

16. Wir wollen jetzt annehmen, daß

$$u = f(x, y, z)$$

und zwiſchen den drei veränderlichen Größen x, y, z die Gleichung

$$\varphi(x, y, z) = V = 0$$

gegeben ſey. In dieſem Falle könnte man aus letzterer Gleichung, indem man x und y als bekannt betrachtet, z entwickeln, und den gefundenen Ausdruck von x für z in die gegebene Function

$$u = f(x, y, z)$$

ſetzen, wo dann u eine Function der beiden von einander ganz unabhängigen veränderlichen Größen, und die Aufgabe folglich auf den in (12.) ausführlich betrachteten Fall zurückgeführt ſeyn würde. Man ſieht aber leicht, daß dieſe Methode ganz den mit der Auflöſung der Gleichung V = 0 verbundenen Schwierigkeiten unterliegt, und daher das Bedürfniß einer von der Auflöſung dieſer Gleichung unabhängigen Methode fühlbar wird. Um eine ſolche Methode zu finden, denken wir uns x, y, z wieder von der einen veränderlichen Größe s abhängig und bezeichnen die Differentialquotienten

$$\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}$$

der Kürze wegen durch δx, δy, δz, wie wir ſchon früher gethan haben; ſo iſt

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\delta z$$

und

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta z = 0 .$$

Als gemeinſchaftliche Bedingungen des Maximums und Minimums haben wir alſo in dieſem Falle:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\delta z = 0 ,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\delta z = 0 .$$

Eliminiren wir aus dieſen beiden Gleichungen δz; ſo erhalten wir

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right\}\delta x + \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right\}\delta y = 0 .$$

Die Natur der Aufgabe erfordert, daß dieſe Gleichung für jedes δx und δy Statt finden muß, da natürlich δx und δy in dieſem Falle ganz unabhängig von einander ſind. Dies giebt die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0,$$

oder

$$\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)},$$

welche, verbunden mit der Gleichung

$$V = \varphi(x, y, z) = 0$$

zur Beſtimmung der Größen x, y, z hinreichend ſind. Ob nun wirklich für die gefundenen Werthe von x, y, z ein Maximum oder ein Minimum Statt findet, muß auf folgende Art entſchieden werden. Aus den Gleichungen

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0, \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \\ \qquad + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\end{array}\right\} = 0$$

entwickele man

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right); \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)$$

und ſubſtituire in die erhaltenen Ausdrücke die oben gefundenen Werthe von x, y, z. Bezeichnen wir nun die partiellen zweiten Differentialquotienten von u, welche man erhalten würde, wenn man den Ausdruck von z durch x, y in u für z ſubſtituirte, und dann u zwei Mal nach x, zwei Mal nach y, und ein Mal nach x und ein Mal nach y differentirte, d. h. die zweiten Differentialquotienten von u, indem man u bloß als Function von x und y betrachtet, durch **X**, **Y**, **Z**; ſo iſt

$$X = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right),$$

$$Y = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right),$$

$$Z = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Mittelſt dieſer Formeln kann man alſo auch die den oben gefundenen Werthen von x, y, z entſprechenden Werthe von X, Y, Z finden, welche wir der Kürze wegen durch dieſelben Buchſtaben bezeichnen wollen. Wenn nun

$$Z^2 - XY < 0$$

iſt; ſo iſt die Function u für die gefundenen Werthe von x, y, z nach (12.) ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem X, Y beide negativ oder beide poſitiv ſind. Dies wollen wir nun durch einige Beiſpiele erläutern.

Seyen z. B. x, y, z ſo zu beſtimmen, daß

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

und

$$ax + by + cz = u$$

ein Maximum oder ein Minimum iſt.

In dieſem Falle iſt

$$V = x^2 + y^2 + z^2 - r^2,$$

folglich

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 2x, \ \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = 2y, \ \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = 2z.$$

Ferner iſt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = a, \ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = b, \ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = c,$$

und man hat alſo zur Beſtimmung von x, y, z die folgenden Gleichungen:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z},$$

oder

$$y = \frac{b}{a}x, \ z = \frac{c}{a}x.$$

Weil nun

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

iſt; ſo erhält man

$$x = \pm \frac{ar}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$
$$y = \pm \frac{br}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$
$$z = \pm \frac{cr}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Der entſprechende Werth von u iſt

$$u = \pm r\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,.$$

Weil nun

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 2x,\ \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = 2y,\ \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = 2z\,;$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) = 2,\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) = 2,\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = 2\,;$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = 0,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = 0$$

iſt; ſo hat man nach dem Obigen die Gleichungen:

$$x + z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,\ y + z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0\,;$$

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 0,\ 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0\,;$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0\,.$$

Folglich iſt

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\frac{x}{z},\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\frac{y}{z};\ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = -\frac{x^2 + z^2}{z^3},\ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = -\frac{y^2 + z^2}{z^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{z^3}\,.$$

Ferner iſt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = a,\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = b,\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = c\,;$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0,\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0,\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0\,;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0\,.$$

Alſo

$$X = -c\frac{x^2 + z^2}{z^3},\ Y = -c\frac{y^2 + z^2}{z^3},\ Z = -c\frac{xy}{z^3}\,.$$

Folglich für die obigen Werthe von x, y, z:

$$X = \mp\frac{a^2 + c^2}{c^2 r}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2},\ Y = \mp\frac{b^2 + c^2}{c^2 r}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

$$Z = \mp\frac{ab}{c^2 r}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,.$$

Weil nun

$$a^2 b^2 - (a^2 + c^2)(b^2 + c^2) < 0$$

iſt; ſo iſt, wenn man die obern Zeichen nimmt, u ein Maximum, ein Minimum dagegen, wenn man die untern Zeichen nimmt.

Seyen ferner x, y, z ſo zu beſtimmen, daß

$$ax + by + cz = k$$

und

$$x^2 + y^2 + z^2 = u$$

ein Minimum iſt.

Es iſt in dieſem Falle

$$V = ax + by + cz - k.$$

Alſo iſt

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = a, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = b, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = c.$$

Ferner iſt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2x, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2y, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 2z.$$

Alſo hat man zur Beſtimmung von x, y, z die Gleichungen:

$$\frac{2x}{a} = \frac{2y}{b} = \frac{2z}{c}$$

oder

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Setzt man nun

$$y = \frac{b}{a}x, \quad z = \frac{c}{a}x$$

in die Gleichung

$$ax + by + cz = k;$$

ſo erhält man

$$x = \frac{ak}{a^2 + b^2 + c^2},$$

$$y = \frac{bk}{a^2 + b^2 + c^2},$$

$$z = \frac{ck}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Der entſprechende Werth von u iſt

$$u = \frac{k^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

wo nun noch beſonders beurtheilt werden muß, ob dieſer Werth von u wirklich ein Minimum iſt. Die partiellen zweiten Differentialquotienten von V verſchwinden ſämmtlich, und man hat alſo nach dem Obigen

$$a + c\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0, \quad b + c\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0;$$

$$c\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 0, \quad c\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0, \quad c\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0;$$

alſo

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\frac{a}{c},\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\frac{b}{c};$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

Ferner iſt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2x,\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2x,\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 2z;$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 2,\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 2,\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = 0.$$

Alſo iſt

$$X = \frac{2(a^2+c^2)}{c^2},\ Y = \frac{2(b^2+c^2)}{c^2},\ Z = \frac{2ab}{c^2}.$$

Weil nun offenbar

$$a^2 b^2 - (a^2+c^2)(b^2+c^2) < 0$$

iſt, ſo iſt auch

$$Z^2 - XY < 0,$$

und es findet folglich, weil auch X und Y poſitiv ſind, in der That ein Minimum Statt.

Man kann dieſe Aufgabe auch auf folgende Art auflöſen. Aus der Gleichung

$$ax + by + cz = k$$

folgt

$$z = \frac{k - ax - by}{c}.$$

Alſo iſt

$$u = x^2 + y^2 + \frac{(k - ax - by)^2}{c^2}$$

$$= \frac{(a^2+c^2)x^2 + (b^2+c^2)y^2 + 2abxy - 2akx - 2bky + k^2}{c^2}.$$

Folglich iſt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{2(a^2+c^2)x + 2aby - 2ak}{c^2},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{2(b^2+c^2)y + 2abx - 2bk}{c^2}.$$

Für das Maximum oder Minimum muß

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0,\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

ſeyn. Dies giebt die Gleichungen

$$(a^2+c^2)x + aby - ak = 0\,,$$
$$(b^2+c^2)y + abx - bk = 0\,.$$

Dies giebt

$$x = \frac{ak}{a^2+b^2+c^2},\quad y = \frac{bk}{a^2+b^2+c^2}\,.$$

Der entſprechende Werth von u iſt

$$u = \frac{k^2}{a^2+b^2+c^2}\,.$$

Ferner iſt

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{2(a^2+c^2)}{c^2},\quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{2(b^2+c^2)}{c^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{2ab}{c^2}\,,$$

woraus man ganz wie bei der vorigen Auflöſung ſchließt, daß der obige Werth von u in der That ein Minimum iſt.

Soll man unter allen rechtwinkligen Parallelepipeden, welche ein und dieſelbe gegebene Oberfläche 2s haben, dasjenige finden, welches den größten körperlichen Inhalt hat; ſo hat man, wenn man die drei auf einander ſenkrechten Kanten durch x, y, z bezeichnet, folgende Gleichungen

$$xy + xz + yz = s$$

und $xyz = \text{Max}$. Statt dieſer beiden Gleichungen kann man die folgenden ſetzen:

$$xy + xz + yz = s\,,$$
$$lx + ly + lz = u = \text{Max}\,.$$

Weil

$$V = xy + xz + yz - s = 0$$

iſt; ſo iſt

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = y + z,\quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = x + z,\quad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = x + y\,.$$

Ferner iſt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{x},\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{y},\quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{1}{z}\,,$$

und man hat alſo zur Beſtimmung von x, y, z die Gleichungen

$$x(y+z) = y(x+z) = z(x+y)\,,$$

welche, wie bekannt, mit der Gleichung

$$xy + xz + yz = s$$

verbunden werden müſſen. Man findet leicht

$$x = y = z = \sqrt{\frac{s}{3}}\,.$$

Der entſprechende Werth von xyz iſt

$$xyz = \frac{s}{3}\sqrt{\frac{s}{3}}\,.$$

Weil nun

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) = 0, \ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) = 0, \ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 1, \ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = 1, \ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = 1$$

iſt; ſo iſt

$$y + z + (x+y)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,$$

$$x + z + (x+y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\frac{y+z}{x+y}, \ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\frac{x+z}{x+y}.$$

Ferner iſt

$$-2\frac{y+z}{x+y} + (x+y)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 0,$$

$$-2\frac{x+z}{x+y} + (x+y)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 2\frac{y+z}{(x+y)^2}, \ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 2\frac{x+z}{(x+y)^2}.$$

Endlich iſt

$$1 - \frac{y+z}{x+y} - \frac{x+z}{x+y} + (x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2z}{(x+y)^2}.$$

Weil nun

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = -\frac{1}{x^2}, \ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = -\frac{1}{y^2}, \ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = -\frac{1}{z^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$$

iſt; ſo iſt

$$X = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2}\cdot\frac{(y+z)^2}{(x+y)^2} + \frac{1}{z}\cdot\frac{2(y+z)}{(x+y)^2},$$

$$Y = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2}\cdot\frac{(x+z)^2}{(x+y)^2} + \frac{1}{z}\cdot\frac{2(x+z)}{(x+y)^2},$$

$$Z = -\frac{1}{z^2}\cdot\frac{x+z}{x+y}\cdot\frac{y+z}{x+y} + \frac{1}{z}\cdot\frac{2z}{(x+y)^2},$$

oder, weil nach dem Obigen $x = y = z$ iſt:

$$X = -\frac{1}{x^2}, \ Y = -\frac{1}{x^2}, \ Z = -\frac{1}{2x^2}.$$

Alſo ſind **X** und **Y** beide negativ. Ferner iſt

$$Z^2 - XY = \frac{1}{4x^4} - \frac{1}{x^4} = -\frac{3}{4x^4},$$

d. i. $Z^2 - XY < 0$, ſo daß alſo in der That ein Maximum

Statt findet. Unter allen Parallelepiden, welche eine gegebene Oberfläche haben, hat alſo der Würfel den größten körperlichen Inhalt.

17. Wir wollen nun auch noch den Fall betrachten, wenn

$$u = f(x, y, z)$$

ein Maximum oder ein Minimum werden ſoll, und zwiſchen den veränderlichen Größen x, y, z die beiden Gleichungen

$$\varphi(x, y, z) = V = 0, \quad \varphi'(x, y, z) = V' = 0$$

gegeben ſind. Die ſich zuerſt darbietende Methode der Auflöſung iſt folgende. Aus den beiden Gleichungen $V = 0$ und $V' = 0$ beſtimme man die beiden veränderlichen Größen y und z durch x, führe die erhaltenen Ausdrücke für y und z in die Function u ein, und beſtimme nun das Maximum oder Minimum wie bei Functionen mit einer veränderlichen Größe. So einfach dieſe Auflöſung auch in der Theorie iſt, ſo ſieht man doch ſogleich, daß dieſelbe allen mit der Auflöſung der Gleichungen nothwendig verbundenen Schwierigkeiten unterliegt, und daher eine andere Auflöſung, welche in dem Sinne von (14.) die allgemeine Auflöſung der Gleichungen nicht als bekannt vorausſetzt, ſehr wünſchenswerth iſt. Zu einer der in Rede ſtehenden Schwierigkeiten nicht unterliegenden Auflöſung gelangt man auf eine ganz ähnliche Art wie in (15.). Betrachten wir u, y, z als Functionen von x; ſo iſt nach bekannten Sätzen der Differentialrechnung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0;$$

$$\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Die gemeinſchaftliche Bedingung des Maximums und Minimums iſt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Alſo hat man die drei folgenden Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Eliminirt man aus dieſen drei Gleichungen die Größen

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial z}{\partial x};$$

ſo erhält man:

$$\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$+\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0\,.$$

Dieſe Gleichung, verbunden mit den Gleichungen $V=0$ und $V'=0$, reicht zur Beſtimmung der Größen x, y, z hin. Hat man auf dieſe Art x, y, z beſtimmt, ſo findet man die entſprechenden Werthe von

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial z}{\partial x}$$

mittelſt der Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x}+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x}=0\,,$$
$$\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x}+\left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x}=0\,.$$

Die entſprechenden Werthe von

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

findet man dann ferner mittelſt der beiden Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)+2\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+2\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial y^2}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\cdot\frac{\partial z^2}{\partial x^2}$$
$$+2\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0\,,$$
$$\left(\frac{\partial^2 V'}{\partial x^2}\right)+2\frac{\partial^2 V'}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+2\frac{\partial^2 V'}{\partial x\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 V'}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial y^2}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 V'}{\partial z^2}\right)\cdot\frac{\partial z^2}{\partial x^2}$$
$$+2\frac{\partial^2 V'}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0\,.$$

Hat man ſo

$$\frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

gefunden; ſo ergiebt ſich $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ mittelſt der Formel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial y^2}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\cdot\frac{\partial z^2}{\partial x^2}$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,.$$

Iſt dann, immer für die nach dem Obigen gefundenen Werthe von x, y, z, der zweite Differentialquotient $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ nicht $=0$; ſo findet für die in Rede ſtehenden Werthe von x, y, z ein Maximum oder ein Minimum der Function u Statt, jenachdem dieſer Differentialquotient negativ oder poſitiv iſt.

Das Vorhergehende wird hinreichend ſeyn, deutlich zu zeigen, wie man ſich auch in complicirteren Fällen bei der Beſtim-

mung der Maxima und Minima der Functionen, deren veränderliche Größen nicht ganz unabhängig von einander ſind, zu verhalten hat.

IV. Unentwickelte Functionen.

18. Wir wollen jetzt annehmen, daß zwiſchen den Größen x und y die Gleichung

$$u = f(x, y) = 0$$

gegeben ſey, und wollen nun x ſo zu beſtimmen ſuchen, daß der entſprechende Werth von y ein Maximum oder ein Minimum wird. Bekanntlich iſt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = 0 .$$

Die allgemeine Bedingung des Maximums und Minimums iſt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 .$$

Dieſe Bedingung wird, wie ſich aus der vorhergehenden Gleichung auf der Stelle ergiebt, erfüllt ſeyn, wenn

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

iſt. Man hat alſo jetzt die beiden Gleichungen

$$u = 0,\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 ,$$

aus denen ſich x und y beſtimmen laſſen.

Ferner iſt

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 .$$

Aber für die gefundenen Werthe von x und y

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 .$$

Alſo für die in Rede ſtehenden Werthe von x und y

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 .$$

Aus dieſer Gleichung findet man $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Iſt nun dieſer Differentialquotient für die gefundenen Werthe von x und y nicht $= 0$; ſo findet ein Maximum oder ein Minimum der gegebenen Function Statt, jenachdem derſelbe negativ oder poſitiv iſt. Wäre dieſer Differentialquotient aber $= 0$, ſo müßte man den dritten Differentialquotienten von y entwickeln, welcher ſich, immer bloß in Bezug auf den Werth dieſes Differentialquotienten für die oben gefundenen Werthe von x und y, aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$$

ergiebt. Soll dann für die gefundenen Werthe von x und y überhaupt ein Maximum oder ein Minimum Statt finden, ſo muß für dieſe Werthe von x und y der dritte Differentialquotient von y auch = 0 ſeyn. Den vierten Differentialquotienten findet man aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) . \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 .$$

Iſt dann der vierte Differentialquotient für die gefundenen Werthe von x und y nicht = 0; ſo findet ein Maximum oder ein Minimum der gegebenen Function Statt, jenachdem dieſer Differentialquotient negativ oder poſitiv iſt. Wie man auf dieſe Art weiter gehen kann, wird nun keiner weitern Erläuterung bedürfen.

Die gegebene Gleichung ſey z. B.

$$y^2 - 2axy + x^2 - c^2 = 0 ,$$

wo nun x ſo beſtimmt werden ſoll, daß y ein Maximum oder ein Minimum wird. Da in dieſem Falle

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -2ay + 2x$$

iſt; ſo hat man zur Beſtimmung von x und y die beiden Gleichungen

$$x - ay = 0 ,$$
$$y^2 - 2axy + x^2 - c^2 = 0 .$$

Aus der erſten ergiebt ſich

$$x = ay$$

Setzt man dies in die zweite, ſo erhält man

$$y^2 - 2a^2y^2 + a^2y^2 - c^2 = 0 ,$$
$$y^2(1 - a^2) = c^2 .$$

Hieraus ergiebt ſich leicht

$$x = \pm \frac{ac}{\sqrt{1-a^2}},\ y = \pm \frac{c}{\sqrt{1-a^2}} .$$

Zugleich ergiebt ſich hieraus, daß, wenn die Aufgabe möglich ſeyn ſoll, $a^2 < 1$ ſeyn muß.

Ferner iſt nun

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 2,\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2y - 2ax .$$

Alſo iſt für die gefundenen Werthe von x und y:

$$1 \pm \left\{\frac{c}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{a^2 c}{\sqrt{1-a^2}}\right\} . \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 ,$$

$$1 \pm c\sqrt{1-a^2} . \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 ,$$

und folglich

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mp \frac{1}{c\sqrt{1-a^2}} .$$

Iſt nun c poſitiv, ſo findet für

$$x = \frac{ac}{\sqrt{1-a^2}},\ y = \frac{c}{\sqrt{1-a^2}}$$

ein Maximum, für

$$x = -\frac{ac}{\sqrt{1-a^2}},\ y = -\frac{c}{\sqrt{1-a^2}}$$

dagegen ein Minimum der Function y Statt. Iſt aber c negativ, ſo findet für die beiden erſten Werthe von x und y ein Minimum, für die beiden letzten dagegen ein Maximum Statt.

Die gegebene Gleichung ſey ferner

$$y^3 - axy + x^3 = 0 .$$

In dieſem Falle iſt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 3x^2 - ay ,$$

und wir haben alſo zur Beſtimmung von x und y die beiden folgenden Gleichungen:

$$3x^2 - ay = 0 ,$$
$$y^3 - axy + x^3 = 0 .$$

Aus der erſten folgt

$$y = \frac{3x^2}{a} .$$

Dies in die zweite geſetzt, giebt

$$\frac{27x^3}{a^3} - 2 = 0 ,$$

woraus

$$x = \tfrac{1}{3}a\sqrt[3]{2},\ y = \tfrac{1}{3}a\sqrt[3]{4}.$$

Ferner iſt

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 6x,\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 3y^2 - ax .$$

Alſo iſt für die gefundenen Werthe von x und y:

$$2a\sqrt[3]{2} + \tfrac{1}{3}a^2\sqrt[3]{2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 ,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{6}{a} .$$

Jenachdem nun a poſitiv oder negativ iſt, findet alſo für

$$x = \tfrac{1}{3}a\sqrt[3]{2},\ \ y = \tfrac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$$

reſpective ein Maximum oder ein Minimum der Function y Statt.

Zu bemerken iſt hierbei noch, daß den beiden Gleichungen

$$3x^2 - ay = 0 ,$$
$$y^3 - axy + x^3 = 0$$

auch genügt wird, wenn man $x = 0$, $y = 0$ ſetzt. Für dieſe Werthe von x und y geht die Gleichung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

in die identiſche Gleichung

$$0 + 0 . \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

über, und es fragt ſich nun, ob für $x = 0$, $y = 0$ der Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$, wie erfordert wird, wirklich $= 0$ iſt. Durch Differentiation erhält man aber leicht

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} . \frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) . \frac{\partial y^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) . \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$$

und folglich, wie leicht erhellet, für $x = y = 0$:

$$-2a\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

ſo daß alſo für $x = y = 0$ wirklich $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ iſt. Sucht man nun den entſprechenden Werth von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) . \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

zu beſtimmen; ſo erhält man die identiſche Gleichung

$$0 + 0 . \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$$

welche alſo den Werth des zweiten Differentialquotienten unbeſtimmt läßt. Mit Berückſichtigung der Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

erhält man aber leicht durch Differentiation:

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} . \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) . \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0 .$$

Folglich für $x = y = 0$:

$$6 - 3a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{2}{a} .$$

Jenachdem nun a poſitiv oder negativ iſt, findet alſo für $x = y = 0$ reſpective ein Minimum oder ein Maximum Statt. Iſt alſo a poſitiv, ſo iſt $y = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$ für $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$ ein Maximum, $y = 0$ für $x = 0$ dagegen ein Minimum. Iſt aber a negativ, ſo iſt $y = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$ für $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$ ein Minimum, $y = 0$ für $x = 0$ dagegen ein Maximum.

19. Wir wollen nun ferner annehmen, daß zwiſchen den Größen x, y, z die Gleichung

$$u = f(x, y, z) = 0$$

gegeben ſey; ſo kann man jede dieſer drei Größen als Function der beiden andern, z. B. z als Function von x und y, betrachten, und dann x und y ſo zu beſtimmen verlangen, daß z ein Maximum oder ein Minimum wird. Nach Principien der Differentialrechnung hat man die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Die allgemeinen Bedingungen des Maximums und Minimums ſind bekanntlich

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Dieſe Bedingungen ſind erfüllt, wenn

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

iſt. Verbindet man mit dieſen Gleichungen die Gleichung $u=0$; ſo hat man Gleichungen genug, um x, y, z beſtimmen zu können. Die den gefundenen Werthen von x, y, z entſprechende Werthe von

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

erhält man aus den Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

Iſt dann

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) < 0;$$

ſo iſt z für die gefundenen Werthe von x und y ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem die Differentialquotienten

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \text{ und } \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

beide negativ oder beide poſitiv ſind.

20. Sind endlich zwiſchen den drei Größen x, y, z die beiden Gleichungen

$$u = f(x, y, z) = 0,$$
$$v = \varphi(x, y, z) = 0$$

gegeben; ſo iſt offenbar ſowohl y, als auch z eine Function von

x, und man kann ſich nun z. B. vornehmen, x ſo zu beſtimmen, daß y ein Maximum oder ein Minimum wird. Nach Principien der Differentialrechnung iſt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0\,,$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0\,.$$

Die gemeinſchaftliche Bedingung des Maximums und Minimums iſt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0\,.$$

Dies giebt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0\,.$$

Eliminirt man aus dieſen beiden Gleichungen $\frac{\partial z}{\partial x}$; ſo erhält man

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0\,.$$

Dieſe Gleichung, verbunden mit den gegebenen Gleichungen $u = 0$, $v = 0$, reicht zur Beſtimmung von x, und auch der entſprechenden Werthe von y und z hin. Aus einer der beiden Gleichungen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

erhält man dann auch den entſprechenden Werth von $\frac{\partial z}{\partial x}$. Mit Berückſichtigung von

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

erhält man nun ferner leicht durch Differentiation die beiden folgenden Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\cdot\frac{\partial z^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0\,,$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\cdot\frac{\partial z^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0\,.$$

Dieſe beiden Gleichungen enthalten bloß noch die beiden unbekannten Größen

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2} \text{ und } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,.$$

welche man alſo aus denſelben beſtimmen kann. Iſt dann $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ nicht $= 0$; ſo iſt der gefundene Werth von y ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem dieſer Differentialquotient negativ oder poſitiv iſt. Daß man auf ganz ähnliche Art x auch ſo be-

ſtimmen kann, daß z ein Maximum oder ein Minimum wird, verſteht ſich von ſelbſt.

Wir wollen z. B. das gröſte Viereck zu beſtimmen ſuchen, welches ſich mit den vier gegebenen Seiten a, b, α, β beſchreiben läßt. Die von den Seiten a, b und α, β eingeſchloſſenen Winkel des geſuchten Vierecks ſeyen reſpective φ und ψ, ſein Inhalt ſey $= y$; ſo iſt

$$2y = ab\sin\varphi + \alpha\beta\sin\psi\,.$$

Ferner iſt, wie leicht erhellet,

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\psi\,,$$

und es iſt folglich in dieſem Falle, wenn wir uns reſpective φ und ψ ſtatt des vorhergehenden x und z geſetzt denken,

$$u = 2y - ab\sin\varphi - \alpha\beta\sin\psi\,,$$
$$v = a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 2ab\cos\varphi + 2\alpha\beta\cos\psi\,.$$

Alſo iſt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) = -\,ab\cos\varphi\,,\ \left(\frac{\partial u}{\partial\psi}\right) = -\,\alpha\beta\cos\psi\,;$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right) = 2ab\sin\varphi\,,\ \left(\frac{\partial v}{\partial\psi}\right) = -\,2\alpha\beta\sin\psi\,;$$

und wir haben folglich nachſtehende Gleichung:

$$2ab\alpha\beta\{\cos\varphi\sin\psi + \cos\psi\sin\varphi\} = 0\,,$$

d. i.

$$2ab\alpha\beta\sin(\varphi+\psi) = 0\,,$$

oder

$$\sin(\varphi+\psi) = 0\,.$$

Alſo, weil $\varphi + \psi < 360°$ ſeyn muß, entweder $\varphi + \psi = 0$ oder $\varphi + \psi = 180°$, wo aber wieder, wenn ein wirkliches Viereck entſtehen ſoll, bloß die letztere Gleichung Statt finden kann. Aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0$$

oder

$$-\,ab\cos\varphi - \alpha\beta\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0$$

erhalten wir

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = -\frac{ab\cos\varphi}{\alpha\beta\cos\psi}\,.$$

Aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0$$

oder

$$2\,ab\sin\varphi - 2\,\alpha\beta\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0$$

ergiebt ſich

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{ab\sin\varphi}{\alpha\beta\sin\psi}.$$

Weil $\varphi + \psi = 180^\circ$ iſt, ſo iſt $\cos\varphi = -\cos\psi$, $\sin\varphi =$ $\sin\psi$; alſo

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = -1,\ \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = 1,$$

ſo daß ſich folglich aus den beiden obigen Ausdrücken für $\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{ab}{\alpha\beta}$$

ergiebt. Nach dem Obigen iſt nun

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\,\partial\psi}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\right)\cdot\frac{\partial\psi^2}{\partial\varphi^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right) + 2\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi\,\partial\psi}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial\psi^2}\right)\cdot\frac{\partial\psi^2}{\partial\varphi^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial\psi}\right)\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = 0,$$

d. i.

$$ab\sin\varphi + \frac{a^2b^2}{\alpha\beta}\sin\psi + 2\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} - \alpha\beta\cos\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = 0,$$

$$2\,ab\cos\varphi - 2\frac{a^2b^2}{\alpha\beta}\cos\psi - 2\,\alpha\beta\sin\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Eliminirt man aus dieſen beiden Gleichungen $\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$, ſo ergiebt ſich:

$$-2\,ab\cos(\varphi + \psi) + \frac{2a^2b^2}{\alpha\beta} + 4\sin\psi\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} = 0,$$

d. i., weil $\cos(\varphi + \psi) = -1$ iſt:

$$ab + \frac{a^2b^2}{\alpha\beta} + 2\sin\psi\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} = -\frac{ab(ab + \alpha\beta)}{2\,\alpha\beta\sin\psi} = -\frac{ab(ab + \alpha\beta)}{2\,\alpha\beta\sin\varphi}.$$

Weil nun $\varphi + \psi = 180^\circ$, $\varphi < 180^\circ$ iſt, ſo iſt $\sin\varphi$ poſitiv, alſo $\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}$ negativ. Daher iſt der Flächeninhalt des mit den Seiten a, b, α, β beſchriebenen Vierecks für $\varphi + \psi = 180^\circ$ ein Maximum. Alſo läßt ſich um das größte mit den Seiten a, b, α, β beſchriebene Viereck jederzeit ein Kreis beſchreiben. Der Winkel φ ſelbſt kann nun auf folgende Art beſtimmt werden. Weil $\cos\varphi = -\cos\psi$ iſt; ſo giebt die Gleichung

$$a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\varphi = \alpha^2 + \beta^2 - 2\,\alpha\beta\cos\psi$$

auf der Stelle

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2}{2(ab + \alpha\beta)}.$$

Alſo iſt

$$1 + \cos\varphi = \frac{(a+b)^2 - (\alpha-\beta)^2}{2(ab+\alpha\beta)},$$

woraus leicht

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+\alpha-\beta)(a+b-\alpha+\beta)}{ab+\alpha\beta}}.$$

Eben ſo iſt

$$1 - \cos\varphi = \frac{(\alpha+\beta)^2 - (a-b)^2}{2(ab+\alpha\beta)},$$

und folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(\alpha+\beta+a-b)(\alpha+\beta-a+b)}{ab+\alpha\beta}}.$$

Auch iſt

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{(\alpha+\beta+a-b)(\alpha+\beta-a+b)}{(a+b+\alpha-\beta)(a+b-\alpha+\beta)}}.$$

Hat man den Winkel φ gefunden, ſo findet man, weil $\sin\varphi = \sin\psi$ iſt, den Flächeninhalt y des größten Vierecks leicht aus der Formel

$$2y = (ab+\alpha\beta)\sin\varphi.$$

Es iſt auch nach dem Obigen

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{(a+b+\alpha-\beta)(a+b-\alpha+\beta)(\alpha+\beta+a-b)(\alpha+\beta-a+b)}}{2(ab+\alpha\beta)}.$$

Alſo iſt

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b+\alpha-\beta)(a+b-\alpha+\beta)(\alpha+\beta+a-b)(\alpha+\beta-a+b)}.$$

H.

Harmonikalen. Die Erklärung und einige Haupteigenſchaften ſolcher Linien finden ſich ſchon im Artikel Theilung (13.) im fünften Bande, auf den daher hier zu verweiſen erlaubt ſeyn und nur noch bemerkt werden mag, daß der Ausdruck Harmonikalen, ſtatt deſſen Brianchon in ſeinem Mémoire sur les lignes du second ordre. Paris. 1817. ſich der Benennung faisceau harmonique bedient, zuerſt von Lahire in ſeinem Traité des sections coniques. p. 5. gebraucht worden iſt. Viele Eigenſchaften der Harmonikalen findet man in den beiden folgenden trefflichen Werken: Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, v. J. Steiner. T. I. Berlin. 1832. S. 18. und Traité des propriétés projectives des figures par J. V. Poncelet. Paris. 1822. Auch ſ. m. Poncelets Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques in Crelles Journal B. III. S. 213.

Harriots Lehrſatz, ſ. Gleichung (32.) i. d. Z.

Hippokrates, ſ. Lunula.

Hyperbel. Mehrere merkwürdige Eigenſchaften der Hyperbel ſ. m. im Art. Elliptiſche Functionen. XII. i. d. Z.

Hyperboliſche Spirale, ſ. Spirale (72.).

Hyperboloid mit einem Fache oder mit einem Mantel (hyperboloide à une nappe) heißt jede krumme Fläche der zweiten Ordnung, deren Gleichung zwiſchen rechtwinkligen Coordinaten von der Form

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$$

iſt, oder auf dieſe Form gebracht werden kann.

Legt man durch die Axe der z eine beliebige gegen die Ebene der xz unter dem Winkel α geneigte Ebene, und bezeichnet, indem man die Durchſchnittslinie derſelben mit der Ebene der xy als Axe der X annimmt, die Coordinaten der Curve, in welcher das Hyperboloid von der in Rede ſtehenden Ebene geſchnitten wird, durch X, Y; ſo muß man, um die Gleichung dieſer Curve zu finden, in der Gleichung des Hyperboloids für x, y, z offenbar reſpective $X\cos\alpha$, $X\sin\alpha$, Y ſetzen. Dadurch erhält man als Gleichung der in Rede ſtehenden Curve

$$\frac{a^2 \sin\alpha^2 + b^2 \cos\alpha^2}{a^2 b^2} X^2 - \frac{Y^2}{c^2} = 1$$

und ſieht alſo, daß dieſelbe jederzeit eine Hyperbel iſt, deren zweite Axe mit der Axe der Y, d. i. hier mit der Axe der z, zuſammenfällt.

Denkt man ſich ferner in der Entfernung γ von der Ebene der xy eine dieſer Ebene parallele Ebene; ſo iſt die Gleichung der Curve, in welcher das Hyperboloid von dieſer Ebene geſchnitten wird, offenbar

$$\frac{\gamma^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\gamma^2 + c^2}{c^2}$$

und folglich augenſcheinlich jederzeit eine Ellipſe.

Man ſieht alſo, daß

1. jeder Schnitt mit einer durch die Axe der z gelegten Ebene eine Hyperbel iſt, deren zweite Axe mit der Axe der z zuſammenfällt, und daß
2. jeder Schnitt mit einer der Ebene der xy parallelen Ebene eine Ellipſe iſt,

und wird ſich nun leicht einen Begriff von der Geſtalt des ſogenannten einfächrigen Hyperboloids machen können, welches zum

Unterſchiede von dem zweifächrigen Hyperboloid, das wir im folgenden Artikel näher betrachten werden, ſeinen Namen deshalb erhalten hat, weil es die Axe der z rings herum ohne alle Unterbrechung frei umgiebt, wobei zugleich auch aus dem Vorhergehenden klar iſt, daß dieſes Hyperboloid rings um die Axe der z herum hohl, d. i. eigentlich gegen die Axe der z convex iſt.

Will man die Gleichungen von Curven finden, in denen das Hyperboloid von Ebenen geſchnitten wird, die in den Entfernungen α und β von den Ebenen der yz und xz dieſen Ebenen parallel ſind; ſo muß man in der Gleichung des Hyperboloids offenbar reſpective $x=\alpha$ und $y=\beta$ ſetzen, wodurch man die Gleichungen

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{\alpha^2}{a^2}+1=0,\quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}+1=0$$

erhält, und hat nun die drei folgenden Fälle zu unterſcheiden.

I. Wenn $a^2-\alpha^2>0$, $b^2-\beta^2>0$ iſt; ſo ſind die beiden Curven offenbar Hyperbeln, deren zweite Axen der Axe der z parallel ſind, wie augenblicklich erhellet, wenn man die beiden vorhergehenden Gleichungen unter der Form

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{a^2-\alpha^2}{a^2},\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{b^2-\beta^2}{b^2}$$

darſtellt.

II. Iſt dagegen $a^2-\alpha^2<0$, $b^2-\beta^2<0$; ſo ſind die beiden Curven Hyperbeln, deren zweite Axen reſpective den Axen der y und x parallel ſind, wie ſogleich erhellet, wenn man die beiden Gleichungen unter der Form

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{\alpha^2-a^2}{c^2},\quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{\beta^2-b^2}{b^2}$$

darſtellt.

III. Iſt $a^2-\alpha^2=0$, $b^2-\beta^2=0$; ſo werden die beiden Gleichungen

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,\quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=0$$

oder

$$b^2z^2-c^2y^2=0,\quad a^2z^2-c^2x^2=0,$$

und jede ſtellt alſo, wie leicht erhellen wird, ein Syſtem zweier reſpective durch die Axe der x und y gehenden geraden Linie dar.

Für die ſogenannten Hauptſchnitte, d. h. die Curven, in denen das Hyperboloid von den Ebenen der yz, xz, xy geſchnitten wird, erhält man leicht die Gleichungen

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

und ſieht alſo, daß die beiden erſten jederzeit Hyperbeln ſind, der

letzte jederzeit ein Ellipſe iſt; auch iſt klar, daß die zweiten Arme der beiden in Rede ſtehenden Hyperbeln immer mit der Axe der z zuſammen fallen.

Hyperboloid mit zwei Fächern oder mit zwei Mänteln (hyperboloide à deux nappes) heißt jede krumme Fläche der zweiten Ordnung, deren Gleichung zwiſchen rechtwinkligen Coordinaten von der Form

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$$

iſt, oder wenigſtens auf dieſe Form gebracht werden kann.

Sucht man wieder auf ganz ähnliche Art wie im vorigen Artikel die Gleichung des Durchſchnitts einer beliebigen durch die Axe der z gelegten Ebene mit dem Hyperboloid; ſo erhält man

$$\frac{Y^2}{c^2} - \frac{a^2 \sin\alpha^2 + b^2 \cos\alpha^2}{a^2 b^2} X^2 = 1,$$

und ſieht alſo, daß jeder ſolcher Schnitt eine Hyperbel iſt, deren Hauptaxe mit der Axe der Y, d. i. hier mit der Axe der z, zuſammenfällt, oder deren Nebenaxe in der Ebene der xy liegt.

Um ferner die Gleichung des Durchſchnitts einer in der Entfernung γ von der Ebene der xy dieſer Ebene parallel gelegten Ebene mit dem Hyperboloid zu finden, muß man in der Gleichung desſelben offenbar $z = \gamma$ ſetzen, wodurch man für dieſen Durchſchnitt die Gleichung

$$\frac{\gamma^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\gamma^2 - c^2}{c^2}$$

erhält. Hieraus ſieht man, daß die in Rede ſtehenden Schnitte nur dann reell ſind, wenn $\gamma^2 - c^2 > 0$ iſt; iſt aber dieſe Bedingung erfüllt, ſo ſind die Schnitte jederzeit Ellipſen.

Das Hyperboloid mit zwei Fächern iſt alſo offenbar eine aus zwei von einander abgeſonderten Theilen beſtehende krumme Fläche, deren einer über, der andere unter der Ebene der xy iſt, und hat aus dieſem Grunde auch ſeinen Namen erhalten. Zugleich iſt klar, daß die beiden Theile des zweifächrigen Hyperboloids gegen die Ebene der xy jederzeit convex ſind.

Für die Curven, in denen das zweifächrige Hyperboloid von Ebenen geſchnitten wird, welche in den Entfernungen α und β von den Ebenen der yz und xz dieſen Ebenen parallel gelegt ſind, erhält man leicht

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 + \alpha^2}{a^2}, \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{b^2 + \beta^2}{b^2},$$

und ſieht alſo, daß dieſe Schnitte jederzeit Hyperbeln ſind, deren Hauptaxen der Axe der z parallel ſind.

Für die Hauptſchnitte ergeben ſich folgende Gleichungen

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1;$$

die beiden erſten ſind alſo jederzeit Hyperbeln, der letzte iſt jederzeit imaginär.

Hyper-elliptiſche Functionen, ſ. Elliptiſche Functionen (59.) i. d. Z.

Hyper-Logarithmus, ſ. Integrallogarithmus i. d. Z.

Hypocykloide, ſ. Epicykloide.

J.

Integralrechnung. Als ein ſehr zeitgemäßes literariſches Unternehmen iſt die Ueberſetzung zu nennen, welche J. Salomon von Eulers Integralrechnung in vier Bänden zu Wien 1828—1830 herausgegeben hat, ein Unternehmen, das um ſo verdienſtlicher iſt und den Dank der Mathematiker verdient, weil das Original des in Rede ſtehenden wichtigen Werkes nur ſchwierig zu erhalten iſt.

Integralformel. Dieſer wichtige Artikel hat ſchon durch die ſehr ausführlichen Artikel Beſtimmtes Integral, wo auch von (27.) bis (42.) von den vorzugsweiſe nach Euler benannten Integralen weitläufig die Rede geweſen iſt, und Elliptiſche Functionen eine große Vervollſtändigung erhalten. Außerdem ſind in dem Artikel Function. I. die vorzüglichſten neuern Methoden zu der für die Integration der rationalen algebraiſchen Functionen ſo überaus wichtigen Zerlegung der gebrochenen rationalen algebraiſchen Functionen in einfache Brüche nachgetragen worden, und in einem beſondern Artikel wird auch noch von dem ſogenannten Integrallogarithmus ausführlich gehandelt werden, ſo wie auch die Integration durch Annäherung, über welche übrigens vorzüglich der Artikel Quadratur (122.) zu vergleichen iſt, in einem beſondern Artikel noch einige Zuſätze erhalten wird. Wir müſſen uns daher hier damit begnügen, aus den vielen hierher gehörenden Arbeiten der neuern Mathematiker Einiges mitzutheilen, was uns von vorzüglicher Wichtigkeit und von beſonderm Intereſſe zu ſeyn ſcheint.

1. Laſſen wir x und y zwei durch eine beliebige algebraiſche Gleichung mit einander verbundene veränderliche Größen bezeichnen, ſo daß alſo ſowohl y als Function von x, als auch x als Function von y betrachtet werden kann; ſo iſt, wenn **X** eine

beliebige Function von x bezeichnet, für die jedoch nachher immer eine ganze rationale algebraiſche Function von x geſetzt werden wird, und wir jetzt y als Function von x betrachten, bekanntlich

$$\int X\partial y + \int y\partial X = Xy + C.$$

So lange bekannt dieſe Gleichung auch iſt; ſo hat doch ganz neuerlich der berühmte Poiſſon in einer ſchönen in Crelles Journal. B. XII. S. 89. abgedruckten Abhandlung: Théorèmes relatifs aux intégrales des fonctions algébriqués, gezeigt, daß ſich aus derſelben durch höchſt einfache Betrachtungen noch manche bisher unbekannte wichtigen Folgerungen ziehen laſſen, worüber wir daher jetzt Einiges beibringen wollen.

Zuerſt wollen wir annehmen, daß x und y durch die algebraiſche Gleichung

$$ax^n + bx^{n-1} + \ldots + kx + l = (a'x^n + b'x^{n-1} + \ldots k'x + l')y,$$

wo alſo natürlich n eine poſitive ganze Zahl bezeichnet, mit einander verbunden ſeyen, und wollen der Kürze wegen

$$\frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots + kx + l}{a'x^n + b'x^{n-1} + \ldots + k'x + l'} = f(x)$$

und

$$\int f(x)\partial X = F(x)$$

ſetzen, wo, wenn namentlich X, wie wir nach einer ſchon vorher gemachten Bemerkung hier immer vorausſetzen, eine ganze rationale algebraiſche Function von x iſt, F(x) eine Function iſt, die ſich nach bekannten Regeln der Integralrechnung jederzeit finden läßt. Beſtimmen wir nun aus der zwiſchen x und y gegebenen Gleichung x durch y; ſo erhalten wir für x im Allgemeinen n Werthe, die als Functionen von y durch

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

bezeichnet werden ſollen. Die dieſen Werthen von x entſprechenden Werthe von X, welche natürlich auch Functionen von y ſind, ſollen durch

$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, \ldots Y_n$$

bezeichnet werden. Weil nun

$$\int X\partial y + \int y\partial X = Xy + C$$

und

$$\int y\partial X = \int f(x)\partial X = F(x),$$

alſo

$$\int X\partial y = Xy - F(x) + C$$

iſt; ſo iſt offenbar, wenn i eine beliebige der Zahlen 1, 2, 3, 4, ... n bezeichnet, allgemein

$$\int Y_i \partial y = yY_i - F(y_i) + C,$$

und hierdurch folglich $\int Y_i \partial y$ gefunden, ſo daß man alſo, wenn ſich nur F(x) finden läßt, hierdurch ſehr viele neue Integrale finden kann.

Wenn f(x) eine ganze Function von x, d. h. wenn der Coefficient von y in der zwiſchen x und y gegebenen Gleichung eine conſtante Größe iſt; ſo iſt offenbar auch

$$F(x) = \int f(x) \partial X$$

eine ganze rationale algebraiſche Function von x, und folglich die Größe

$$yY_i - F(y_i),$$

welche wir durch P_i bezeichnen wollen, eine ganze rationale algebraiſche Function von y_i. Setzt man alſo das Product

$$(u - P_1)(u - P_2)(u - P_3) \ldots (u - P_n)$$

der Null gleich; ſo erhält man eine Gleichung des nten Grades

$$u^n + Au^{n-1} + Bu^{n-2} + \ldots + Ku + L = 0,$$

deren Coefficienten A, B, C, ... K, L offenbar ſymmetriſche Functionen der Größen

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n,$$

d. i. der Wurzeln der Gleichung

$$ax^n + bx^{n-1} + \ldots + kx + l - l'y = 0$$

ſind, und ſich folglich, wie in der Theorie der Gleichungen ausführlich gezeigt wird (Gleichung. III. i. d. Z.), durch die Coefficienten dieſer Gleichung ausdrücken laſſen, ohne die Wurzeln derſelben ſelbſt zu kennen. Hieraus ſieht man alſo, daß in dieſem Falle die n Werthe der Größe

$$P_i = \int Y_i \partial y - C,$$

welche dieſelbe für i = 1, 2, 3, ... n erhält, jederzeit als die Wurzeln einer Gleichung des nten Grades betrachtet werden können, welche ſich aus der Gleichung

$$ax^n + bx^{n-1} + \ldots + kx + l - l'y = 0$$

leicht ableiten läßt.

2. Poiſſon betrachtet die Gleichung

$$ax^2 + bx + c = (a'x^2 + b'x + c')y$$

oder

$$(a-a'y)x^2+(b-b'y)x+c-c'=0$$

als Beiſpiel. Die beiden Wurzeln dieſer quadratiſchen Gleichung ſind, wenn man der Kürze wegen

$$v=\sqrt{(b'y-b)^2-4(a'y-a)(c'y-c)}$$

ſetzt,

$$y_1=\frac{b'y-b+v}{2(a-a'y)},\ y_2=\frac{b'y-b-v}{2(a-a'y)}.$$

Setzt man nun die Function $X=x$; ſo iſt

$$F(x)=\int\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}\partial x.$$

Sind α und β die beiden Wurzeln der Gleichung

$$a'x^2+b'x+c'=0$$

und folglich

$$a'x^2+b'x+c'=a'(x-\alpha)(x-\beta);$$

ſo iſt, wie man leicht findet,

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=\frac{a}{a'}+\frac{(a'b-ab')x+a'c-ac'}{a'^2(x-\alpha)(x-\beta)};$$

alſo, wenn α und β ungleich ſind,

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=\frac{a}{a'}+\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}.$$

Beſtimmt man nun A und B auf gewöhnliche Weiſe; ſo erhält man

$$A=\frac{(a'b-ab')\alpha+a'c-ac'}{(\alpha-\beta)a'^2},$$

$$B=\frac{(a'b-ab')\beta+a'c-ac'}{(\beta-\alpha)a'^2}.$$

Durch Integration ergiebt ſich aber auf der Stelle

$$F(x)=\int\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}\partial x=\frac{ax}{a'}+A\,l(x-\alpha)+B\,l(x-\beta).$$

Folglich iſt nach (1.), da hier $X=x$ iſt,

$$\int y_i\partial y=(a'y-a)\frac{y_i}{a'}-A\,l(y_i-\alpha)-B\,l(y_i-\beta)+C.$$

Setzt man nun y_1 und y_2 für y_i; ſo ergiebt ſich

$$\int\frac{b'y-b+v}{2(a-a'y)}\partial y$$

$$=-\frac{b'y-b+v}{2a'}-A\,l(y_1-\alpha)-B\,l(y_1-\beta)+\text{Const.},$$

$$\int\frac{b'y-b-v}{2(a-a'y)}\partial y$$

$$=-\frac{b'y-b-v}{2a'}-A\,l(y_2-\alpha)-B\,l(y_2-\beta)+\text{Const.},$$

und, wenn man dieſe Gleichungen zu einander addirt und von einander ſubtrahirt,

$$\int \frac{b'y - b}{a - a'y} \partial y = \frac{b - b'y}{a'} - A\,l\{(y_1 - \alpha)(y_2 - \alpha)\}$$
$$- B\,l\{(y_1 - \beta)(y_2 - \beta)\} + \text{Const.},$$

$$\int \frac{v \partial y}{a'y - a} = \frac{v}{a'} + A\,l\frac{y_1 - \alpha}{y_2 - \alpha} + B\,l\frac{y_1 - \beta}{y_2 - \beta} + \text{Const.}$$

Die zweite dieſer Formeln liefert, weil v irrational iſt, das Integral einer ziemlich complicirten irrationalen Differentialformel und ſoll daher vorzüglich nun noch weiter entwickelt werden. Die erſte Formel wollen wir bloß deshalb noch weiter entwickeln, um ihre Uebereinſtimmung mit andern bekannten Formeln der Integralrechnung zu zeigen. Nach dem Vorhergehenden iſt nämlich

$$a'x^2 + b'x + c' = a'(x - \alpha)(x - \beta),$$
$$(a - a'y)x^2 + (b - b'y)x + c - c' = (a - a'y)(x - y_1)(x - y_2).$$

Setzt man nun in dieſen beiden Gleichungen $x = \alpha$ und $x = \beta$; ſo ergiebt ſich

$$a'\alpha^2 + b'\alpha + c' = 0, \quad a'\beta^2 + b'\beta + c' = 0;$$
$$(a - a'y)\alpha^2 + (b - b'y)\alpha + c - c' = (a - a'y)(\alpha - y_1)(\alpha - y_2),$$
$$(a - a'y)\beta^2 + (b - b'y)\beta + c - c' = (a - a'y)(\beta - y_1)(\beta - y_2);$$

folglich iſt offenbar

$$(y_1 - \alpha)(y_2 - \alpha) = \frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{a - a'y}, \quad (y_1 - \beta)(y_2 - \beta) = \frac{a\beta^2 + b\beta + c}{a - a'y}.$$

Man erhält alſo

$$\int \frac{b'y - b}{a - a'y} \partial y$$
$$= \frac{b - b'y}{a'} - A\,l\frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{a - a'y} - B\,l\frac{a\beta^2 + b\beta + c}{a - a'y} + \text{Const.}$$
$$= \frac{b - b'y}{a'} - A\,l(a\alpha^2 + b\alpha + c) - B\,l(a\beta^2 + b\beta + c)$$
$$+ (A + B)\,l(a - a'y) + \text{Const.},$$

oder, weil

$$A + B = \frac{a'b - ab'}{a'^2}$$

und die Größe

$$\frac{b}{a'} - A\,l(a\alpha^2 + b\alpha + c) - B\,l(a\beta^2 + b\beta + c)$$

ſelbſt eine Conſtante iſt,

$$\int \frac{b'y - b}{a - a'y} \partial y = -\frac{b'y}{a'} + \frac{a'b - ab'}{a'^2} l(a - a'y) + \text{Const.}$$

Aber

$$\frac{b'y - b}{a - a'y} = -\frac{b'}{a'} + \frac{ab' - a'b}{(a - a'y)a'},$$

$$\int \frac{b'y - b}{a - a'y} \partial y = -\frac{b'y}{a'} + \frac{ab' - a'b}{a'} \int \frac{\partial y}{a - a'y}.$$

Alſo

$$\frac{ab' - a'b}{a'} \int \frac{\partial y}{a - a'y} = \frac{a'b - ab'}{a'^2} l(a - a'y) + \text{Const.}$$

oder

$$\int \frac{\partial y}{a - a'y} = -\frac{1}{a'} l(a - a'y) + \text{Const.},$$

welches in der That ein ſehr bekanntes Integral iſt.

Was nun ferner die zweite der beiden obigen Formeln be-trifft; ſo bemerke man zuerſt die beiden folgenden leicht zu recht-fertigenden Gleichungen:

$$A = \frac{a'b - ab'}{2a'^2} + \frac{(a'b - ab')(\alpha + \beta) + 2a'c - 2ac'}{2(\alpha - \beta)a'^2},$$

$$B = \frac{a'b - ab'}{2a'^2} - \frac{(a'b - ab')(\alpha + \beta) + 2a'c - 2ac'}{2(\alpha - \beta)a'^2}.$$

Alſo iſt

$$A l \frac{y_1 - \alpha}{y_2 - \alpha} + B l \frac{y_1 - \beta}{y_2 - \beta}$$

$$= \frac{a'b - ab'}{2a'^2} l \frac{(y_1 - \alpha)(y_1 - \beta)}{(y_2 - \alpha)(y_2 - \beta)} + \frac{(a'b - ab')(\alpha + \beta) + 2a'c - 2ac'}{2(\alpha - \beta)a'^2} l \frac{(y_1 - \alpha)(y_2 - \beta)}{(y_2 - \alpha)(y_1 - \beta)}$$

oder, weil nach der Theorie der Gleichungen

$$\alpha + \beta = -\frac{b'}{a'}$$

iſt,

$$A l \frac{y_1 - \alpha}{y_2 - \alpha} + B l \frac{y_1 - \beta}{y_2 - b}$$

$$= \frac{a'b - ab'}{2a'^2} l \frac{(y_1 - \alpha)(y_1 - \beta)}{(y_2 - \alpha)(y_2 - \beta)} + \frac{2a'^2c + ab'^2 - 2aa'c' - a'bb'}{2(\alpha - \beta)a'^3} l \frac{(y_1 - \alpha)(y_2 - \beta)}{(y_2 - \alpha)(y_1 - \beta)}.$$

Setzt man nun

$$(y_1 - \alpha)(y_1 - \beta) = y_1 y_1 - (\alpha + \beta) y_1 + \alpha\beta,$$
$$(y_2 - \alpha)(y_2 - \beta) = y_2 y_2 - (\alpha + \beta) y_2 + \alpha\beta,$$
$$(y_1 - \alpha)(y_2 - \beta) = y_1 y_2 - \beta y_1 - \alpha y_2 + \alpha\beta,$$
$$(y_2 - \alpha)(y_1 - \beta) = y_1 y_2 - \alpha y_1 - \beta y_2 + \alpha\beta,$$

und bemerkt, daß nach der Theorie der Gleichungen

$$\alpha + \beta = -\frac{b'}{a'}, \quad \alpha\beta = \frac{c'}{a};$$

$$\alpha = -\frac{b'}{2a'} + \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \beta = -\frac{b'}{2a'} - \frac{\alpha - \beta}{2}$$

iſt; ſo findet nach gehöriger Entwickelung

$$\int \frac{v\partial y}{a'y - a}$$

$$= \frac{v}{a'} + \frac{a'b - ab'}{2a'^2} l \frac{(ab' - a'b + a'v)(b'y - b) - (2ac' - 2a'c + b'v)(a'y - a)}{(ab' - a'b - a'v)(b'y - b) - (2ac' - 2a'c - b'v)(a'y - a)}$$

$$+ \frac{2a'^2c + ab'^2 - 2aa'c' - a'bb'}{2(\alpha - \beta)a'^3} l \frac{(4a'c' - b'^2)y - 2a'c - 2ac' + bb' - (\alpha - \beta)a'v}{(4a'c' - b'^2)y - 2a'c - 2ac' + bb' + (\alpha - \beta)a'v},$$

wo noch die gewöhnliche willkührliche Conſtante beizufügen iſt.

Wir wollen nun noch den Fall beſonders betrachten, wenn $\alpha = \beta$, d. i. wenn

$$a'x^2 + b'x + c' = a'(x - \alpha)^2$$

iſt. In dieſem Falle iſt, wenn wir jetzt

$$\frac{a'b - ab'}{a'^2} = A, \quad \frac{a'c - ac'}{a'^2} = B$$

ſetzen,

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = \frac{a}{a'} + \frac{Ax + B}{(x - \alpha)^2},$$

und folglich

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \partial x = F(x) = \frac{ax}{a'} + \int \frac{Ax + B}{(x - \alpha)^2} \partial x.$$

Aber

$$\int \frac{Ax + B}{(x - \alpha)^2} \partial x = \int \frac{A(x - \alpha) + A\alpha + B}{(x - \alpha)^2} \partial x$$

$$= A \int \frac{\partial x}{x - \alpha} + (A\alpha + B) \int \frac{\partial x}{(x - \alpha)^2}$$

$$= A l(x - \alpha) + (A\alpha + B) \int \frac{\partial z}{z^2},$$

wenn wir $x - \alpha = z$ ſetzen. Alſo iſt

$$\int \frac{Ax + B}{(x - \alpha)^2} \partial x = A l(x - \alpha) - \frac{A\alpha + B}{x - \alpha}$$

und folglich

$$F(x) = \frac{ax}{a'} - \frac{A\alpha + B}{x - \alpha} + A l(x - \alpha).$$

Alſo iſt nach (1.), wenn wir wieder $X = x$ ſetzen,

$$\int y_i \partial y = yy_i - \frac{ay_i}{a'} + \frac{A\alpha + B}{y_i - \alpha} - A l(y_i - \alpha) + C$$

$$= (a'y - a)\frac{y_i}{a'} - \frac{A\alpha + B}{y_i - \alpha} - A l(y_i - \alpha) + C.$$

Setzen wir nun

$$y_1 = \frac{b'y - b + v}{2(a - a'y)} \text{ und } y_2 = \frac{b'y - b - v}{2(a - a'y)}$$

für y_i; ſo erhalten wir

$$\int\frac{b'y-b+v}{2(a-a'y)}\partial y$$

$$=-\frac{b'y-b+v}{2a'}+\frac{A\alpha+B}{y_1-\alpha}-A\,l(y_1-\alpha)+\text{Const.},$$

$$\int\frac{b'y-b-v}{2(a-a'y)}\partial y$$

$$=-\frac{b'y-b-v}{2a'}+\frac{A\alpha+B}{y_2-\alpha}-A\,l(y_2-\alpha)+\text{Const.},$$

woraus mittelſt Addition und Subtraction ferner

$$\int\frac{b'y-b}{a-a'y}\partial y=\frac{b-b'y}{a'}+(A\alpha+B)\left\{\frac{1}{y_1-\alpha}+\frac{1}{y_2-\alpha}\right\}$$
$$-A\,l\{(y_1-\alpha)(y_2-\alpha)\}+\text{Const.},$$

$$\int\frac{v\partial y}{a'y-a}$$

$$=\frac{v}{a'}-(A\alpha+B)\left\{\frac{1}{y_1-\alpha}-\frac{1}{y_2-\alpha}\right\}+A\,l\frac{y_1-\alpha}{y_2-\alpha}+\text{Const.}$$

folgt.

Ganz wie oben überzeugt man ſich nun, daß

$$(y_1-\alpha)(y_2-\alpha)=\frac{a\alpha^2+b\alpha+c}{a-a'y}$$

iſt. Weil ferner

$$x^2+\frac{b'}{a'}x+\frac{c'}{a'}=x^2-2\alpha x+\alpha^2$$

iſt; ſo iſt

$$\alpha=-\frac{b'}{2a'},\ \alpha^2=\frac{c'}{a'}.$$

Alſo iſt

$$y_1+y_2-2\alpha=\frac{b'y-b}{a-a'y}+\frac{b'}{a'}=\frac{ab'-a'b}{a'(a-a'y)},$$

und folglich

$$\frac{1}{y_1-\alpha}+\frac{1}{y_2-\alpha}=\frac{y_1+y_2-2\alpha}{(y_1-\alpha)(y_2-\alpha)}=\frac{ab'-a'b}{a'(a\alpha^2+b\alpha+c)},$$

d. i. eine conſtante Größe. Nun iſt ferner

$$l\{(y_1-\alpha)(y_2-\alpha)\}=l(a\alpha^2+b\alpha+c)-l(a-a'y),$$

wo der erſte Theil auch eine conſtante Größe iſt. Alſo läßt ſich die erſte der beiden obigen Gleichungen offenbar auf folgende Art ſchreiben:

$$\int \frac{b'y - b}{a - a'y} \partial y = - \frac{b'y}{a'} + \frac{a'b - ab'}{a'^2} l(a - a'y) + \text{Const.}$$

oder

$$\int \frac{b'y - b}{a - a'y} \partial y + \int \frac{b'}{a'} \partial y = \frac{a'b - ab'}{a'^2} l(a - a'y) + \text{Const.},$$

d. i., wie man leicht findet,

$$\frac{ab' - a'b}{a'} \int \frac{\partial y}{a - a'y} = \frac{a'b - ab'}{a'^2} l(a - a'y) + \text{Const.},$$

oder

$$\int \frac{\partial y}{a - a'y} = - \frac{1}{a'} l(a - a'y) + \text{Const.},$$

ganz derſelbe Ausdruck, welchen wir ſchon oben gehabt haben.

Was nun ferner die zweite der beiden obigen Formeln betrifft; ſo iſt zuvörderſt

$$\frac{1}{y_1 - \alpha} - \frac{1}{y_2 - \alpha} = \frac{y_2 - y_1}{(y_1 - \alpha)(y_2 - \alpha)} = - \frac{v}{a\alpha^2 + b\alpha + c}.$$

Ferner iſt

$$A\alpha + B = \frac{(a'b - ab')\alpha + a'c - ac'}{a'^2}.$$

Aber $b' = -2a'\alpha$, $c' = a'\alpha^2$. Alſo

$$(a'b - ab')\alpha + a'c - ac' = a'(a\alpha^2 + b\alpha + c),$$

und folglich

$$A\alpha + B = \frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{a'}.$$

Alſo iſt

$$(A\alpha + B)\left\{\frac{1}{y_1 - \alpha} - \frac{1}{y_2 - \alpha}\right\} = - \frac{v}{a'},$$

und daher

$$\int \frac{v\partial y}{a'y - a} = \frac{2v}{a'} + A l \frac{y_1 - \alpha}{y_2 - \alpha} + \text{Const.}$$

Weil nun

$$y_1 - \alpha = y_1 + \frac{b'}{2a'} = \frac{a'(b'y - b + v) + b'(a - a'y)}{2a'(a - a'y)},$$

$$y_2 - \alpha = y_2 + \frac{b'}{2a'} = \frac{a'(b'y - b - v) + b'(a - a'y)}{2a'(a - a'y)}$$

iſt; ſo iſt

$$\int \frac{v\partial y}{a'y - a} = \frac{2v}{a'} + \frac{a'b - ab'}{a'^2} l \frac{a'(b'y - b + v) + b'(a - a'y)}{a'(b'y - b - v) + b'(a - a'y)} + \text{Const.}$$

Man hat zu merken, daß in dem hier betrachteten Falle, wo

$$a = -\frac{b'}{2a'},\ a^2 = \frac{c'}{a'}$$

iſt, zwiſchen den Größen a', b', c' die Relation $b'^2 = 4a'c'$ Statt findet.

3. Wir wollen nun ferner annehmen, daß zwiſchen x und y die Gleichung

$$ax^n + bx^{n-1} + .. + kx + l = (a'x^n + b'x^{n-1} + .. + k'x + l')y^2$$

gegeben ſey, indem wir wie vorher auch hier wieder

$$\frac{ax^n + bx^{n-1} + .. + kx + l}{a'x^n + b'x^{n-1} + .. + k'x + l'} = f(x)$$

ſetzen. Auch behalten y_i und Y_i die ihnen beigelegte Bedeutung. Setzen wir nun

$$\int \{f(x)\}^{\frac{1}{2}} \partial X = \psi(x)\ ;$$

ſo ergiebt ſich, weil $y = \{f(x)\}^{\frac{1}{2}}$ iſt, wenn man y_i für x ſetzt, aus der Gleichung

$$\int X \partial y + \int y \partial X = Xy + C$$

auf der Stelle die Gleichung

$$\int Y_i \partial y + \psi(y_i) = yY_i + C,$$

und dieſe Gleichung gilt immer, wenn man für i eine der Zahlen 1, 2, 3, ... n ſetzt. Setzt man nun nach der Reihe alle dieſe Zahlen für i und addirt dann alle erhaltenen Gleichungen zuſammen; ſo ergiebt ſich, indem man der Kürze wegen

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \ldots + Y_n = Y$$

ſetzt, die Gleichung

$$\psi(y_1) + \psi(y_2) + \psi(y_3) + .. + \psi(y_n) = yY - \int Y \partial y + C.$$

Da Y_i eine rationale Function von y_i iſt; ſo iſt die Summe Y offenbar eine rationale ſymmetriſche Function der Wurzeln der Gleichung

$$ax^n + bx^{n-1} + .. + kx + l = (a'x^n + b'x^{n-1} + .. + k'x + l')y^2$$

oder

$$(a - a'y^2)x^n + (b - b'y^2)x^{n-1} + .. + (k - k'y^2)x + l - l'y^2 = 0,$$

und kann alſo, wie die Theorie der Gleichungen (Gleichung **III.** i. d. Z.) lehrt, jederzeit aus den Coefficienten dieſer Gleichung ohne Schwierigkeit gefunden werden, ohne die Wurzeln ſelbſt zu kennen. Nach bekannten Regeln der Integralrechnung läßt ſich nun offenbar auch immer $\int Y \partial y$ unter einer endlichen völlig ent-

wickelten Form darſtellen, und man kann alſo nach dem Vorhergehenden immer die Summe

$$\psi(y_1) + \psi(y_2) + \psi(y_3) + \dots + \psi(y_n)$$

unter einer endlichen völlig entwickelten Form als eine Function von y darſtellen, welches in Bezug auf die einzelnen Theile dieſer Summe, d. h. überhaupt in Bezug auf das Integral $\psi(x)$, keinesweges der Fall iſt, ſo daß wir alſo hierdurch zu einem neuen allerdings ſehr merkwürdigen Satze gelangt ſind.

4. Als Beiſpiel zu dem Vorhergehenden betrachtet Poiſſon die Gleichung

$$(1-x)(h-x) = (1+x)(h+x)y^2 \,,$$

oder, wenn wir

$$\frac{1+y^2}{1-y^2} = p$$

ſetzen, die Gleichung

$$x^2 - (1+h)px + h = 0 \,,$$

deren Wurzeln

$$y_1 = \tfrac{1}{2}(1+h)p + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+h)^2p^2 - 4h} \,,$$

$$y_2 = \tfrac{1}{2}(1+h)p - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+h)^2p^2 - 4h}$$

ſind. Setzen wir nun wieder $X = x$; ſo iſt

$$Y = y_1 + y_2 = (1+h)p = (1+h).\frac{1+y^2}{1-y^2} \,.$$

Weil nun

$$\frac{1+y^2}{1-y^2} = -1 + \frac{2}{1-y^2} = -1 + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}$$

iſt; ſo iſt

$$\int\frac{1+y^2}{1-y^2}\partial y = -y + \int\frac{\partial y}{1-y} + \int\frac{\partial y}{1+y} \,,$$

$$= -y - l(1-y) + l(1+y) = -y + l\frac{1+y}{1-y}$$

und folglich

$$\int Y\partial y = -(1+h)y + (1+h)l\frac{1+y}{1-y} \,.$$

Für

$$\psi(x) = \int\partial x\sqrt{\frac{(1-x)(h-x)}{(1+x)(h+x)}}$$

iſt alſo nach der in (3) bewieſenen Gleichung im vorliegenden Falle

$$\psi(y_1) + \psi(y_2) = (1+h)\left\{\frac{(1+y^2)y}{1-y^2} + y - l\frac{1+y}{1-y}\right\} + C$$

oder

$$\psi(y_1) + \psi(y_2) = (1+h)\left\{\frac{2y}{1-y^2} - l\frac{1+y}{1-y}\right\} + C \,.$$

Um dieſe Gleichung zu verificiren, ſetzt Poiſſon

$$\int\frac{(h+x^2)\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(h^2-x^2)}}=\varphi(x),\ \int\frac{x\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(h^2-x^2)}}=\varphi'(x)$$

und findet

$$\psi(x)=\varphi(x)-(1+h)\varphi'(x)\,.$$

Führt man dieſen Ausdruck in die in Rede ſtehende Gleichung ein; ſo erhält man

$$\varphi(y_1)+\varphi(y_2)=(1+h)\left\{\frac{2y}{1-y^2}-l\frac{1+y}{1-y}+\varphi'(y_1)+\varphi'(y_2)\right\}+C.$$

Nun iſt

$$\varphi'(x)=\tfrac{1}{2}l\{2x^2-1-h^2+2\sqrt{(1-x^2)(h^2-x^2)}\},$$

wovon man ſich leicht durch Differentiation überzeugen wird.

Wegen der Gleichung

$$x^2-(1+h)px+h=0$$

iſt aber

$$1-x^2=(1+h)(1-px),\ h^2-x^2=(1+h)(h-px)\,.$$

Auch iſt

$$2x^2-1-h^2=2(1+h)px-2h-1-h^2$$
$$=2(1+h)px-(1+h)^2=(1+h)(2px-1-h)\,,$$

und folglich

$$\varphi'(x)=\tfrac{1}{2}l(1+h)+\tfrac{1}{2}l\{2px-1-h+2\sqrt{(1-px)(h-px)}\}\,.$$

Ferner iſt vermöge obiger Gleichung

$$(1-px)(h-px)=h-(1+h)px+p^2x^2$$
$$=-x^2+p^2x^2=x^2(p^2-1)\,.$$

Alſo iſt

$$\varphi'(x)=\tfrac{1}{2}l(1+h)+\tfrac{1}{2}l\{2x(p+\sqrt{p^2-1})-1-h\}\,,$$

und folglich, wenn wir der Kürze wegen

$$p+\sqrt{p^2-1}=\frac{1+y}{1-y}=q$$

ſetzen,

$$\varphi'(x)=\tfrac{1}{2}l(1+h)+\tfrac{1}{2}l(2qx-1-h)\,.$$

Alſo iſt

$$\varphi'(y_1)+\varphi'(y_2)=\tfrac{1}{2}l(1+h)+\tfrac{1}{2}l(2qy_1-1-h)$$
$$+\tfrac{1}{2}l(1+h)+\tfrac{1}{2}l(2qy_2-1-h)$$
$$=l(1+h)+\tfrac{1}{2}l\{(2qy_1-1-h)(2qy_2-1-h)\}$$
$$=l(1+h)+\tfrac{1}{2}l\{4q^2y_1y_2-2q(1+h)(y_1+y_2)+(1+h)^2\}\,.$$

Weil aber y_1 und y_2 die Wurzeln der Gleichung

$$x^2-(1+h)px+h=0$$

ſind; ſo iſt nach der Theorie der Gleichungen

$$y_1 + y_2 = (1 + h)p, \quad y_1 y_2 = h,$$

und folglich

$$4q^2 y_1 y_2 - 2q(1 + h)(y_1 + y_2) + (1 + h)^2$$

$$= 4.\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)^2 . h - 2 . \frac{1 + y}{1 - y} . \frac{1 + y^2}{1 - y^2} . (1 + h)^2 + (1 + h)^2$$

$$= 4.\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)^2 . h - 2 . \frac{1 + y^2}{(1 - y)^2} . (1 + h)^2 + (1 + h)^2$$

$$= 4.\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)^2 . h - (1 + h)^2 . \left\{\frac{2(1 + y^2)}{(1 - y)^2} - 1\right\}$$

$$= 4.\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)^2 . h - \left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)^2 . (1 + h)^2$$

$$= -(1 - h)^2 . \left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)^2,$$

wobei wir bemerken, daß Poiſſon ſagt, daß die ſo eben entwickelte Größe

$$4q^2 y_1 y_2 - 2q(1 + h)(y_1 + y_2) + (1 + h)^2$$

dem Quadrat der Größe

$$(1 - h) . \frac{1 + y}{1 - y}$$

gleich ſey, welches, wie man aus dem Vorhergehenden ſieht, nicht der Fall iſt, und in einem Rechnungsfehler bei Poiſſon ſeinen Grund haben muß. Wir erhalten alſo jetzt nach dem Obigen

$$\varphi'(y_1) + \varphi'(y_2) = l(1 + h) + l\{(1 - h)\sqrt{-1}\} + l\frac{1 + y}{1 - y},$$

und folglich, wenn man die Größe

$$(1 + h)l(1 + h) + (1 + h)l\{(1 - h)\sqrt{-1}\}$$

mit in der Conſtante begreift,

$$\varphi(y_1) + \varphi(y_2) = \frac{2(1 + h)y}{1 - y^2} + C.$$

Denken wir uns aber die Integrale $\varphi(y_1)$ und $\varphi(y_2)$ ſo beſtimmt, daß ſie für $y = 0$ verſchwinden; ſo iſt $C = 0$ und folglich

$$\varphi(y_1) + \varphi(y_2) = \frac{2(1 + h)y}{1 - y^2},$$

immer unter der Vorausſetzung, daß die Integrale auf die angegebene Weiſe beſtimmt ſind.

Weil nun

$$p = \frac{1 + y^2}{1 - y^2}$$

und

$$y_1 = \tfrac{1}{2}(1 + h)p + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 + h)^2 p^2 - 4h},$$

$$y_2 = \tfrac{1}{2}(1 + h)p - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 + h)^2 p^2 - 4h}$$

iſt; ſo iſt für $y = 0$ offenbar $y_1 = 1$ und $y_2 = h$. Alſo ſind die auf die vorher angegebene Art beſtimmten Integrale $\varphi(y_1)$ und $\varphi(y_2)$ offenbar das reſpective zwiſchen den Gränzen $x = 1$, $x = y_1$ und $x = h$, $x = y_2$ genommene Integral $\varphi(x)$, und folglich

$$\int_1^{y_1} \frac{(h + x^2)\partial x}{\sqrt{(1 - x^2)(h^2 - x^2)}} + \int_h^{y_2} \frac{(h + x^2)\partial x}{\sqrt{(1 - x^2)(h^2 - x^2)}} = \frac{2(1 + h)y}{1 - y^2}.$$

Differentiirt man dieſe Gleichung nach y; ſo erhält man

$$\frac{(h + y_1^2)\partial y_1}{\sqrt{(1 - y_1^2)(h^2 - y_1^2)}} + \frac{(h + y_2^2)\partial y_2}{\sqrt{(1 - y_2^2)(h^2 - y_2^2)}} = \frac{2(1 + h)(1 + y^2)\partial y}{(1 - y^2)^2}.$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$(1 + h^2)p^2 - 4h = P;$$

ſo iſt

$$y_1 = \tfrac{1}{2}(1 + h)p + \tfrac{1}{2}\sqrt{P},$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2}(1 + h)p - \tfrac{1}{2}\sqrt{P}.$$

Differentiirt man nun nach p; ſo findet man:

$$\partial y_1 = (1 + h)\partial p \,.\, \frac{\sqrt{P} + (1 + h)p}{2\sqrt{P}},$$

$$\partial y_2 = (1 + h)\partial p \,.\, \frac{\sqrt{P} - (1 + h)p}{2\sqrt{P}},$$

oder

$$\partial y_1 = \frac{(1 + h)y_1\partial p}{\sqrt{P}}, \quad \partial y_2 = -\frac{(1 + h)y_2\partial p}{\sqrt{P}}.$$

Ferner findet man

$$h + y_1^2 = \tfrac{1}{2}(1 + h)p\{(1 + h)p + \sqrt{P}\},$$
$$h + y_2^2 = \tfrac{1}{2}(1 + h)p\{(1 + h)p - \sqrt{P}\},$$

d. i.

$$h + y_1^2 = (1 + h)py_1, \quad h + y_2^2 = (1 + h)py_2.$$

Auch iſt nach dem Obigen

$$(1 - x^2)(h^2 - x^2) = (1 + h)^2(1 - px)(h - px)$$
$$= (1 + h)^2 x^2 (p^2 - 1),$$
$$\sqrt{(1 - x^2)(h^2 - x^2)} = (1 + h)x\sqrt{p^2 - 1}.$$

Folglich iſt

$$\sqrt{(1 - y_1^2)(h^2 - y_1^2)} = (1 + h)y_1\sqrt{p^2 - 1},$$
$$\sqrt{(1 - y_2^2)(h^2 - y_2^2)} = (1 + h)y_2\sqrt{p^2 - 1},$$

und nach leichter Rechnung ergiebt ſich nun

$$\frac{(h + y_1^2)\partial y_1}{\sqrt{(1 - y_1^2)(h^2 - y_1^2)}} + \frac{(h + y_2^2)\partial y_2}{\sqrt{(1 - y_2^2)(h^2 - y_2^2)}}$$

$$= \frac{(1 + h)y_1 p\partial p}{\sqrt{(p^2 - 1)P}} - \frac{(1 + h)y_2 p\partial p}{\sqrt{(p^2 - 1)P}} = (y_1 - y_2)\,.\,\frac{(1 + h)p\partial p}{\sqrt{(p^2 - 1)P}}$$

$$= \frac{(1 + h)p\partial p}{\sqrt{p^2 - 1}},$$

weil $y_1 - y_2 = \sqrt{P}$ iſt. Es iſt aber

$$p = \frac{1+y^2}{1-y^2},\ \sqrt{p^2-1} = \frac{2y}{1-y^2},\ \partial p = \frac{4y}{(1-y^2)^2}.$$

Alſo iſt

$$\frac{p\partial p}{\sqrt{p^2-1}} = \frac{2(1+y^2)}{(1-y^2)^2},$$

und folglich wirklich

$$\frac{(1+h)p\partial p}{\sqrt{p^2-1}} = \frac{2(1+h)(1+y^2)\partial y}{(1-y^2)^2},$$

wie es nach dem Obigen ſeyn muß, wenn unſere Gleichung richtig ſeyn ſoll, ſo daß dieſelbe alſo hierdurch verificirt iſt.

Wenn wir

$$(1-x)(x-h) = (1+x)(x+h)y^2$$

ſetzen; ſo iſt immer

$$\int_1^{y} \frac{(h+x^2)\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-h^2)}} + \int_h^{y_2} \frac{(h+x^2)\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-h^2)}} = -\frac{2(1+h)y}{1+y^2},$$

wie auf folgende Art gezeigt werden kann. Die gegebene Gleichung läßt ſich nämlich leicht auf die Form

$$x^2 - (1+h)px + h = 0$$

bringen, wo nun aber

$$p = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

iſt. Aus dieſer Gleichung folgt ganz wie vorher, wenn wir ihre beiden Wurzeln wieder durch y_1 und y_2 bezeichnen,

$$y_1 = \tfrac{1}{2}(1+h)p + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+h)^2p^2 - 4h},$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2}(1+h)p - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+h)^2p^2 - 4h},$$

oder, indem wir wieder der Kürze wegen

$$(1+h)^2p^2 - 4h = P$$

ſetzen,

$$y_1 = \tfrac{1}{2}(1+h)p + \tfrac{1}{2}\sqrt{P},$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2}(1+h)p - \tfrac{1}{2}\sqrt{P},$$

und hieraus ganz eben ſo wie vorher

$$\partial y_1 = \frac{(1+h)y_1\partial p}{\sqrt{P}},\ \partial y_2 = -\frac{(1+h)y_2\partial p}{\sqrt{P}};$$

$$h + y_1^2 = (1+h)py_1,\ h + y_2^2 = (1+h)py_2.$$

Auch findet man ganz eben ſo wie vorher die Gleichung

$$(1-x^2)(h^2-x^2) = (1+h)^2x^2(p^2-1)$$

oder

$$(1-x^2)(x^2-h^2) = (1+h)^2x^2(1-p^2),$$
$$\sqrt{(1-x^2)(x^2-h^2)} = (1+h)x\sqrt{1-p^2},$$

und folglich

$$\sqrt{(1-y_1^2)(y_1^2-h^2)} = (1+h)\,y_1\sqrt{1-p^2},$$
$$\sqrt{(1-y_2^2)(y_2^2-h^2)} = (1+h)\,y_2\sqrt{1-p^2}.$$

Alſo iſt

$$\frac{(h+y_1^2)\partial y_1}{\sqrt{(1-y_1^2)(y_1^2-h^2)}} + \frac{(h+y_2^2)\partial y_2}{\sqrt{(1-y_2^2)(y_2^2-h^2)}}$$
$$=(y_1-y_2)\cdot\frac{(1+h)p\,\partial p}{\sqrt{(1-p^2)}\,P} = \frac{(1+h)p\,\partial p}{\sqrt{1-p^2}}.$$

Nun iſt aber, wie man leicht findet,

$$p = \frac{1-y^2}{1+y^2},\ \sqrt{1-p^2} = \frac{2y}{1+y^2},\ \partial p = -\frac{4y\,\partial y}{(1+y^2)^2}.$$

Alſo iſt

$$\frac{(h+y_1^2)\partial y_1}{\sqrt{(1-y_1^2)(y_1^2-h^2)}} + \frac{(h+y_2^2)\partial y^2}{\sqrt{(1-y_2^2)(y_2^2-h^2)}} = -\frac{2(1+h)(1-y^2)\partial y}{(1+y^2)^2},$$

woraus ſich ferner, wenn man zwiſchen den Gränzen 0 und y integrirt, leicht

$$\int_1^{y_1}\frac{(h+x^2)\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-h^2)}} + \int_h^{y_2}\frac{(h+x^2)\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-h^2)}} = -2(1+h)\int_0^y\frac{(1-y^2)\partial y}{(1+y^2)^2}$$

ergiebt. Weil nun

$$\partial\cdot\frac{y}{1+y^2} = \frac{(1-y^2)\partial y}{(1+y^2)^2}$$

und folglich

$$\int_0^y\frac{(1-y^2)\partial y}{(1+y^2)^2} = \frac{y}{1+y^2}$$

iſt; ſo iſt

$$\int_1^{y_1}\frac{(h+x^2)\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-h^2)}} + \int_h^{y_2}\frac{(h+x^2)\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-h^2)}} = -\frac{2(1+h)y}{1+y^2}.$$

wie bewieſen werden ſollte.

Dieſe letztere Gleichung hat Poiſſon auch noch mitteiſt der elliptiſchen Functionen verificirt, und theilt in ſeiner Abhandlung namentlich auch noch einen dem berühmten Abelſchen Theorem, von welchem im Artikel Elliptiſche Functionen. XXI. ausführlich die Rede geweſen iſt, ähnlichen Satz mit, eine Unterſuchung, in welcher wir ihm hier der Beſchränktheit des Raumes wegen nicht weiter folgen können, ſondern uns mit einer Hinweiſung auf das Abelſche Theorem ſelbſt a. a. O. begnügen müſſen.

5. Zu den ſchönſten neuern Arbeiten über die Integralrechnung gehört unſtreitig die merkwürdige Transformation des wichtigen irrationalen Differentials

$$\frac{\partial E}{\sqrt{(A-a\cos E)^2+(B-b\sin E)^2+C^2}},$$

welche ſich aus der berühmten Abhandlung von Gauß: **Determinatio attractionis, quam in punctum quodvis positionis datae exercet planeta, si ejus massa per totam orbitam, ratione temporis, quo singulae partes describuntur, uniformiter esset dispertita. Comment. soc. reg. gott. recent. Vol. IV. Gott. 1820. p. 21.** ergiebt. Dieſe merkwürdige Transformation und die daraus gezogenen Folgerungen wollen wir daher hier in aller Ausführlichkeit mittheilen. Gauß führt ſtatt der veränderlichen Größe **E** eine andere veränderliche Größe **T** ein, und ſetzt zu dem Ende, indem $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β''; $\gamma, \gamma', \gamma''$ conſtante Größen bezeichnen,

$$\cos E = \frac{\alpha + \alpha' \cos T + \alpha'' \sin T}{\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T},$$

$$\sin E = \frac{\beta + \beta' \cos T + \beta'' \sin T}{\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T},$$

wo nun aber auf der Stelle erhellet, daß die conſtanten Größen $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β''; $\gamma, \gamma', \gamma''$ nicht ganz unabhängig von einander ſeyn können, und es alſo zunächſt darauf ankommt, die Abhängigkeit dieſer neun conſtanten Coefficienten von einander näher zu unterſuchen.

Da man, ohne die Werthe von $\cos E$ und $\sin E$ zu ändern, alle conſtanten Coefficienten mit einerlei Zahl multipliciren kann; ſo könnte man einem derſelben einen beſtimmten Werth beilegen, z. B. $\gamma = 1$ ſetzen. Gauß läßt aber der größern Gleichförmigkeit der Rechnung wegen für's Erſte alle neun Coefficienten unbeſtimmt, welches bekanntlich öfters in ähnlichen Fällen mit beſonderm Vortheil geſchieht. Ferner erhellet, daß weder die Größen $\alpha, \alpha', \alpha''$, noch die Größen β, β', β'', den Größen $\gamma, \gamma', \gamma''$ proportional ſeyn dürfen. Wäre nämlich z. B. das Erſte der Fall, d. i.

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha'}{\gamma'} = \frac{\alpha''}{\gamma''} = \lambda$$

oder

$$a = \gamma\lambda, \quad \alpha' = \gamma'\lambda, \quad \alpha'' = \gamma''\lambda;$$

ſo wäre $\cos E = \lambda$ und folglich **E** keine variable Größe mehr, welches offenbar ungereimt iſt. Alſo dürfen weder die Größen

$$\alpha\gamma' - \alpha'\gamma, \quad \alpha\gamma'' - \alpha''\gamma, \quad \alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma',$$

noch die Größen

$$\beta\gamma' - \beta'\gamma, \quad \beta\gamma'' - \beta''\gamma, \quad \beta'\gamma'' - \beta''\gamma',$$

zugleich verſchwinden.

Aus den beiden Ausdrücken von $\cos E$ und $\sin E$ ergiebt ſich auf der Stelle die Bedingungsgleichung

$$\left\{\frac{\alpha + \alpha' \cos T + \alpha'' \sin T}{\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T}\right\}^2 + \left\{\frac{\beta + \beta' \cos T + \beta'' \sin T}{\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T}\right\}^2 = 1$$

oder

$$(\alpha+\alpha'\cos T+\alpha''\sin T)^2+(\beta+\beta'\cos T+\beta''\sin T)^2-(\gamma+\gamma'\cos T+\gamma''\sin T)^2=0,$$

welche für jedes T Statt finden muß. Entwickelt man die Quadrate, und ordnet gehörig; ſo erhält man:

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha\alpha+\beta\beta-\gamma\gamma & +2(\alpha\alpha'+\beta\beta'-\gamma\gamma')\cos T\\ +(\alpha'\alpha'+\beta'\beta'-\gamma'\gamma')\cos T^2 & +2(\alpha\alpha''+\beta\beta''-\gamma\gamma'')\sin T\\ +(\alpha''\alpha''+\beta''\beta''-\gamma''\gamma'')\sin T^2 & +2(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''-\gamma'\gamma'')\cos T\sin T\end{array}\right\}=0,$$

oder der Kürze wegen

$$a+b\cos T^2+c\sin T^2+2a'\cos T+2b'\sin T+2c'\cos T\sin T=0.$$

Setzt man in dieſer Gleichung, welche für jedes T Statt finden muß, nach der Reihe $T=0$, $T=\frac{1}{2}\pi$, $T=\pi$, $T=\frac{3}{2}\pi$; ſo erhält man

$$a+b+2a'=0,$$
$$a+c+2b'=0,$$
$$a+b-2a'=0,$$
$$a+c-2b'=0.$$

Durch Subtraction der erſten und dritten, und zweiten und vierten Gleichung von einander folgt auf der Stelle

$$a'=0,\ b'=0,$$

ſo daß alſo für jedes T

$$a+b\cos T^2+c\sin T^2+2c'\cos T\sin T=0$$

iſt. Setzt man nun in dieſer Gleichung zuerſt $T=+\frac{1}{4}\pi$, dann $T=-\frac{1}{4}\pi$; ſo erhält man

$$a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}c+c'=0,$$
$$a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}c-c'=0,$$

woraus ſich auf der Stelle

$$c'=0$$

ergiebt, und folglich für jedes T

$$a+b\cos T^2+c\sin T^2=0$$

iſt. Setzt man nun in dieſer Gleichung zuerſt $T=0$, dann $T=\frac{1}{2}\pi$; ſo ergiebt ſich

$$a+b=0,\ a+c=0,$$

d. i.

$$-a=b=c,$$

ſo daß alſo, wenn wir

$$-a=b=c=k$$

ſetzen, für jedes T

$$k(\cos T^2+\sin T^2-1)=0$$

iſt. Aus dieſer Betrachtung ergeben ſich nun auch unmittelbar

die folgenden ſechs zwiſchen den neun conſtanten Coefficienten Statt findenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} -\alpha\alpha-\beta\beta+\gamma\gamma &= \mathrm{k}\\ -\alpha'\alpha'-\beta'\beta'+\gamma'\gamma' &= -\mathrm{k}\\ -\alpha''\alpha''-\beta''\beta''+\gamma''\gamma'' &= -\mathrm{k}\\ -\alpha'\alpha''-\beta'\beta''+\gamma'\gamma'' &= 0\\ -\alpha''\alpha-\beta''\beta+\gamma''\gamma &= 0\\ -\alpha\alpha'-\beta\beta'+\gamma\gamma' &= 0 \end{aligned}\right\}\ (\mathrm{I}).$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$\alpha\beta'\gamma''+\alpha'\beta''\gamma+\alpha''\beta\gamma'-\alpha\beta''\gamma'-\alpha'\beta\gamma''-\alpha''\beta'\gamma=\varepsilon\,;$$

ſo erhalten wir aus den vorhergehenden ſechs Gleichungen ſehr leicht die folgenden neun Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\alpha &= -\mathrm{k}(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')\\ \varepsilon\beta &= -\mathrm{k}(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')\\ \varepsilon\gamma &= +\mathrm{k}(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')\\ \varepsilon\alpha' &= +\mathrm{k}(\beta''\gamma-\gamma''\beta)\\ \varepsilon\beta' &= +\mathrm{k}(\gamma''\alpha-\alpha''\gamma)\\ \varepsilon\gamma' &= -\mathrm{k}(\alpha''\beta-\beta''\alpha)\\ \varepsilon\alpha'' &= +\mathrm{k}(\beta\gamma'-\gamma\beta')\\ \varepsilon\beta'' &= +\mathrm{k}(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')\\ \varepsilon\gamma'' &= -\mathrm{k}(\alpha\beta'-\beta\alpha') \end{aligned}\right\}\ (\mathrm{II}).$$

Es iſt nämlich, um nur etwa die erſte dieſer neun Gleichungen zu beweiſen,

$$\varepsilon\alpha=\alpha\alpha(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')+\alpha\alpha'(\beta''\gamma-\beta\gamma'')+\alpha\alpha''(\beta\gamma'-\beta'\gamma),$$

d. i. nach der erſten, ſechſten und fünften der Gleichungen **I.**:

$$\begin{aligned} \varepsilon\alpha = {} & (-\mathrm{k}+\gamma\gamma-\beta\beta)(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')\\ & +(\gamma\gamma'-\beta\beta')(\beta''\gamma-\beta\gamma'')\\ & +(\gamma''\gamma-\beta''\beta)(\beta\gamma'-\beta'\gamma)\\ = {} & -\mathrm{k}(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')+(\gamma\gamma-\beta\beta)(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')\\ & +(\gamma\gamma'-\beta\beta')(\beta''\gamma-\beta\gamma'')\\ & +(\gamma''\gamma-\beta''\beta)(\beta\gamma'-\beta'\gamma). \end{aligned}$$

Entwickelt man nun die drei letzten Producte auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens; ſo findet man, daß alle Glieder derſelben ſich gegenſeitig aufheben, und folglich

$$\varepsilon\alpha=-\mathrm{k}(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')$$

iſt. Die übrigen der obigen neun Gleichungen können ganz auf dieſelbe Art bewieſen werden.

Aus den drei erſten dieſer neun Gleichungen ergiebt ſich nun ferner die Gleichung

$$\varepsilon\alpha(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + \varepsilon\beta(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') + \varepsilon\gamma(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')$$
$$= -k(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2 - k(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')^2 + k(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')^2,$$

welche ſich leicht auf die Form

$$\varepsilon^2 = k(-\alpha'\alpha' - \beta'\beta' + \gamma'\gamma')(-\alpha''\alpha'' - \beta''\beta'' + \gamma''\gamma'')$$
$$- k(-\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')^2$$

bringen läßt, ſo daß alſo, wie hieraus mittelſt der Gleichungen I unmittelbar folgt,

$$\varepsilon^2 = k^3 \;\ldots\ldots\; (\text{III})$$

iſt.

Nach der vierten, zweiten und dritten der Gleichungen I iſt

$$(\gamma'\gamma'' - \beta'\beta'')^2 - (\gamma'\gamma' - \beta'\beta')(\gamma''\gamma'' - \beta''\beta'')$$
$$= \alpha'\alpha'\alpha''\alpha'' - (\alpha'\alpha' - k)(\alpha''\alpha'' - k),$$

und aus dieſer Gleichung ergiebt ſich nach gehöriger Entwickelung auf der Stelle

$$(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2 = -k(k - \alpha'\alpha' - \alpha''\alpha'').$$

Auf dieſe Weiſe erhält man aus den Gleichungen I überhaupt die folgenden neuen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2 &= -k(k - \alpha'\alpha' - \alpha''\alpha'')\\
(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')^2 &= -k(k - \beta'\beta' - \beta''\beta'')\\
(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')^2 &= +k(k + \gamma'\gamma' + \gamma''\gamma'')\\
(\beta''\gamma - \gamma''\beta)^2 &= +k(k + \alpha\alpha - \alpha''\alpha'')\\
(\gamma''\alpha - \alpha''\gamma)^2 &= +k(k + \beta\beta - \beta''\beta'')\\
(\alpha''\beta - \beta''\alpha)^2 &= -k(k - \gamma\gamma + \gamma''\gamma'')\\
(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 &= +k(k + \alpha\alpha - \alpha'\alpha')\\
(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')^2 &= +k(k + \beta\beta - \beta'\beta')\\
(\alpha\beta' - \beta\alpha'')^2 &= -k(k - \gamma\gamma + \gamma'\gamma')
\end{aligned}\right\} \;(\text{IV.}).$$

Wäre $k = 0$, ſo würden die Größen

$$\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'',\; \beta''\gamma - \gamma''\beta,\; \beta\gamma' - \gamma\beta';$$
$$\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'',\; \gamma''\alpha - \alpha''\gamma,\; \gamma\alpha' - \alpha\gamma';$$
$$\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'',\; \alpha''\beta - \beta''\alpha,\; \alpha\beta' - \beta\alpha';$$

oder

$$\alpha\gamma' - \alpha'\gamma,\; \alpha\gamma'' - \alpha''\gamma,\; \alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma';$$
$$\beta\gamma' - \beta'\gamma,\; \beta\gamma'' - \beta''\gamma,\; \beta'\gamma'' - \beta''\gamma';$$

und, was hieraus folgt,

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta,\; \alpha\beta'' - \alpha''\beta,\; \alpha'\beta'' - \alpha''\beta'$$

zugleich verſchwinden, welches, wie wir aus dem Obigen wiſſen, nicht der Fall ſeyn darf. Deshalb darf alſo auch k nicht $= 0$ ſeyn. Weil nun $\varepsilon^2 = k^3$ iſt; ſo iſt k auch offenbar poſitiv, und muß folglich jederzeit eine poſitive Größe ſeyn, die nicht $= 0$ iſt.

Wegen der erſten Gleichung in **II** und **IV** iſt

$$\varepsilon^2 \alpha\alpha = \mathrm{kk}(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2,$$
$$\mathrm{kk}(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2 = -\mathrm{k}^3(\mathrm{k} - \alpha'\alpha' - \alpha''\alpha'').$$

Alſo iſt

$$\varepsilon^2 \alpha\alpha = -\mathrm{k}^3(\mathrm{k} - \alpha'\alpha' - \alpha''\alpha''),$$

und folglich, weil $\varepsilon^2 = \mathrm{k}^3$ und, wie wir ſo eben geſehen haben, k nicht $= 0$ iſt:

$$\alpha\alpha = -\mathrm{k} + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha''$$

oder

$$\alpha\alpha - \alpha'\alpha' - \alpha''\alpha'' = -\mathrm{k}.$$

Auf dieſe Art erhält man überhaupt aus den drei erſten Gleichungen in **II.** und **IV**:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\alpha - \alpha'\alpha' - \alpha''\alpha'' = -\mathrm{k} \\ \beta\beta - \beta'\beta' - \beta''\beta'' = -\mathrm{k} \\ \gamma\gamma - \gamma'\gamma' - \gamma''\gamma'' = +\mathrm{k} \end{array}\right\} (\mathrm{V}).$$

Die übrigen Gleichungen in **II** und **IV** würden dieſelben Gleichungen geben.

Nach der zweiten, fünften und achten der Gleichungen **II** hat man:

$$\varepsilon\beta\gamma = -\mathrm{k}\gamma(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma''),$$
$$\varepsilon\beta'\gamma' = +\mathrm{k}\gamma'(\gamma''\alpha - \alpha''\gamma),$$
$$\varepsilon\beta''\gamma'' = +\mathrm{k}\gamma''(\gamma\alpha' - \alpha\gamma').$$

Alſo iſt

$$\varepsilon(\beta\gamma - \beta'\gamma' - \beta''\gamma'')$$
$$= -\mathrm{k}\{\gamma(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') + \gamma'(\gamma''\alpha - \alpha''\gamma) + \gamma''(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')\};$$

folglich

$$\varepsilon(\beta\gamma - \beta'\gamma' - \beta''\gamma'') = 0;$$

alſo, weil k, und folglich wegen $\varepsilon^2 = \mathrm{k}^3$ auch ε nicht $= 0$ iſt,

$$\beta\gamma - \beta'\gamma' - \beta''\gamma'' = 0.$$

Auf dieſe Weiſe erhält man überhaupt aus den Gleichungen **II**:

$$\left.\begin{array}{l} \beta\gamma - \beta'\gamma' - \beta''\gamma'' = 0 \\ \gamma\alpha - \gamma'\alpha' - \gamma''\alpha'' = 0 \\ \alpha\beta - \alpha'\beta' - \alpha''\beta'' = 0 \end{array}\right\} (\mathrm{VI}).$$

Weil man nach einer ſchon oben gemachten Bemerkung die conſtanten Coefficienten ſämmtlich mit einerlei Zahl multipliciren kann, wodurch der Werth von k offenbar mit dem Quadrate dieſer Zahl multiplicirt wird; ſo iſt es, wie von nun an auch immer geſchehen ſoll, verſtattet, $\mathrm{k} = 1$, und folglich $\varepsilon = \pm 1$ zu ſetzen. Dadurch gehen die ſechs erſten Bedingungsgleichungen in folgende über:

$$\left.\begin{aligned}
-\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma &= 1\\
-\alpha'\alpha' - \beta'\beta' + \gamma'\gamma' &= -1\\
-\alpha''\alpha'' - \beta''\beta'' + \gamma''\gamma'' &= -1\\
-\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= 0\\
-\alpha''\alpha - \beta''\beta + \gamma''\gamma &= 0\\
-\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0
\end{aligned}\right\} \text{(VII)}$$

Bezeichnen wir nun die Größe

$$\sqrt{(A-a\cos E)^2 + (B-b\sin E)^2 + C^2}$$

durch ϱ und führen in dieſelbe für $\cos E$ und $\sin E$ ihre obigen Ausdrücke ein; ſo erhalten wir für ϱ offenbar einen Ausdruck von der Form

$$\varrho = \frac{\sqrt{G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2 + 2H\cos T\sin T + 2H'\sin T + 2H''\cos T}}{\gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T},$$

und wollen nun die neun conſtanten Coefficienten $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β''; $\gamma, \gamma', \gamma''$ auf eine ſolche Weiſe zu beſtimmen ſuchen, daß, außer den ſechs Gleichungen VII, auch noch den drei Gleichungen

$$H = 0,\quad H' = 0,\quad H'' = 0$$

genügt wird, wodurch das Problem, da wir jetzt neun Gleichungen zwiſchen neun unbekannten Größen haben, offenbar im Allgemeinen eine beſtimmte Aufgabe wird. Sehr leicht ſieht man aber, daß es überhaupt bloß darauf ankommt, die neun conſtanten Coefficienten ſo zu beſtimmen, daß den ſechs Gleichungen VII genügt wird, und daß, indem wir

$$\gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T = t$$

ſetzen, die Größe

$$(A^2 + B^2 + C^2)t^2 + a^2(t\cos E)^2 + b^2(t\sin E)^2 - 2aAt.t\cos E - 2bBt.t\sin E$$

durch die Subſtitution von

$$\begin{aligned}
t\cos E &= \alpha + \alpha'\cos T + \alpha''\sin T,\\
t\sin E &= \beta + \beta'\cos T + \beta''\sin T,\\
t &= \gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T
\end{aligned}$$

in eine Größe von der Form

$$G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2$$

übergeht, Bedingungen, welche offenbar jederzeit erfüllt ſeyn werden, wenn man die neun conſtanten Coefficienten ſo beſtimmen kann, daß den ſechs Gleichungen VII genügt wird, und daß überhaupt die Function

$$a^2x^2 + b^2y^2 + (A^2 + B^2 + C^2)z^2 - 2aAxz - 2Byz,$$

welche wir durch V bezeichnen wollen, durch die Subſtitution von

$$\begin{aligned}
x &= \alpha u + \alpha' u' + \alpha'' u'',\\
y &= \beta u + \beta' u' + \beta'' u'',\\
z &= \gamma u + \gamma' u' + \gamma'' u''
\end{aligned}$$

für jedes x, y, z oder jedes u, u', u'' in eine Größe von der Form

$$Gu^2 + G'u'^2 + G''u''^2$$

übergeht. Multiplicirt man aber x, y, z nach der Reihe mit α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$; ſo erhält man:

$$\begin{aligned}
\alpha x &= \alpha\alpha u + \alpha\alpha' u' + \alpha\alpha'' u'',\\
\beta y &= \beta\beta u + \beta\beta' u' + \beta\beta'' u'',\\
\gamma z &= \gamma\gamma u + \gamma\gamma' u' + \gamma\gamma'' u'',\\
\alpha' x &= \alpha\alpha' u + \alpha'\alpha' u' + \alpha'\alpha'' u'',\\
\beta' y &= \beta\beta' u + \beta'\beta' u' + \beta'\beta'' u'',\\
\gamma' z &= \gamma\gamma' u + \gamma'\gamma' u' + \gamma'\gamma'' u'';\\
\alpha'' x &= \alpha\alpha'' u + \alpha'\alpha'' u' + \alpha''\alpha'' u'',\\
\beta'' y &= \beta\beta'' u + \beta'\beta'' u' + \beta''\beta'' u'',\\
\gamma'' z &= \gamma\gamma'' u + \gamma'\gamma'' u' + \gamma''\gamma'' u'';
\end{aligned}$$

folglich

$$- \alpha x - \beta y + \gamma z$$
$$= (-\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma)u + (-\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma')u' + (-\alpha\alpha'' - \beta\beta'' + \gamma\gamma'')u'',$$

$$\alpha' x + \beta' y - \gamma' z$$
$$= -(-\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma')u - (-\alpha'\alpha' - \beta'\beta' + \gamma'\gamma')u' - (-\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')u'',$$

$$\alpha'' x + \beta'' y - \gamma'' z$$
$$= -(-\alpha\alpha'' - \beta\beta'' + \gamma\gamma'')u - (-\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')u' - (-\alpha''\alpha'' - \beta''\beta'' + \gamma''\gamma'')u'';$$

alſo nach den Gleichungen VII:

$$\begin{aligned}
u &= -\alpha x - \beta y + \gamma z,\\
u' &= \alpha' x + \beta' y - \gamma' z,\\
u'' &= \alpha'' x + \beta'' y - \gamma'' z.
\end{aligned}$$

Folglich muß für jedes x, y, z

$$a^2x^2 + b^2y^2 + (A^2 + B^2 + C^2)z^2 - 2aAxz - 2bByz$$
$$= G(-\alpha x - \beta y + \gamma z)^2 + G'(\alpha' x + \beta' y - \gamma' z)^2 + G''(\alpha'' x + \beta'' y - \gamma'' z)^2$$

ſeyn, woraus ſich auf der Stelle die ſechs folgenden Gleichungen ergeben:

$$\left.\begin{aligned}
aa &= G\alpha\alpha + G'\alpha'\alpha' + G''\alpha''\alpha''\\
bb &= G\beta\beta + G'\beta'\beta' + G''\beta''\beta''\\
AA + BB + CC &= G\gamma\gamma + G'\gamma'\gamma' + G''\gamma''\gamma''\\
bB &= G\beta\gamma + G'\beta'\gamma' + G''\beta''\gamma''\\
aA &= G\gamma\alpha + G'\gamma'\alpha' + G''\gamma''\alpha''\\
0 &= G\alpha\beta + G'\alpha'\beta' + G''\alpha''\beta''
\end{aligned}\right\} \text{(VIII)}$$

und man ſieht nun, daß unſer Problem jetzt darauf zurückgeführt iſt, daß die zwölf Größen $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β''; $\gamma, \gamma', \gamma''$; G, G', G'' ſo zu beſtimmen ſind, daß den zwölf Gleichungen **VII** und **VIII** genügt wird, woraus dann auch zugleich erhellet, daß die Aufgabe, da wir zwölf Gleichungen zwiſchen eben

ſo vielen unbekannten Größen haben, nun im Allgemeinen eine beſtimmte iſt. Können wir alſo die genannten zwölf Größen auf die angegebene Weiſe beſtimmen; ſo geht die Größe

$$\varrho = \sqrt{(A - a\cos E)^2 + (B - b\sin E)^2 + C^2}$$

durch die Subſtitution von

$$\cos E = \frac{\alpha + \alpha'\cos T + \alpha''\sin T}{\gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T},$$

$$\sin E = \frac{\beta + \beta'\cos T + \beta''\sin T}{\gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T}$$

jederzeit in die Größe

$$\frac{\sqrt{G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2}}{\gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T}$$

über, und es kommt daher nun zunächſt auf die vollſtändige Auflöſung der zwölf Gleichungen **VII** und **VIII** an.

6. Aus der erſten, fünften und ſechſten der Gleichungen **VIII** folgt:

$$\alpha aa = G\alpha\alpha\alpha + G'\alpha\alpha'\alpha' + G''\alpha\alpha''\alpha'',$$
$$\gamma aA = G\gamma\gamma\alpha + G'\gamma\gamma'\alpha' + G''\gamma\gamma''\alpha'',$$
$$0 = G\beta\alpha\beta + G'\beta\alpha'\beta' + G''\beta\alpha''\beta'';$$

alſo

$$- \alpha aa + \gamma aA$$
$$= \alpha G(-\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma) + \alpha' G'(-\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma') + \alpha'' G''(-\alpha\alpha'' - \beta\beta'' + \gamma\gamma''),$$

d. i. nach den Gleichungen **VII**:

$$- \alpha aa + \gamma aA = \alpha G.$$

Aus der zweiten, vierten und ſechſten der Gleichungen **VIII** erhält man:

$$\beta bb = G\beta\beta\beta + G'\beta\beta'\beta' + G''\beta\beta''\beta'',$$
$$\gamma bB = G\gamma\beta\gamma + G'\gamma\beta'\gamma' + G''\gamma\beta''\gamma'',$$
$$0 = G\alpha\alpha\beta + G'\alpha\alpha'\beta' + G''\alpha\alpha''\beta'';$$

alſo

$$- \beta bb + \gamma bB$$
$$= \beta G(-\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma) + \beta' G'(-\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma') + \beta'' G''(-\alpha\alpha'' - \beta\beta'' + \gamma\gamma''),$$

d. i. nach den Gleichungen **VII**:

$$- \beta bb + \gamma bB = \beta G.$$

Endlich folgt aus der dritten, vierten und fünften der Gleichungen **VIII** auch:

$$\gamma(AA + BB + CC) = G\gamma\gamma\gamma + G'\gamma\gamma'\gamma' + G''\gamma\gamma''\gamma'',$$
$$\beta bB = G\beta\beta\gamma + G'\beta\beta'\gamma' + G''\beta\beta''\gamma'',$$
$$\alpha aA = G\alpha\gamma\alpha + G'\alpha\gamma'\alpha' + G''\alpha\gamma''\alpha'';$$

alſo

$$\gamma(AA + BB + CC) - \alpha aA - \beta bB$$
$$= \gamma G(-\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma) + \gamma' G'(-\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma') + \gamma'' G''(-\alpha\alpha'' - \beta\beta'' + \gamma\gamma'')$$

d. i. nach den Gleichungen VII:

$$\gamma(AA + BB + CC) - \alpha aA - \beta bB = \gamma G .$$

Alſo haben wir die drei folgenden Gleichungen:

$$-\alpha aa + \gamma aA = \alpha G ,$$
$$-\beta bb + \gamma bB = \beta G ,$$
$$\gamma(AA + BB + CC) - \alpha aA - \beta bB = \gamma G ,$$

aus denen ſich leicht

$$1.\ \alpha = \frac{\gamma aA}{a^2 + G},\quad 2.\ \beta = \frac{\gamma bB}{b^2 + G};$$

$$3.\ \frac{A^2}{a^2 + G} + \frac{B^2}{b^2 + G} + \frac{C^2}{G} = 1$$

ergiebt.

Auf ganz ähnliche Art findet man:

$$4.\ \alpha' = \frac{\gamma' aA}{a^2 - G'},\quad 5.\ \beta' = \frac{\gamma' bB}{b^2 - G'};$$

$$6.\ \frac{A^2}{a^2 - G'} + \frac{B^2}{b^2 - G'} - \frac{C^2}{G'} = 1 ,$$

und ganz eben ſo:

$$7.\ \alpha'' = \frac{\gamma'' aA}{a^2 - G''},\quad 8.\ \beta'' = \frac{\gamma'' bB}{b^2 - G''};$$

$$9.\ \frac{A^2}{a^2 - G''} + \frac{B^2}{b^2 - G''} - \frac{C^2}{G''} = 1 .$$

Betrachtet man nun die drei Gleichungen

$$\frac{A^2}{a^2 + G} + \frac{B^2}{b^2 + G} + \frac{C^2}{G} = 1 ,$$
$$\frac{A^2}{a^2 - G'} + \frac{B^2}{b^2 - G'} + \frac{C^2}{-G'} = 1 ,$$
$$\frac{A^2}{a^2 - G''} + \frac{B^2}{b^2 - G''} + \frac{C^2}{-G''} = 1$$

näher; ſo erhellet auf der Stelle, daß die Größen, G, $-G'$, $-G''$ die drei Wurzeln der Gleichung

$$10.\ \frac{A^2}{a^2 + x} + \frac{B^2}{b^2 + x} + \frac{C^2}{x} = 1$$

oder

$$11.\ x^3 - (A^2 + B^2 + C^2 - a^2 - b^2)x^2 + (a^2b^2 - a^2B^2 - a^2C^2 - b^2A^2 - b^2C^2)x - a^2b^2C^2 = 0$$

ſind, ſo daß es nun zunächſt auf eine genauere Unterſuchung der Natur der drei Wurzeln dieſer cubiſchen Gleichung ankommt, die ſich auf folgende Art anſtellen läßt.

7. Wir nehmen im Folgenden an, daß keine der beiden Größen a, b null iſt.

I. Unſere Gleichung hat, wie jede cubiſche Gleichung, entweder drei reelle, oder zwei imaginäre und eine reelle Wurzel. Bezeichnen wir nun die drei Wurzeln überhaupt durch p, q, r; ſo iſt nach dem im Artikel Gleichung (26.) i. d. Z. bewieſenen Satze

$$a^2 b^2 C^2 = pqr .$$

Sind nun alle drei Wurzeln reell; ſo können dieſelben, weil $a^2 b^2 C^2$ niemals negativ ſeyn kann, nicht alle drei negativ ſeyn, ſondern mindeſtens eine derſelben muß jederzeit poſitiv ſeyn, kann aber auch, wenn $C = 0$ iſt, verſchwinden. Sind ferner zwei Wurzeln, z. B. p, q, imaginär, die dritte r dagegen reell; ſo ſind nach dem im Artikel Gleichung (19.) i. d. Z. bewieſenen Satze die beiden imaginären Wurzeln jederzeit von der Form

$$p = m + n\sqrt{-1},\ q = m - n\sqrt{-1},$$

und das Product

$$pq = (m + n\sqrt{-1})(m - n\sqrt{-1}) = m^2 + n^2$$

iſt folglich ſtets poſitiv. Daher muß in dieſem Falle, weil $a^2b^2C^2$ niemals negativ iſt, die reelle Wurzel r jederzeit poſitiv oder $=0$ ſeyn, welches Letztere in dieſem Falle jederzeit Statt finden wird, wenn $C = 0$ iſt und das letzte Glied unſerer Gleichung alſo verſchwindet. Aus dieſen Betrachtungen geht hervor, daß die Gleichung (11.) jederzeit mindeſtens eine relle Wurzel hat, welche entweder poſitiv, oder, wenn C verſchwindet, $= 0$ iſt. Dieſe reelle nicht negative Wurzel wollen wir im Folgenden durch g bezeichnen.

II. Zieht man von der Gleichung (10.), die man auch auf folgende Art ſchreiben kann:

$$\frac{A^2 x}{a^2 + x} + \frac{B^2 x}{b^2 + x} + C^2 = x ,$$

die Gleichung

$$\frac{A^2 g}{a^2 + g} + \frac{B^2 g}{b^2 + g} + C^2 = g ,$$

ab, und dividirt die dadurch hervorgehende Gleichung durch $x - g$; ſo ergiebt ſich die quadratiſche Gleichung

$$\frac{a^2 A^2}{(a^2 + x)(a^2 + g)} + \frac{b^2 B^2}{(b^2 + x)(b^2 + g)} = 1 .$$

Löſt man nun dieſe Gleichung nach gewöhnlicher Methode auf; ſo erhält man für die beiden andern Wurzeln der Gleichung (11.) folgenden Ausdruck:

$$2x = \frac{a^2 A^2}{a^2 + g} + \frac{b^2 B^2}{b^2 + g} - a^2 - b^2$$
$$\pm \sqrt{\left(a^2 - b^2 - \frac{a^2 A^2}{a^2 + g} + \frac{b^2 B^2}{b^2 + g}\right)^2 + \frac{4a^2 b^2 A^2 B^2}{(a^2 + g)(b^2 + g)}},$$

und ſieht hieraus, indem man ſich zugleich erinnert, daß g nicht negativ iſt, daß auch die beiden andern Wurzeln der Gleichung (11.) reell ſind, ſo daß alſo dieſe Gleichung jederzeit drei reelle Wurzeln, und unter denſelben immer mindeſtens **eine** nicht negative, vorher durch g bezeichnete, Wurzel hat.

III. Zieht man aber die beiden ſchon vorher von einander ſubtrahirten Gleichungen, indem man dieſelben jetzt nur auf folgende Art ſchreibt:

$$\frac{A^2 gx}{a^2+x} + \frac{B^2 gx}{b^2+x} + C^2 g = gx \,,$$

$$\frac{A^2 gx}{a^2+g} + \frac{B^2 gx}{b^2+g} + C^2 x = gx \,,$$

wieder von einander ab, und dividirt die hervorgehende Gleichung durch g — x; ſo erhält man die quadratiſche Gleichung

$$\frac{A^2 gx}{(a^2+g)(a^2+x)} + \frac{B^2 gx}{(b^2+g)(b^2+x)} + C^2 = 0 \,,$$

deren Wurzeln natürlich ebenfalls mit den beiden Wurzeln, welche die Gleichung (11.) außer der Wurzel g noch hat, einerlei ſind. Da aber g bekanntlich nicht negativ iſt; ſo iſt klar, daß ſich der vorſtehenden Gleichung durch keinen poſitiven Werth von x genügen läßt, und daß alſo die Gleichung (11.) nie mehr als **eine** poſitive reelle Wurzel haben kann.

IV. Wenn alſo C nicht = 0 iſt; ſo hat die Gleichung (11.) jederzeit eine poſitive und zwei negative reelle Wurzeln. Iſt aber C = 0 und folglich auch eine Wurzel der in Rede ſtehenden Gleichung = 0; ſo ſind die beiden andern Wurzeln derſelben in der quadratiſchen Gleichung

$$x^2 - (A^2 + B^2 - a^2 - b^2)x + a^2 b^2 - a^2 B^2 - b^2 A^2 = 0$$

enthalten, und werden alſo, wie man durch Auflöſung dieſer quadratiſchen Gleichung findet, durch folgende Formel gegeben:

$$x = \tfrac{1}{2}(A^2 + B^2 - a^2 - b^2) \pm \sqrt{(A^2 - B^2 - a^2 + b^2)^2 + 4A^2 B^2} \,,$$

wo nun nach **Gauß** wieder die drei folgenden Fälle zu unterſcheiden ſind.

1. Wenn das letzte Glied

$$a^2 b^2 - a^2 B^2 - b^2 A^2$$

unſerer quadratiſchen Gleichung poſitiv und nicht = 0 iſt; ſo ſind die Wurzeln derſelben, die, wie wir ſchon aus dem Vorhergehenden wiſſen, reell ſind, aber nicht beide poſitiv ſeyn können, beide negativ, weil das letzte Glied bekanntlich das Product der beiden Wurzeln iſt, und dieſelben daher in dieſem Falle, wo das letzte Glied nach der Vorausſetzung poſitiv iſt, nothwendig einerlei Vorzeichen haben müſſen. Uebrigens erhellet dies auch, wie **Gauß** noch bemerkt, auf folgende Art. Der Coefficient

$$-(A^2 + B^2 - a^2 - b^2)$$

des zweiten Gliedes läßt ſich nämlich, wie leicht erhellet, unter der Form

$$(a^2b^2 - a^2B^2 - b^2A^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{b^2A^2}{a^2} + \frac{a^2B^2}{b^2}$$

darſtellen, und iſt alſo in dem vorliegenden Falle, wo nach der Vorausſetzung

$$a^2b^2 - a^2B^2 - b^2A^2$$

poſitiv iſt, offenbar jederzeit poſitiv. Da nun dieſer Coefficient nach dem im Artikel Gleichung (26.) i. d. Z. bewieſenen Satze die Summe der beiden mit entgegengeſetzten Vorzeichen genommenen Wurzeln iſt, und die Wurzeln, weil das letzte Glied poſitiv iſt, nothwendig einerlei Vorzeichen haben müſſen; ſo iſt klar, daß dieſelben beide negativ ſind.

2. Wenn das letzte Glied

$$a^2b^2 - a^2B^2 - b^2A^2$$

negativ iſt; ſo iſt, wie auf der Stelle erhellet, eine der beiden Wurzeln poſitiv, die andere dagegen negativ.

3. Wenn endlich das letzte Glied

$$a^2b^2 - a^2B^2 - b^2A^2$$

verſchwindet; ſo iſt jederzeit eine der beiden Wurzeln der quadratiſchen Gleichung $=0$, und die andere iſt, wie ſich aus dem Vorhergehenden leicht, am leichteſten aus der in 1. benutzten beſondern Darſtellung des Coefficienten des zweiten Gliedes ergiebt, $=$

$$-\frac{b^2A^2}{a^2} - \frac{a^2B}{b^2},$$

folglich negativ, ſo daß alſo in dieſem Falle die cubiſche Gleichung (11.) zwei verſchwindende und eine negative Wurzel hat.

8. Wenn man die drei erſten der Gleichungen **VII** mit den Gleichungen 1., 2., 4., 5., 7., 8. verbindet; ſo erhält man für die Größen γ, γ', γ'' leicht die folgenden Ausdrücke:

$$12.\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{aA}{a^2+G}\right)^2 - \left(\frac{bB}{b^2+G}\right)^2}},$$

$$13.\quad \gamma' = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{aA}{a^2-G'}\right)^2 + \left(\frac{bB}{b^2-G'}\right)^3 - 1}},$$

$$14.\quad \gamma'' = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{aA}{a^2-G''}\right)^2 + \left(\frac{bB}{b^2-G''}\right)^2 - 1}}.$$

Dieſe drei Ausdrücke laſſen ſich aber auch auf folgende Form bringen:

$$\gamma = \int \frac{G}{G - \left(\frac{aA}{a^2+G}\right)^2 . G - \left(\frac{bB}{b^2+G}\right)^2 . G},$$

$$\gamma' = \int \frac{G'}{\left(\frac{aA}{a^2-G'}\right)^2 . G' + \left(\frac{bB}{b^2-G'}\right)^2 . G' - G'},$$

$$\gamma'' = \int \frac{G''}{\left(\frac{aA}{a^2-G''}\right)^2 . G'' + \left(\frac{bB}{b^2-G''}\right)^2 . G'' - G''},$$

und nach den Gleichungen 3., 6., 9. iſt:

$$G = \frac{A^2 G}{a^2+G} + \frac{B^2 G}{b^2+G} + C^2,$$

$$G' = \frac{A^2 G'}{a^2-G'} + \frac{B^2 G'}{b^2-G'} - C^2,$$

$$G'' = \frac{A^2 G''}{a^2-G''} + \frac{B^2 G''}{b^2-G''} - C^2.$$

Alſo iſt, wenn wir der Kürze wegen

$$\gamma = \int \frac{G}{N}, \quad \gamma' = \int \frac{G'}{N'}, \quad \gamma'' = \int \frac{G''}{N''}$$

ſetzen,

$$N = \frac{A^2 G}{a^2+G} + \frac{B^2 G}{b^2+G} + C^2 - \left(\frac{aA}{a^2+G}\right)^2 . G - \left(\frac{bB}{b^2+G}\right)^2 . G$$

$$= \left(\frac{AG}{a^2+G}\right)^2 + \left(\frac{BG}{b^2+G}\right)^2 + C^2,$$

$$N' = \left(\frac{aA}{a^2-G'}\right)^2 . G' + \left(\frac{bB}{b^2-G'}\right)^2 . G' - \frac{A^2 G'}{a^2-G'} - \frac{B^2 G'}{b^2-G'} + C^2$$

$$= \left(\frac{AG'}{a^2-G'}\right)^2 + \left(\frac{BG'}{b^2-G'}\right)^2 + C^2,$$

$$N'' = \left(\frac{aA}{a^2-G''}\right)^2 . G'' + \left(\frac{bB}{b^2-G''}\right)^2 . G'' - \frac{A^2 G''}{a^2-G''} - \frac{B^2 G''}{b^2-G''} + C^2$$

$$= \left(\frac{AG''}{a^2-G''}\right)^2 + \left(\frac{BG''}{b^2-G''}\right)^2 + C^2,$$

und folglich

$$15.\quad \gamma = \int \frac{G}{\left(\frac{AG}{a^2+G}\right)^2 + \left(\frac{BG}{b^2+G}\right)^2 + C^2},$$

$$16.\quad \gamma' = \int \frac{G'}{\left(\frac{AG'}{a^2-G'}\right)^2 + \left(\frac{BG'}{b^2-G'}\right)^2 + C^2},$$

$$17.\quad \gamma'' = \int \frac{G''}{\left(\frac{AG''}{a^2-G''}\right)^2 + \left(\frac{BG''}{b^2-G''}\right)^2 + C^2}.$$

Aus dieſen Ausdrücken erhellet auf der Stelle, daß, wenn die Größen γ, γ', γ'' ſämmtlich reell ſeyn ſollen, keine der Größen G, G′, G″ negativ ſeyn darf. Iſt nun

I. C nicht $= 0$; ſo muß man, wobei man ſich zu erinnern hat, daß G, — G′, — G″ die drei Wurzeln der Gleichung 10. ſind, für G offenbar die poſitive, für — G′ dagegen die eine, und für — G″ die andere negative Wurzel dieſer Gleichung ſetzen, wobei es an ſich willkührlich iſt, welche der beiden negativen Wurzeln man für — G′, und welche man für — G″ ſetzt. Nur könnte hier noch die Frage entſtehen, ob es nicht vielleicht verſtattet wäre, für — G′ und — G″ ein und dieſelbe negative Wurzel der Gleichung 10. zu ſetzen, wobei denn die andere negative Wurzel dieſer Gleichung ganz unberückſichtigt bleiben würde. Wollte man aber auf dieſe Weiſe verfahren; ſo würde $-G' = -G''$, und folglich, wie ſich aus den Gleichungen 16., 17., 4., 5., 7., 8. ergiebt,

$$\gamma' = \pm\gamma'', \quad \alpha' = \pm\alpha'', \quad \beta' = \pm\beta'';$$

alſo

$$\pm\alpha'\alpha'' \pm \beta'\beta'' \mp \gamma'\gamma'' = \alpha'\alpha' + \beta'\beta' - \gamma'\gamma',$$

d. i. nach der zweiten der Gleichungen VII

$$\pm\alpha'\alpha'' \pm \beta'\beta'' \mp \gamma'\gamma'' = 1$$

ſeyn, da doch nach der vierten in derſelben Reihe von Gleichungen

$$\pm\alpha'\alpha'' \pm \beta'\beta'' \mp \gamma'\gamma'' = 0$$

iſt, ſo daß man alſo für — G′ und — G″ nie ein und dieſelbe negative Wurzel der Gleichung 10. oder 11. ſetzen darf. Der Fall, wo die beiden negativen Wurzeln dieſer Gleichung einander gleich ſind, wird nachher beſonders betrachtet werden.

II. Wenn $C = 0$ iſt; ſo hat man wieder die drei folgenden Fälle zu unterſcheiden, wobei wir auf (7. IV.) zurückweiſen.

1. Wenn

$$a^2b^2 - a^2B^2 - b^2A^2$$

poſitiv und nicht $= 0$ iſt; ſo hat man $G = 0$ und für — G′ und — G″ die beiden negativen Wurzeln zu ſetzen, welche in dieſem Falle die Gleichung 10. oder 11. jederzeit hat. Da aber dann der Ausdruck 15. von γ unbeſtimmt wird; ſo hat man in dieſem Falle den Ausdruck 12. von γ beizubehalten, nämlich

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{A^2}{a^2} - \frac{B^2}{b^2}}}$$

zu ſetzen. Weil nach der Vorausſetzung

$$a^2b^2 - a^2B^2 - b^2A^2$$

poſitiv und nicht $= 0$ iſt; ſo iſt natürlich auch

$$1 - \frac{A^2}{a^2} - \frac{B^2}{b^2}$$

poſitiv und nicht $= 0$.

2. Wenn

$$a^2 b^2 - a^2 B^2 - b^2 A^2$$

negativ iſt; ſo hat man für G die poſitive Wurzel der Gleichung 10. oder 11., und entweder die negative Wurzel $= -G'$ und $G'' = 0$, oder die negative Wurzel $= -G''$ und $G' = 0$ zu ſetzen. Im erſten Falle wird γ'', im zweiten γ' durch die Formel

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} - 1}}$$

gefunden. Da nach der Vorausſetzung

$$a^2 b^2 - a^2 B^2 - b^2 A^2$$

negativ iſt; ſo iſt auch

$$1 - \frac{A^2}{a^2} - \frac{B^2}{b^2}$$

negativ, oder

$$\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} - 1$$

poſitiv und nicht $= 0$.

3. Wenn

$$a^2 b^2 - a^2 B^2 - b^2 A^2 = 0$$

iſt; ſo iſt auch

$$1 - \frac{A^2}{a^2} - \frac{B^2}{b^2} = \frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} - 1 = 0,$$

und es erhellet alſo, daß in dieſem Falle entweder γ und γ' oder γ und γ'' unendlich werden, woraus man ſchließt, daß in dieſem Falle die Transformation, von der hier überhaupt die Rede iſt, nicht möglich iſt, weshalb dieſer Fall auch von der fernern Betrachtung ganz ausgeſchloſſen werden ſoll. Daß keine der beiden Größen a, b null ſeyn ſoll, iſt ſchon oben vorausgeſetzt worden.

9. Gauß giebt nun für die Größen γ, γ', γ'' noch andere Ausdrücke, die ebenfalls ſehr merkwürdig ſind, und daher hier auch noch entwickelt werden ſollen. Multiplicirt man nämlich die Gleichung

$$\frac{A^2}{a^2 + G} + \frac{B^2}{b^2 + G} + \frac{C^2}{G} = 1$$

mit $a^2 b^2 - G^2$; ſo erhält man

$$\frac{A^2(a^2 b^2 - G^2)}{a^2 + G} + \frac{B^2(a^2 b^2 - G^2)}{b^2 + G} + \frac{a^2 b^2 C^2}{G} - C^2 G$$
$$= a^2 b^2 - G^2,$$

oder

$$\frac{A^2\{a^2(b^2+G)-(a^2+G)G\}}{a^2+G}+\frac{B^2\{b^2(a^2+G)-(b^2+G)G\}}{b^2+G}$$
$$+\frac{a^2b^2C^2}{G}-C^2G=a^2b^2-G^2,$$

oder

$$\frac{a^2A^2(b^2+G)}{a^2+G}-A^2G+\frac{b^2B^2(a^2+G)}{b^2+G}-B^2G+\frac{a^2b^2C^2}{G}-C^2G$$
$$=a^2b^2-G^2.$$

Weil aber $G, -G', -G''$ die Wurzeln der Gleichung 11. ſind; ſo iſt nach dem im Artikel Gleichung (26.) i. d. Z. bewieſenen Satze

$$G-G'-G''=A^2+B^2+C^2-a^2-b^2,\ GG'G''=a^2b^2C^2,$$

und die vorhergehende Gleichung geht alſo, wie leicht erhellet, in folgende über:

$$\frac{a^2A^2(b^2+G)}{a^2+G}+\frac{b^2B^2(a^2+G)}{b^2+G}+G'G''-G(G-G'-G''+a^2+b^2)$$
$$=a^2b^2-G^2,$$

die aber ſehr leicht auf folgende Form gebracht werden kann:

$$\frac{a^2A^2(b^2+G)}{a^2+G}+\frac{b^2B^2(a^2+G)}{b^2+G}-(a^2+G)(b^2+G)$$
$$+(G+G')(G+G'')=0.$$

Dividirt man nun mit

$$(a^2+G)(b^2+G);$$

ſo erhält man

$$\left(\frac{aA}{a^2+G}\right)^2+\left(\frac{bB}{b^2+G}\right)^2-1+\frac{(G+G')(G+G'')}{(a^2+G)(b^2+G)}=0$$

oder

$$1-\left(\frac{aA}{a^2+G}\right)^2-\left(\frac{bB}{b^2+G}\right)^2=\frac{(G+G')(G+G'')}{(a^2+G)(b^2+G)},$$

$$\frac{1}{1-\left(\frac{aA}{a^2+G}\right)^2-\left(\frac{bB}{b^2+G}\right)^2}=\frac{(a^2+G)(b^2+G)}{(G+G')(G+G'')},$$

und folglich nach 12.

$$\gamma=\sqrt{\frac{(a^2+G)(b^2+G)}{(G+G')(G+G'')}}.$$

Wendet man nun auch auf die Gleichungen 6. und 9. ein ganz ähnliches Verfahren an; ſo erhält man überhaupt für $\gamma, \gamma', \gamma''$ die drei folgenden höchſt merkwürdigen Ausdrücke:

$$18.\quad \gamma=\sqrt{\frac{(a^2+G)(b^2+G)}{(G+G')(G+G'')}},$$

$$19.\quad \gamma'=\sqrt{\frac{(a^2-G')(b^2-G')}{(G+G')(G''-G')}},$$

$$20.\quad \gamma'' = \sqrt{\frac{(a^2 - G'')(b^2 - G'')}{(G + G'')(G' - G'')}},$$

und es erhellet leicht, daß dieſe Ausdrücke zur Berechnung von $\gamma, \gamma', \gamma''$ vorzüglich bequem ſind.

Da man nun $\gamma, \gamma', \gamma''$ hat; ſo iſt es auch leicht, die Größen $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β'' mittelſt der Gleichungen 1., 4., 7., 2., 5., 8. zu finden.

10. Aus dem Vorhergehenden laſſen ſich noch mehrere andere Relationen ableiten, von denen wir die bemerkenswertheſten ebenfalls mittheilen wollen. Da nämlich $G, -G', -G''$ die drei Wurzeln der Gleichung 11. ſind; ſo iſt nach dem im Artikel Gleichung (26.) i. d. Z. bewieſenen Satze

$$G - G' - G'' = A^2 + B^2 + C^2 - a^2 - b^2,$$

$$-GG' - GG'' + G'G'' = a^2b^2 - a^2B^2 - a^2C^2 - b^2A^2 - b^2C^2,$$

$$GG'G'' = a^2b^2C^2.$$

Durch Entwickelung der Producte

$$(a^2 + G)(a^2 - G')(a^2 - G'') \text{ und } (b^2 + G)(b^2 - G')(b^2 - G'')$$

ergiebt ſich aber leicht:

$$(a^2 + G)(a^2 - G')(a^2 - G'')$$
$$= a^6 + a^4(G - G' - G'') - a^2(GG' + GG'' - G'G'') + GG'G'',$$
$$(b^2 + G)(b^2 - G')(b^2 - G'')$$
$$= b^6 + b^4(G - G' - G'') - b^2(GG' + GG'' - G'G'') + GG'G'',$$

und folglich, wenn man die vorher gefundenen Werthe von

$$G - G' - G'',\ GG' + GG'' - G'G'',\ GG'G''$$

ſubſtituirt:

$$21.\quad (a^2 + G)(a^2 - G')(a^2 - G'') = a^2(a^2 - b^2)A^2,$$
$$22.\quad (b^2 + G)(b^2 - G')(b^2 - G'') = -b^2(a^2 - b^2)B^2.$$

Alſo iſt

$$23.\quad (a^2 - G')(a^2 - G'')(b^2 - G')(b^2 - G'') = -\frac{a^2b^2(a^2 - b^2)^2A^2B^2}{(a^2 + G)(b^2 + G)}.$$

Nun iſt nach der dritten der Gleichungen II:

$$\varepsilon\gamma = \alpha'\beta'' - \beta'\alpha'',$$

und folglich nach den Gleichungen 4., 5., 7., 8.

$$24.\quad \varepsilon\gamma = \frac{abAB\gamma'\gamma''}{(a^2 - G')(b^2 - G'')} - \frac{abAB\gamma'\gamma''}{(a^2 - G'')(b^2 - G')}$$
$$= \frac{ab(a^2 - b^2)AB(G'' - G')\gamma'\gamma''}{(a^2 - G')(a^2 - G'')(b^2 - G')(b^2 - G'')};$$

alſo nach 23.

$$25.\quad \varepsilon\gamma = \frac{(a^2 + G)(b^2 + G)(G' - G'')\gamma'\gamma''}{ab(a^2 - b^2)AB}.$$

Nun iſt aber nach 18.

$$\frac{(a^2+G)(b^2+G)}{(G+G')(G+G'')}=\gamma^2.$$

Multiplicirt man alſo hiermit die vorhergehende Gleichung; ſo erhält man

$$\frac{\varepsilon}{(G+G')(G+G'')}=\frac{(G'-G'')\gamma\gamma'\gamma''}{ab(a^2-b^2)AB},$$

oder

$$\gamma\gamma'\gamma''=\frac{\varepsilon ab(a^2-b^2)AB}{(G+G')(G+G'')(G'-G'')}.$$

Aus den Gleichungen, 1., 4., 7. und 2., 5., 8. folgt ferner

$$\alpha\alpha'\alpha''=\frac{a^3A^3\gamma\gamma'\gamma''}{(a^2+G)(a^2-G')(a^2-G'')},$$

$$\beta\beta'\beta''=\frac{b^3B^3\gamma\gamma'\gamma''}{(b^2+G)(b^2-G')b^2-G'')}.$$

Folglich iſt nach 21. und 22.

$$\alpha\alpha'\alpha''=\frac{aA\gamma\gamma'\gamma''}{a^2-b^2},\quad \beta\beta'\beta''=-\frac{bB\gamma\gamma'\gamma''}{a^2-b^2},$$

in welche Formeln man nun noch den Werth von $\gamma\gamma'\gamma''$ aus dem Vorhergehenden ſubſtituiren kann, ſo daß wir alſo jetzt überhaupt die drei folgenden Relationen haben:

26. $$\alpha\alpha'\alpha''=\frac{\varepsilon a^2bA^2B}{(G+G')(G+G'')(G'-G'')},$$

27. $$\beta\beta'\beta''=-\frac{\varepsilon ab^2AB^2}{(G+G')(G+G'')(G'-G'')},$$

28. $$\gamma\gamma'\gamma''=\frac{\varepsilon ab(a^2-b^2)AB}{(G+G')(G+G'')(G'-G'')},$$

aus denen ſich auch noch

29. $\frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\beta\beta'\beta''}=-\frac{aA}{bB}$, 30. $\frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\gamma\gamma'\gamma''}=\frac{aA}{a^2-b^2}$, 31. $\frac{\beta\beta'\beta''}{\gamma\gamma'\gamma''}=-\frac{bB}{a^2-b^2}$

ergiebt.

Endlich erhalten wir auch noch aus 1., 2., 4., 5., 7., 8. und 18., 19., 20. leicht:

32. $$\alpha\beta=\frac{abAB}{(G+G')(G+G'')},$$

33. $$\alpha'\beta'=-\frac{abAB}{(G+G')(G'-G'')},$$

34. $$\alpha''\beta''=\frac{abAB}{(G+G'')(G'-G'')}.$$

Mit welchen Vorzeichen man die Wurzelgrößen nimmt, durch welche die Größen γ, γ', γ'' dargeſtellt werden, iſt, wie leicht erhellet, an ſich willkürlich. Von Wichtigkeit iſt es aber, den Zuſammenhang des Vorzeichens der Größe ε, welche bekanntlich

$= \pm 1$ iſt, mit den Vorzeichen der Größen γ, γ', γ'' zu kennen, und in dieſer Beziehung iſt die vorher gefundene Gleichung

$$\gamma\gamma'\gamma'' = \frac{\varepsilon a b (a^2 - b^2) A B}{(G + G')(G + G'')(G' - G'')}$$

von beſonderer Bedeutung, indem, wie auf der Stelle in die Augen fällt, mittelſt derſelben über das Vorzeichen, mit welchem ε zu nehmen iſt, wenn die Vorzeichen von γ, γ', γ'' beſtimmt ſind, immer ſicher entſchieden werden kann.

11. Es ſind nun noch einige Fälle beſonders zu betrachten, in denen die vorher gefundenen Formeln unbeſtimmt werden. Dabei wollen wir, ſo wie von jetzt an immer, $a^2 - b^2 \overline{\overline{>}}\, 0$ ſetzen. Daß dies verſtattet iſt, erhellet auf der Stelle, indem man, wenn $a^2 - b^2 < 0$ wäre, $E = \frac{1}{2}\pi - E'$, $\partial E = -\partial E'$, $\cos E = \sin E'$, $\sin E = \cos E'$ ſetzen könnte, wodurch die Größe

$$\sqrt{(A - a\cos E)^2 + (B - b\sin E)^2 + C^2}$$

in

$$\sqrt{(B - b\cos E')^2 + (A - a\sin E') + C^2}$$

übergehen würde, eine Größe von völlig einerlei Form mit der vorhergehenden, in der nun aber $b^2 - a^2 > 0$ iſt.

Dies vorausgeſetzt, betrachten wir nun zuerſt den Fall, wenn die beiden negativen Wurzeln $-G'$, $-G''$ der cubiſchen Gleichung einander gleich ſind, in welchem die Ausdrücke 19. und 20. von γ' und γ'' unendlich zu ſeyn ſcheinen, in der That aber bloß unbeſtimmt ſind, wie auf folgende Art gezeigt werden kann. Setzen wir in dem in (7. II.) für 2x gefundenen Ausdrucke G für g; ſo wird derſelbe

$$2x = \frac{a^2 A^2}{a^2 + G} + \frac{b^2 B^2}{b^2 + G} - a^2 - b^2$$
$$\pm \sqrt{\left(a^2 - b^2 - \frac{a^2 A^2}{a^2 + G} + \frac{b^2 B^2}{b^2 + G}\right)^2 + \frac{4a^2 b^2 A^2 B^2}{(a^2 + G)(b^2 + G)}}.$$

Sollen nun die ſich hieraus ergebenden beiden Werthe von x, d. i. die Größen $-G'$ und $-G''$ einander gleich ſeyn; ſo muß nothwendig

$$\frac{4a^2 b^2 A^2 B^2}{(a^2 + G)(b^2 + G)} = 0, \quad a^2 - b^2 - \frac{a^2 A^2}{a^2 + G} + \frac{b^2 B^2}{b^2 + G} = 0;$$

d. i., weil keine der beiden Größen a, b null ſeyn darf,

$$AB = 0, \quad a^2 - b^2 - \frac{a^2 A^2}{a^2 + G} + \frac{b^2 B^2}{b^2 + G} = 0$$

ſeyn. Wäre nun B nicht $= 0$; ſo wäre wegen der erſten Gleichung $A = 0$, und folglich wegen der zweiten Gleichung

$$a^2 - b^2 + \frac{b^2 B^2}{b^2 + G} = 0,$$

welches ungereimt iſt, da $a^2 - b^2 \overline{\overline{>}}\, 0$ und $b^2 > 0$ iſt. Alſo iſt jederzeit

$$B = 0,\ a^2 - b^2 - \frac{a^2 A^2}{a^2 + G} = 0\ ;$$

oder

$$B = 0,\ \frac{a^2 A^2}{a^2 + G} = a^2 - b^2\ .$$

Führt man dieſe beiden Ausdrücke in den obigen Ausdruck von $2x$ ein; ſo erhält man $x = -b^2$, d. i.

$$G' = G'' = b^2\ .$$

Um G zu finden, hat man nach (10.), weil hier $B = 0$ iſt, die beiden Gleichungen

$$G - G' - G'' = A^2 + C^2 - a^2 - b^2$$

und

$$GG'G'' = a^2 b^2 C^2\ .$$

Aus dieſen beiden Gleichungen ergiebt ſich, wenn man $G' = G'' = b^2$ ſetzt,

$$G = A^2 + C^2 - a^2 + b^2,\ G = \frac{a^2 C^2}{b^2}\ ,$$

und hieraus folgt:

$$A^2 + C^2 - a^2 + b^2 = \frac{a^2 C^2}{b^2}\ ,$$

d. i.

$$(a^2 - b^2)(C^2 + b^2) = b^2 A^2\ .$$

Dieſe Gleichung muß alſo nebſt der Gleichung $B = 0$ erfüllt ſeyn, wenn der Fall, den wir hier betrachten, überhaupt eintreten ſoll.

Weil nun

$$a^2 + G = \frac{a^2(C^2 + b^2)}{b^2},\ b^2 + G = \frac{a^2 C^2 + b^4}{b^2},\ G + G' = G + G'' = \frac{a^2 C^2 + b^4}{b^2}$$

iſt; ſo ergiebt ſich aus der Gleichung 18.

$$\gamma = \sqrt{\frac{a^2(C^2 + b^2)}{a^2 C^2 + b^4}}\ ,$$

und endlich erhält man auch leicht nach 1. und 2.

$$\alpha = \sqrt{\frac{b^4 A^2}{(C^2 + b^2)(a^2 C^2 + b^2)}} = \sqrt{\frac{b^2(a^2 - b^2)}{a^2 C^2 + b^4}},\ \beta = 0\ .$$

Weil

$$b^2 - G' = b^2 - G'' = G' - G'' = 0$$

iſt; ſo bleiben in dieſem Falle, wie aus den Formeln 19. und 20. erhellet, die Werthe von γ', γ'', ſo wie auch die Werthe von α', β', α'', β'', unbeſtimmt. Man kann aber jederzeit durch einen dieſer Coefficienten alle übrigen beſtimmen, wie ſich auf folgende Art zeigen läßt. Weil $\beta = 0$ iſt, ſo iſt nach den Gleichungen VII

$$\gamma\gamma = 1 + \alpha\alpha,\ \alpha\alpha' = \gamma\gamma'\ .$$

Ferner iſt auch

$$\alpha'\alpha' + \beta'\beta' - \gamma'\gamma' = 1 .$$

Alſo iſt

$$\beta'\beta' + \frac{\gamma'\gamma'}{\alpha\alpha} = 1 - \alpha'\alpha' + \gamma'\gamma' + \frac{\gamma'\gamma'}{\alpha\alpha}$$

$$= 1 - \alpha'\alpha' + \frac{1+\alpha\alpha}{\alpha\alpha}.\gamma'\gamma' = 1 - \alpha'\alpha' + \frac{\gamma\gamma\gamma'\gamma'}{\alpha\alpha}$$

$$= 1 - \alpha'\alpha' + \frac{\alpha\alpha\alpha'\alpha'}{\alpha\alpha} = 1 - \alpha'\alpha' + \alpha'\alpha' = 1 .$$

Folglich kann man

$$\beta' = \cos f, \quad \gamma' = \alpha \sin f$$

und

$$\alpha' = \gamma\frac{\gamma'}{\alpha} = \gamma \sin f$$

ſetzen. Dann folgt aus den aus dem Obigen bekannten Formeln

$$\varepsilon\alpha'' = \beta\gamma' - \gamma\beta', \quad \varepsilon\beta'' = \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \quad \varepsilon\gamma'' = \beta\alpha' - \alpha\beta', \quad \varepsilon\varepsilon = 1 ,$$

weil hier $\beta = 0$ nnd $\gamma\gamma - \alpha\alpha = 1$ iſt, leicht:

$$\alpha'' = -\varepsilon\gamma \cos f, \quad \beta'' = \varepsilon \sin f, \quad \gamma'' = \varepsilon\alpha \cos f ,$$

ſo daß man alſo zur Beſtimmung von β', α', γ', α'', β'', γ'' folgende Formeln hat:

$$\beta' = \cos f, \quad \alpha' = \gamma \sin f, \quad \gamma' = \alpha \sin f ;$$

$$\alpha'' = -\varepsilon\gamma \cos f, \quad \beta'' = \varepsilon \sin f, \quad \gamma'' = \varepsilon\alpha \cos f .$$

Der Winkel f kann hier willkührlich angenommen werden, und man kann auch nach Belieben $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ ſetzen.

Wenn G′ und G″ ungleich ſind; ſo werden die Coefficienten γ, γ', γ'' durch die Formeln 18., 19., 20. offenbar völlig beſtimmt. Verſchwindet aber eine der Größen $a^2 - G'$, $b^2 - G'$, $a^2 - G''$, $b^2 - G''$; ſo ſcheint reſpective der Coefficient α', β', α'', β'' durch die Formeln 4., 5., 7., 8. nicht beſtimmt zu werden. Dieſe Coefficienten laſſen ſich aber in dieſem Falle auf folgende Art beſtimmen. Iſt z. B. $a^2 - G' = 0$ und folglich, wie aus 19. erhellet, $\gamma' = 0$; ſo iſt nach 5., wenn a^2 nicht $= b^2$ iſt, $\beta' = 0$, und folglich nach der zweiten der Gleichungen VII $\alpha' = \pm 1$. Iſt aber $a^2 = b^2$; ſo folgt aus der Gleichung

$$-\gamma'(AA + BB + CC) - \alpha' a A - \beta' b B = \gamma' G',$$

die ganz auf dieſelbe Art wie die Gleichung

$$\gamma(AA + BB + CC) - \alpha a A - \beta b B = \gamma G,$$

welche in (6.) ausführlich entwickelt worden iſt, gefunden wird, daß

$$\alpha' A + \beta' B = 0$$

iſt. Verbindet man nun dieſe Gleichung mit der Gleichung

$$\alpha'\alpha' + \beta'\beta' = 1 ;$$

ſo erhält man

$$\alpha' = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \beta' = -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

wodurch, wenn A und B nicht zugleich verſchwinden, α' und β' völlig beſtimmt ſind. Iſt aber zugleich $A=0$, $B=0$; ſo iſt, weil $a^2=b^2$ iſt,

$$B = 0 \text{ und } (a^2-b^2)(C^2+b^2) = b^2A^2,$$

und wir haben alſo dann wieder den ſchon vorher ausführlich betrachteten Fall.

12. Nachdem wir gezeigt haben, wie ſich die Größen G, G′, G″; α, α', α''; β, β', β''; γ, γ', γ'' in allen Fällen beſtimmen laſſen, gehen wir nun zur Entwickelung des Differentials ∂E über, und ſetzen zu dem Ende wieder

$$35.\quad t = \gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T,$$

$$36.\quad t\cos E = \alpha + \alpha'\cos T + \alpha''\sin T,$$

$$37.\quad t\sin E = \beta + \beta'\cos T + \beta''\sin T.$$

Aus 36. und 37. folgt

$$-t\sin E\partial E + \cos E\partial t = -\alpha'\sin T\partial T + \alpha''\cos T\partial T,$$

$$t\cos E\partial E + \sin E\partial t = -\beta'\sin T\partial T + \beta''\cos T\partial T.$$

Multiplicirt man nun die erſte dieſer beiden Gleichungen mit $\sin E$, die zweite mit $\cos E$, und zieht dann die erſte Gleichung von der zweiten ab; ſo erhält man

$$t\partial E = \cos E(\beta''\cos T - \beta'\sin T)\partial T - \sin E(\alpha''\cos T - \alpha'\sin T)\partial T,$$

und folglich, wenn man mit t auf beiden Seiten multiplicirt und für $t\cos E$ und $t\sin E$ ihre Ausdrücke aus 36. und 37. ſetzt:

$$\begin{aligned} t^2\partial E &= (\alpha+\alpha'\cos T+\alpha''\sin T)(\beta''\cos T-\beta'\sin T)\partial T \\ &\quad -(\beta+\beta'\cos T+\beta''\sin T)(\alpha''\cos T-\alpha'\sin T)\partial T \\ &= (\beta''\alpha-\alpha''\beta)\cos T\partial T+(\beta\alpha'-\alpha\beta')\sin T\partial T \\ &\quad +(\beta''\alpha'-\alpha''\beta')(\sin T^2+\cos T^2)\partial T, \end{aligned}$$

und folglich nach der ſechſten, neunten und dritten der Gleichungen II

$$\begin{aligned} t^2\partial E &= \varepsilon\gamma'\cos T\partial T + \varepsilon\gamma''\sin T\partial T + \varepsilon\gamma\partial T \\ &= \varepsilon(\gamma+\gamma'\cos T+\gamma''\sin T)\partial T, \end{aligned}$$

d. i. nach 35.

$$t^2\partial E = \varepsilon t\partial T,$$

oder

$$38.\quad t\partial E = \varepsilon\partial T.$$

Weil

$$\begin{aligned} (\gamma'\cos T + \gamma''\sin T)^2 &+ (\gamma''\cos T - \gamma'\sin T)^2 \\ &= \gamma'\gamma' + \gamma''\gamma'' = \gamma\gamma - 1 \end{aligned}$$

iſt; ſo iſt die Größe

$$\gamma'\cos T + \gamma''\sin T$$

ohne Rückſicht auf das Vorzeichen offenbar immer kleiner wie γ, und das Vorzeichen der Größe t hängt alſo immer bloß von dem Vorzeichen von γ ab, oder γt iſt jederzeit eine poſitive Größe. Da nun

$$\gamma t \partial E = \varepsilon\gamma\partial T$$

iſt; ſo haben ∂E und ∂T jederzeit gleiches oder entgegengeſetztes Vorzeichen, jenachdem die Größe $\varepsilon\gamma$ poſitiv oder negativ iſt. Iſt alſo $\varepsilon\gamma$ poſitiv, ſo werden die Größen E und T gleichzeitig zu- und abnehmen; dagegen wird, wenn $\varepsilon\gamma$ negativ iſt, die eine immer wachſen, wenn die andere abnimmt.

Die Art des Zuſammenhanges der Größen E und T unter einander läßt ſich noch deutlicher auf folgende Art überſehen. Weil nach der erſten der Gleichungen VII

$$\gamma\gamma = 1 + \alpha\alpha + \beta\beta$$

und folglich im Allgemeinen $\gamma\gamma > 1$ iſt; ſo kann man

$$\sqrt{\gamma\gamma - 1} = \delta$$

ſetzen, ſo daß alſo nach den Gleichungen VII und V

$$\delta\delta = \alpha\alpha + \beta\beta = \gamma'\gamma' + \gamma''\gamma''$$

iſt. Nach 35., 36., 37. iſt

$$t(\delta + \alpha\cos E + \beta\sin E) = \delta t + \alpha . t\cos E + \beta . t\sin E$$
$$= \gamma\delta + \gamma'\delta\cos T + \gamma''\delta\sin T$$
$$+ \alpha\alpha + \beta\beta + (\alpha\alpha' + \beta\beta')\cos T + (\alpha\alpha'' + \beta\beta'')\sin T,$$

oder, weil nach dem Vorhergehenden $\alpha\alpha + \beta\beta = \delta\delta$ und nach den Gleichungen VII

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = \gamma\gamma', \quad \alpha\alpha'' + \beta\beta'' = \gamma\gamma''$$

iſt,

$$39. \quad t(\delta + \alpha\cos E + \beta\sin E) = \delta(\delta + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T)$$
$$+ \gamma(\delta + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T)$$
$$= (\gamma + \delta)(\delta + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T).$$

Ferner hat man nach 36. und 37.

$$t\beta\cos E = \alpha\beta + \alpha'\beta\cos T + \alpha''\beta\sin T,$$
$$t\alpha\sin E = \alpha\beta + \alpha\beta'\cos T + \alpha\beta''\sin T;$$

alſo durch Subtraction

$$t(\alpha\sin E - \beta\cos E) = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\cos T + (\alpha\beta'' - \alpha''\beta)\sin T,$$

und folglich nach II

$$40. \quad t(\alpha\sin E - \beta\cos E) = \varepsilon(\gamma'\sin T - \gamma''\cos T).$$

Weil nun nach dem Vorhergehenden

$$\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{\gamma'}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{\gamma''}{\delta}\right) = 1$$

iſt; ſo kann man

$$\frac{\alpha}{\delta} = \cos L, \quad \frac{\beta}{\delta} = \sin L, \quad \frac{\gamma'}{\delta} = \cos M, \quad \frac{\gamma''}{\delta} = \sin M$$

ſetzen. Dadurch werden die Gleichungen 39. und 40.

$$t\{1 + \cos(E-L)\} = (\gamma+\delta)\{1 + \cos(T-M)\},$$
$$t \sin(E-L) = \varepsilon \sin(T-M),$$

oder

$$2t\cos\tfrac{1}{2}(E-L)^2 = 2(\gamma+\delta)\cos\tfrac{1}{2}(T-M)^2,$$
$$2t\sin\tfrac{1}{2}(E-L)\cos\tfrac{1}{2}(E-L) = 2\varepsilon\sin\tfrac{1}{2}(T-M)\cos\tfrac{1}{2}(T-M);$$

alſo, wenn man dieſe Gleichungen durch einander dividirt,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E-L) = \frac{\varepsilon}{\gamma+\delta}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T-M).$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $\frac{\varepsilon}{\gamma-\delta}$; ſo erhält man

$$\frac{\varepsilon}{\gamma-\delta}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E-L) = \frac{\varepsilon\varepsilon}{(\gamma+\delta)(\gamma-\delta)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T-M),$$

oder, weil bekanntlich

$$\varepsilon\varepsilon = 1, \quad (\gamma+\delta)(\gamma-\delta) = \gamma\gamma - \delta\delta = 1$$

iſt,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T-M) = \frac{\varepsilon}{\gamma-\delta}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E-L),$$

ſo daß wir alſo jetzt die beiden folgenden Gleichungen haben:

41. $\varepsilon\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E-L) = (\gamma-\delta)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T-M)$,

42. $\varepsilon\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T-M) = (\gamma+\delta)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E-L)$,

oder, wenn man auf beiden Seiten mit ε multiplicirt,

43. $\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E-L) = \varepsilon(\gamma-\delta)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T-M)$,

44. $\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T-M) = \varepsilon(\gamma+\delta)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E-L)$.

Setzt man, welches, weil $\gamma\gamma - \delta\delta = 1$ iſt, verſtattet iſt,

$$\delta = \operatorname{tang} N, \quad \gamma = \sec N;$$

ſo erhält man leicht

$$\gamma - \delta = \operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}N), \quad \gamma + \delta = \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}N).$$

Bezeichnen wir den dem Werthe $E + 2\pi$ von E entſprechenden Werth von T durch T'; ſo iſt nach 44.

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T'-M) = \varepsilon(\gamma+\delta)\operatorname{tang}\{\tfrac{1}{2}(E-L)+\pi\},$$

d. i. nach bekannten goniometriſchen Formeln

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T'-M) = \varepsilon(\gamma+\delta)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E-L),$$

oder

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T'-M) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T-M),$$

und folglich nach dem Artikel Goniometrie (32. III.) i. d. Z., wenn n eine poſitive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$\tfrac{1}{2}(T'-M) = \tfrac{1}{2}(T-M) + n\pi.$$

Weil nun aber nach dem Vorhergehenden **T** mit **E** gleichzeitig wächſt und abnimmt, wenn $\varepsilon\gamma$ poſitiv iſt, dagegen die eine dieſer Größen, wenn $\varepsilon\gamma$ negativ iſt, immer zu- oder abnimmt, indem die andere reſpective ab- oder zunimmt; ſo iſt klar, daß **n** poſitiv oder negativ iſt, jenachdem $\varepsilon\gamma$ reſpective poſitiv oder negativ iſt. Denkt man ſich nun aber nur, daß **E** von **E** bis $\mathbf{E}+2\pi$ ſtetig wachſe, und daß alſo auch **T** ſich von **T** bis **T'** ſtetig verändere; ſo erhellet auf der Stelle, daß $\mathbf{n} = +1$ oder $= -1$ zu ſetzen iſt, jenachdem $\varepsilon\gamma$ poſitiv oder negativ iſt. Alſo iſt, indem das obere oder untere Zeichen zu nehmen iſt, jenachdem $\varepsilon\gamma$ poſitiv oder negativ iſt,

$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{T'}-\mathrm{M}) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{T}-\mathrm{M}) \pm \pi$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{T'} = \tfrac{1}{2}\mathrm{T} \pm \pi, \quad \mathrm{T'} = \mathrm{T} \pm 2\pi,$$

und man ſieht alſo, daß, wenn **E** um 2π wächſt, **T** jederzeit um 2π zu- oder abnimmt, jenachdem $\varepsilon\gamma$ poſitiv oder negativ iſt, welches man des Folgenden wegen wohl zu beachten hat.

13. Wir wollen nun im Folgenden

$$\varrho = \sqrt{(\mathrm{A}-\mathrm{a}\cos\mathrm{E})^2 + (\mathrm{B}-\mathrm{b}\sin\mathrm{E})^2 + \mathrm{C}^2}$$

immer als poſitiv annehmen und auch unter

$$\sqrt{\mathrm{G} + \mathrm{G'}\cos\mathrm{T}^2 + \mathrm{G''}\sin\mathrm{T}^2}$$

ſtets den poſitiven Werth dieſer Wurzelgröße verſtehen; ſo iſt, weil das Vorzeichen von **t** bloß von dem Vorzeichen von γ abhängt, nach (5.)

$$\varrho\mathrm{t} = \pm\sqrt{\mathrm{G} + \mathrm{G'}\cos\mathrm{T}^2 + \mathrm{G''}\sin\mathrm{T}^2}$$

zu ſetzen, und das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem γ poſitiv oder negativ iſt.

Iſt alſo zuerſt γ poſitiv; ſo iſt nach 38.

$$\frac{\partial\mathrm{E}}{\varrho} = \frac{\varepsilon\partial\mathrm{T}}{\sqrt{\mathrm{G} + \mathrm{G'}\cos\mathrm{T}^2 + \mathrm{G''}\sin\mathrm{T}^2}}.$$

Iſt nun τ der dem Werthe $\mathbf{E} = 0$ entſprechende Werth von **T**; ſo iſt nach (12.) $\tau + 2\pi$ oder $\tau - 2\pi$ der dem Werthe $\mathbf{E} = 2\pi$ entſprechende Werth von **T**, jenachdem $\varepsilon\gamma$ poſitiv oder negativ iſt, d. i. in dieſem Falle, wo γ poſitiv iſt, jenachdem $\varepsilon = +1$ oder $= -1$ iſt. Alſo iſt für $\varepsilon = +1$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial\mathrm{E}}{\varrho} = \int_\tau^{\tau+2\pi}\frac{\partial\mathrm{T}}{\sqrt{\mathrm{G} + \mathrm{G'}\cos\mathrm{T}^2 + \mathrm{G''}\sin\mathrm{T}^2}},$$

und für $\varepsilon = -1$ iſt

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial\mathrm{E}}{\varrho} = -\int_\tau^{\tau-2\pi}\frac{\partial\mathrm{T}}{\sqrt{\mathrm{G} + \mathrm{G'}\cos\mathrm{T}^2 + \mathrm{G''}\sin\mathrm{T}^2}},$$

oder

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial E}{\varrho}=\int_{\tau-2\pi}^{\tau}\frac{\partial T}{\sqrt{G+G'\cos T^2+G''\sin T^2}}.$$

Nun erhellet aber leicht, daß für jedes T

$$\int_T^{T+2\pi}\frac{\partial T}{\sqrt{G+G'\cos T^2+G''\sin T^2}}=\int_0^{2\pi}\frac{\partial T}{\sqrt{G+G'\cos T^2+G''\sin T^2}}$$

iſt. Alſo iſt in dieſem Falle, wo γ poſitiv iſt, jederzeit

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial E}{\varrho}=\int_0^{2\pi}\frac{\partial T}{\sqrt{G+G'\cos T^2+G''\sin T^2}}.$$

Iſt ferner γ negativ; ſo iſt nach 38.

$$\frac{\partial E}{\varrho}=-\frac{\varepsilon\partial T}{\sqrt{G+G'\cos T^2+G''\sin T^2}}.$$

Folglich iſt, wenn $\varepsilon\gamma$ poſitiv, d. i. $\varepsilon=-1$ iſt,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial E}{\varrho}=\int_\tau^{\tau+2\pi}\frac{\partial T}{\sqrt{G+G'\cos T^2+G''\sin T^2}},$$

und, wenn $\varepsilon\gamma$ negativ, d. i. $\varepsilon=+1$ iſt,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial E}{\varrho}=-\int_\tau^{\tau-2\pi}\frac{\partial T}{\sqrt{G+G'\cos T^2+G''\sin T^2}},$$

oder

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial E}{\varrho}=\int_{\tau-2\pi}^{\tau}\frac{\partial T}{\sqrt{G+G'\cos T^2+G''\sin T^2}}.$$

Alſo iſt auch in dieſem Falle immer

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial E}{\varrho}=\int_0^{2\pi}\frac{\partial T}{\sqrt{G+G'\cos T^3+G''\sin T^2}},$$

und wir haben daher in völliger Allgemeinheit

$$45.\quad\int_0^{2\pi}\frac{\partial E}{\varrho}=\int_0^{2\pi}\frac{\partial T}{\sqrt{G+G'\cos T^2+G''\sin T^2}}.$$

14. Gauß hat nun in ſeiner berühmten Abhandlung vorzüglich die drei folgenden für die phyſiſche Aſtronomie höchſt wichtigen Integrale betrachtet:

$$\xi=\int_0^{2\pi}\frac{(A-a\cos E)(1-e\cos E)\partial E}{2\pi\varrho^3},$$

$$\eta=\int_0^{2\pi}\frac{(B-b\sin E)(1-e\cos E)\partial E}{2\pi\varrho^3},$$

$$\zeta=\int_0^{2\pi}\frac{C(1-e\cos E)\partial E}{2\pi\varrho^3},$$

wo $a^2e^2=a^2-b^2$ iſt.

Um dieſe Integrale zu entwickeln, haben wir nach dem Vorhergehenden zunächſt

$$at(A - a\cos E)$$
$$= aA(\gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T) - a^2(\alpha + \alpha'\cos T + \alpha''\sin T)$$
$$= a(A\gamma - a\alpha) + a(A\gamma' - a\alpha')\cos T + a(A\gamma'' - a\alpha'')\sin T.$$

Nach 1., 4., 7. iſt aber

$$\alpha = \frac{\gamma a A}{a^2 + G}, \quad \alpha' = \frac{\gamma' a A}{a^2 - G'}, \quad \alpha'' = \frac{\gamma'' aA}{a^2 - G''},$$

und folglich

$$A\gamma - a\alpha = \frac{\alpha(a^2 + G)}{a} - a\alpha = \frac{\alpha G}{a},$$
$$A\gamma' - a\alpha' = \frac{\alpha'(a^2 - G')}{a} - a\alpha' = -\frac{\alpha' G'}{a},$$
$$A\gamma'' - a\alpha'' = \frac{\alpha''(a^2 - G'')}{a} - a\alpha'' = -\frac{\alpha'' G''}{a}.$$

Alſo

$$at(A - a\cos E) = \alpha G - \alpha' G'\cos T - \alpha'' G''\sin T,$$

und ganz eben ſo

$$bt(B - b\sin E) = \beta G - \beta' G'\cos T - \beta'' G''\sin T.$$

Ferner iſt

$$t(1 - e\cos E) = t - et\cos E$$
$$= \gamma - e\alpha + (\gamma' - e\alpha')\cos T + (\gamma'' - e\alpha'')\sin T$$

und folglich

$$at^2(A - a\cos E)(1 - e\cos E)$$
$$= (\alpha G - \alpha' G'\cos T - \alpha'' G''\sin T)\{\gamma - e\alpha + (\gamma' - e\alpha')\cos T + (\gamma'' - e\alpha'')\sin T\},$$
$$bt^2(B - b\sin E)(1 - e\cos E)$$
$$= (\beta G - \beta' G'\cos T - \beta'' G''\sin T)\{\gamma - e\alpha + (\gamma' - e\alpha')\cos T + (\gamma'' - e\alpha'')\sin T\},$$
$$Ct^2(1 - e\cos E)$$
$$= C(\gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T)\{\gamma - e\alpha + (\gamma' - e\alpha')\cos T + (\gamma'' - e\alpha'')\sin T\}.$$

Setzen wir alſo der Kürze wegen die Größen auf den rechten Seiten der drei vorhergehenden Gleichungen nach der Reihe $= aX$, bY, Z; ſo iſt

$$\partial\xi = \frac{X\partial E}{2\pi t^2 \varrho^3}, \quad \partial\eta = \frac{Y\partial E}{2\pi t^2 \varrho^3}, \quad \partial\zeta = \frac{Z\partial E}{2\pi t^2 \varrho^3};$$

oder nach 38.

$$\partial\xi = \frac{\varepsilon X\partial T}{2\pi t^3 \varrho^3}, \quad \partial\eta = \frac{\varepsilon Y\partial T}{2\pi t^3 \varrho^3}, \quad \partial\zeta = \frac{\varepsilon Z\partial T}{2\pi t^3 \varrho^3}.$$

Hieraus erhält man nun auf ganz ähnliche Art wie in (13.)

$$\xi = \int_0^{2\pi} \frac{X\partial T}{2\pi(G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\eta = \int_0^{2\pi} \frac{Y \partial T}{2\pi(G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{Z \partial T}{2\pi(G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dieſe Formeln hier ausführlich zu entwickeln, iſt unnöthig, weil das anzuwendende Raiſonnement von dem in (13.) gebrauchten durchaus nicht weſentlich verſchieden iſt. Bemerkt man nun, daß, wie auf der Stelle erhellet,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos T \partial T}{(G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin T \partial T}{(G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos T \sin T \partial T}{(G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

iſt; ſo erhält man, wenn man in die Formeln für ξ, η, ζ die obigen Ausdrücke von **X**, **Y**, **Z** einführt, ſehr leicht

$$\xi = \int_0^{2\pi} \frac{(\gamma - e\alpha)\alpha G - (\gamma' - e\alpha')\alpha' G' \cos T^2 - (\gamma'' - e\alpha'')\alpha'' G'' \sin T^2}{2\pi a (G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)^{\frac{3}{2}}} \partial T,$$

$$\eta = \int_0^{2\pi} \frac{(\gamma - e\alpha)\beta G - (\gamma' - e\alpha')\beta' G' \cos T^2 - (\gamma'' - e\alpha'')\beta'' G'' \sin T^2}{2\pi b (G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)^{\frac{3}{2}}} \partial T,$$

$$\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{(\gamma - e\alpha)\gamma + (\gamma' - e\alpha')\gamma' \cos T^2 + (\gamma'' - e\alpha'')\gamma'' \sin T^2}{2\pi (G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)^{\frac{3}{2}}} C \partial T.$$

Setzen wir aber

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos T^2 \partial T}{2\pi\{(G + G') \cos T^2 + (G + G'') \sin T^2\}^{\frac{3}{2}}} = P,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin T^2 \partial T}{2\pi\{(G + G') \cos T^2 + (G + G'') \sin T^2\}^{\frac{3}{2}}} = Q;$$

ſo wird

$$\begin{aligned}
a\xi &= \{(\gamma - e\alpha)\alpha G - (\gamma' - e\alpha')\alpha' G'\} P \\
&\quad + \{(\gamma - e\alpha)\alpha G - (\gamma'' - e\alpha'')\alpha'' G''\} Q, \\
b\eta &= \{(\gamma - e\alpha)\beta G - (\gamma' - e\alpha')\beta' G'\} P \\
&\quad + \{(\gamma - e\alpha)\beta G - (\gamma'' - e\alpha'')\beta'' G''\} Q, \\
\zeta &= \{(\gamma - e\alpha)\gamma - (\gamma' - e\alpha')\gamma'\} CP \\
&\quad + \{(\gamma - e\alpha)\gamma + (\gamma'' - e\alpha'')\gamma''\} CQ.
\end{aligned}$$

15. Man ſieht nun, daß ſich alle hier und in (13.) betrachteten Integrale auf die drei Integrale:

$$\int \frac{\partial T}{\sqrt{G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2}},$$

$$\int \frac{\cos T^2 \partial T}{(G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\int \frac{\sin T^2 \partial T}{(G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)^{\frac{3}{2}}},$$

oder

$$\int \frac{\partial T}{\sqrt{(G + G') \cos T^2 + (G + G'') \sin T^2}},$$

$$\int \frac{\cos T^2 \partial T}{\{(G + G') \cos T^2 + (G + G'') \sin T^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$\int \frac{\sin T^2 \partial T}{\{(G + G') \cos T^2 + (G + G'') \sin T^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

oder, wenn wir

$$\sqrt{G + G'} = m, \quad \sqrt{G + G''} = n$$

ſetzen, auf die drei Integrale

$$\int \frac{\partial T}{\sqrt{m^2 \cos T^2 + n^2 \sin T^2}},$$

$$\int \frac{\cos T^2 \partial T}{\{m^2 \cos T^2 + n^2 \sin T^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$\int \frac{\sin T^2 \partial T}{\{m^2 \cos T^2 + n^2 \sin T^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

zurückführen laſſen. Wie ſich aber die Werthe dieſer zwiſchen beliebigen Gränzen genommenen Integrale in allen Fällen nach einer ſehr bequemen Methode näherungsweiſe, und zwar mit jedem beliebigen Grade der Annäherung, berechnen laſſen, ſoll gleich nachher in dem beſondern Artikel Integration durch Annäherung ebenfalls nach Gauß ausführlich gezeigt werden. Ueber den Zuſammenhang, in welchem die hier betrachteten Integrale mit der phyſiſchen Aſtronomie ſtehen, hier Etwas beizubringen, geſtattet die Natur dieſes Werkes nicht. Wir haben es uns aber angelegen ſeyn laſſen, den Hauptinhalt der mehr erwähnten meiſterhaften Abhandlung hier vollſtändig wiederzugeben, und wenn wir uns bei dieſem Geſchäft faſt nur mit der Rolle des Ueberſetzers begnügen mußten; ſo liegt der Grund hiervon lediglich in der hohen Vollendung dieſer trefflichen Arbeit von Gauß, die uns an keiner Stelle etwas Weſentliches hinzuzuſetzen oder wegzulaſſen erlaubt hat. Als weitere Ausführungen der Abhandlung von Gauß ſind einige, doppelte und vielfache Integrale betreffende, ſchöne Abhandlungen von C. G. J. Jacobi zu

betrachten, die ſich in **Crelles Journal B. II., VIII., X., XII.** finden. Auch vergleiche man einen Aufſatz von Clauſen in demſelben Journal. B. VI. S. 290. Hier geſtattet der Raum größere Ausführlichkeit nicht.

16. Nachdem wir die vorhergehende merkwürdige Transformation eines wichtigen irrationalen Differentials ausführlich betrachtet haben, wollen wir nun auch an einigen Beiſpielen zeigen, wie ſich irrationale Differentiale häufig dadurch integriren laſſen, daß man ſie durch ſchickliche Subſtitutionen rational macht, und wählen dazu einige von N. Fuß in einer in den von der Petersburger Akademie herausgegebenen **Mémoires posthumes de L. Euler, F. T. Schubert et N. Fuss. Pétersb.** 1830. p. 305. ſich findenden Abhandlung betrachtete Integrale deshalb, weil dieſe Integrale, wenigſtens größtentheils, ziemlich allgemein ſind, und ſich daher vorkommende Integrale öfters werden auf dieſelben zurückführen laſſen.

$$\text{I.}\quad P = \int \frac{x^{in-1}(\alpha + \beta x^{in})^r \partial x}{(f + g x^{in})^\lambda \sqrt[n]{(a + b x^{in})^m}}.$$

m, n, r, λ ſollen ganze Zahlen ſeyn; i kann jede ganze oder gebrochene Zahl bezeichnen.

Man ſetze $a + bx^{in} = y^n$; ſo ergiebt ſich

$$x^{in-1}\partial x = \frac{y^{n-1}\partial y}{bi},\quad x^{in} = \frac{y^n - a}{b},$$

und hieraus

$$(\alpha + \beta x^{in})^r = \frac{(\alpha b + \beta(y^n - a))^r}{b},\quad (f + gx^{in})^\lambda = \frac{(bf + g(y^n - a))^\lambda}{b^\lambda};$$

folglich

$$P = \frac{b^{\lambda-r-1}}{i}\int \frac{y^{n-m-1}\partial y(\alpha b - \beta a + \beta y^n)^r}{(bf - ag + gy^n)^\lambda}.$$

Dieſe Formel iſt für jedes ganze oder gebrochene i rational.

1. Für $i = \frac{1}{2}$ iſt

$$P = \int \frac{x^{\frac{1}{2}n-1}(a + \beta x^{\frac{1}{2}n})^r \partial x}{(f + gx^{\frac{1}{2}n})^\lambda \sqrt[n]{(a + bx^{\frac{1}{2}n})^m}} = 2b^{\lambda-r-1}\int \frac{y^{n-m-1}(\alpha b - \beta a + \beta y^n)^r \partial y}{(bf - ag + gy^n)^\lambda}.$$

2. Für $r = 0$ iſt

$$P = \int \frac{x^{in-1}\partial x}{(x + gx^{in})^\lambda \sqrt[n]{(a + bx^{in})^m}} = \frac{b^{\lambda-1}}{i}\int \frac{y^{n-m-1}\partial y}{(bf - ag + gy^n)^\lambda}.$$

3. Für $m = 2$, $n = 3$, $i = 1$, $\lambda = 1$ folgt hieraus

$$P = \int \frac{x^2 \partial x}{(f + \gamma x^3)\sqrt[3]{a + bx^3}} = \int \frac{\partial y}{bf - ag + gy^3}.$$

$$\text{II.}\quad P = \int \frac{x^{im-1}(\alpha + \beta x^{in})^r \partial x}{(f + gx^{in})^\lambda \sqrt[n]{(a + bx^{in})^m}}.$$

m, n, r, λ bezeichnen ganze Zahlen; i kann jede ganze oder gebrochene Zahl ſeyn.

Man ſetze

$$\frac{x^i}{\sqrt[n]{a + bx^{in}}} = y,\quad \frac{x^{in}}{a + bx^{in}} = y^n,$$

nehme auf beiden Seiten die Logarithmen und differentiire; ſo erhält man

$$n l y = i n l x - l(a + bx^{in}),\quad \frac{\partial y}{y} = \frac{a i \partial x}{x(a + bx^{in})},$$

$$\partial y = \frac{a i x^{i-1} \partial x}{(a + bx^{in}) \sqrt[n]{a + bx^{in}}}.$$

Hieraus folgt, weil

$$x^{in} = \frac{ay^n}{1 - by^n},\quad a + bx^{in} = \frac{a}{1 - by^n}$$

iſt, leicht

$$\frac{x^{i-1} \partial x}{\sqrt[n]{a + bx^{in}}} = \frac{\partial y}{i(1 - by^n)},$$

oder

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial y}{i y (1 - by^n)}.$$

Nun iſt

$$\frac{x^{im}}{\sqrt[n]{(a + bx^{in})^m}} = y^m,\quad \sqrt[n]{(a + bx^{in})^m} = \frac{x^{im}}{y^m}.$$

Alſo iſt

$$\frac{x^{im-1} \partial x}{\sqrt[n]{(a + bx^{in})^m}} = y^m \frac{\partial x}{x} = \frac{y^{m-1} \partial y}{i(1 - by^n)}.$$

Weil ferner

$$(\alpha + \beta x^{in})^r = \frac{(\alpha - (\alpha b - \beta a) y^n)^r}{(1 - by^n)^r},\quad (f + gx^{in})^\lambda = \frac{(f - c(bf - ag) y^n)^\lambda}{(1 - by^n)^\lambda}$$

iſt; ſo erhält man nach gehöriger Subſtitution

$$P = \frac{1}{i} \int \frac{y^{m-1} (\alpha - (\alpha b - \beta a) y^n)^r \partial y}{(1 - by^n)^{r-\lambda+1} (f - (bf - ag) y^n)^\lambda},$$

welche Formel wieder für jedes i rational iſt.

1. Für $r = 0$ erhält man

$$P = \int \frac{x^{im-1}\partial x}{(f+gx^{in})^\lambda \sqrt[n]{(a+bx^{in})^m}} = \frac{1}{i}\int \frac{y^{m-1}(1-by^n)^{\lambda-1}\partial y}{(f-(bf-ag)y^n)^\lambda}.$$

2. Setzt man hierin $i = 1$, $\lambda = 1$, $m = 1$, $f = 1$, $g = 0$; ſo ergiebt ſich

$$P = \int \frac{\partial x}{\sqrt[n]{a+bx^n}} = \int \frac{\partial y}{1-by^n}.$$

3. Durch Verbindung von I. und II. mit einander kann man jederzeit die ſehr allgemeine Formel

$$\int \frac{(Ax^{in-1} \pm Bx^{im-1})(\alpha+\beta x^{in})^r \partial x}{(f+gx^{in})^\lambda \sqrt[n]{(a+bx^{in})^m}}$$

für jedes ganze oder gebrochene i rational machen. Alſo kann man, wenn man $r = 0$ ſetzt, auch jederzeit die Formel

$$\int \frac{(Ax^{in-1} \pm Bx^{im-1})\partial x}{(f+gx^{in})^\lambda \sqrt[n]{(a+bx^{in})^m}}$$

für jedes ganze oder gebrochene i rational machen.

$$\text{III.}\quad P = \int \frac{x^{in-1}(\alpha+\beta x^{\varepsilon in})^r \partial x}{(f+gx^{\delta in})^\lambda \sqrt[n]{(a+bx^{in})^m}}.$$

Man ſetze

$$a + bx^{in} = y^n,\quad x^{in-1}\partial x = \frac{y^{n-1}\partial y}{bi};$$

ſo iſt

$$(\alpha + bx^{\varepsilon in})^r = \frac{(\alpha b^\varepsilon + \beta(y^n-a)^\varepsilon)^r}{b^{\varepsilon r}},$$

$$(f + gx^{\delta in})^\lambda = \frac{(fb^\delta + g(y^n-a)^\delta)^\lambda}{b^{\delta\lambda}},$$

und nach gehöriger Subſtitution erhält man:

$$P = \frac{b^{\delta\lambda-\varepsilon r-1}}{i}\int \frac{y^{n-m-1}(ab^\varepsilon+\beta(y^n-a)^\varepsilon)^r\partial y}{(fb^\delta + g(y^n-a)^\delta)^\lambda}.$$

Für $\varepsilon = \delta = 1$ erhält man den Fall I.

$$\text{IV.}\quad P = \int \frac{x^{im-1}(a+\beta x^{\varepsilon in})^r \partial x}{(f+gx^{\delta in})^\lambda \sqrt[n]{(a+bx^{in})^m}}.$$

Man ſetze

$$\frac{x^i}{\sqrt[n]{a+bx^{in}}} = y,\quad \frac{x^{in}}{a+bx^{in}} = y^n,\quad x^{in} = \frac{ay^n}{1-by^n};$$

ſo erhält man ganz wie in II.

$$\frac{x^{im-1}\partial x}{\sqrt[n]{(a+bx^{in})^m}} = \frac{y^{m-1}\partial y}{i(1-by^n)} .$$

Auch findet man leicht:

$$(\alpha + \beta x^{\varepsilon in})^r = \frac{(\alpha(1-by^n)^\varepsilon + \beta a^\varepsilon y^{\varepsilon n})^r}{(1-by^n)^{\varepsilon r}},$$

$$(f + gx^{\delta in})^r = \frac{(f(1-by^n)^\delta + ga^\delta y^{\delta n})}{(1-by^n)^{\delta\lambda}},$$

und folglich nach gehöriger Subſtitution

$$P = \frac{1}{i}\int \frac{y^{m-1}(\alpha(1-by^n)^\varepsilon + \beta a^\varepsilon y^{\varepsilon n})^r \partial y}{(1-by^n)^{\varepsilon r - \delta\lambda + 1}(f(1-by^n)^\delta + ga^\delta y^{\delta n})^\lambda} .$$

Für $\varepsilon = \delta = 1$ erhält man den Fall II.

$$\text{V.}\quad P = \int \frac{(1+x)^2 \partial x}{(3x+x^3)\sqrt[3]{1+3x^2}} .$$

Man ſetze

$$\frac{1-x}{\sqrt[3]{1+3x^2}} = p ;$$

ſo iſt

$$l(1-x) - \tfrac{1}{3}l(1+3x^2) = lp ,$$

$$-\frac{\partial x}{1-x} - \frac{2x\partial x}{1+3x^2} = \frac{\partial p}{p}, \text{ d. i. } \frac{(1+x)^2\partial x}{(1-x)(1+3x^2)} = -\frac{\partial p}{p} .$$

Folglich iſt

$$\frac{(1+x)^2\partial x}{(1+3x^2)\sqrt[3]{1+3x^2}} = -\partial p .$$

Weil nun

$$\frac{3x+x^3}{1+3x^2} = 1 - p^3$$

iſt; ſo iſt

$$P = -\int \frac{\partial p}{1-p^3} .$$

$$\text{VI.}\quad Q = \int \frac{(1-x)^2 \partial x}{(3x+x^3)\sqrt[3]{1+3x^2}} .$$

Man ſetze

$$\frac{1+x}{\sqrt[3]{1+3x^2}} = q ;$$

ſo iſt

$$l(1+x) - \tfrac{1}{3}l(1+3x^2) = lq ,$$

$$\frac{\partial x}{1+x} - \frac{2x\partial x}{1+3x^2} = \frac{\partial q}{q}, \text{ d. i. } \frac{(1-x)^2\partial x}{(1+x)(1+3x^2)} = \frac{\partial q}{q} ,$$

und folglich

$$\frac{(1-x)^2 \partial x}{(1+3x^2)\sqrt[3]{1+3x^3}} = \partial q .$$

Weil nun

$$\frac{3x + x^3}{1+3x^2} = -(1-q^3)$$

iſt; ſo iſt

$$Q = -\int \frac{\partial x}{1-q^3} .$$

VII. Weil

$$P - Q = \frac{4\partial x}{(3+x^2)\sqrt[3]{1+3x^2}}$$

iſt; ſo iſt

$$4\int \frac{\partial x}{(3+x^2)\sqrt[3]{1+3x^3}} = \int \frac{\partial q}{1-q^3} - \int \frac{\partial p}{1-p^3} ,$$

wie auch ſchon Euler in den Nov. Act. Petrop. T. X. gefunden hat.

Wir müſſen uns hier mit den obigen Mittheilungen begnügen, und bemerken nur noch, daß in den Integraltafeln oder Sammlung von Integralformeln von Meier Hirsch. Berlin. 1810. die vollſtändigſte Sammlung von Integralformeln enthalten iſt, welche wir gegenwärtig beſitzen. Auch F. X. Moth hatte in Schumachers aſtronomiſchen Nachrichten. B. IV. S. 489. neue Integraltafeln angekündigt.

Integrallogarithmus (logarithme intégral) nennt man nach Soldners (Théorie et Tables d'une nouvelle fonction transcendante. Munic. 1809. p. 7.) und Beſſels (Königsberger Archiv für Naturwissenschaft und Mathematik. 1811. St. 1. S. 7.) Vorgange jetzt gewöhnlich das in vieler Beziehung merkwürdige und ſchwierige Integral

$$\int_0^x \frac{\partial x}{lx},$$

mit dem ſchon Euler ſich vielfach beſchäftigt hat, und bezeichnet daſſelbe auf eine ganz zweckmäßige Weiſe nach Soldner durch li.x, ſo daß alſo

$$1.\quad li.x = \int_0^x \frac{\partial x}{lx}$$

iſt. Daß, wenn imaginäre Größen vermieden werden ſollen, für x, wie hier auch immer geſchehen ſoll, bloß poſitive Werthe geſetzt werden dürfen, bedarf wohl kaum noch einer beſondern Erwäh-

nung. Maſcheroni, der ſich in ſeinen Adnot. ad calculum integralem Euleri auch viel mit dieſem Integral beſchäftigt hat, ſchlug für daſſelbe den Namen Hyperlogarithmus, Caluſo (Memorie della Societa italiana. T. XII. p. 268.) dagegen, weil

$$\int \frac{\partial x}{lx} = \int \frac{\partial x}{\int \frac{\partial x}{lx}}$$

iſt, den Namen Logologarithmus vor.

1. Weil x immer poſitiv iſt, ſo kann man jederzeit $x = e^y$, wo y poſitiv und negativ ſeyn kann, ſetzen. Dann iſt $lx = y$, $\partial x = e^y \partial y$, und folglich

$$\frac{\partial x}{lx} = \frac{e^y \partial y}{y}.$$

Weil nun dem Werthe $x = 0$ offenbar der Werth $y = -\infty$ entſpricht; ſo iſt

$$2.\quad li.x = \int_{-\infty}^{y} \frac{e^y \partial y}{y}.$$

y iſt, was man wohl zu betrachten hat, $= lx$. Uebrigens kann man, was ſich von ſelbſt verſteht, dieſe Gleichung auch auf folgende Art ſchreiben:

$$3.\quad li.e^y = \int_{-\infty}^{y} \frac{e^y \partial y}{y}.$$

2. Um die Natur unſers Integrals kennen zu lernen, wollen wir es in eine convergirende Reihe zu entwickeln ſuchen. Bekanntlich hat man die für jedes poſitive x convergirende Reihe

$$x = e^{lx} = 1 + \frac{lx}{1} + \frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{(lx)^3}{1.2.3} + \frac{(lx)^4}{1\ldots4} + \ldots.$$

Alſo iſt, wenn man differentiirt,

$$\partial x = \partial lx + \frac{lx.\partial lx}{1} + \frac{(lx)^2 \partial lx}{1.2} + \frac{(lx)^3 \partial lx}{1.2.3} + \ldots.,$$

und folglich

$$\frac{\partial x}{lx} = \frac{\partial lx}{lx} + \frac{\partial lx}{1} + \frac{lx.\partial lx}{1.2} + \frac{(lx)^2 \partial lx}{1.2.3} + \ldots.$$

Integrirt man nun; ſo erhält man

$$\int \frac{\partial x}{lx} = \int \frac{\partial lx}{lx} + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Weil aber

$$\partial l(\pm lx) = \frac{\pm \partial lx}{\pm lx} = \frac{\partial lx}{lx}$$

iſt; ſo iſt

$$\int \frac{\partial lx}{lx} = l(\pm lx) + \text{Const.}$$

und folglich

$$\int\frac{\partial x}{lx} = \text{Const.} + l(\pm lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo Const. eine beliebige Conſtante bezeichnet. In Bezug auf das doppelte Zeichen in dieſer Formel iſt, weil unſer Integral, da wir x immer poſitiv nehmen, ſeiner Natur nach eine reelle Größe iſt, klar, daß man jederzeit das untere oder obere Zeichen nehmen muß, jenachdem x kleiner oder größer als die Einheit iſt. Für $x < 1$ muß man alſo

$$\int\frac{\partial x}{lx} = C' + l(-lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

für $x > 1$ dagegen

$$\int\frac{\partial x}{lx} = C'' + l(+lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo C′ und C″ zwei ganz willkührliche Conſtanten bezeichnen, ſetzen, woraus man ſieht, daß ſich die Werthe unſers Integrals für alle Werthe der Größe x von 0 bis ∞ nicht durch eine Formel darſtellen laſſen.

3. Bezeichnen wir nun den Werth der willkührlichen Conſtante C′, welchen dieſelbe erhält, wenn man ſich das Integral in dem Falle, wo $x < 1$ iſt, ſo beſtimmt denkt, daß es für $x = 0$ verſchwindet, durch C; ſo iſt für jedes poſitive x, welches < 1 iſt,

4. $$\text{li}.x = C + l(-lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Für $x > 1$ läßt ſich, wenn e eine unendlich kleine poſitive Größe bezeichnet, li.x nach bekannten Sätzen von den beſtimmten Integralen auf folgende Art ausdrücken:

$$\text{li}.x = \int_0^x \frac{\partial x}{lx} = \int_0^{1-e} \frac{\partial x}{lx} + \int_{1+e}^x \frac{\partial x}{lx}$$

$$= \text{li}.(1-e) + \int_{1+e}^x \frac{\partial x}{lx}.$$

Weil nun nach dem Vorhergehenden

$$\int_{1+e}^x \frac{\partial x}{lx} = C'' + l(+lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \ldots$$

$$- C'' - l(+l(1+e)) - \frac{1}{1}.\frac{l(1+e)}{1} - \frac{1}{2}.\frac{(l(1+e))^2}{1.2} - \ldots$$

iſt; ſo iſt für $x > 1$

$$li.x = C + l(-l(1-\varepsilon)) + \frac{1}{1}.\frac{l(1-\varepsilon)}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(l(1-\varepsilon))^2}{1.2} + \ldots.$$
$$- l(+l(1+\varepsilon)) - \frac{1}{1}.\frac{l(1+\varepsilon)}{1} - \frac{1}{2}.\frac{(l(1+\varepsilon))^2}{1.2} - \ldots.$$
$$+ l(+lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Es iſt aber

$$l(-(I-\varepsilon)) - l(+l(1+\varepsilon)) = l\left\{-\frac{l(1-\varepsilon)}{l(1+\varepsilon)}\right\}$$
$$= l\left\{-\frac{-\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon^2-\frac{1}{3}\varepsilon^3-\ldots}{+\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{1}{3}\varepsilon^3-\ldots}\right\} = l\left\{-\frac{-1-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{3}\varepsilon^2-\ldots}{+1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon^2-\ldots}\right\};$$

alſo iſt

$$li.x = C + l\left\{-\frac{-1-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{3}\varepsilon^2-\frac{1}{4}\varepsilon^3-\ldots.}{+1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon^2-\frac{1}{4}\varepsilon^3+\ldots.}\right\}$$
$$+ \frac{1}{1}.\frac{l(1-\varepsilon)}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(l(1-\varepsilon))^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(l(1-\varepsilon))^3}{1.2.3} + \ldots.$$
$$- \frac{1}{1}.\frac{l(1+\varepsilon)}{1} - \frac{1}{2}.\frac{(l(1+\varepsilon))^2}{1.2} - \frac{1}{3}.\frac{(l(1-\varepsilon))^3}{1.2.3} + \ldots.$$
$$+ l(+lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

und folglich, weil ε eine unendlich kleine poſitive Größe bezeichnet, offenbar für jedes x, welches > 1 iſt:

$$5.\quad li.x = C + l(+\ x) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.,$$

ſo daß alſo

$$6.\quad li.x = C + l(\mp lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

iſt, mit der Beſtimmung, daß man das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem reſpective das immer poſitive x kleiner oder größer als die Einheit iſt. Für $x = 1$ findet, wie man leicht überſehen wird, eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function li.x Statt. Noch deutlicher fällt dies in die Augen, wenn man ſich eine Curve verzeichnet, deren Abſciſſen und entſprechende rechtwinklige Ordinaten reſpective x und $\frac{1}{lx}$ ſind. Dieſe Curve wird ungefähr die in Fig. 33., wo A der Anfang der Abſciſſen und $AB = 1$ iſt, dargeſtellte Geſtalt haben, und beſteht alſo jederzeit aus zwei von einander völlig abgeſonderten Theilen oder Zweigen, von denen der eine ganz unter-, der andere ganz oberhalb der Abſciſſenaxe liegt. Ueberlegt man nun, daß durch li.x das den Coordinaten x und $\frac{1}{lx}$ entſprechende Flächenſtück dieſer Curve dargeſtellt wird; ſo wird man ſich leicht von der Richtigkeit der oben gemachten Bemerkung überzeugen, und hieran auch noch andere geometriſche Betrachtungen, zu denen es hier an Raum fehlt, knüpfen können.

Für $x > 1$ iſt $\frac{1}{x} < 1$. Alſo iſt unter der Vorausſetzung, daß $x > 1$ iſt, jederzeit nach (6.)

$$7.\quad li.x = C + llx + \tfrac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \tfrac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \tfrac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$8.\quad li.\frac{1}{x} = C + llx - \tfrac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \tfrac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} - \tfrac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots$$

Auch iſt immer

$$9.\quad li.e^x = C + lx + \tfrac{1}{1}.\frac{x}{1} + \tfrac{1}{2}.\frac{x^2}{1.2} + \tfrac{1}{3}.\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$10.\quad li.e^{-x} = C + lx - \tfrac{1}{1}.\frac{x}{1} + \tfrac{1}{2}.\frac{x^2}{1.2} - \tfrac{1}{3}.\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

4. Beſondere Schwierigkeit macht die Beſtimmung der Conſtante C. Man gelangt dazu nach Soldner mittelſt der Formel (10.) auf folgende Art. Bekanntlich iſt

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \ldots,$$

und folglich

$$\frac{e^{-x}-1}{x}\partial x = -\frac{\partial x}{1} + \frac{x\,\partial x}{1.2} - \frac{x^2\,\partial x}{1.2.3} + \frac{x^3\,\partial x}{1\ldots4} - \ldots$$

Alſo iſt, wie man leicht findet,

$$\int_0^x \frac{e^{-x}-1}{x}\partial x = -\tfrac{1}{1}.\frac{x}{1} + \tfrac{1}{2}.\frac{x^2}{1.2} - \tfrac{1}{3}.\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Folglich iſt nach der Gleichung (10.)

$$11.\quad li.e^{-x} = C + lx + \int_0^x \frac{e^{-x}-1}{x}\partial x.$$

Weil nun $li.0 = 0$, d. i. $li.e^{-\infty} = 0$ iſt; ſo iſt

$$12.\quad C = -l\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-x}-1}{x}\partial x,$$

oder, wenn im Folgenden n immer eine poſitive Größe bezeichnet, die man ſich in's Unendliche wachſend denkt:

$$13.\quad C = -\operatorname{Lim}\left\{ln + \int_0^n \frac{e^{-x}-1}{x}\partial x\right\}.$$

Nun iſt aber nach dem Binomiſchen Lehrſatze

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = 1 - \frac{x}{1} + \left(1-\frac{1}{n}\right).\frac{x^2}{1.2} - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right).\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

und folglich, wie leicht erhellen wird, indem n immer ſeine vorige Bedeutung behält,

$$14.\quad \operatorname{Lim}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}.$$

Setzen wir jetzt

$$1 - \frac{x}{n} = z\,;$$

ſo iſt

$$\frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n - 1}{x}\partial x = \frac{1-z^n}{1-z}\partial z\,,$$

und folglich, weil für $x = 0$ und $x = n$ reſpective $z = 1$ und $z = 0$ iſt,

$$\int_0^n \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n - 1}{x}\partial x = \int_1^0 \frac{1-z^n}{1-z}\partial z\,.$$

Alſo iſt offenbar

$$\mathrm{Lim}\int_0^n \frac{e^{-x}-1}{x}\partial x = \mathrm{Lim}\int_1^0 \frac{1-z^n}{1-z}\partial z,$$

und folglich nach (13.)

$$15.\quad C = -\,\mathrm{Lim}\left\{\ln + \int_1^0 \frac{1-z^n}{1-z}\partial z\right\}.$$

Nun iſt aber

$$\frac{1-z^n}{1-z}\partial z = (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots . + z^{n-1})\partial z\,;$$

alſo

$$\int_0^1 \frac{1-z^n}{1-z}\partial z = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots . + \frac{1}{n}$$

oder

$$\int_1^0 \frac{1-z^n}{1-z}\partial z = -\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

Folglich iſt nach (15.)

$$16.\quad C = \mathrm{Lim}\left\{1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln\right\}.$$

Denſelben Ausdruck für die Conſtante C hat, aber auf einem ganz andern Wege, auch Maſcheroni a. a. O. gefunden. Ueber das weitere Verfahren bei der Berechnung von C iſt der Artikel Summirung der Reihen (39.) im vierten Theile dieſes Wörterbuchs nachzuſehen. Hier mag bloß noch erwähnt werden, daß Maſcheroni, wie Lacroix im **Traité du calc. diff. et du calc. int. T. III. p. 521.** anführt, für $n = 100$

$$C = 0{,}577215\ 664901\ 532860\ 618112\ 090082\ 39$$

gefunden hat. Soldner iſt a. a. O. p. 13. bloß bis zur zwei- und zwanzigſten Decimale gegangen; ſeine drei letzten Ziffern ſind 065, und weichen alſo von den entſprechenden Ziffern in der von Maſcheroni gefundenen Zahl, welche 181 ſind, ab.

5. Soldner giebt in ſeiner empfehlenswerthen Schrift noch eine Reihe für li.(a + x), die wir hier auch noch kurz entwickeln wollen. Man ſetze

$$l\left(1+\frac{x}{a}\right)=y\,;$$

ſo iſt

$$\frac{1}{l(a+x)}=\frac{1}{la+l\left(1+\frac{x}{a}\right)}=\frac{1}{la+y}=\frac{1}{la.\left(1+\frac{y}{la}\right)}$$

Iſt nun der abſolute Werth von

$$\frac{y}{la}=\frac{l\left(1+\frac{x}{a}\right)}{la}$$

kleiner als die Einheit; ſo hat man die convergirende Reihe

$$\frac{1}{1+\frac{y}{la}}=1-\frac{y}{la}+\frac{y^2}{(la)^2}-\frac{y^2}{(la)^3}+\ldots.,$$

die auch convergent bleibt, wenn man jedes Glied auf ſeinen abſoluten Werth reducirt, wie aus der Lehre von der Convergenz der Reihen hier als bekannt vorausgeſetzt wird. Alſo kann man

$$\frac{1}{l(a+x)}=\frac{1}{la}\left\{1-\frac{y}{la}+\frac{y^2}{(la)^2}-\frac{y^3}{(la)^3}+\ldots.\right\}$$

und folglich

$$\int_0^x\frac{\partial x}{l(a+x)}=\frac{x}{la}-\frac{1}{la}\int_0^x\left\{\frac{y}{la}-\frac{y^2}{(la)^2}+\frac{y^2}{(la)^3}-\ldots\right\}\partial x$$

ſetzen. Weil nun aber

$$1+\frac{x}{a}=e^y,$$

und folglich

$$\partial x=ae^y\,\partial y=a\left\{1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+\ldots.\right\}\partial y$$

iſt; ſo iſt

$$\int_0^x\frac{\partial x}{l(a+x)}=$$

$$\frac{x}{la}-\frac{a}{la}\int_0^x\left\{1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}+\ldots\right\}\left\{\frac{y}{la}-\frac{y^3}{(la)^2}+\frac{y^3}{(la)^3}-\ldots\right\}\partial y,$$

oder, weil offenbar y = 0 iſt, wenn x = 0 iſt:

$$\int_0^x\frac{\partial x}{l(a+x)}=$$

$$\frac{x}{la}-\frac{a}{la}\int_0^y\left\{1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}+\ldots\right\}\left\{\frac{y}{la}-\frac{y^2}{(la)^2}+\frac{y^3}{(la)^3}-\ldots\right\}\partial y.$$

Die beiden unter dem Integralzeichen in einander multiplicirten Reihen ſind, wenn der abſolute Werth von $\frac{y}{la}$ kleiner als die Einheit iſt, convergent und bleiben auch convergent, wenn man für jedes Glied derſelben ſeinen abſoluten Werth ſetzt. Daher kann man auf das Product dieſer beiden Reihen den im Artikel Convergenz der Reihen (20.) i. d. Z. bewieſenen Satz anwenden, und erhält alſo, wenn wir die Coefficienten der durch Multiplication der beiden Reihen in einander hervorgehenden Reihe einſtweilen durch $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots.$ bezeichnen,

$$\int_0^x \frac{\partial x}{l(a+x)}$$

$$= \frac{x}{la} - \frac{a}{la}\int_0^y (A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + A_4 y^4 + \ldots)\partial y,$$

oder

$$17.\quad \int_0^x \frac{\partial x}{l(a+x)}$$

$$= \frac{x}{la} - \frac{a}{la}(\tfrac{1}{2}A_1 y^2 + \tfrac{1}{3}A_2 y^3 + \tfrac{1}{4}A_3 y^4 + \tfrac{1}{5}A_4 y^5 + \ldots.),$$

wo aber, was man wohl zu beachten hat, der abſolute Werth von

$$\frac{y}{la} = \frac{l\left(1+\frac{x}{a}\right)}{la}$$

kleiner als die Einheit ſeyn muß. Das Geſetz der Coefficienten $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots.$ findet man leicht. Es iſt nämlich

$$18.\quad A_1 = \frac{1}{la}$$

und allgemein

$$A_n = \frac{1}{1..(n-1)la} - \frac{1}{1..(n-2)(la)^2} + \ldots. \pm \frac{1}{(la)^{n+1}},$$

$$A_{n+1} = \frac{1}{1...nla} - \frac{1}{1..(n-1)(la)^2} + \frac{1}{1..(n-2)(la)^3} - \ldots. \mp \frac{1}{(la)^n}.$$

Dies giebt die Relation

$$19.\quad \frac{A_n}{la} + A_{n+1} = \frac{1}{1...nla},$$

mittelſt welcher und des in (18.) angegebenen Werths von A_1 die Coefficienten leicht berechnet werden können.

Setzt man

$$20.\quad \int_0^x \frac{\partial x}{l(a+x)}$$

$$= \frac{x}{la} - a\left\{\tfrac{1}{2}B_1\frac{y^2}{(la)^2} + \tfrac{1}{3}B_2\frac{y^3}{(la)^3} + \tfrac{1}{4}B_3\frac{y^4}{(la)^4} + \ldots.\right\};$$

ſo iſt

$$B_1 = A_1 la, \; B_2 = A_2 (la)^2, \; B_3 = A_3 (la)^3, \ldots,$$

d. i. allgemein

$$B_n = A_n (la)^n.$$

Folglich iſt

$$A_n = \frac{B_n}{(la)^n},$$

und alſo nach (19.)

$$\frac{B_n}{(la)^{n+1}} + \frac{B_{n+1}}{(la)^{n+1}} = \frac{1}{1 \ldots n\, la};$$

alſo

$$21. \quad B_n + B_{n+1} = \frac{(la)^n}{1 \ldots n},$$

wozu man noch die Gleichung

$$22. \quad B_1 = 1$$

zu nehmen hat. Die Gleichung (21.) gewährt, wie es uns ſcheint, die bequemſte Berechnung der Coefficienten.

Aus dem in (20.) gefundenen Integral läßt ſich nun li.(a + x) auf folgende Art ableiten.

Es iſt nämlich offenbar

$$li.(a + x) = \int_0^{a+x} \frac{\partial z}{lz},$$

oder

$$li.(a + x) = \int_0^a \frac{\partial z}{lz} + \int_a^{a+x} \frac{\partial z}{lz},$$

d. i., wie ſogleich in die Augen fällt,

$$li.(a + x) = li.a + \int_a^{a+x} \frac{\partial z}{lz}.$$

Setzen wir nun

$$z = a + u, \; \partial z = u;$$

ſo iſt

$$\frac{\partial z}{lz} = \frac{\partial u}{l(a + u)},$$

und folglich, weil für z = a und z = a + x reſpective u = 0 und u = x iſt,

$$\int_a^{a+x} \frac{\partial z}{lz} = \int_0^x \frac{\partial u}{l(a+u)},$$

oder, was daſſelbe iſt

$$\int_a^{a+x} \frac{\partial z}{lz} = \int_0^x \frac{\partial x}{l(a+x)}.$$

Alſo iſt nach dem Obigen

$$\mathrm{li}.(a+x) = \mathrm{li}.a + \int_0^x \frac{\partial x}{\mathrm{l}(a+x)},$$

und folglich nach (20.)

$$23.\quad \mathrm{li}.(a+x)$$

$$= \mathrm{li}.a + \frac{x}{\mathrm{l}a} - a\left\{\tfrac{1}{2}B_1\frac{y^2}{(\mathrm{l}a)^2} + \tfrac{1}{3}B_2\frac{y^3}{(\mathrm{l}a)^3} + \tfrac{1}{4}B_3\frac{y^4}{(\mathrm{l}a)^4} + \ldots\right\},$$

wo aber immer der abſolute Werth von

$$\frac{y}{\mathrm{l}a} = \frac{\mathrm{l}\left(1+\frac{x}{a}\right)}{\mathrm{l}a}$$

kleiner als die Einheit ſeyn muß. Mittelſt dieſer Formel und der directen Formel (6.) hat Soldner eine Tafel von $\mathrm{li}.x$ berechnet, welche ſich von $x = 0$ bis $x = 1280$ erſtreckt. Mittelſt der directen Formel ging er bis zu $x = 10$, und ſchritt von hier an von Glied zu Glied mittelſt der Formel (23.) bis zur Gränze der Tafel fort. Wir theilen dieſe Tafel am Ende dieſes Artikels mit, ohne weitere Erläuterungen über ihren Gebrauch beizufügen, indem ſich jeder von ſelbſt leicht in denſelben finden wird.

Bekanntlich iſt $\mathrm{li}.0 = 0$. Man findet aber leicht, daß für Werthe von x, die größer als die Einheit, aber nicht viel von derſelben verſchieden ſind, $\mathrm{li}.x$ negativ iſt; für größere Werthe von x iſt dagegen $\mathrm{li}.x$ poſitiv; daher muß es außer dem Werthe $x = 0$ nothwendig noch einen zweiten die Einheit überſteigenden Werth von x geben, für welchen $\mathrm{li}.x = 0$ iſt. Soldner findet

$$\mathrm{li}.1{,}4513692346 = 0\,;$$

nach Beſſels Rechnung (a. a. O. S. 14.) iſt

$$\mathrm{li}.1{,}45136923495 = 0\,.$$

Auch mögen hier aus Soldners Schrift noch folgende ein beſonderes Intereſſe habende Integrallogarithmen mitgetheilt werden:

$$\begin{aligned} \mathrm{li}.0{,}1 &= -\,0{,}0323897896 \\ \mathrm{li}.10 &= 6{,}1655995048 \\ \mathrm{li}.e^{-1} &= -\,0{,}2193839344 \\ \mathrm{li}.e &= 1{,}8951178164\,. \end{aligned}$$

6. Wenn x ſehr groß oder ſehr klein iſt; ſo convergirt die Reihe (6.) nur ſehr langſam. Der Grund dieſer langſamen Convergenz liegt, wie Beſſel in ſeinem ſchönen Aufſatze über den Integrallogarithmus ganz richtig bemerkt, in der geringen Convergenz der Reihe

$$x = 1 + \frac{\mathrm{l}x}{1} + \frac{(\mathrm{l}x)^2}{1.2} + \frac{(\mathrm{l}x)^3}{1.2.3} + \frac{(\mathrm{l}x)^4}{1\ldots4} + \ldots\ldots$$

Könnte man dieſe Reihe convergenter machen, oder $\mathrm{l}x$ durch

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{lx} = \text{Const.} + l(\pm lx) + \frac{1}{1} \cdot \frac{lx}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo Const. eine beliebige Conſtante bezeichnet. In Bezug auf das doppelte Zeichen in dieſer Formel iſt, weil unſer Integral, da wir x immer poſitiv nehmen, ſeiner Natur nach eine reelle Größe iſt, klar, daß man jederzeit das untere oder obere Zeichen nehmen muß, jenachdem x kleiner oder größer als die Einheit iſt. Für $x < 1$ muß man alſo

$$\int \frac{\partial x}{lx} = C' + l(-lx) + \frac{1}{1} \cdot \frac{lx}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

für $x > 1$ dagegen

$$\int \frac{\partial x}{lx} = C'' + l(+lx) + \frac{1}{1} \cdot \frac{lx}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo C′ und C″ zwei ganz willkührliche Conſtanten bezeichnen, ſetzen, woraus man ſieht, daß ſich die Werthe unſers Integrals für alle Werthe der Größe x von 0 bis ∞ nicht durch eine Formel darſtellen laſſen.

3. Bezeichnen wir nun den Werth der willkührlichen Conſtante C′, welchen dieſelbe erhält, wenn man ſich das Integral in dem Falle, wo $x < 1$ iſt, ſo beſtimmt denkt, daß es für $x = 0$ verſchwindet, durch C; ſo iſt für jedes poſitive x, welches < 1 iſt,

4. $$\text{li}.x = C + l(-lx) + \frac{1}{1} \cdot \frac{lx}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots$$

> 1 läßt ſich, wenn ε eine unendlich kleine poſitive ...chnet, li. x nach bekannten Sätzen von den be... ...tegralen auf folgende Art ausdrücken:

$$\ldots x = \int_0^x \frac{\partial x}{lx} = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\partial x}{lx} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{\partial x}{lx}$$

$$= \text{li}.(1-\varepsilon) + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{\partial x}{lx}.$$

...n nach dem Vorhergehenden

$$\ldots \frac{\partial x}{lx} = C'' + l(+lx) + \frac{1}{1} \cdot \frac{lx}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(lx)^2}{1.2} + \ldots$$

$$\ldots - C'' - l(+l(1+\varepsilon)) - \frac{1}{1} \cdot \frac{l(1+\varepsilon)}{1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(l(1+\varepsilon))^2}{1.2} - \ldots$$

ſo iſt für $x > 1$

$$\text{li}.x = C + l(-l(1-\varepsilon)) + \frac{1}{1}.\frac{l(1-\varepsilon)}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(l(1-\varepsilon))^2}{1.2} + \ldots.$$
$$- l(+l(1+\varepsilon)) - \frac{1}{1}.\frac{l(1+\varepsilon)}{1} - \frac{1}{2}.\frac{(l(1+\varepsilon))^2}{1.2} - \ldots.$$
$$+ l(+lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Es iſt aber

$$l(-(1-\varepsilon)) - l(+l(1+\varepsilon)) = l\left\{-\frac{l(1-\varepsilon)}{l(1+\varepsilon)}\right\}$$
$$= l\left\{-\frac{-\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{3}\varepsilon^3 - \ldots}{+\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^3 - \ldots}\right\} = l\left\{-\frac{-1 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{3}\varepsilon^2 - \ldots}{+1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon^2 - \ldots}\right\};$$

alſo iſt

$$\text{li}.x = C + l\left\{-\frac{-1 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{3}\varepsilon^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^3 - \ldots.}{+1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^3 + \ldots.}\right\}$$
$$+ \frac{1}{1}.\frac{l(1-\varepsilon)}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(l(1-\varepsilon))^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(l(1-\varepsilon))^3}{1.2.3} + \ldots.$$
$$- \frac{1}{1}.\frac{l(1+\varepsilon)}{1} - \frac{1}{2}.\frac{(l(1+\varepsilon))^2}{1.2} - \frac{1}{3}.\frac{(l(1-\varepsilon))^3}{1.2.3} + \ldots.$$
$$+ l(+lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

und folglich, weil ε eine unendlich kleine poſitive Größe bezeichnet, offenbar für jedes x, welches > 1 iſt:

$$5.\quad \text{li}.x = C + l(+x) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.,$$

ſo daß alſo

$$6.\quad \text{li}.x = C + l(\mp lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots..$$

iſt, mit der Beſtimmung, daß man das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem reſpective das immer poſitive x kleiner oder größer als die Einheit iſt. Für $x = 1$ findet, wie man leicht überſehen wird, eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function li.x Statt. Noch deutlicher fällt dies in die Augen, wenn man ſich eine Curve verzeichnet, deren Abſciſſen und entſprechende rechtwinklige Ordinaten reſpective x und $\frac{1}{lx}$ ſind. Dieſe Curve wird ungefähr die in **Fig. 33.**, wo **A** der Anfang der Abſciſſen und **AB** $= 1$ iſt, dargeſtellte Geſtalt haben, und beſteht alſo jederzeit aus zwei von einander völlig abgeſonderten Theilen oder Zweigen, von denen der eine ganz unter=, der andere ganz oberhalb der Abſciſſenaxe liegt. Ueberlegt man nun, daß durch li.x das den Coordinaten x und $\frac{1}{lx}$ entſprechende Flächenſtück dieſer Curve dargeſtellt wird; ſo wird man ſich leicht von der Richtigkeit der oben gemachten Bemerkung überzeugen, und hieran auch noch andere geometriſche Betrachtungen, zu denen es hier an Raum fehlt, knüpfen können.

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{lx} = \text{Const.} + l(\pm lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo Const. eine beliebige Conſtante bezeichnet. In Bezug auf das doppelte Zeichen in dieſer Formel iſt, weil unſer Integral, da wir x immer poſitiv nehmen, ſeiner Natur nach eine reelle Größe iſt, klar, daß man jederzeit das untere oder obere Zeichen nehmen muß, jenachdem x kleiner oder größer als die Einheit iſt. Für $x < 1$ muß man alſo

$$\int \frac{\partial x}{lx} = C' + l(-lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

für $x > 1$ dagegen

$$\int \frac{\partial x}{lx} = C'' + l(+lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo C' und C'' zwei ganz willkührliche Conſtanten bezeichnen, ſetzen, woraus man ſieht, daß ſich die Werthe unſers Integrals für alle Werthe der Größe x von 0 bis ∞ nicht durch eine Formel darſtellen laſſen.

3. Bezeichnen wir nun den Werth der willkührlichen Conſtante C', welchen dieſelbe erhält, wenn man ſich das Integral in dem Falle, wo $x < 1$ iſt, ſo beſtimmt denkt, daß es für $x = 0$ verſchwindet, durch C; ſo iſt für jedes poſitive x, welches < 1 iſt,

4. $$li.x = C + l(-lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Für $x > 1$ läßt ſich, wenn e eine unendlich kleine poſitive Größe bezeichnet, li . x nach bekannten Sätzen von den beſtimmten Integralen auf folgende Art ausdrücken:

$$li.x = \int_0^x \frac{\partial x}{lx} = \int_0^{1-e} \frac{\partial x}{lx} + \int_{1+e}^x \frac{\partial x}{lx}$$
$$= li.(1-e) + \int_{1+e}^x \frac{\partial x}{lx}.$$

Weil nun nach dem Vorhergehenden

$$\int_{1+e}^x \frac{\partial x}{lx} = C'' + l(+lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \ldots$$
$$- C'' - l(+l(1+e)) - \frac{1}{1}.\frac{l(1+e)}{1} - \frac{1}{2}.\frac{(l(1+e))^2}{1.2} - \ldots$$

iſt; ſo iſt für $x > 1$

$$\mathrm{li}.x = C + l(-l(1-\varepsilon)) + \frac{1}{1}\cdot\frac{l(1-\varepsilon)}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(l(1-\varepsilon))^2}{1.2} + \ldots.$$

$$- l(+l(1+\varepsilon)) - \frac{1}{1}\cdot\frac{l(1+\varepsilon)}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(l(1+\varepsilon))^2}{1.2} - \ldots.$$

$$+ l(+lx) + \frac{1}{1}\cdot\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Es iſt aber

$$l(-(1-\varepsilon)) - l(+l(1+\varepsilon)) = l\left\{-\frac{l(1-\varepsilon)}{l(1+\varepsilon)}\right\}$$

$$= l\left\{-\frac{-\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon^2-\frac{1}{3}\varepsilon^3-\ldots}{+\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{1}{3}\varepsilon^3-\ldots}\right\} = l\left\{-\frac{-1-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{3}\varepsilon^2-\ldots}{+1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon^2-\ldots}\right\};$$

alſo iſt

$$\mathrm{li}.x = C + l\left\{-\frac{-1-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{3}\varepsilon^2-\frac{1}{4}\varepsilon^3-\ldots.}{+1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon^2-\frac{1}{4}\varepsilon^3+\ldots.}\right\}$$

$$+ \frac{1}{1}\cdot\frac{l(1-\varepsilon)}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(l(1-\varepsilon))^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(l(1-\varepsilon))^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$- \frac{1}{1}\cdot\frac{l(1+\varepsilon)}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(l(1+\varepsilon))^2}{1.2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{(l(1-\varepsilon))^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$+ l(+lx) + \frac{1}{1}\cdot\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

und folglich, weil ε eine unendlich kleine poſitive Größe bezeichnet, offenbar für jedes x, welches > 1 iſt:

5. $$\mathrm{li}.x = C + l(+x) + \frac{1}{1}\cdot\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

ſo daß alſo

6. $$\mathrm{li}.x = C + l(\mp lx) + \frac{1}{1}\cdot\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

iſt, mit der Beſtimmung, daß man das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem reſpective das immer poſitive x kleiner oder größer als die Einheit iſt. Für $x = 1$ findet, wie man leicht überſehen wird, eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function li.x Statt. Noch deutlicher fällt dies in die Augen, wenn man ſich eine Curve verzeichnet, deren Abſciſſen und entſprechende rechtwinklige Ordinaten reſpective x und $\frac{1}{lx}$ ſind. Dieſe Curve wird ungefähr die in **Fig. 33.**, wo **A** der Anfang der Abſciſſen und **AB** $= 1$ iſt, dargeſtellte Geſtalt haben, und beſteht alſo jederzeit aus zwei von einander völlig abgeſonderten Theilen oder Zweigen, von denen der eine ganz unter-, der andere ganz oberhalb der Abſciſſenaxe liegt. Ueberlegt man nun, daß durch li.x das den Coordinaten x und $\frac{1}{lx}$ entſprechende Flächenſtück dieſer Curve dargeſtellt wird; ſo wird man ſich leicht von der Richtigkeit der oben gemachten Bemerkung überzeugen, und hieran auch noch andere geometriſche Betrachtungen, zu denen es hier an Raum fehlt, knüpfen können.

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{lx} = \text{Const.} + l(\pm lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo Const. eine beliebige Conſtante bezeichnet. In Bezug auf das doppelte Zeichen in dieſer Formel iſt, weil unſer Integral, da wir x immer poſitiv nehmen, ſeiner Natur nach eine reelle Größe iſt, klar, daß man jederzeit das untere oder obere Zeichen nehmen muß, jenachdem x kleiner oder größer als die Einheit iſt. Für $x < 1$ muß man alſo

$$\int \frac{\partial x}{lx} = C' + l(-lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

für $x > 1$ dagegen

$$\int \frac{\partial x}{lx} = C'' + l(+lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo C' und C'' zwei ganz willkührliche Conſtanten bezeichnen, ſetzen, woraus man ſieht, daß ſich die Werthe unſers Integrals für alle Werthe der Größe x von 0 bis ∞ nicht durch eine Formel darſtellen laſſen.

3. Bezeichnen wir nun den Werth der willkührlichen Conſtante C', welchen dieſelbe erhält, wenn man ſich das Integral in dem Falle, wo $x < 1$ iſt, ſo beſtimmt denkt, daß es für $x = 0$ verſchwindet, durch C; ſo iſt für jedes poſitive x, welches < 1 iſt,

4. $$li.x = C + l(-lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Für $x > 1$ läßt ſich, wenn ε eine unendlich kleine poſitive Größe bezeichnet, li.x nach bekannten Sätzen von den beſtimmten Integralen auf folgende Art ausdrücken:

$$li.x = \int_0^x \frac{\partial x}{lx} = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\partial x}{lx} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{\partial x}{lx}$$

$$= li.(1-\varepsilon) + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{\partial x}{lx}.$$

Weil nun nach dem Vorhergehenden

$$\int_{1+\varepsilon}^x \frac{\partial x}{lx} = C'' + l(+lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \ldots$$

$$- C'' - l(+l(1+\varepsilon)) - \frac{1}{1}.\frac{l(1+\varepsilon)}{1} - \frac{1}{2}.\frac{(l(1+\varepsilon))^2}{1.2} - \ldots$$

iſt; ſo iſt für $x > 1$

$$\text{li}.x = C + l(-l(1-\varepsilon)) + \frac{1}{1}.\frac{l(1-\varepsilon)}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(l(1-\varepsilon))^2}{1.2} + \ldots.$$
$$- l(+l(1+\varepsilon)) - \frac{1}{1}.\frac{l(1+\varepsilon)}{1} - \frac{1}{2}.\frac{(l(1+\varepsilon))^2}{1.2} - \ldots.$$
$$+ l(+lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Es iſt aber

$$l(-(l-\varepsilon)) - l(+l(1+\varepsilon)) = l\left\{-\frac{l(1-\varepsilon)}{l(1+\varepsilon)}\right\}$$
$$= l\left\{-\frac{-\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{3}\varepsilon^3 - \ldots}{+\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^3 - \ldots}\right\} = l\left\{-\frac{-1 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{3}\varepsilon^2 - \ldots}{+1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon^2 - \ldots}\right\};$$

alſo iſt

$$\text{li}.x = C + l\left\{-\frac{-1 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{3}\varepsilon^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^3 - \ldots.}{+1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^3 + \ldots.}\right\}$$
$$+ \frac{1}{1}.\frac{l(1-\varepsilon)}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(l(1-\varepsilon))^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(l(1-\varepsilon))^3}{1.2.3} + \ldots.$$
$$- \frac{1}{1}.\frac{l(1+\varepsilon)}{1} - \frac{1}{2}.\frac{(l(1+\varepsilon))^2}{1.2} - \frac{1}{3}.\frac{(l(1-\varepsilon))^3}{1.2.3} + \ldots.$$
$$+ l(+lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

und folglich, weil ε eine unendlich kleine poſitive Größe bezeichnet, offenbar für jedes x, welches > 1 iſt:

5. $$\text{li}.x = C + l(+x) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.,$$

ſo daß alſo

6. $$\text{li}.x = C + l(\mp lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

iſt, mit der Beſtimmung, daß man das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem reſpective das immer poſitive x kleiner oder größer als die Einheit iſt. Für $x = 1$ findet, wie man leicht überſehen wird, eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function li.x Statt. Noch deutlicher fällt dies in die Augen, wenn man ſich eine Curve verzeichnet, deren Abſciſſen und entſprechende rechtwinklige Ordinaten reſpective x und $\frac{1}{lx}$ ſind. Dieſe Curve wird ungefähr die in **Fig. 33.**, wo **A** der Anfang der Abſciſſen und **AB** $= 1$ iſt, dargeſtellte Geſtalt haben, und beſteht alſo jederzeit aus zwei von einander völlig abgeſonderten Theilen oder Zweigen, von denen der eine ganz unter=, der andere ganz oberhalb der Abſciſſenaxe liegt. Ueberlegt man nun, daß durch li.x das den Coordinaten x und $\frac{1}{lx}$ entſprechende Flächenſtück dieſer Curve dargeſtellt wird; ſo wird man ſich leicht von der Richtigkeit der oben gemachten Bemerkung überzeugen, und hieran auch noch andere geometriſche Betrachtungen, zu denen es hier an Raum fehlt, knüpfen können.

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{lx} = \text{Const.} + l(\pm lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo Const. eine beliebige Conſtante bezeichnet. In Bezug auf das doppelte Zeichen in dieſer Formel iſt, weil unſer Integral, da wir x immer poſitiv nehmen, ſeiner Natur nach eine reelle Größe iſt, klar, daß man jederzeit das untere oder obere Zeichen nehmen muß, jenachdem x kleiner oder größer als die Einheit iſt. Für $x < 1$ muß man alſo

$$\int \frac{\partial x}{lx} = C' + l(-lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

für $x > 1$ dagegen

$$\int \frac{\partial x}{lx} = C'' + l(+lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo C′ und C″ zwei ganz willkührliche Conſtanten bezeichnen, ſetzen, woraus man ſieht, daß ſich die Werthe unſers Integrals für alle Werthe der Größe x von 0 bis ∞ nicht durch eine Formel darſtellen laſſen.

3. Bezeichnen wir nun den Werth der willkührlichen Conſtante C′, welchen dieſelbe erhält, wenn man ſich das Integral in dem Falle, wo $x < 1$ iſt, ſo beſtimmt denkt, daß es für $x = 0$ verſchwindet, durch C; ſo iſt für jedes poſitive x, welches < 1 iſt,

$$4.\quad li.x = C + l(-lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Für $x > 1$ läßt ſich, wenn ε eine unendlich kleine poſitive Größe bezeichnet, li.x nach bekannten Sätzen von den beſtimmten Integralen auf folgende Art ausdrücken:

$$li.x = \int_0^x \frac{\partial x}{lx} = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\partial x}{lx} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{\partial x}{lx}$$

$$= li.(1-\varepsilon) + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{\partial x}{lx}.$$

Weil nun nach dem Vorhergehenden

$$\int_{1+\varepsilon}^x \frac{\partial x}{lx} = C'' + l(+lx) + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \ldots.$$

$$- C'' - l(+l(1+\varepsilon)) - \frac{1}{1}.\frac{l(1+\varepsilon)}{1} - \frac{1}{2}.\frac{(l(1+\varepsilon))^2}{1.2} - \ldots$$

iſt; ſo iſt für $x > 1$

$$\mathrm{li}.x = C + \mathrm{l}(-\mathrm{l}(1-\varepsilon)) + \frac{1}{1}.\frac{\mathrm{l}(1-\varepsilon)}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(\mathrm{l}(1-\varepsilon))^2}{1.2} + \ldots.$$
$$- \mathrm{l}(+\mathrm{l}(1+\varepsilon)) - \frac{1}{1}.\frac{\mathrm{l}(1+\varepsilon)}{1} - \frac{1}{2}.\frac{(\mathrm{l}(1+\varepsilon))^2}{1.2} - \ldots.$$
$$+ \mathrm{l}(+\mathrm{l}x) + \frac{1}{1}.\frac{\mathrm{l}x}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(\mathrm{l}x)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(\mathrm{l}x)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Es iſt aber

$$\mathrm{l}(-(\mathrm{l}-\varepsilon)) - \mathrm{l}(+\mathrm{l}(1+\varepsilon)) = \mathrm{l}\left\{-\frac{\mathrm{l}(1-\varepsilon)}{\mathrm{l}(1+\varepsilon)}\right\}$$
$$= \mathrm{l}\left\{-\frac{-\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon^2-\frac{1}{3}\varepsilon^3-\ldots}{+\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{1}{3}\varepsilon^3-\ldots}\right\} = \mathrm{l}\left\{-\frac{-1-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{3}\varepsilon^2-\ldots}{+1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon^2-\ldots}\right\};$$

alſo iſt

$$\mathrm{li}.x = C + \mathrm{l}\left\{-\frac{-1-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{3}\varepsilon^2-\frac{1}{4}\varepsilon^3-\ldots.}{+1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon^2-\frac{1}{4}\varepsilon^3+\ldots.}\right\}$$
$$+ \frac{1}{1}.\frac{\mathrm{l}(1-\varepsilon)}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(\mathrm{l}(1-\varepsilon))^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(\mathrm{l}(1-\varepsilon))^3}{1.2.3} + \ldots.$$
$$- \frac{1}{1}.\frac{\mathrm{l}(1+\varepsilon)}{1} - \frac{1}{2}.\frac{(\mathrm{l}(1+\varepsilon))^2}{1.2} - \frac{1}{3}.\frac{(\mathrm{l}(1-\varepsilon))^3}{1.2.3} + \ldots.$$
$$+ \mathrm{l}(+\mathrm{l}x) + \frac{1}{1}.\frac{\mathrm{l}x}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(\mathrm{l}x)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(\mathrm{l}x)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

und folglich, weil ε eine unendlich kleine poſitive Größe bezeichnet, offenbar für jedes x, welches > 1 iſt:

$$5.\quad \mathrm{li}.x = C + \mathrm{l}(+x) + \frac{1}{1}.\frac{\mathrm{l}x}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(\mathrm{l}x)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(\mathrm{l}x)^3}{1.2.3} + \ldots.,$$

ſo daß alſo

$$6.\quad \mathrm{li}.x = C + \mathrm{l}(\mp \mathrm{l}x) + \frac{1}{1}.\frac{\mathrm{l}x}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(\mathrm{l}x)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(\mathrm{l}x)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

iſt, mit der Beſtimmung, daß man das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem reſpective das immer poſitive x kleiner oder größer als die Einheit iſt. Für $x = 1$ findet, wie man leicht überſehen wird, eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function li.x Statt. Noch deutlicher fällt dies in die Augen, wenn man ſich eine Curve verzeichnet, deren Abſciſſen und entſprechende rechtwinklige Ordinaten reſpective x und $\frac{1}{\mathrm{l}x}$ ſind. Dieſe Curve wird ungefähr die in **Fig. 33.**, wo **A** der Anfang der Abſciſſen und **AB** $= 1$ iſt, dargeſtellte Geſtalt haben, und beſteht alſo jederzeit aus zwei von einander völlig abgeſonderten Theilen oder Zweigen, von denen der eine ganz unter=, der andere ganz oberhalb der Abſciſſenaxe liegt. Ueberlegt man nun, daß durch li.x das den Coordinaten x und $\frac{1}{\mathrm{l}x}$ entſprechende Flächenſtück dieſer Curve dargeſtellt wird; ſo wird man ſich leicht von der Richtigkeit der oben gemachten Bemerkung überzeugen, und hieran auch noch andere geometriſche Betrachtungen, zu denen es hier an Raum fehlt, knüpfen können.

oder

$$2ab\sin\varphi - 2\alpha\beta\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0$$

ergiebt ſich

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{ab\sin\varphi}{\alpha\beta\sin\psi}.$$

Weil $\varphi + \psi = 180^\circ$ iſt, ſo iſt $\cos\varphi = -\cos\psi$, $\sin\varphi = \sin\psi$; alſo

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = -1,\ \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = 1,$$

ſo daß ſich folglich aus den beiden obigen Ausdrücken für $\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{ab}{\alpha\beta}$$

ergiebt. Nach dem Obigen iſt nun

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial\psi}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\right)\cdot\frac{\partial\psi^2}{\partial\varphi^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right) + 2\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi\partial\psi}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial\psi^2}\right)\cdot\frac{\partial\psi^2}{\partial\varphi^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial\psi}\right)\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = 0,$$

d. i.

$$ab\sin\varphi + \frac{a^2b^2}{\alpha\beta}\sin\psi + 2\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} - \alpha\beta\cos\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = 0,$$

$$2ab\cos\varphi - 2\frac{a^2b^2}{\alpha\beta}\cos\psi - 2\alpha\beta\sin\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Eliminirt man aus dieſen beiden Gleichungen $\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$, ſo ergiebt ſich:

$$-2ab\cos(\varphi+\psi) + \frac{2a^2b^2}{\alpha\beta} + 4\sin\psi\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} = 0,$$

d. i., weil $\cos(\varphi+\psi) = -1$ iſt:

$$ab + \frac{a^2b^2}{\alpha\beta} + 2\sin\psi\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} = -\frac{ab(ab+\alpha\beta)}{2\alpha\beta\sin\psi} = -\frac{ab(ab+\alpha\beta)}{2\alpha\beta\sin\varphi}.$$

Weil nun $\varphi + \psi = 180^\circ$, $\varphi < 180^\circ$ iſt, ſo iſt $\sin\varphi$ poſitiv, alſo $\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}$ negativ. Daher iſt der Flächeninhalt des mit den Seiten a, b, α, β beſchriebenen Vierecks für $\varphi + \psi = 180^\circ$ ein Maximum. Alſo läßt ſich um das größte mit den Seiten a, b, α, β beſchriebene Viereck jederzeit ein Kreis beſchreiben. Der Winkel φ ſelbſt kann nun auf folgende Art beſtimmt werden. Weil $\cos\varphi = -\cos\psi$ iſt; ſo giebt die Gleichung

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\psi$$

auf der Stelle

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2}{2(ab + \alpha\beta)}.$$

Alſo iſt

$$1 + \cos\varphi = \frac{(a+b)^2 - (\alpha-\beta)^2}{2(ab+\alpha\beta)},$$

woraus leicht

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+\alpha-\beta)(a+b-\alpha+\beta)}{ab+\alpha\beta}}.$$

Eben ſo iſt

$$1 - \cos\varphi = \frac{(\alpha+\beta)^2 - (a-b)^2}{2(ab+\alpha\beta)},$$

und folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(\alpha+\beta+a-b)(\alpha+\beta-a+b)}{ab+\alpha\beta}}.$$

Auch iſt

$$\tang\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{(\alpha+\beta+a-b)(\alpha+\beta-a+b)}{(a+b+\alpha-\beta)(a+b-\alpha+\beta)}}.$$

Hat man den Winkel φ gefunden, ſo findet man, weil $\sin\varphi = \sin\psi$ iſt, den Flächeninhalt y des größten Vierecks leicht aus der Formel

$$2y = (ab+\alpha\beta)\sin\varphi.$$

Es iſt auch nach dem Obigen

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{(a+b+\alpha-\beta)(a+b-\alpha+\beta)(\alpha+\beta+a-b)(\alpha+\beta-a+b)}}{2(ab+\alpha\beta)}.$$

Alſo iſt

$$y = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+\alpha-\beta)(a+b-\alpha+\beta)(\alpha+\beta+a-b)(\alpha+\beta-a+b)}.$$

H.

Harmonikalen. Die Erklärung und einige Haupteigenſchaften ſolcher Linien finden ſich ſchon im Artikel Theilung (13.) im fünften Bande, auf den daher hier zu verweiſen erlaubt ſeyn und nur noch bemerkt werden mag, daß der Ausdruck Harmonikalen, ſtatt deſſen Brianchon in ſeinem Mémoire sur les lignes du second ordre. Paris. 1817. ſich der Benennung faisceau harmonique bedient, zuerſt von Lahire in ſeinem Traité des sections coniques. p. 5. gebraucht worden iſt. Viele Eigenſchaften der Harmonikalen findet man in den beiden folgenden trefflichen Werken: Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, v. J. Steiner. T. I. Berlin. 1832. S. 18. und Traité des propriétés projectives des figures par J. V. Poncelet. Paris. 1822. Auch ſ. m. Poncelets Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques in Crelles Journal B. III. S. 213.

Harriots Lehrſatz, ſ. Gleichung (32.) i. d. Z.

Hippokrates, ſ. Lunula.

Hyperbel. Mehrere merkwürdige Eigenſchaften der Hyperbel ſ. m. im Art. Elliptiſche Functionen. XII. i. d. Z.

Hyperboliſche Spirale, ſ. Spirale (72.).

Hyperboloid mit einem Fache oder mit einem Mantel (hyperboloide à une nappe) heißt jede krumme Fläche der zweiten Ordnung, deren Gleichung zwiſchen rechtwinkligen Coordinaten von der Form

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$$

iſt, oder auf dieſe Form gebracht werden kann.

Legt man durch die Axe der z eine beliebige gegen die Ebene der xz unter dem Winkel α geneigte Ebene, und bezeichnet, indem man die Durchſchnittslinie derſelben mit der Ebene der xy als Axe der X annimmt, die Coordinaten der Curve, in welcher das Hyperboloid von der in Rede ſtehenden Ebene geſchnitten wird, durch X, Y; ſo muß man, um die Gleichung dieſer Curve zu finden, in der Gleichung des Hyperboloids für x, y, z offenbar reſpective $X\cos\alpha$, $X\sin\alpha$, Y ſetzen. Dadurch erhält man als Gleichung der in Rede ſtehenden Curve

$$\frac{a^2\sin\alpha^2 + b^2\cos\alpha^2}{a^2 b^2} X^2 - \frac{Y^2}{c^2} = 1$$

und ſieht alſo, daß dieſelbe jederzeit eine Hyperbel iſt, deren zweite Axe mit der Axe der Y, d. i. hier mit der Axe der z, zuſammenfällt.

Denkt man ſich ferner in der Entfernung γ von der Ebene der xy eine dieſer Ebene parallele Ebene; ſo iſt die Gleichung der Curve, in welcher das Hyperboloid von dieſer Ebene geſchnitten wird, offenbar

$$\frac{\gamma^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\gamma^2 + c^2}{c^2}$$

und folglich augenſcheinlich jederzeit eine Ellipſe.

Man ſieht alſo, daß

1. jeder Schnitt mit einer durch die Axe der z gelegten Ebene eine Hyperbel iſt, deren zweite Axe mit der Axe der z zuſammenfällt, und daß
2. jeder Schnitt mit einer der Ebene der xy parallelen Ebene eine Ellipſe iſt,

und wird ſich nun leicht einen Begriff von der Geſtalt des ſogenannten einfächrigen Hyperboloids machen können, welches zum

Unterſchiede von dem zweifächrigen Hyperboloid, das wir im folgenden Artikel näher betrachten werden, ſeinen Namen deshalb erhalten hat, weil es die Axe der z rings herum ohne alle Unterbrechung frei umgiebt, wobei zugleich auch aus dem Vorhergehenden klar iſt, daß dieſes Hyperboloid rings um die Axe der z herum hohl, d. i. eigentlich gegen die Axe der z convex iſt.

Will man die Gleichungen von Curven finden, in denen das Hyperboloid von Ebenen geſchnitten wird, die in den Entfernungen α und β von den Ebenen der yz und xz dieſen Ebenen parallel ſind; ſo muß man in der Gleichung des Hyperboloids offenbar reſpective $x=\alpha$ und $y=\beta$ ſetzen, wodurch man die Gleichungen

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{\alpha^2}{a^2}+1=0,\quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}+1=0$$

erhält, und hat nun die drei folgenden Fälle zu unterſcheiden.

I. Wenn $a^2-\alpha^2>0$, $b^2-\beta^2>0$ iſt; ſo ſind die beiden Curven offenbar Hyperbeln, deren zweite Axen der Axe der z parallel ſind, wie augenblicklich erhellet, wenn man die beiden vorhergehenden Gleichungen unter der Form

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{a^2-\alpha^2}{a^2},\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{b^2-\beta^2}{b^2}$$

darſtellt.

II. Iſt dagegen $a^2-\alpha^2<0$, $b^2-\beta^2<0$; ſo ſind die beiden Curven Hyperbeln, deren zweite Axen reſpective den Axen der y und x parallel ſind, wie ſogleich erhellet, wenn man die beiden Gleichungen unter der Form

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{\alpha^2-a^2}{c^2},\quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{\beta^2-b^3}{b^2}$$

darſtellt.

III. Iſt $a^2-\alpha^2=0$, $b^2-\beta^2=0$; ſo werden die beiden Gleichungen

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,\quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=0$$

oder

$$b^2z^2-c^2y^2=0,\quad a^2z^2-c^2x^2=0,$$

und jede ſtellt alſo, wie leicht erhellen wird, ein Syſtem zweier reſpective durch die Axe der x und y gehenden geraden Linie dar.

Für die ſogenannten Hauptſchnitte, d. h. die Curven, in denen das Hyperboloid von den Ebenen der yz, xz, xy geſchnitten wird, erhält man leicht die Gleichungen

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

und ſieht alſo, daß die beiden erſten jederzeit Hyperbeln ſind, der

letzte jederzeit ein Ellipſe iſt; auch iſt klar, das die zweiten Axen der beiden in Rede ſtehenden Hyperbeln immer mit der Axe der z zuſammen fallen.

Hyperboloid mit zwei Fächern oder mit zwei Mänteln (hyperboloide à deux nappes) heißt jede krumme Fläche der zweiten Ordnung, deren Gleichung zwiſchen rechtwinkligen Coordinaten von der Form

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$$

iſt, oder wenigſtens auf dieſe Form gebracht werden kann.

Sucht man wieder auf ganz ähnliche Art wie im vorigen Artikel die Gleichung des Durchſchnitts einer beliebigen durch die Axe der z gelegten Ebene mit dem Hyperboloid; ſo erhält man

$$\frac{Y^2}{c^2} - \frac{a^2 \sin\alpha^2 + b^2 \cos\alpha^2}{a^2 b^2} X^2 = 1,$$

und ſieht alſo, daß jeder ſolcher Schnitt eine Hyperbel iſt, deren Hauptaxe mit der Axe der Y, d. i. hier mit der Axe der z, zuſammenfällt, oder deren Nebenaxe in der Ebene der xy liegt.

Um ferner die Gleichung des Durchſchnitts einer in der Entfernung γ von der Ebene der xy dieſer Ebene parallel gelegten Ebene mit dem Hyperboloid zu finden, muß man in der Gleichung desſelben offenbar $z = \gamma$ ſetzen, wodurch man für dieſen Durchſchnitt die Gleichung

$$\frac{\gamma^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\gamma^2 - c^2}{c^2}$$

erhält. Hieraus ſieht man, daß die in Rede ſtehenden Schnitte nur dann reell ſind, wenn $\gamma^2 - c^2 > 0$ iſt; iſt aber dieſe Bedingung erfüllt, ſo ſind die Schnitte jederzeit Ellipſen.

Das Hyperboloid mit zwei Fächern iſt alſo offenbar eine aus zwei von einander abgeſonderten Theilen beſtehende krumme Fläche, deren einer über, der andere unter der Ebene der xy iſt, und hat aus dieſem Grunde auch ſeinen Namen erhalten. Zugleich iſt klar, daß die beiden Theile des zweifächrigen Hyperboloids gegen die Ebene der xy jederzeit convex ſind.

Für die Curven, in denen das zweifächrige Hyperboloid von Ebenen geſchnitten wird, welche in den Entfernungen α und β von den Ebenen der yz und xz dieſen Ebenen parallel gelegt ſind, erhält man leicht

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 + \alpha^2}{a^2}, \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{b^2 + \beta^2}{b^2},$$

und ſieht alſo, daß dieſe Schnitte jederzeit Hyperbeln ſind, deren Hauptaxen der Axe der z parallel ſind.

Für die Hauptſchnitte ergeben ſich folgende Gleichungen

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1;$$

die beiden erſten ſind alſo jederzeit Hyperbeln, der letzte iſt jederzeit imaginär.

Hyper-elliptiſche Functionen, ſ. Elliptiſche Functionen (59.) i. d. Z.

Hyper-Logarithmus, ſ. Integrallogarithmus i. d. Z.

Hypocykloide, ſ. Epicykloide.

J.

Integralrechnung. Als ein ſehr zeitgemäßes literariſches Unternehmen iſt die Ueberſetzung zu nennen, welche J. Salomon von Eulers Integralrechnung in vier Bänden zu Wien 1828—1830 herausgegeben hat, ein Unternehmen, das um ſo verdienſtlicher iſt und den Dank der Mathematiker verdient, weil das Original des in Rede ſtehenden wichtigen Werkes nur ſchwierig zu erhalten iſt.

Integralformel. Dieſer wichtige Artikel hat ſchon durch die ſehr ausführlichen Artikel Beſtimmtes Integral, wo auch von (27.) bis (42.) von den vorzugsweiſe nach Euler benannten Integralen weitläufig die Rede geweſen iſt, und Elliptiſche Functionen eine große Vervollſtändigung erhalten. Außerdem ſind in dem Artikel Function. I. die vorzüglichſten neuern Methoden zu der für die Integration der rationalen algebraiſchen Functionen ſo überaus wichtigen Zerlegung der gebrochenen rationalen algebraiſchen Functionen in einfache Brüche nachgetragen worden, und in einem beſondern Artikel wird auch noch von dem ſogenannten Integrallogarithmus ausführlich gehandelt werden, ſo wie auch die Integration durch Annäherung, über welche übrigens vorzüglich der Artikel Quadratur (122.) zu vergleichen iſt, in einem beſondern Artikel noch einige Zuſätze erhalten wird. Wir müſſen uns daher hier damit begnügen, aus den vielen hierher gehörenden Arbeiten der neuern Mathematiker Einiges mitzutheilen, was uns von vorzüglicher Wichtigkeit und von beſonderm Intereſſe zu ſeyn ſcheint.

1. Laſſen wir x und y zwei durch eine beliebige algebraiſche Gleichung mit einander verbundene veränderliche Größen bezeichnen, ſo daß alſo ſowohl y als Function von x, als auch x als Function von y betrachtet werden kann; ſo iſt, wenn **X** eine

beliebige Function von x bezeichnet, für die jedoch nachher immer eine ganze rationale algebraiſche Function von x geſetzt werden wird, und wir jetzt y als Function von x betrachten, bekanntlich

$$\int X\partial y + \int y\,\partial X = Xy + C.$$

So lange bekannt dieſe Gleichung auch iſt; ſo hat doch ganz neuerlich der berühmte Poiſſon in einer ſchönen in Crelles Journal. B. XII. S. 89. abgedruckten Abhandlung: **Théorèmes relatifs aux intégrales des fonctions algébriqués**, gezeigt, daß ſich aus derſelben durch höchſt einfache Betrachtungen noch manche bisher unbekannte wichtigen Folgerungen ziehen laſſen, worüber wir daher jetzt Einiges beibringen wollen.

Zuerſt wollen wir annehmen, daß x und y durch die algebraiſche Gleichung

$$ax^n + bx^{n-1} + \ldots + kx + l = (a'x^n + b'x^{n-1} + \ldots k'x + l')y,$$

wo alſo natürlich n eine poſitive ganze Zahl bezeichnet, mit einander verbunden ſeyen, und wollen der Kürze wegen

$$\frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots + kx + l}{a'x^n + b'x^{n-1} + \ldots + k'x + l'} = f(x)$$

und

$$\int f(x)\,\partial X = F(x)$$

ſetzen, wo, wenn namentlich X, wie wir nach einer ſchon vorher gemachten Bemerkung hier immer vorausſetzen, eine ganze rationale algebraiſche Function von x iſt, F(x) eine Function iſt, die ſich nach bekannten Regeln der Integralrechnung jederzeit finden läßt. Beſtimmen wir nun aus der zwiſchen x und y gegebenen Gleichung x durch y; ſo erhalten wir für x im Allgemeinen n Werthe, die als Functionen von y durch

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots\ y_n$$

bezeichnet werden ſollen. Die dieſen Werthen von x entſprechenden Werthe von X, welche natürlich auch Functionen von y ſind, ſollen durch

$$Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ Y_4,\ \ldots\ Y_n$$

bezeichnet werden. Weil nun

$$\int X\partial y + \int y\partial X = Xy + C$$

und

$$\int y\partial X = \int f(x)\,\partial X = F(x),$$

alſo

$$\int X\partial y = Xy - F(x) + C$$

iſt; ſo iſt offenbar, wenn i eine beliebige der Zahlen 1, 2, 3, 4, ... n bezeichnet, allgemein

$$\int Y_i \partial y = yY_i - F(y_i) + C,$$

und hierdurch folglich $\int Y_i \partial y$ gefunden, ſo daß man alſo, wenn ſich nur F(x) finden läßt, hierdurch ſehr viele neue Integrale finden kann.

Wenn f(x) eine ganze Function von x, d. h. wenn der Coefficient von y in der zwiſchen x und y gegebenen Gleichung eine conſtante Größe iſt; ſo iſt offenbar auch

$$F(x) = \int f(x) \partial X$$

eine ganze rationale algebraiſche Function von x, und folglich die Größe

$$yY_i - F(y_i),$$

welche wir durch P_i bezeichnen wollen, eine ganze rationale algebraiſche Function von y_i. Setzt man alſo das Product

$$(u - P_1)(u - P_2)(u - P_3) \ldots (u - P_n)$$

der Null gleich; ſo erhält man eine Gleichung des nten Grades

$$u^n + Au^{n-1} + Bu^{n-2} + \ldots + Ku + L = 0,$$

deren Coefficienten A, B, C, ... K, L offenbar ſymmetriſche Functionen der Größen

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n,$$

d. i. der Wurzeln der Gleichung

$$ax^n + bx^{n-1} + \ldots + kx + l - l'y = 0$$

ſind, und ſich folglich, wie in der Theorie der Gleichungen ausführlich gezeigt wird (Gleichung. III. i. d. Z.), durch die Coefficienten dieſer Gleichung ausdrücken laſſen, ohne die Wurzeln derſelben ſelbſt zu kennen. Hieraus ſieht man alſo, daß in dieſem Falle die n Werthe der Größe

$$P_i = \int Y_i \partial y - C,$$

welche dieſelbe für $i = 1, 2, 3, \ldots n$ erhält, jederzeit als die Wurzeln einer Gleichung des nten Grades betrachtet werden können, welche ſich aus der Gleichung

$$ax^n + bx^{n-1} + \ldots + kx + l - l'y = 0$$

leicht ableiten läßt.

2. Poiſſon betrachtet die Gleichung

$$ax^2 + bx + c = (a'x^2 + b'x + c')y$$

oder

$$(a-a'y)x^2 + (b-b'y)x + c - c' = 0$$

als Beiſpiel. Die beiden Wurzeln dieſer quadratiſchen Gleichung ſind, wenn man der Kürze wegen

$$v = \sqrt{(b'y-b)^2 - 4(a'y-a)(c'y-c)}$$

ſetzt,

$$y_1 = \frac{b'y-b+v}{2(a-a'y)},\ y_2 = \frac{b'y-b-v}{2(a-a'y)}.$$

Setzt man nun die Function $X = x$; ſo iſt

$$F(x) = \int \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}\partial x.$$

Sind α und β die beiden Wurzeln der Gleichung

$$a'x^2 + b'x + c' = 0$$

und folglich

$$a'x^2 + b'x + c' = a'(x-\alpha)(x-\beta);$$

ſo iſt, wie man leicht findet,

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} = \frac{a}{a'} + \frac{(a'b-ab')x + a'c - ac'}{a'^2(x-\alpha)(x-\beta)};$$

alſo, wenn α und β ungleich ſind,

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} = \frac{a}{a'} + \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

Beſtimmt man nun A und B auf gewöhnliche Weiſe; ſo erhält man

$$A = \frac{(a'b-ab')\alpha + a'c - ac'}{(\alpha-\beta)a'^2},$$

$$B = \frac{(a'b-ab')\beta + a'c - ac'}{(\beta-\alpha)a'^2}.$$

Durch Integration ergiebt ſich aber auf der Stelle

$$F(x) = \int \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}\partial x = \frac{ax}{a'} + A\,l(x-\alpha) + B\,l(x-\beta).$$

Folglich iſt nach (1.), da hier $X = x$ iſt,

$$\int y_i \partial y = (a'y-a)\frac{y_i}{a'} - A\,l(y_i-\alpha) - B\,l(y_i-\beta) + C.$$

Setzt man nun y_1 und y_2 für y_i; ſo ergiebt ſich

$$\int \frac{b'y-b+v}{2(a-a'y)}\partial y$$

$$= -\frac{b'y-b+v}{2a'} - A\,l(y_1-\alpha) - B\,l(y_1-\beta) + \text{Const.},$$

$$\int \frac{b'y-b-v}{2(a-a'y)}\partial y$$

$$= -\frac{b'y-b-v}{2a'} - A\,l(y_2-\alpha) - B\,l(y_2-\beta) + \text{Const.},$$

und, wenn man dieſe Gleichungen zu einander addirt und von einander ſubtrahirt,

$$\int\frac{b'y-b}{a-a'y}\partial y=\frac{b-b'y}{a'}-A\,l\{(y_1-\alpha)(y_2-\alpha)\}$$
$$-B\,l\{(y_1-\beta)(y_2-\beta)\}+\text{Const.},$$

$$\int\frac{v\partial y}{a'y-a}=\frac{v}{a'}+A\,l\frac{y_1-\alpha}{y_2-\alpha}+B\,l\frac{y_1-\beta}{y_2-\beta}+\text{Const.}$$

Die zweite dieſer Formeln liefert, weil v irrational iſt, das Integral einer ziemlich complicirten irrationalen Differentialformel und ſoll daher vorzüglich nun noch weiter entwickelt werden. Die erſte Formel wollen wir bloß deshalb noch weiter entwickeln, um ihre Uebereinſtimmung mit andern bekannten Formeln der Integralrechnung zu zeigen. Nach dem Vorhergehenden iſt nämlich

$$a'x^2+b'x+c'=a'(x-\alpha)(x-\beta),$$
$$(a-a'y)x^2+(b-b'y)x+c-c'=(a-a'y)(x-y_1)(x-y_2).$$

Setzt man nun in dieſen beiden Gleichungen $x=\alpha$ und $x=\beta$; ſo ergiebt ſich

$$a'\alpha^2+b'\alpha+c'=0,\quad a'\beta^2+b'\beta+c'=0;$$
$$(a-a'y)\alpha^2+(b-b'y)\alpha+c-c'=(a-a'y)(\alpha-y_1)(\alpha-y_2),$$
$$(a-a'y)\beta^2+(b-b'y)\beta+c-c'=(a-a'y)(\beta-y_1)(\beta-y_2);$$

folglich iſt offenbar

$$(y_1-\alpha)(y_2-\alpha)=\frac{a\alpha^2+b\alpha+c}{a-a'y},\quad(y_1-\beta)(y_2-\beta)=\frac{a\beta^2+b\beta+c}{a-a'y}.$$

Man erhält alſo

$$\int\frac{b'y-b}{a-a'y}\partial y$$
$$=\frac{b-b'y}{a'}-A\,l\frac{a\alpha^2+b\alpha+c}{a-a'y}-B\,l\frac{a\beta^2+b\beta+c}{a-a'y}+\text{Const.}$$
$$=\frac{b-b'y}{a'}-A\,l(a\alpha^2+b\alpha+c)-B\,l(a\beta^2+b\beta+c)$$
$$+(A+B)\,l(a-a'y)+\text{Const.},$$

oder, weil

$$A+B=\frac{a'b-ab'}{a'^2}$$

und die Größe

$$\frac{b}{a'}-A\,l(a\alpha^2+b\alpha+c)-B\,l(a\beta^2+b\beta+c)$$

ſelbſt eine Conſtante iſt,

$$\int\frac{b'y-b}{a-a'y}\partial y=-\frac{b'y}{a'}+\frac{a'b-ab'}{a'^2}l(a-a'y)+\text{Const.}$$

Aber

$$\frac{b'y-b}{a-a'y}=-\frac{b'}{a'}+\frac{ab'-a'b}{(a-a'y)a'},$$

$$\int\frac{b'y-b}{a-a'y}\partial y=-\frac{b'y}{a'}+\frac{ab'-a'b}{a'}\int\frac{\partial y}{a-a'y}.$$

Alſo

$$\frac{ab'-a'b}{a'}\int\frac{\partial y}{a-a'y}=\frac{a'b-ab'}{a'^2}l(a-a'y)+\text{Const.}$$

oder

$$\int\frac{\partial y}{a-a'y}=-\frac{1}{a'}l(a-a'y)+\text{Const.},$$

welches in der That ein ſehr bekanntes Integral iſt.

Was nun ferner die zweite der beiden obigen Formeln betrifft; ſo bemerke man zuerſt die beiden folgenden leicht zu rechtfertigenden Gleichungen:

$$A=\frac{a'b-ab'}{2a'^2}+\frac{(a'b-ab')(\alpha+\beta)+2a'c-2ac'}{2(\alpha-\beta)a'^2},$$

$$B=\frac{a'b-ab'}{2a'^2}-\frac{(a'b-ab')(\alpha+\beta)+2a'c-2ac'}{2(\alpha-\beta)a'^2}.$$

Alſo iſt

$$Al\frac{y_1-\alpha}{y_2-\alpha}+Bl\frac{y_1-\beta}{y_2-\beta}$$

$$=\frac{a'b-ab'}{2a'^2}l\frac{(y_1-\alpha)(y_1-\beta)}{(y_2-\alpha)(y_2-\beta)}+\frac{(a'b-ab')(\alpha+\beta)+2a'c-2ac'}{2(\alpha-\beta)a'^2}l\frac{(y_1-\alpha)(y_2-\beta)}{(y_2-\alpha)(y_1-\beta)}$$

oder, weil nach der Theorie der Gleichungen

$$\alpha+\beta=-\frac{b'}{a'}$$

iſt,

$$Al\frac{y_1-\alpha}{y_2-\alpha}+Bl\frac{y_1-\beta}{y_2-b}$$

$$=\frac{a'b-ab'}{2a'^2}l\frac{(y_1-\alpha)(y_1-\beta)}{(y_2-\alpha)(y_2-\beta)}+\frac{2a'^2c+ab'^2-2aa'c'-a'bb'}{2(\alpha-\beta)a'^3}l\frac{(y_1-\alpha)(y_2-\beta)}{(y_2-\alpha)(y_1-\beta)}.$$

Setzt man nun

$$(y_1-\alpha)(y_1-\beta)=y_1y_1-(\alpha+\beta)y_1+\alpha\beta,$$
$$(y_2-\alpha)(y_2-\beta)=y_2y_2-(\alpha+\beta)y_2+\alpha\beta,$$
$$(y_1-\alpha)(y_2-\beta)=y_1y_2-\beta y_1-\alpha y_2+\alpha\beta,$$
$$(y_2-\alpha)(y_1-\beta)=y_1y_2-\alpha y_1-\beta y_2+\alpha\beta,$$

und bemerkt, daß nach der Theorie der Gleichungen

$$\alpha+\beta=-\frac{b'}{a'},\ \alpha\beta=\frac{c'}{a};$$

$$\alpha=-\frac{b'}{2a'}+\frac{\alpha-\beta}{2},\ \beta=-\frac{b'}{2a'}-\frac{\alpha-\beta}{2}$$

iſt; ſo findet nach gehöriger Entwickelung

$$\int \frac{v\partial y}{a'y - a}$$

$$= \frac{v}{a'} + \frac{a'b - ab'}{2a'^2} l \frac{(ab' - a'b + a'v)(b'y - b) - (2ac' - 2a'c + b'v)(a'y - a)}{(ab' - a'b - a'v)(b'y - b) - (2ac' - 2a'c - b'v)(a'y - a)}$$

$$+ \frac{2a'^2c + ab'^2 - 2aa'c' - a'bb'}{2(\alpha - \beta)a'^3} l \frac{(4a'c' - b'^2)y - 2a'c - 2ac' + bb' - (\alpha - \beta)a'v}{(4a'c' - b'^2)y - 2a'c - 2ac' + bb' + (\alpha - \beta)a'v},$$

wo noch die gewöhnliche willkührliche Conſtante beizufügen iſt.

Wir wollen nun noch den Fall beſonders betrachten, wenn $\alpha = \beta$, d. i. wenn

$$a'x^2 + b'x + c' = a'(x - \alpha)^2$$

iſt. In dieſem Falle iſt, wenn wir jetzt

$$\frac{a'b - ab'}{a'^2} = A, \quad \frac{a'c - ac'}{a'^2} = B$$

ſetzen,

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = \frac{a}{a'} + \frac{Ax + B}{(x - \alpha)^2},$$

und folglich

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \partial x = F(x) = \frac{ax}{a'} + \int \frac{Ax + B}{(x - \alpha)^2} \partial x.$$

Aber

$$\int \frac{Ax + B}{(x - \alpha)^2} \partial x = \int \frac{A(x - \alpha) + A\alpha + B}{(x - \alpha)^2} \partial x$$

$$= A \int \frac{\partial x}{x - \alpha} + (A\alpha + B) \int \frac{\partial x}{(x - \alpha)^2}$$

$$= Al(x - \alpha) + (A\alpha + B) \int \frac{\partial z}{z^2},$$

wenn wir $x - \alpha = z$ ſetzen. Alſo iſt

$$\int \frac{Ax + B}{(x - \alpha)^2} \partial x = Al(x - \alpha) - \frac{A\alpha + B}{x - \alpha}$$

und folglich

$$F(x) = \frac{ax}{a'} - \frac{A\alpha + B}{x - \alpha} + Al(x - \alpha).$$

Alſo iſt nach (1.), wenn wir wieder $X = x$ ſetzen,

$$\int y_i \partial y = yy_i - \frac{ay_i}{a'} + \frac{A\alpha + B}{y_i - \alpha} - Al(y_i - \alpha) + C$$

$$= (a'y - a)\frac{y_i}{a'} - \frac{A\alpha + B}{y_i - \alpha} - Al(y_i - \alpha) + C.$$

Setzen wir nun

$$y_1 = \frac{b'y - b + v}{2(a - a'y)} \text{ und } y_2 = \frac{b'y - b - v}{2(a - a'y)}$$

für y_1; ſo erhalten wir

$$\int \frac{b'y - b + v}{2(a - a'y)} \partial y$$

$$= - \frac{b'y - b + v}{2a'} + \frac{A\alpha + B}{y_1 - \alpha} - A\,l(y_1 - \alpha) + \text{Const.},$$

$$\int \frac{b'y - b - v}{2(a - a'y)} \partial y$$

$$= - \frac{b'y - b - v}{2a'} + \frac{A\alpha + B}{y_2 - \alpha} - A\,l(y_2 - \alpha) + \text{Const.},$$

woraus mittelſt Addition und Subtraction ferner

$$\int \frac{b'y - b}{a - a'y} \partial y = \frac{b - b'y}{a'} + (A\alpha + B)\left\{\frac{1}{y_1 - \alpha} + \frac{1}{y_2 - \alpha}\right\}$$
$$- A\,l\{(y_1 - \alpha)(y_2 - \alpha)\} + \text{Const.},$$

$$\int \frac{v \partial y}{a'y - a}$$

$$= \frac{v}{a'} - (A\alpha + B)\left\{\frac{1}{y_1 - \alpha} - \frac{1}{y_2 - \alpha}\right\} + A\,l\frac{y_1 - \alpha}{y_2 - \alpha} + \text{Const.}$$

folgt.

Ganz wie oben überzeugt man ſich nun, daß

$$(y_1 - \alpha)(y_2 - \alpha) = \frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{a - a'y}$$

iſt. Weil ferner

$$x^2 + \frac{b'}{a'}x + \frac{c'}{a'} = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$$

iſt; ſo iſt

$$\alpha = - \frac{b'}{2a'},\ \alpha^2 = \frac{c'}{a'}.$$

Alſo iſt

$$y_1 + y_2 - 2\alpha = \frac{b'y - b}{a - a'y} + \frac{b'}{a'} = \frac{ab' - a'b}{a'(a - a'y)},$$

und folglich

$$\frac{1}{y_1 - \alpha} + \frac{1}{y_2 - \alpha} = \frac{y_1 + y_2 - 2\alpha}{(y_1 - \alpha)(y_2 - \alpha)} = \frac{ab' - a'b}{a'(a\alpha^2 + b\alpha + c)},$$

d. i. eine conſtante Größe. Nun iſt ferner

$$l\{(y_1 - \alpha)(y_2 - \alpha)\} = l(a\alpha^2 + b\alpha + c) - l(a - a'y),$$

wo der erſte Theil auch eine conſtante Größe iſt. Alſo läßt ſich die erſte der beiden obigen Gleichungen offenbar auf folgende Art ſchreiben:

$$\int \frac{b'y - b}{a - a'y} \partial y = - \frac{b'y}{a'} + \frac{a'b - ab'}{a'^2} l(a - a'y) + \text{Const.}$$

oder

$$\int \frac{b'y - b}{a - a'y} \partial y + \int \frac{b'}{a'} \partial y = \frac{a'b - ab'}{a'^2} l(a - a'y) + \text{Const.},$$

d. i., wie man leicht findet,

$$\frac{ab' - a'b}{a'} \int \frac{\partial y}{a - a'y} = \frac{a'b - ab'}{a'^2} l(a - a'y) + \text{Const.},$$

oder

$$\int \frac{\partial y}{a - a'y} = - \frac{1}{a'} l(a - a'y) + \text{Const.},$$

ganz derſelbe Ausdruck, welchen wir ſchon oben gehabt haben.

Was nun ferner die zweite der beiden obigen Formeln betrifft; ſo iſt zuvörderſt

$$\frac{1}{y_1 - \alpha} - \frac{1}{y_2 - \alpha} = \frac{y_2 - y_1}{(y_1 - \alpha)(y_2 - \alpha)} = - \frac{v}{a\alpha^2 + b\alpha + c}.$$

Ferner iſt

$$A\alpha + B = \frac{(a'b - ab')\alpha + a'c - ac'}{a'^2}.$$

Aber $b' = -2a'\alpha$, $c' = a'\alpha^2$. Alſo

$$(a'b - ab')\alpha + a'c - ac' = a'(a\alpha^2 + b\alpha + c),$$

und folglich

$$A\alpha + B = \frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{a'}.$$

Alſo iſt

$$(A\alpha + B)\left\{\frac{1}{y_1 - \alpha} - \frac{1}{y_2 - \alpha}\right\} = - \frac{v}{a'},$$

und daher

$$\int \frac{v\partial y}{a'y - a} = \frac{2v}{a'} + A l \frac{y_1 - \alpha}{y_2 - \alpha} + \text{Const.}$$

Weil nun

$$y_1 - \alpha = y_1 + \frac{b'}{2a'} = \frac{a'(b'y - b + v) + b'(a - a'y)}{2a'(a - a'y)},$$

$$y_2 - \alpha = y_2 + \frac{b'}{2a'} = \frac{a'(b'y - b - v) + b'(a - a'y)}{2a'(a - a'y)}$$

iſt; ſo iſt

$$\int \frac{v\partial y}{a'y - a} = \frac{2v}{a'} + \frac{a'b - ab'}{a'^2} l \frac{a'(b'y - b + v) + b'(a - a'y)}{a'(b'y - b - v) + b'(a - a'y)} + \text{Const.}$$

Man hat zu merken, daß in dem hier betrachteten Falle, wo

$$\alpha = -\frac{b'}{2a'}, \quad \alpha^2 = \frac{c'}{a'}$$

iſt, zwiſchen den Größen a′, b′, c′ die Relation $b'^2 = 4a'c'$ Statt findet.

3. Wir wollen nun ferner annehmen, daß zwiſchen x und y die Gleichung

$$ax^n + bx^{n-1} + .. + kx + l = (a'x^n + b'x^{n-1} + .. + k'x + l')y^2$$

gegeben ſey, indem wir wie vorher auch hier wieder

$$\frac{ax^n + bx^{n-1} + .. + kx + l}{a'x^n + b'x^{n-1} + .. + k'x + l'} = f(x)$$

ſetzen. Auch behalten y_i und Y_i die ihnen beigelegte Bedeutung. Setzen wir nun

$$\int \{f(x)\}^{\frac{1}{2}} \partial X = \psi(x) ;$$

ſo ergiebt ſich, weil $y = \{f(x)\}^{\frac{1}{2}}$ iſt, wenn man y_i für x ſetzt, aus der Gleichung

$$\int X\partial y + \int y\partial X = Xy + C$$

auf der Stelle die Gleichung

$$\int Y_i\partial y + \psi(y_i) = yY_i + C ,$$

und dieſe Gleichung gilt immer, wenn man für i eine der Zahlen 1, 2, 3, ... n ſetzt. Setzt man nun nach der Reihe alle dieſe Zahlen für i und addirt dann alle erhaltenen Gleichungen zuſammen; ſo ergiebt ſich, indem man der Kürze wegen

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \ldots + Y_n = Y$$

ſetzt, die Gleichung

$$\psi(y_1) + \psi(y_2) + \psi(y_3) + .. + \psi(y_n) = yY - \int Y\partial y + C .$$

Da Y_i eine rationale Function von y_i iſt; ſo iſt die Summe Y offenbar eine rationale ſymmetriſche Function der Wurzeln der Gleichung

$$ax^n + bx^{n-1} + .. + kx + l = (a'x^n + b'x^{n-1} + .. + k'x + l')y^2$$

oder

$$(a - a'y^2)x^n + (b - b'y^2)x^{n-1} + .. + (k - k'y^2)x + l - l'y^2 = 0,$$

und kann alſo, wie die Theorie der Gleichungen (Gleichung III. i. d. Z.) lehrt, jederzeit aus den Coefficienten dieſer Gleichung ohne Schwierigkeit gefunden werden, ohne die Wurzeln ſelbſt zu kennen. Nach bekannten Regeln der Integralrechnung läßt ſich nun offenbar auch immer $\int Y\partial y$ unter einer endlichen völlig ent=

wickelten Form darſtellen, und man kann alſo nach dem Vorhergehenden immer die Summe

$$\psi(y_1) + \psi(y_2) + \psi(y_3) + \ldots + \psi(y_n)$$

unter einer endlichen völlig entwickelten Form als eine Function von y darſtellen, welches in Bezug auf die einzelnen Theile dieſer Summe, d. h. überhaupt in Bezug auf das Integral $\psi(x)$, keinesweges der Fall iſt, ſo daß wir alſo hierdurch zu einem neuen allerdings ſehr merkwürdigen Satze gelangt ſind.

4. Als Beiſpiel zu dem Vorhergehenden betrachtet Poiſſon die Gleichung

$$(1-x)(h-x) = (1+x)(h+x)y^2 ,$$

oder, wenn wir

$$\frac{1+y^2}{1-y^2} = p$$

ſetzen, die Gleichung

$$x^2 - (1+h)px + h = 0 ,$$

deren Wurzeln

$$y_1 = \tfrac{1}{2}(1+h)p + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+h)^2p^2 - 4h} ,$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2}(1+h)p - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+h)^2p^2 - 4h}$$

ſind. Setzen wir nun wieder $X = x$; ſo iſt

$$Y = y_1 + y_2 = (1+h)p = (1+h).\frac{1+y^2}{1-y^2} .$$

Weil nun

$$\frac{1+y^2}{1-y^2} = -1 + \frac{2}{1-y^2} = -1 + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}$$

iſt; ſo iſt

$$\int\frac{1+y^2}{1-y^2}\partial y = -y + \int\frac{\partial y}{1-y} + \int\frac{\partial y}{1+y} ,$$
$$= -y - l(1-y) + l(1+y) = -y + l\frac{1+y}{1-y}$$

und folglich

$$\int Y\partial y = -(1+h)y + (1+h)l\frac{1+y}{1-y} .$$

Für

$$\psi(x) = \int\partial x\sqrt{\frac{(1-x)(h-x)}{(1+x)(h+x)}}$$

iſt alſo nach der in (3) bewieſenen Gleichung im vorliegenden Falle

$$\psi(y_1) + \psi(y_2) = (1+h)\left\{\frac{(1+y^2)y}{1-y^2} + y - l\frac{1+y}{1-y}\right\} + C$$

oder

$$\psi(y_1) + \psi(y_2) = (1+h)\left\{\frac{2y}{1-y^2} - l\frac{1+y}{1-y}\right\} + C .$$

Um dieſe Gleichung zu verificiren, ſetzt Poiſſon

$$\int \frac{(h+x^2)\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(h^2-x^2)}} = \varphi(x), \quad \int \frac{x\,\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(h^2-x^2)}} = \varphi'(x)$$

und findet

$$\psi(x) = \varphi(x) - (1+h)\varphi'(x) .$$

Führt man dieſen Ausdruck in die in Rede ſtehende Gleichung ein; ſo erhält man

$$\varphi(y_1) + \varphi(y_2) = (1+h)\left\{\frac{2y}{1-y^2} - l\frac{1+y}{1-y} + \varphi'(y_1) + \varphi'(y_2)\right\} + C .$$

Nun iſt

$$\varphi'(x) = \tfrac{1}{2} l \{2x^2 - 1 - h^2 + 2\sqrt{(1-x^2)(h^2-x^2)}\},$$

wovon man ſich leicht durch Differentiation überzeugen wird.

Wegen der Gleichung

$$x^2 - (1+h)px + h = 0$$

iſt aber

$$1 - x^2 = (1+h)(1-px), \quad h^2 - x^2 = (1+h)(h-px) .$$

Auch iſt

$$2x^2 - 1 - h^2 = 2(1+h)px - 2h - 1 - h^2$$
$$= 2(1+h)px - (1+h)^2 = (1+h)(2px - 1 - h) ,$$

und folglich

$$\varphi'(x) = \tfrac{1}{2} l(1+h) + \tfrac{1}{2} l \{2px - 1 - h + 2\sqrt{(1-px)(h-px)}\} .$$

Ferner iſt vermöge obiger Gleichung

$$(1-px)(h-px) = h - (1+h)px + p^2x^2$$
$$= -x^2 + p^2x^2 = x^2(p^2-1) .$$

Alſo iſt

$$\varphi'(x) = \tfrac{1}{2} l(1+h) + \tfrac{1}{2} l \{2x(p + \sqrt{p^2-1}) - 1 - h\} ,$$

und folglich, wenn wir der Kürze wegen

$$p + \sqrt{p^2-1} = \frac{1+y}{1-y} = q$$

ſetzen,

$$\varphi'(x) = \tfrac{1}{2} l(1+h) + \tfrac{1}{2} l(2qx - 1 - h) .$$

Alſo iſt

$$\varphi'(y_1) + \varphi'(y_2) = \tfrac{1}{2} l(1+h) + \tfrac{1}{2} l(2qy_1 - 1 - h)$$
$$+ \tfrac{1}{2} l(1+h) + \tfrac{1}{2} l(2qy_2 - 1 - h)$$
$$= l(1+h) + \tfrac{1}{2} l\{(2qy_1 - 1 - h)(2qy_2 - 1 - h)\}$$
$$= l(1+h) + \tfrac{1}{2} l\{4q^2y_1y_2 - 2q(1+h)(y_1+y_2) + (1+h)^2\} .$$

Weil aber y_1 und y_2 die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - (1+h)px + h = 0$$

ſind; ſo iſt nach der Theorie der Gleichungen

$$y_1 + y_2 = (1+h)p, \quad y_1 y_2 = h,$$

und folglich

$$4q^2 y_1 y_2 - 2q(1+h)(y_1+y_2) + (1+h)^2$$

$$= 4.\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2.h - 2.\frac{1+y}{1-y}.\frac{1+y^2}{1-y^2}.(1+h)^2 + (1+h)^2$$

$$= 4.\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2.h - 2.\frac{1+y^2}{(1-y)^2}.(1+h)^2 + (1+h)^2$$

$$= 4.\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2.h - (1+h)^2.\left\{\frac{2(1+y^2)}{(1-y)^2} - 1\right\}$$

$$= 4.\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2.h - \left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2.(1+h)^2$$

$$= -(1-h)^2.\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2,$$

wobei wir bemerken, daß Poiſſon ſagt, daß die ſo eben entwickelte Größe

$$4q^2 y_1 y_2 - 2q(1+h)(y_1+y_2) + (1+h)^2$$

dem Quadrat der Größe

$$(1-h).\frac{1+y}{1-y}$$

gleich ſey, welches, wie man aus dem Vorhergehenden ſieht, nicht der Fall iſt, und in einem Rechnungsfehler bei Poiſſon ſeinen Grund haben muß. Wir erhalten alſo jetzt nach dem Obigen

$$\varphi'(y_1) + \varphi'(y_2) = l(1+h) + l\{(1-h)\sqrt{-1}\} + l\frac{1+y}{1-y},$$

und folglich, wenn man die Größe

$$(1+h)l(1+h) + (1+h)l\{(1-h)\sqrt{-1}\}$$

mit in der Conſtante begreift,

$$\varphi(y_1) + \varphi(y_2) = \frac{2(1+h)y}{1-y^2} + C.$$

Denken wir uns aber die Integrale $\varphi(y_1)$ und $\varphi(y_2)$ ſo beſtimmt, daß ſie für $y = 0$ verſchwinden; ſo iſt $C = 0$ und folglich

$$\varphi(y_1) + \varphi(y_2) = \frac{2(1+h)y}{1-y^2},$$

immer unter der Vorausſetzung, daß die Integrale auf die angegebene Weiſe beſtimmt ſind.

Weil nun

$$p = \frac{1+y^2}{1-y^2}$$

und

$$y_1 = \tfrac{1}{2}(1+h)p + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+h)^2p^2 - 4h},$$

$$y_2 = \tfrac{1}{2}(1+h)p - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+h)^2p^2 - 4h}$$

iſt; ſo iſt für $y = 0$ offenbar $y_1 = 1$ und $y_2 = h$. Alſo ſind die auf die vorher angegebene Art beſtimmten Integrale $\varphi(y_1)$ und $\varphi(y_2)$ offenbar das reſpective zwiſchen den Gränzen $x = 1$, $x = y_1$ und $x = h$, $x = y_2$ genommene Integral $\varphi(x)$, und folglich

$$\int_1^{y_1} \frac{(h + x^2)\partial x}{\sqrt{(1 - x^2)(h^2 - x^2)}} + \int_h^{y_2} \frac{(h + x^2)\partial x}{\sqrt{(1 - x^2)(h^2 - x^2)}} = \frac{2(1 + h)y}{1 - y^2}.$$

Differentiirt man dieſe Gleichung nach y; ſo erhält man

$$\frac{(h + y_1^2)\partial y_1}{\sqrt{(1 - y_1^2)(h^2 - y_1^2)}} + \frac{(h + y_2^2)\partial y_2}{\sqrt{(1 - y_2^2)(h^2 - y_2^2)}} = \frac{2(1 + h)(1 + y^2)\partial y}{(1 - y^2)^2}.$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$(1 + h^2)p^2 - 4h = P;$$

ſo iſt

$$y_1 = \tfrac{1}{2}(1 + h)p + \tfrac{1}{2}\sqrt{P},$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2}(1 + h)p - \tfrac{1}{2}\sqrt{P}.$$

Differentiirt man nun nach p; ſo findet man:

$$\partial y_1 = (1 + h)\partial p . \frac{\sqrt{P} + (1 + h)p}{2\sqrt{P}},$$

$$\partial y_2 = (1 + h)\partial p . \frac{\sqrt{P} - (1 + h)p}{2\sqrt{P}},$$

oder

$$\partial y_1 = \frac{(1 + h)y_1 \partial p}{\sqrt{P}}, \quad \partial y_2 = -\frac{(1 + h)y_2 \partial p}{\sqrt{P}}.$$

Ferner findet man

$$h + y_1^2 = \tfrac{1}{2}(1 + h)p\{(1 + h)p + \sqrt{P}\},$$
$$h + y_2^2 = \tfrac{1}{2}(1 + h)p\{(1 + h)p - \sqrt{P}\},$$

d. i.

$$h + y_1^2 = (1 + h)py_1, \quad h + y_2^2 = (1 + h)py_2.$$

Auch iſt nach dem Obigen

$$(1 - x^2)(h^2 - x^2) = (1 + h)^2(1 - px)(h - px)$$
$$= (1 + h)^2 x^2 (p^2 - 1),$$
$$\sqrt{(1 - x^2)(h^2 - x^2)} = (1 + h)x\sqrt{p^2 - 1}.$$

Folglich iſt

$$\sqrt{(1 - y_1^2)(h^2 - y_1^2)} = (1 + h)y_1\sqrt{p^2 - 1},$$
$$\sqrt{(1 - y_2^2)(h^2 - y_2^2)} = (1 + h)y_2\sqrt{p^2 - 1},$$

und nach leichter Rechnung ergiebt ſich nun

$$\frac{(h + y_1^2)\partial y_1}{\sqrt{(1 - y_1^2)(h^2 - y_1^2)}} + \frac{(h + y_2^2)\partial y_2}{\sqrt{(1 - y_2^2)(h^2 - y_2^2)}}$$
$$= \frac{(1 + h)y_1 p\partial p}{\sqrt{(p^2 - 1)P}} - \frac{(1 + h)y_2 p\partial p}{\sqrt{(p^2 - 1)P}} = (y_1 - y_2) . \frac{(1 + h)p\partial p}{\sqrt{(p^2 - 1)P}}$$
$$= \frac{(1 + h)p\partial p}{\sqrt{p^2 - 1}},$$

weil $y_1 - y_2 = \sqrt{P}$ iſt. Es iſt aber

$$p = \frac{1+y^2}{1-y^2},\ \sqrt{p^2-1} = \frac{2y}{1-y^2},\ \partial p = \frac{4y}{(1-y^2)^2}.$$

Alſo iſt

$$\frac{p\partial p}{\sqrt{p^2-1}} = \frac{2(1+y^2)}{(1-y^2)^2},$$

und folglich wirklich

$$\frac{(1+h)p\partial p}{\sqrt{p^2-1}} = \frac{2(1+h)(1+y^2)\partial y}{(1-y^2)^2},$$

wie es nach dem Obigen ſeyn muß, wenn unſere Gleichung richtig ſeyn ſoll, ſo daß dieſelbe alſo hierdurch verificirt iſt.

Wenn wir

$$(1-x)(x-h) = (1+x)(x+h)y^2$$

ſetzen; ſo iſt immer

$$\int_1^{y} \frac{(h+x^2)\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-h^2)}} + \int_h^{y_2} \frac{(h+x^2)\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-h^2)}} = -\frac{2(1+h)y}{1+y^2},$$

wie auf folgende Art gezeigt werden kann. Die gegebene Gleichung läßt ſich nämlich leicht auf die Form

$$x^2 - (1+h)px + h = 0$$

bringen, wo nun aber

$$p = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

iſt. Aus dieſer Gleichung folgt ganz wie vorher, wenn wir ihre beiden Wurzeln wieder durch y_1 und y_2 bezeichnen,

$$y_1 = \tfrac{1}{2}(1+h)p + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+h)^2p^2 - 4h},$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2}(1+h)p - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+h)^2p^2 - 4h},$$

oder, indem wir wieder der Kürze wegen

$$(1+h)^2p^2 - 4h = P$$

ſetzen,

$$y_1 = \tfrac{1}{2}(1+h)p + \tfrac{1}{2}\sqrt{P},$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2}(1+h)p - \tfrac{1}{2}\sqrt{P},$$

und hieraus ganz eben ſo wie vorher

$$\partial y_1 = \frac{(1+h)y_1\partial p}{\sqrt{P}},\ \partial y_2 = -\frac{(1+h)y_2\partial p}{\sqrt{P}};$$

$$h + y_1^2 = (1+h)py_1,\ h + y_2^2 = (1+h)py_2.$$

Auch findet man ganz eben ſo wie vorher die Gleichung

$$(1-x^2)(h^2-x^2) = (1+h)^2x^2(p^2-1)$$

oder

$$(1-x^2)(x^2-h^2) = (1+h)^2x^2(1-p^2),$$
$$\sqrt{(1-x^2)(x^2-h^2)} = (1+h)x\sqrt{1-p^2},$$

und folglich

$$\sqrt{(1-y_1{}^2)(y_1{}^2-h^2)} = (1+h)\,y_1\sqrt{1-p^2},$$
$$\sqrt{(1-y_2{}^2)(y_2{}^2-h^2)} = (1+h)\,y_2\sqrt{1-p^2}.$$

Alſo iſt

$$\frac{(h+y_1{}^2)\,\partial y_1}{\sqrt{(1-y_1{}^2)(y_1{}^2-h^2)}} + \frac{(h+y_2{}^2)\,\partial y_2}{\sqrt{(1-y_2{}^2)(y_2{}^2-h^2)}}$$
$$=(y_1-y_2).\frac{(1+h)\,p\,\partial p}{\sqrt{(1-p^2)P}} = \frac{(1+h)\,p\,\partial p}{\sqrt{1-p^2}}.$$

Nun iſt aber, wie man leicht findet,

$$p = \frac{1-y^2}{1+y^2},\quad \sqrt{1-p^2} = \frac{2y}{1+y^2},\quad \partial p = -\frac{4y\,\partial y}{(1+y^2)^2}.$$

Alſo iſt

$$\frac{(h+y_1{}^2)\,\partial y_1}{\sqrt{(1-y_1{}^2)(y_1{}^2-h^2)}} + \frac{(h+y_2{}^2)\,\partial y^2}{\sqrt{(1-y_2{}^2)(y_2{}^2-h^2)}} = -\frac{2(1+h)(1-y^2)\,\partial y}{(1+y^2)^2},$$

woraus ſich ferner, wenn man zwiſchen den Gränzen 0 und y integrirt, leicht

$$\int_1^{y_1}\frac{(h+x^2)\,\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-h^2)}} + \int_h^{y_2}\frac{(h+x^2)\,\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-h^2)}} = -2(1+h)\int_0^y\frac{(1-y^2)\,\partial y}{(1+y^2)^2}$$

ergiebt. Weil nun

$$\partial.\frac{y}{1+y^2} = \frac{(1-y^2)\,\partial y}{(1+y^2)^2}$$

und folglich

$$\int_0^y\frac{(1-y^2)\,\partial y}{(1+y^2)^2} = \frac{y}{1+y^2}$$

iſt; ſo iſt

$$\int_1^{y_1}\frac{(h+x^2)\,\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-h^2)}} + \int_h^{y_2}\frac{(h+x^2)\,\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-h^2)}} = -\frac{2(1+h)\,y}{1+y^2}.$$

wie bewieſen werden ſollte.

Dieſe letztere Gleichung hat Poiſſon auch noch mittelſt der elliptiſchen Functionen verificirt, und theilt in ſeiner Abhandlung namentlich auch noch einen dem berühmten Abelſchen Theorem, von welchem im Artikel Elliptiſche Functionen. **XXI.** ausführlich die Rede geweſen iſt, ähnlichen Satz mit, eine Unterſuchung, in welcher wir ihm hier der Beſchränktheit des Raumes wegen nicht weiter folgen können, ſondern uns mit einer Hinweiſung auf das Abelſche Theorem ſelbſt a. a. O. begnügen müſſen.

5. Zu den ſchönſten neuern Arbeiten über die Integralrechnung gehört unſtreitig die merkwürdige Transformation des wichtigen irrationalen Differentials

$$\frac{\partial E}{\sqrt{(A-a\cos E)^2+(B-b\sin E)^2+C^2}},$$

welche ſich aus der berühmten Abhandlung von Gauß: **Determinatio attractionis, quam in punctum quodvis positionis datae exercet planeta, si ejus massa per totam orbitam, ratione temporis, quo singulae partes describuntur, uniformiter esset dispertita. Comment. soc. reg. gott. recent. Vol. IV. Gott. 1820. p. 21.** ergiebt. Dieſe merkwürdige Transformation und die daraus gezogenen Folgerungen wollen wir daher hier in aller Ausführlichkeit mittheilen. Gauß führt ſtatt der veränderlichen Größe **E** eine andere veränderliche Größe **T** ein, und ſetzt zu dem Ende, indem $\alpha, \alpha', \alpha''; \beta, \beta', \beta''; \gamma, \gamma', \gamma''$ conſtante Größen bezeichnen,

$$\cos E = \frac{\alpha + \alpha' \cos T + \alpha'' \sin T}{\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T},$$

$$\sin E = \frac{\beta + \beta' \cos T + \beta'' \sin T}{\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T},$$

wo nun aber auf der Stelle erhellet, daß die conſtanten Größen $\alpha, \alpha', \alpha''; \beta, \beta', \beta''; \gamma, \gamma', \gamma''$ nicht ganz unabhängig von einander ſeyn können, und es alſo zunächſt darauf ankommt, die Abhängigkeit dieſer neun conſtanten Coefficienten von einander näher zu unterſuchen.

Da man, ohne die Werthe von $\cos E$ und $\sin E$ zu ändern, alle conſtanten Coefficienten mit einerlei Zahl multipliciren kann; ſo könnte man einem derſelben einen beſtimmten Werth beilegen, z. B. $\gamma = 1$ ſetzen. Gauß läßt aber der größern Gleichförmigkeit der Rechnung wegen für's Erſte alle neun Coefficienten unbeſtimmt, welches bekanntlich öfters in ähnlichen Fällen mit beſonderm Vortheil geſchieht. Ferner erhellet, daß weder die Größen $\alpha, \alpha', \alpha''$, noch die Größen β, β', β'', den Größen $\gamma, \gamma', \gamma''$ proportional ſeyn dürfen. Wäre nämlich z. B. das Erſte der Fall, d. i.

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha'}{\gamma'} = \frac{\alpha''}{\gamma''} = \lambda$$

oder

$$a = \gamma\lambda, \quad \alpha' = \gamma'\lambda, \quad \alpha'' = \gamma''\lambda;$$

ſo wäre $\cos E = \lambda$ und folglich **E** keine variable Größe mehr, welches offenbar ungereimt iſt. Alſo dürfen weder die Größen

$$\alpha\gamma' - \alpha'\gamma, \quad \alpha\gamma'' - \alpha''\gamma, \quad \alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma',$$

noch die Größen

$$\beta\gamma' - \beta'\gamma, \quad \beta\gamma'' - \beta''\gamma, \quad \beta'\gamma'' - \beta''\gamma',$$

zugleich verſchwinden.

Aus den beiden Ausdrücken von $\cos E$ und $\sin E$ ergiebt ſich auf der Stelle die Bedingungsgleichung

$$\left\{\frac{\alpha + \alpha' \cos T + \alpha'' \sin T}{\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T}\right\}^2 + \left\{\frac{\beta + \beta' \cos T + \beta'' \sin T}{\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T}\right\}^2 = 1$$

oder

$$(\alpha+\alpha'\cos T+\alpha''\sin T)^2+(\beta+\beta'\cos T+\beta''\sin T)^2-(\gamma+\gamma'\cos T+\gamma''\sin T)^2=0,$$

welche für jedes T Statt finden muß. Entwickelt man die Quadrate, und ordnet gehörig; ſo erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\alpha+\beta\beta-\gamma\gamma \qquad\qquad + 2(\alpha\alpha'+\beta\beta'-\gamma\gamma')\cos T \\ +(\alpha'\alpha'+\beta'\beta'-\gamma'\gamma')\cos T^2 + 2(\alpha\alpha''+\beta\beta''-\gamma\gamma'')\sin T \\ +(\alpha''\alpha''+\beta''\beta''-\gamma''\gamma'')\sin T^2 + 2(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''-\gamma'\gamma'')\cos T\sin T \end{array}\right\} = 0,$$

oder der Kürze wegen

$$a+b\cos T^2+c\sin T^2+2a'\cos T+2b'\sin T+2c'\cos T\sin T=0.$$

Setzt man in dieſer Gleichung, welche für jedes T Statt finden muß, nach der Reihe $T=0$, $T=\frac{1}{2}\pi$, $T=\pi$, $T=\frac{3}{2}\pi$; ſo erhält man

$$a+b+2a'=0,$$
$$a+c+2b'=0,$$
$$a+b-2a'=0,$$
$$a+c-2b'=0.$$

Durch Subtraction der erſten und dritten, und zweiten und vierten Gleichung von einander folgt auf der Stelle

$$a'=0,\ b'=0,$$

ſo daß alſo für jedes T

$$a+b\cos T^2+c\sin T^2+2c'\cos T\sin T=0$$

iſt. Setzt man nun in dieſer Gleichung zuerſt $T=+\frac{1}{4}\pi$, dann $T=-\frac{1}{4}\pi$; ſo erhält man

$$a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}c+c'=0,$$
$$a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}c-c'=0,$$

woraus ſich auf der Stelle

$$c'=0$$

ergiebt, und folglich für jedes T

$$a+b\cos T^2+c\sin T^2=0$$

iſt. Setzt man nun in dieſer Gleichung zuerſt $T=0$, dann $T=\frac{1}{2}\pi$; ſo ergiebt ſich

$$a+b=0,\ a+c=0,$$

d. i.

$$-a=b=c,$$

ſo daß alſo, wenn wir

$$-a=b=c=k$$

ſetzen, für jedes T

$$k(\cos T^2+\sin T^2-1)=0$$

iſt. Aus dieſer Betrachtung ergeben ſich nun auch unmittelbar

die folgenden ſechs zwiſchen den neun conſtanten Coefficienten Statt findenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} -\alpha\alpha-\beta\beta+\gamma\gamma=\ \ k \\ -\alpha'\alpha'-\beta'\beta'+\gamma'\gamma'=-k \\ -\alpha''\alpha''-\beta''\beta''+\gamma''\gamma''=-k \\ -\alpha'\alpha''-\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=\ \ 0 \\ -\alpha''\alpha-\beta''\beta+\gamma''\gamma=\ \ 0 \\ -\alpha\alpha'-\beta\beta'+\gamma\gamma'=\ \ 0 \end{array}\right\}\ (\mathrm{I})\,.$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$\alpha\beta'\gamma''+\alpha'\beta''\gamma+\alpha''\beta\gamma'-\alpha\beta''\gamma'-\alpha'\beta\gamma''-\alpha''\beta'\gamma=\varepsilon\,;$$

ſo erhalten wir aus den vorhergehenden ſechs Gleichungen ſehr leicht die folgenden neun Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon\alpha=-k(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'') \\ \varepsilon\beta=-k(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'') \\ \varepsilon\gamma=+k(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'') \\ \varepsilon\alpha'=+k(\beta''\gamma-\gamma''\beta) \\ \varepsilon\beta'=+k(\gamma''\alpha-\alpha''\gamma) \\ \varepsilon\gamma'=-k(\alpha''\beta-\beta''\alpha) \\ \varepsilon\alpha''=+k(\beta\gamma'-\gamma\beta') \\ \varepsilon\beta''=+k(\gamma\alpha'-\alpha\gamma') \\ \varepsilon\gamma''=-k(\alpha\beta'-\beta\alpha') \end{array}\right\}\ (\mathrm{II})\,.$$

Es iſt nämlich, um nur etwa die erſte dieſer neun Gleichungen zu beweiſen,

$$\varepsilon\alpha=\alpha\alpha(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')+\alpha\alpha'(\beta''\gamma-\beta\gamma'')+\alpha\alpha''(\beta\gamma'-\beta'\gamma)\,,$$

d. i. nach der erſten, ſechſten und fünften der Gleichungen **I.**:

$$\begin{aligned}\varepsilon\alpha=&(-k+\gamma\gamma-\beta\beta)(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')\\ &+(\gamma\gamma'-\beta\beta')(\beta''\gamma-\beta\gamma'')\\ &+(\gamma''\gamma-\beta''\beta)(\beta\gamma'-\beta'\gamma)\\ =&-k(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')+(\gamma\gamma-\beta\beta)(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')\\ &+(\gamma\gamma'-\beta\beta')(\beta''\gamma-\beta\gamma'')\\ &+(\gamma''\gamma-\beta''\beta)(\beta\gamma'-\beta'\gamma)\,.\end{aligned}$$

Entwickelt man nun die drei letzten Producte auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens; ſo findet man, daß alle Glieder derſelben ſich gegenſeitig aufheben, und folglich

$$\varepsilon\alpha=-k(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')$$

iſt. Die übrigen der obigen neun Gleichungen können ganz auf dieſelbe Art bewieſen werden.

Aus den drei erſten dieſer neun Gleichungen ergiebt ſich nun ferner die Gleichung

$$\varepsilon\alpha(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + \varepsilon\beta(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') + \varepsilon\gamma(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')$$
$$= - \mathrm{k}(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2 - \mathrm{k}(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')^2 + \mathrm{k}(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')^2 ,$$

welche ſich leicht auf die Form

$$\varepsilon^2 = \mathrm{k}(-\alpha'\alpha' - \beta'\beta' + \gamma'\gamma')(-\alpha''\alpha'' - \beta''\beta'' + \gamma''\gamma'')$$
$$- \mathrm{k}(-\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')^2$$

bringen läßt, ſo daß alſo, wie hieraus mittelſt der Gleichungen **I** unmittelbar folgt,

$$\varepsilon^2 = \mathrm{k}^3 \;.\;.\;.\;.\;.\; \text{(III)}$$

iſt.

Nach der vierten, zweiten und dritten der Gleichungen **I** iſt

$$(\gamma'\gamma'' - \beta'\beta'')^2 - (\gamma'\gamma' - \beta'\beta')(\gamma''\gamma'' - \beta''\beta'')$$
$$= \alpha'\alpha'\alpha''\alpha'' - (\alpha'\alpha' - \mathrm{k})(\alpha''\alpha'' - \mathrm{k}) ,$$

und aus dieſer Gleichung ergiebt ſich nach gehöriger Entwickelung auf der Stelle

$$(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2 = - \mathrm{k}(\mathrm{k} - \alpha'\alpha' - \alpha''\alpha'') .$$

Auf dieſe Weiſe erhält man aus den Gleichungen **I** überhaupt die folgenden neuen Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2 = - \mathrm{k}(\mathrm{k} - \alpha'\alpha' - \alpha''\alpha'') \\
(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')^2 = - \mathrm{k}(\mathrm{k} - \beta'\beta' - \beta''\beta'') \\
(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')^2 = + \mathrm{k}(\mathrm{k} + \gamma'\gamma' + \gamma''\gamma'') \\
(\beta''\gamma - \gamma''\beta)^2 = + \mathrm{k}(\mathrm{k} + \alpha\alpha - \alpha''\alpha'') \\
(\gamma''\alpha - \alpha''\gamma)^2 = + \mathrm{k}(\mathrm{k} + \beta\beta - \beta''\beta'') \\
(\alpha''\beta - \beta''\alpha)^2 = - \mathrm{k}(\mathrm{k} - \gamma\gamma + \gamma''\gamma'') \\
(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 = + \mathrm{k}(\mathrm{k} + \alpha\alpha - \alpha'\alpha') \\
(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')^2 = + \mathrm{k}(\mathrm{k} + \beta\beta - \beta'\beta') \\
(\alpha\beta' - \beta\alpha'')^2 = - \mathrm{k}(\mathrm{k} - \gamma\gamma + \gamma'\gamma')
\end{array}\right\} \text{(IV.)} .$$

Wäre $\mathrm{k} = 0$, ſo würden die Größen

$$\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'',\ \beta''\gamma - \gamma''\beta,\ \beta\gamma' - \gamma\beta' ;$$
$$\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'',\ \gamma''\alpha - \alpha''\gamma,\ \gamma\alpha' - \alpha\gamma' ;$$
$$\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'',\ \alpha''\beta - \beta''\alpha,\ \alpha\beta' - \beta\alpha' ;$$

oder

$$\alpha\gamma' - \alpha'\gamma,\ \alpha\gamma'' - \alpha''\gamma,\ \alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma' ;$$
$$\beta\gamma' - \beta'\gamma,\ \beta\gamma'' - \beta''\gamma,\ \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' ;$$

und, was hieraus folgt,

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta,\ \alpha\beta'' - \alpha''\beta,\ \alpha'\beta'' - \alpha''\beta'$$

zugleich verſchwinden, welches, wie wir aus dem Obigen wiſſen, nicht der Fall ſeyn darf. Deshalb darf alſo auch k nicht $= 0$ ſeyn. Weil nun $\varepsilon^2 = \mathrm{k}^3$ iſt; ſo iſt k auch offenbar poſitiv, und muß folglich jederzeit eine poſitive Größe ſeyn, die nicht $= 0$ iſt.

Wegen der erſten Gleichung in **II** und **IV** iſt

$$\varepsilon^2 \alpha\alpha = \mathrm{kk}(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2,$$
$$\mathrm{kk}(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2 = -\mathrm{k}^3(\mathrm{k} - \alpha'\alpha' - \alpha''\alpha'').$$

Alſo iſt

$$\varepsilon^2 \alpha\alpha = -\mathrm{k}^3(\mathrm{k} - \alpha'\alpha' - \alpha''\alpha''),$$

und folglich, weil $\varepsilon^2 = \mathrm{k}^3$ und, wie wir ſo eben geſehen haben, k nicht $= 0$ iſt:

$$\alpha\alpha = -\mathrm{k} + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha''$$

oder

$$\alpha\alpha - \alpha'\alpha' - \alpha''\alpha'' = -\mathrm{k}.$$

Auf dieſe Art erhält man überhaupt aus den drei erſten Gleichungen in **II.** und **IV**:

$$\left.\begin{aligned} \alpha\alpha - \alpha'\alpha' - \alpha''\alpha'' &= -\mathrm{k} \\ \beta\beta - \beta'\beta' - \beta''\beta'' &= -\mathrm{k} \\ \gamma\gamma - \gamma'\gamma' - \gamma''\gamma'' &= +\mathrm{k} \end{aligned}\right\} (\mathrm{V}).$$

Die übrigen Gleichungen in **II** und **IV** würden dieſelben Gleichungen geben.

Nach der zweiten, fünften und achten der Gleichungen **II** hat man:

$$\varepsilon\beta\gamma = -\mathrm{k}\gamma(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma''),$$
$$\varepsilon\beta'\gamma' = +\mathrm{k}\gamma'(\gamma''\alpha - \alpha''\gamma),$$
$$\varepsilon\beta''\gamma'' = +\mathrm{k}\gamma''(\gamma\alpha' - \alpha\gamma').$$

Alſo iſt

$$\varepsilon(\beta\gamma - \beta'\gamma' - \beta''\gamma'')$$
$$= -\mathrm{k}\{\gamma(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') + \gamma'(\gamma''\alpha - \alpha''\gamma) + \gamma''(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')\};$$

folglich

$$\varepsilon(\beta\gamma - \beta'\gamma' - \beta''\gamma'') = 0;$$

alſo, weil k, und folglich wegen $\varepsilon^2 = \mathrm{k}^3$ auch ε nicht $= 0$ iſt,

$$\beta\gamma - \beta'\gamma' - \beta''\gamma'' = 0.$$

Auf dieſe Weiſe erhält man überhaupt aus den Gleichungen **II**:

$$\left.\begin{aligned} \beta\gamma - \beta'\gamma' - \beta''\gamma'' &= 0 \\ \gamma\alpha - \gamma'\alpha' - \gamma''\alpha'' &= 0 \\ \alpha\beta - \alpha'\beta' - \alpha''\beta'' &= 0 \end{aligned}\right\} (\mathrm{VI}).$$

Weil man nach einer ſchon oben gemachten Bemerkung die conſtanten Coefficienten ſämmtlich mit einerlei Zahl multipliciren kann, wodurch der Werth von k offenbar mit dem Quadrate dieſer Zahl multiplicirt wird; ſo iſt es, wie von nun an auch immer geſchehen ſoll, verſtattet, $\mathrm{k} = 1$, und folglich $\varepsilon = \pm 1$ zu ſetzen. Dadurch gehen die ſechs erſten Bedingungsgleichungen in folgende über:

$$\left.\begin{aligned}
-\alpha\alpha-\beta\beta+\gamma\gamma &= 1\\
-\alpha'\alpha'-\beta'\beta'+\gamma'\gamma' &= -1\\
-\alpha''\alpha''-\beta''\beta''+\gamma''\gamma'' &= -1\\
-\alpha'\alpha''-\beta'\beta''+\gamma'\gamma'' &= 0\\
-\alpha''\alpha-\beta''\beta+\gamma''\gamma &= 0\\
-\alpha\alpha'-\beta\beta'+\gamma\gamma' &= 0
\end{aligned}\right\}\ \text{(VII)}$$

Bezeichnen wir nun die Größe

$$\sqrt{(A-a\cos E)^2+(B-b\sin E)^2+C^2}$$

durch ϱ und führen in dieſelbe für $\cos E$ und $\sin E$ ihre obigen Ausdrücke ein; ſo erhalten wir für ϱ offenbar einen Ausdruck von der Form

$$\varrho=\frac{\sqrt{G+G'\cos T^2+G''\sin T^2+2H\cos T\sin T+2H'\sin T+2H''\cos T}}{\gamma+\gamma'\cos T+\gamma''\sin T},$$

und wollen nun die neun conſtanten Coefficienten α,α',α''; β,β',β''; γ,γ',γ'' auf eine ſolche Weiſe zu beſtimmen ſuchen, daß, außer den ſechs Gleichungen VII, auch noch den drei Gleichungen

$$H=0,\quad H'=0,\quad H''=0$$

genügt wird, wodurch das Problem, da wir jetzt neun Gleichungen zwiſchen neun unbekannten Größen haben, offenbar im Allgemeinen eine beſtimmte Aufgabe wird. Sehr leicht ſieht man aber, daß es überhaupt bloß darauf ankommt, die neun conſtanten Coefficienten ſo zu beſtimmen, daß den ſechs Gleichungen VII genügt wird, und daß, indem wir

$$\gamma+\gamma'\cos T+\gamma''\sin T=t$$

ſetzen, die Größe

$$(A^2+B^2+C^2)t^2+a^2(t\cos E)^2+b^2(t\sin E)^2-2aAt.t\cos E-2bBt.t\sin E$$

durch die Subſtitution von

$$\begin{aligned}
t\cos E &= \alpha+\alpha'\cos T+\alpha''\sin T,\\
t\sin E &= \beta+\beta'\cos T+\beta''\sin T,\\
t &= \gamma+\gamma'\cos T+\gamma''\sin T
\end{aligned}$$

in eine Größe von der Form

$$G+G'\cos T^2+G''\sin T^2$$

übergeht, Bedingungen, welche offenbar jederzeit erfüllt ſeyn werden, wenn man die neun conſtanten Coefficienten ſo beſtimmen kann, daß den ſechs Gleichungen VII genügt wird, und daß überhaupt die Function

$$a^2x^2+b^2y^2+(A^2+B^2+C^2)z^2-2aAxz-2Byz,$$

welche wir durch V bezeichnen wollen, durch die Subſtitution von

$$\begin{aligned}
x &= \alpha u+\alpha'u'+\alpha''u'',\\
y &= \beta u+\beta'u'+\beta''u'',\\
z &= \gamma u+\gamma'u'+\gamma''u''
\end{aligned}$$

für jedes x, y, z oder jedes u, u′, u″ in eine Größe von der Form

$$Gu^2 + G'u'^2 + G''u''^2$$

übergeht. Multiplicirt man aber x, y, z nach der Reihe mit α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$; ſo erhält man:

$$\begin{aligned}
\alpha x &= \alpha\alpha u + \alpha\alpha' u' + \alpha\alpha'' u'',\\
\beta y &= \beta\beta u + \beta\beta' u' + \beta\beta'' u'',\\
\gamma z &= \gamma\gamma u + \gamma\gamma' u' + \gamma\gamma'' u'',\\
\alpha' x &= \alpha\alpha' u + \alpha'\alpha' u' + \alpha'\alpha'' u'',\\
\beta' y &= \beta\beta' u + \beta'\beta' u' + \beta'\beta'' u'',\\
\gamma' z &= \gamma\gamma' u + \gamma'\gamma' u' + \gamma'\gamma'' u'';\\
\alpha'' x &= \alpha\alpha'' u + \alpha'\alpha'' u' + \alpha''\alpha'' u'',\\
\beta'' y &= \beta\beta'' u + \beta'\beta'' u' + \beta''\beta'' u'',\\
\gamma'' z &= \gamma\gamma'' u + \gamma'\gamma'' u' + \gamma''\gamma'' u'';
\end{aligned}$$

folglich

$$-\alpha x - \beta y + \gamma z$$
$$= (-\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma)u + (-\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma')u' + (-\alpha\alpha'' - \beta\beta'' + \gamma\gamma'')u'',$$
$$\alpha' x + \beta' y - \gamma' z$$
$$= -(-\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma')u - (-\alpha'\alpha' - \beta'\beta' + \gamma'\gamma')u' - (-\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')u'',$$
$$\alpha'' x + \beta'' y - \gamma'' z$$
$$= -(-\alpha\alpha'' - \beta\beta'' + \gamma\gamma'')u - (-\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')u' - (-\alpha''\alpha'' - \beta''\beta'' + \gamma''\gamma'')u'';$$

alſo nach den Gleichungen **VII**:

$$\begin{aligned}
u &= -\alpha x - \beta y + \gamma z,\\
u' &= \quad \alpha' x + \beta' y - \gamma' z,\\
u'' &= \quad \alpha'' x + \beta'' y - \gamma'' z.
\end{aligned}$$

Folglich muß für jedes x, y, z

$$a^2x^2 + b^2y^2 + (A^2 + B^2 + C^2)z^2 - 2aAxz - 2bByz$$
$$= G(-\alpha x - \beta y + \gamma z)^2 + G'(\alpha' x + \beta' y - \gamma' z)^2 + G''(\alpha'' x + \beta'' y - \gamma'' z)^2$$

ſeyn, woraus ſich auf der Stelle die ſechs folgenden Gleichungen ergeben:

$$\left.\begin{aligned}
aa &= G\alpha\alpha + G'\alpha'\alpha' + G''\alpha''\alpha''\\
bb &= G\beta\beta + G'\beta'\beta' + G''\beta''\beta''\\
AA + BB + CC &= G\gamma\gamma + G'\gamma'\gamma' + G''\gamma''\gamma''\\
bB &= G\beta\gamma + G'\beta'\gamma' + G''\beta''\gamma''\\
aA &= G\gamma\alpha + G'\gamma'\alpha' + G''\gamma''\alpha''\\
0 &= G\alpha\beta + G'\alpha'\beta' + G''\alpha''\beta''
\end{aligned}\right\} \text{(VIII)}$$

und man ſieht nun, daß unſer Problem jetzt darauf zurückgeführt iſt, daß die zwölf Größen $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β''; $\gamma, \gamma', \gamma''$; **G, G′, G″** ſo zu beſtimmen ſind, daß den zwölf Gleichungen **VII** und **VIII** genügt wird, woraus dann auch zugleich erhellet, daß die Aufgabe, da wir zwölf Gleichungen zwiſchen eben

ſo vielen unbekannten Größen haben, nun im Allgemeinen eine beſtimmte iſt. Können wir alſo die genannten zwölf Größen auf die angegebene Weiſe beſtimmen; ſo geht die Größe

$$\varrho = \sqrt{(A - a\cos E)^2 + (B - b\sin E)^2 + C^2}$$

durch die Subſtitution von

$$\cos E = \frac{\alpha + \alpha'\cos T + \alpha''\sin T}{\gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T},$$

$$\sin E = \frac{\beta + \beta'\cos T + \beta''\sin T}{\gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T}$$

jederzeit in die Größe

$$\frac{\sqrt{G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2}}{\gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T}$$

über, und es kommt daher nun zunächſt auf die vollſtändige Auflöſung der zwölf Gleichungen **VII** und **VIII** an.

6. Aus der erſten, fünften und ſechſten der Gleichungen **VIII** folgt:

$$\alpha aa = G\alpha\alpha\alpha + G'\alpha\alpha'\alpha' + G''\alpha\alpha''\alpha'',$$

$$\gamma aA = G\gamma\gamma\alpha + G'\gamma\gamma'\alpha' + G''\gamma\gamma''\alpha'',$$

$$0 = G\beta\alpha\beta + G'\beta\alpha'\beta' + G''\beta\alpha''\beta'';$$

alſo

$$-\alpha aa + \gamma aA$$

$$= \alpha G(-\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma) + \alpha' G'(-\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma') + \alpha'' G''(-\alpha\alpha'' - \beta\beta'' + \gamma\gamma''),$$

d. i. nach den Gleichungen **VII**:

$$-\alpha aa + \gamma aA = \alpha G.$$

Aus der zweiten, vierten und ſechſten der Gleichungen **VIII** erhält man:

$$\beta bb = G\beta\beta\beta + G'\beta\beta'\beta' + G''\beta\beta''\beta'',$$

$$\gamma bB = G\gamma\beta\gamma + G'\gamma\beta'\gamma' + G''\gamma\beta''\gamma'',$$

$$0 = G\alpha\alpha\beta + G'\alpha\alpha'\beta' + G''\alpha\alpha''\beta'';$$

alſo

$$-\beta bb + \gamma bB$$

$$= \beta G(-\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma) + \beta' G'(-\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma') + \beta'' G''(-\alpha\alpha'' - \beta\beta'' + \gamma\gamma''),$$

d. i. nach den Gleichungen **VII**:

$$-\beta bb + \gamma bB = \beta G.$$

Endlich folgt aus der dritten, vierten und fünften der Gleichungen **VIII** auch:

$$\gamma(AA + BB + CC) = G\gamma\gamma\gamma + G'\gamma\gamma'\gamma' + G''\gamma\gamma''\gamma'',$$

$$\beta bB = G\beta\beta\gamma + G'\beta\beta'\gamma' + G''\beta\beta''\gamma'',$$

$$\alpha aA = G\alpha\gamma\alpha + G'\alpha\gamma'\alpha' + G''\alpha\gamma''\alpha'';$$

alſo

$$\gamma(AA + BB + CC) - \alpha aA - \beta bB$$
$$= \gamma G(-\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma) + \gamma' G'(-\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma') + \gamma'' G''(-\alpha\alpha'' - \beta\beta'' + \gamma\gamma'')$$

d. i. nach den Gleichungen VII:

$$\gamma(AA + BB + CC) - \alpha aA - \beta bB = \gamma G .$$

Alſo haben wir die drei folgenden Gleichungen:

$$-\alpha aa + \gamma aA = \alpha G ,$$
$$-\beta bb + \gamma bB = \beta G ,$$
$$\gamma(AA + BB + CC) - \alpha aA - \beta bB = \gamma G ,$$

aus denen ſich leicht

$$1.\ \alpha = \frac{\gamma aA}{a^2 + G},\quad 2.\ \beta = \frac{\gamma bB}{b^2 + G};$$

$$3.\ \frac{A^2}{a^2 + G} + \frac{B^2}{b^2 + G} + \frac{C^2}{G} = 1$$

ergiebt.

Auf ganz ähnliche Art findet man:

$$4.\ \alpha' = \frac{\gamma' aA}{a^2 - G'},\quad 5.\ \beta' = \frac{\gamma' bB}{b^2 - G'};$$

$$6.\ \frac{A^2}{a^2 - G'} + \frac{B^2}{b^2 - G'} - \frac{C^2}{G'} = 1 ,$$

und ganz eben ſo:

$$7.\ \alpha'' = \frac{\gamma'' aA}{a^2 - G''},\quad 8.\ \beta'' = \frac{\gamma'' bB}{b^2 - G''};$$

$$9.\ \frac{A^2}{a^2 - G''} + \frac{B^2}{b^2 - G''} - \frac{C^2}{G''} = 1 .$$

Betrachtet man nun die drei Gleichungen

$$\frac{A^2}{a^2 + G} + \frac{B^2}{b^2 + G} + \frac{C^2}{G} = 1 ,$$

$$\frac{A^2}{a^2 - G'} + \frac{B^2}{b^2 - G'} + \frac{C^2}{-G'} = 1 ,$$

$$\frac{A^2}{a^2 - G''} + \frac{B^2}{b^2 - G''} + \frac{C^2}{-G''} = 1$$

näher; ſo erhellet auf der Stelle, daß die Größen, G, — G', — G'' die drei Wurzeln der Gleichung

$$10.\ \frac{A^2}{a^2 + x} + \frac{B^2}{b^2 + x} + \frac{C^2}{x} = 1$$

oder

$$11.\ x^3 - (A^2 + B^2 + C^2 - a^2 - b^2)x^2 + (a^2b^2 - a^2B^2 - a^2C^2 - b^2A^2 - b^2C^2)x - a^2b^2C^2 = 0$$

ſind, ſo daß es nun zunächſt auf eine genauere Unterſuchung der Natur der drei Wurzeln dieſer cubiſchen Gleichung ankommt, die ſich auf folgende Art anſtellen läßt.

7. Wir nehmen im Folgenden an, daß keine der beiden Größen a, b null iſt.

I. Unſere Gleichung hat, wie jede cubiſche Gleichung, entweder drei reelle, oder zwei imaginäre und eine reelle Wurzel. Bezeichnen wir nun die drei Wurzeln überhaupt durch p, q, r; ſo iſt nach dem im Artikel Gleichung (26.) i. d. Z. bewieſenen Satze

$$a^2 b^2 C^2 = pqr .$$

Sind nun alle drei Wurzeln reell; ſo können dieſelben, weil $a^2 b^2 C^2$ niemals negativ ſeyn kann, nicht alle drei negativ ſeyn, ſondern mindeſtens eine derſelben muß jederzeit poſitiv ſeyn, kann aber auch, wenn $C = 0$ iſt, verſchwinden. Sind ferner zwei Wurzeln, z. B. p, q, imaginär, die dritte r dagegen reell; ſo ſind nach dem im Artikel Gleichung (19.) i. d. Z. bewieſenen Satze die beiden imaginären Wurzeln jederzeit von der Form

$$p = m + n\sqrt{-1},\ q = m - n\sqrt{-1} ,$$

und das Product

$$pq = (m + n\sqrt{-1})(m - n\sqrt{-1}) = m^2 + n^2$$

iſt folglich ſtets poſitiv. Daher muß in dieſem Falle, weil $a^2 b^2 C^2$ niemals negativ iſt, die reelle Wurzel r jederzeit poſitiv oder $= 0$ ſeyn, welches Letztere in dieſem Falle jederzeit Statt finden wird, wenn $C = 0$ iſt und das letzte Glied unſerer Gleichung alſo verſchwindet. Aus dieſen Betrachtungen geht hervor, daß die Gleichung (11.) jederzeit mindeſtens eine relle Wurzel hat, welche entweder poſitiv, oder, wenn C verſchwindet, $= 0$ iſt. Dieſe reelle nicht negative Wurzel wollen wir im Folgenden durch g bezeichnen.

II. Zieht man von der Gleichung (10.), die man auch auf folgende Art ſchreiben kann:

$$\frac{A^2 x}{a^2 + x} + \frac{B^2 x}{b^2 + x} + C^2 = x ,$$

die Gleichung

$$\frac{A^2 g}{a^2 + g} + \frac{B^2 g}{b^2 + g} + C^2 = g ,$$

ab, und dividirt die dadurch hervorgehende Gleichung durch $x - g$; ſo ergiebt ſich die quadratiſche Gleichung

$$\frac{a^2 A^2}{(a^2 + x)(a^2 + g)} + \frac{b^2 B^2}{(b^2 + x)(b^2 + g)} = 1 .$$

Löſt man nun dieſe Gleichung nach gewöhnlicher Methode auf; ſo erhält man für die beiden andern Wurzeln der Gleichung (11.) folgenden Ausdruck:

$$2x = \frac{a^2 A^2}{a^2 + g} + \frac{b^2 B^2}{b^2 + g} - a^2 - b^2$$
$$\pm \sqrt{\left(a^2 - b^2 - \frac{a^2 A^2}{a^2 + g} + \frac{b^2 B^2}{b^2 + g}\right)^2 + \frac{4a^2 b^2 A^2 B^2}{(a^2 + g)(b^2 + g)}} ,$$

und ſieht hieraus, indem man ſich zugleich erinnert, daß g nicht negativ iſt, daß auch die beiden andern Wurzeln der Gleichung (11.) reell ſind, ſo daß alſo dieſe Gleichung jederzeit drei reelle Wurzeln, und unter denſelben immer mindeſtens eine nicht negative, vorher durch g bezeichnete, Wurzel hat.

III. Zieht man aber die beiden ſchon vorher von einander ſubtrahirten Gleichungen, indem man dieſelben jetzt nur auf folgende Art ſchreibt:

$$\frac{A^2gx}{a^2+x}+\frac{B^2gx}{b^2+x}+C^2g=gx\,,$$

$$\frac{A^2gx}{a^2+g}+\frac{B^2gx}{b^2+g}+C^2x=gx\,,$$

wieder von einander ab, und dividirt die hervorgehende Gleichung durch $g-x$; ſo erhält man die quadratiſche Gleichung

$$\frac{A^2gx}{(a^2+g)(a^2+x)}+\frac{B^2gx}{(b^2+g)(b^2+x)}+C^2=0\,,$$

deren Wurzeln natürlich ebenfalls mit den beiden Wurzeln, welche die Gleichung (11.) außer der Wurzel g noch hat, einerlei ſind. Da aber g bekanntlich nicht negativ iſt; ſo iſt klar, daß ſich der vorſtehenden Gleichung durch keinen poſitiven Werth von x genügen läßt, und daß alſo die Gleichung (11.) nie mehr als eine poſitive reelle Wurzel haben kann.

IV. Wenn alſo C nicht $=0$ iſt; ſo hat die Gleichung (11.) jederzeit eine poſitive und zwei negative reelle Wurzeln. Iſt aber $C=0$ und folglich auch eine Wurzel der in Rede ſtehenden Gleichung $=0$; ſo ſind die beiden andern Wurzeln derſelben in der quadratiſchen Gleichung

$$x^2-(A^2+B^2-a^2-b^2)x+a^2b^2-a^2B^2-b^2A^2=0$$

enthalten, und werden alſo, wie man durch Auflöſung dieſer quadratiſchen Gleichung findet, durch folgende Formel gegeben:

$$x=\tfrac{1}{2}(A^2+B^2-a^2-b^2)\pm\sqrt{(A^2-B^2-a^2+b^2)^2+4A^2B^2}\,,$$

wo nun nach Gauß wieder die drei folgenden Fälle zu unterſcheiden ſind.

1. Wenn das letzte Glied

$$a^2b^2-a^2B^2-b^2A^2$$

unſerer quadratiſchen Gleichung poſitiv und nicht $=0$ iſt; ſo ſind die Wurzeln derſelben, die, wie wir ſchon aus dem Vorhergehenden wiſſen, reell ſind, aber nicht beide poſitiv ſeyn können, beide negativ, weil das letzte Glied bekanntlich das Product der beiden Wurzeln iſt, und dieſelben daher in dieſem Falle, wo das letzte Glied nach der Vorausſetzung poſitiv iſt, nothwendig einerlei Vorzeichen haben müſſen. Uebrigens erhellet dies auch, wie Gauß noch bemerkt, auf folgende Art. Der Coefficient

$$-(A^2+B^2-a^2-b^2)$$

des zweiten Gliedes läßt ſich nämlich, wie leicht erhellet, unter der Form

$$(a^2 b^2 - a^2 B^2 - b^2 A^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{b^2 A^2}{a^2} + \frac{a^2 B^2}{b^2}$$

darſtellen, und iſt alſo in dem vorliegenden Falle, wo nach der Vorausſetzung

$$a^2 b^2 - a^2 B^2 - b^2 A^2$$

poſitiv iſt, offenbar jederzeit poſitiv. Da nun dieſer Coefficient nach dem im Artikel Gleichung (26.) i. d. Z. bewieſenen Satze die Summe der beiden mit entgegengeſetzten Vorzeichen genommenen Wurzeln iſt, und die Wurzeln, weil das letzte Glied poſitiv iſt, nothwendig einerlei Vorzeichen haben müſſen; ſo iſt klar, daß dieſelben beide negativ ſind.

2. Wenn das letzte Glied

$$a^2 b^2 - a^2 B^2 - b^2 A^2$$

negativ iſt; ſo iſt, wie auf der Stelle erhellet, eine der beiden Wurzeln poſitiv, die andere dagegen negativ.

3. Wenn endlich das letzte Glied

$$a^2 b^2 - a^2 B^2 - b^2 A^2$$

verſchwindet; ſo iſt jederzeit eine der beiden Wurzeln der quadratiſchen Gleichung $= 0$, und die andere iſt, wie ſich aus dem Vorhergehenden leicht, am leichteſten aus der in 1. benutzten beſondern Darſtellung des Coefficienten des zweiten Gliedes ergiebt, =

$$-\frac{b^2 A^2}{a^2} - \frac{a^2 B}{b^2},$$

folglich negativ, ſo daß alſo in dieſem Falle die cubiſche Gleichung (11.) zwei verſchwindende und eine negative Wurzel hat.

8. Wenn man die drei erſten der Gleichungen **VII** mit den Gleichungen 1., 2., 4., 5., 7., 8. verbindet; ſo erhält man für die Größen γ, γ', γ'' leicht die folgenden Ausdrücke:

$$12.\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{aA}{a^2 + G}\right)^2 - \left(\frac{bB}{b^2 + G}\right)^2}},$$

$$13.\quad \gamma' = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{aA}{a^2 - G'}\right)^2 + \left(\frac{bB}{b^2 - G'}\right)^2 - 1}},$$

$$14.\quad \gamma'' = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{aA}{a^2 - G''}\right)^2 + \left(\frac{bB}{b^2 - G''}\right)^2 - 1}}.$$

Dieſe drei Ausdrücke laſſen ſich aber auch auf folgende Form bringen:

$$\gamma = \int \frac{G}{G - \left(\frac{aA}{a^2+G}\right)^2 . G - \left(\frac{bB}{b^2+G}\right)^2 . G},$$

$$\gamma' = \int \frac{G'}{\left(\frac{aA}{a^2-G'}\right)^2 . G' + \left(\frac{bB}{b^2-G'}\right)^2 . G' - G'},$$

$$\gamma'' = \int \frac{G''}{\left(\frac{aA}{a^2-G''}\right)^2 . G'' + \left(\frac{bB}{b^2-G''}\right)^2 . G'' - G''},$$

und nach den Gleichungen 3., 6., 9. iſt:

$$G = \frac{A^2 G}{a^2+G} + \frac{B^2 G}{b^2+G} + C^2,$$

$$G' = \frac{A^2 G'}{a^2-G'} + \frac{B^2 G'}{b^2-G'} - C^2,$$

$$G'' = \frac{A^2 G''}{a^2-G''} + \frac{B^2 G''}{b^2-G''} - C^2.$$

Alſo iſt, wenn wir der Kürze wegen

$$\gamma = \int \frac{G}{N},\ \gamma' = \int \frac{G'}{N'},\ \gamma'' = \int \frac{G''}{N''}$$

ſetzen,

$$N = \frac{A^2 G}{a^2+G} + \frac{B^2 G}{b^2+G} + C^2 - \left(\frac{aA}{a^2+G}\right)^2 . G - \left(\frac{bB}{b^2+G}\right)^2 . G$$

$$= \left(\frac{AG}{a^2+G}\right)^2 + \left(\frac{BG}{b^2+G}\right)^2 + C^2,$$

$$N' = \left(\frac{aA}{a^2-G'}\right)^2 . G' + \left(\frac{bB}{b^2-G'}\right)^2 . G' - \frac{A^2 G'}{a^2-G'} - \frac{B^2 G'}{b^2-G'} + C^2$$

$$= \left(\frac{AG'}{a^2-G'}\right)^2 + \left(\frac{BG'}{b^2-G'}\right)^2 + C^2,$$

$$N'' = \left(\frac{aA}{a^2-G''}\right)^2 . G'' + \left(\frac{bB}{b^2-G''}\right)^2 . G'' - \frac{A^2 G''}{a^2-G''} - \frac{B^2 G''}{b^2-G''} + C^2$$

$$= \left(\frac{AG''}{a^2-G''}\right)^2 + \left(\frac{BG''}{b^2-G''}\right)^2 + C^2,$$

und folglich

$$15.\ \gamma = \int \frac{G}{\left(\frac{AG}{a^2+G}\right)^2 + \left(\frac{BG}{b^2+G}\right)^2 + C^2},$$

$$16.\ \gamma' = \int \frac{G'}{\left(\frac{AG'}{a^2-G'}\right)^2 + \left(\frac{BG'}{b^2-G'}\right)^2 + C^2},$$

$$17.\ \gamma'' = \int \frac{G''}{\left(\frac{AG''}{a^2-G''}\right)^2 + \left(\frac{BG''}{b^2-G''}\right)^2 + C^2}.$$

Aus dieſen Ausdrücken erhellet auf der Stelle, daß, wenn die Größen γ, γ', γ'' ſämmtlich reell ſeyn ſollen, keine der Größen G, G′, G″ negativ ſeyn darf. Iſt nun

I. C nicht $=0$; ſo muß man, wobei man ſich zu erinnern hat, daß G, — G′, — G″ die drei Wurzeln der Gleichung 10. ſind, für G offenbar die poſitive, für —G′ dagegen die eine, und für —G″ die andere negative Wurzel dieſer Gleichung ſetzen, wobei es an ſich willkührlich iſt, welche der beiden negativen Wurzeln man für — G′, und welche man für —G″ ſetzt. Nur könnte hier noch die Frage entſtehen, ob es nicht vielleicht verſtattet wäre, für — G′ und —G″ ein und dieſelbe negative Wurzel der Gleichung 10. zu ſetzen, wobei denn die andere negative Wurzel dieſer Gleichung ganz unberückſichtigt bleiben würde. Wollte man aber auf dieſe Weiſe verfahren; ſo würde $-G' = -G''$, und folglich, wie ſich aus den Gleichungen 16., 17., 4., 5., 7., 8. ergiebt,

$$\gamma' = \pm\gamma'', \quad \alpha' = \pm\alpha'', \quad \beta' = \pm\beta'';$$

alſo

$$\pm\alpha'\alpha'' \pm \beta'\beta'' \mp \gamma'\gamma'' = \alpha'\alpha' + \beta'\beta' - \gamma'\gamma',$$

d. i. nach der zweiten der Gleichungen VII

$$\pm\alpha'\alpha'' \pm \beta'\beta'' \mp \gamma'\gamma'' = 1$$

ſeyn, da doch nach der vierten in derſelben Reihe von Gleichungen

$$\pm\alpha'\alpha'' \pm \beta'\beta'' \mp \gamma'\gamma'' = 0$$

iſt, ſo daß man alſo für —G′ und —G″ nie ein und dieſelbe negative Wurzel der Gleichung 10. oder 11. ſetzen darf. Der Fall, wo die beiden negativen Wurzeln dieſer Gleichung einander gleich ſind, wird nachher beſonders betrachtet werden.

II. Wenn C $=0$ iſt; ſo hat man wieder die drei folgenden Fälle zu unterſcheiden, wobei wir auf (7. IV.) zurückweiſen.

1. Wenn

$$a^2b^2 - a^2B^2 - b^2A^2$$

poſitiv und nicht $=0$ iſt; ſo hat man G $=0$ und für —G′ und —G″ die beiden negativen Wurzeln zu ſetzen, welche in dieſem Falle die Gleichung 10. oder 11. jederzeit hat. Da aber dann der Ausdruck 15. von γ unbeſtimmt wird; ſo hat man in dieſem Falle den Ausdruck 12. von γ beizubehalten, nämlich

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{A^2}{a^2} - \frac{B^2}{b^2}}}$$

zu ſetzen. Weil nach der Vorausſetzung

$$a^2b^2 - a^2B^2 - b^2A^2$$

poſitiv und nicht $=0$ iſt; ſo iſt natürlich auch

$$1-\frac{A^2}{a^2}-\frac{B^2}{b^2}$$

poſitiv und nicht $=0$.

2. Wenn

$$a^2b^2-a^2B^2-b^2A^2$$

negativ iſt; ſo hat man für G die poſitive Wurzel der Gleichung 10. oder 11., und entweder die negative Wurzel $=-G'$ und $G''=0$, oder die negative Wurzel $=-G''$ und $G'=0$ zu ſetzen. Im erſten Falle wird γ'', im zweiten γ' durch die Formel

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}-1}}$$

gefunden. Da nach der Vorausſetzung

$$a^2b^2-a^2B^2-b^2A^2$$

negativ iſt; ſo iſt auch

$$1-\frac{A^2}{a^2}-\frac{B^2}{b^2}$$

negativ, oder

$$\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}-1$$

poſitiv und nicht $=0$.

3. Wenn

$$a^2b^2-a^2B^2-b^2A^2=0$$

iſt; ſo iſt auch

$$1-\frac{A^2}{a^2}-\frac{B^2}{b^2}=\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}-1=0,$$

und es erhellet alſo, daß in dieſem Falle entweder γ und γ' oder γ und γ'' unendlich werden, woraus man ſchließt, daß in dieſem Falle die Transformation, von der hier überhaupt die Rede iſt, nicht möglich iſt, weshalb dieſer Fall auch von der fernern Betrachtung ganz ausgeſchloſſen werden ſoll. Daß keine der beiden Größen a, b null ſeyn ſoll, iſt ſchon oben vorausgeſetzt worden.

9. Gauß giebt nun für die Größen $\gamma, \gamma', \gamma''$ noch andere Ausdrücke, die ebenfalls ſehr merkwürdig ſind, und daher hier auch noch entwickelt werden ſollen. Multiplicirt man nämlich die Gleichung

$$\frac{A^2}{a^2+G}+\frac{B^2}{b^2+G}+\frac{C^2}{G}=1$$

mit $a^2b^2-G^2$; ſo erhält man

$$\frac{A^2(a^2b^2-G^2)}{a^2+G}+\frac{B^2(a^2b^2-G^2)}{b^2+G}+\frac{a^2b^2C^2}{G}-C^2G$$
$$=a^2b^2-G^2,$$

oder

$$\frac{A^2\{a^2(b^2+G)-(a^2+G)G\}}{a^2+G}+\frac{B^2\{b^2(a^2+G)-(b^2+G)G\}}{b^2+G}$$
$$+\frac{a^2b^2C^2}{G}-C^2G=a^2b^2-G^2,$$

oder

$$\frac{a^2A^2(b^2+G)}{a^2+G}-A^2G+\frac{b^2B^2(a^2+G)}{b^2+G}-B^2G+\frac{a^2b^2C^2}{G}-C^2G$$
$$=a^2b^2-G^2.$$

Weil aber G, $-G'$, $-G''$ die Wurzeln der Gleichung 11. ſind; ſo iſt nach dem im Artikel Gleichung (26.) i. d. Z. bewieſenen Satze

$$G-G'-G''=A^2+B^2+C^2-a^2-b^2,\ GG'G''=a^2b^2C^2,$$

und die vorhergehende Gleichung geht alſo, wie leicht erhellet, in folgende über:

$$\frac{a^2A^2(b^2+G)}{a^2+G}+\frac{b^2B^2(a^2+G)}{b^2+G}+G'G''-G(G-G'-G''+a^2+b^2)$$
$$=a^2b^2-G^2,$$

die aber ſehr leicht auf folgende Form gebracht werden kann:

$$\frac{a^2A^2(b^2+G)}{a^2+G}+\frac{b^2B^2(a^2+G)}{b^2+G}-(a^2+G)(b^2+G)$$
$$+(G+G')(G+G'')=0.$$

Dividirt man nun mit

$$(a^2+G)(b^2+G);$$

ſo erhält man

$$\left(\frac{aA}{a^2+G}\right)^2+\left(\frac{bB}{b^2+G}\right)^2-1+\frac{(G+G')(G+G'')}{(a^2+G)(b^2+G)}=0$$

oder

$$1-\left(\frac{aA}{a^2+G}\right)^2-\left(\frac{bB}{b^2+G}\right)^2=\frac{(G+G')(G+G'')}{(a^2+G)(b^2+G)},$$

$$\frac{1}{1-\left(\frac{aA}{a^2+G}\right)^2-\left(\frac{bB}{b^2+G}\right)^2}=\frac{(a^2+G)(b^2+G)}{(G+G')(G+G'')},$$

und folglich nach 12.

$$\gamma=\sqrt{\frac{(a^2+G)(b^2+G)}{(G+G')(G+G'')}}.$$

Wendet man nun auch auf die Gleichungen 6. und 9. ein ganz ähnliches Verfahren an; ſo erhält man überhaupt für $\gamma, \gamma', \gamma''$ die drei folgenden höchſt merkwürdigen Ausdrücke:

$$18.\quad \gamma=\sqrt{\frac{(a^2+G)(b^2+G)}{(G+G')(G+G'')}},$$

$$19.\quad \gamma'=\sqrt{\frac{(a^2-G')(b^2-G')}{(G+G')(G''-G')}},$$

$$20.\quad \gamma'' = \sqrt{\frac{(a^2 - G'')(b^2 - G'')}{(G + G'')(G' - G'')}},$$

und es erhellet leicht, daß dieſe Ausdrücke zur Berechnung von γ, γ', γ'' vorzüglich bequem ſind.

Da man nun γ, γ', γ'' hat; ſo iſt es auch leicht, die Größen α, α', α'',; β, β', β'' mittelſt der Gleichungen 1., 4., 7., 2., 5., 8. zu finden.

10. Aus dem Vorhergehenden laſſen ſich noch mehrere andere Relationen ableiten, von denen wir die bemerkenswertheſten ebenfalls mittheilen wollen. Da nämlich G, $-G'$, $-G''$ die drei Wurzeln der Gleichung 11. ſind; ſo iſt nach dem im Artikel Gleichung (26.) i. d. Z. bewieſenen Satze

$$G - G' - G'' = A^2 + B^2 + C^2 - a^2 - b^2,$$

$$-GG' - GG'' + G'G'' = a^2b^2 - a^2B^2 - a^2C^2 - b^2A^2 - b^2C^2,$$

$$GG'G'' = a^2b^2C^2.$$

Durch Entwickelung der Producte

$$(a^2 + G)(a^2 - G')(a^2 - G'') \text{ und } (b^2 + G)(b^2 - G')(b^2 - G'')$$

ergiebt ſich aber leicht:

$$(a^2 + G)(a^2 - G')(a^2 - G'')$$
$$= a^6 + a^4(G - G' - G'') - a^2(GG' + GG'' - G'G'') + GG'G'',$$
$$(b^2 + G)(b^2 - G')(b^2 - G'')$$
$$= b^6 + b^4(G - G' - G'') - b^2(GG' + GG'' - G'G'') + GG'G'',$$

und folglich, wenn man die vorher gefundenen Werthe von

$$G - G' - G'',\ GG' + GG'' - G'G'',\ GG'G''$$

ſubſtituirt:

$$21.\quad (a^2 + G)(a^2 - G')(a^2 - G'') = a^2(a^2 - b^2)A^2,$$
$$22.\quad (b^2 + G)(b^2 - G')(b^2 - G'') = -b^2(a^2 - b^2)B^2.$$

Alſo iſt

$$23.\quad (a^2 - G')(a^2 - G'')(b^2 - G')(b^2 - G'') = -\frac{a^2b^2(a^2 - b^2)^2A^2B^2}{(a^2 + G)(b^2 + G)}.$$

Nun iſt nach der dritten der Gleichungen II:

$$\varepsilon\gamma = \alpha'\beta'' - \beta'\alpha'',$$

und folglich nach den Gleichungen 4., 5., 7., 8.

$$24.\quad \varepsilon\gamma = \frac{ab\,AB\,\gamma'\gamma''}{(a^2 - G')(b^2 - G'')} - \frac{ab\,AB\,\gamma'\gamma''}{(a^2 - G'')(b^2 - G')}$$
$$= \frac{ab(a^2 - b^2)AB(G'' - G')\gamma'\gamma''}{(a^2 - G')(a^2 - G'')(b^2 - G')(b^2 - G'')};$$

alſo nach 23.

$$25.\quad \varepsilon\gamma = \frac{(a^2 + G)(b^2 + G)(G' - G'')\gamma'\gamma''}{ab(a^2 - b^2)AB}.$$

Nun iſt aber nach 18.

$$\frac{(a^2+G)(b^2+G)}{(G+G')(G+G'')} = \gamma^2 .$$

Multiplicirt man alſo hiermit die vorhergehende Gleichnng; ſo erhält man

$$\frac{\varepsilon}{(G+G')(G+G'')} = \frac{(G'-G'')\gamma\gamma'\gamma''}{ab(a^2-b^2)AB},$$

oder

$$\gamma\gamma'\gamma'' = \frac{\varepsilon ab(a^2-b^2)AB}{(G+G')(G+G'')(G'-G'')} .$$

Aus den Gleichungen, 1., 4., 7. und 2., 5., 8. folgt ferner

$$\alpha\alpha'\alpha'' = \frac{a^3 A^3 \gamma\gamma'\gamma''}{(a^2+G)(a^2-G')(a^2-G'')},$$

$$\beta\beta'\beta'' = \frac{b^3 B^3 \gamma\gamma'\gamma''}{(b^2+G)(b^2-G')b^2-G'')} .$$

Folglich iſt nach 21. und 22.

$$\alpha\alpha'\alpha'' = \frac{aA\gamma\gamma'\gamma''}{a^2-b^2},\quad \beta\beta'\beta'' = -\frac{bB\gamma\gamma'\gamma''}{a^2-b^2},$$

in welche Formeln man nun noch den Werth von $\gamma\gamma'\gamma''$ aus dem Vorhergehenden ſubſtituiren kann, ſo daß wir alſo jetzt überhaupt die drei folgenden Relationen haben:

26. $$\alpha\alpha'\alpha'' = \frac{\varepsilon a^2 b A^2 B}{(G+G')(G+G'')(G'-G'')},$$

27. $$\beta\beta'\beta'' = -\frac{\varepsilon a b^2 A B^2}{(G+G')(G+G'')(G'-G'')},$$

28. $$\gamma\gamma'\gamma'' = \frac{\varepsilon ab(a^2-b^2)AB}{(G+G')(G+G'')(G'-G'')},$$

aus denen ſich auch noch

29. $\frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\beta\beta'\beta''} = -\frac{aA}{bB}$, 30. $\frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\gamma\gamma'\gamma''} = \frac{aA}{a^2-b^2}$, 31. $\frac{\beta\beta'\beta''}{\gamma\gamma'\gamma''} = -\frac{bB}{a^2-b^2}$

ergiebt.

Endlich erhalten wir auch noch aus 1., 2., 4., 5., 7., 8. und 18., 19., 20. leicht:

32. $$\alpha\beta = \frac{abAB}{(G+G')(G+G'')},$$

33. $$\alpha'\beta' = -\frac{abAB}{(G+G')(G'-G'')},$$

34. $$\alpha''\beta'' = \frac{abAB}{(G+G'')(G'-G'')}.$$

Mit welchen Vorzeichen man die Wurzelgrößen nimmt, durch welche die Größen γ, γ', γ'' dargeſtellt werden, iſt, wie leicht erhellet, an ſich willkürlich. Von Wichtigkeit iſt es aber, den Zuſammenhang des Vorzeichens der Größe ε, welche bekanntlich

$= \pm 1$ iſt, mit den Vorzeichen der Größen $\gamma, \gamma', \gamma''$ zu kennen, und in dieſer Beziehung iſt die vorher gefundene Gleichung

$$\gamma\gamma'\gamma'' = \frac{\varepsilon a b (a^2 - b^2) AB}{(G + G')(G + G'')(G' - G'')}$$

von beſonderer Bedeutung, indem, wie auf der Stelle in die Augen fällt, mittelſt derſelben über das Vorzeichen, mit welchem ε zu nehmen iſt, wenn die Vorzeichen von $\gamma, \gamma', \gamma''$ beſtimmt ſind, immer ſicher entſchieden werden kann.

11. Es ſind nun noch einige Fälle beſonders zu betrachten, in denen die vorher gefundenen Formeln unbeſtimmt werden. Dabei wollen wir, ſo wie von jetzt an immer, $a^2 - b^2 \geqq 0$ ſetzen. Daß dies verſtattet iſt, erhellet auf der Stelle, indem man, wenn $a^2 - b^2 < 0$ wäre, $E = \frac{1}{2}\pi - E'$, $\partial E = -\partial E'$, $\cos E = \sin E'$, $\sin E = \cos E'$ ſetzen könnte, wodurch die Größe

$$\sqrt{(A - a\cos E)^2 + (B - b\sin E)^2 + C^2}$$

in

$$\sqrt{(B - b\cos E')^2 + (A - a\sin E') + C^2}$$

übergehen würde, eine Größe von völlig einerlei Form mit der vorhergehenden, in der nun aber $b^2 - a^2 > 0$ iſt.

Dies vorausgeſetzt, betrachten wir nun zuerſt den Fall, wenn die beiden negativen Wurzeln $-G'$, $-G''$ der cubiſchen Gleichung einander gleich ſind, in welchem die Ausdrücke 19. und 20. von γ' und γ'' unendlich zu ſeyn ſcheinen, in der That aber bloß unbeſtimmt ſind, wie auf folgende Art gezeigt werden kann. Setzen wir in dem in (7. II.) für $2x$ gefundenen Ausdrucke G für g; ſo wird derſelbe

$$2x = \frac{a^2 A^2}{a^2 + G} + \frac{b^2 B^2}{b^2 + G} - a^2 - b^2$$

$$\pm \sqrt{\left(a^2 - b^2 - \frac{a^2 A^2}{a^2 + G} + \frac{b^2 B^2}{b^2 + G}\right)^2 + \frac{4a^2 b^2 A^2 B^2}{(a^2 + G)(b^2 + G)}}.$$

Sollen nun die ſich hieraus ergebenden beiden Werthe von x, d. i. die Größen $-G'$ und $-G''$ einander gleich ſeyn; ſo muß nothwendig

$$\frac{4a^2 b^2 A^2 B^2}{(a^2 + G)(b^2 + G)} = 0, \quad a^2 - b^2 - \frac{a^2 A^2}{a^2 + G} + \frac{b^2 B^2}{b^2 + G} = 0;$$

d. i., weil keine der beiden Größen a, b null ſeyn darf,

$$AB = 0, \quad a^2 - b^2 - \frac{a^2 A^2}{a^2 + G} + \frac{b^2 B^2}{b^2 + G} = 0$$

ſeyn. Wäre nun B nicht $= 0$; ſo wäre wegen der erſten Gleichung $A = 0$, und folglich wegen der zweiten Gleichung

$$a^2 - b^2 + \frac{b^2 B^2}{b^2 + G} = 0,$$

welches ungereimt iſt, da $a^2 - b^2 \geqq 0$ und $b^2 > 0$ iſt. Alſo iſt jederzeit

$$B = 0,\ a^2 - b^2 - \frac{a^2 A^2}{a^2 + G} = 0\ ;$$

oder

$$B = 0,\ \frac{a^2 A^2}{a^2 + G} = a^2 - b^2\ .$$

Führt man dieſe beiden Ausdrücke in den obigen Ausdruck von 2x ein; ſo erhält man $x = - b^2$, d. i.

$$G' = G'' = b^2\ .$$

Um G zu finden, hat man nach (10.), weil hier $B = 0$ iſt, die beiden Gleichungen

$$G - G' - G'' = A^2 + C^2 - a^2 - b^2$$

und

$$GG'G'' = a^2 b^2 C^2\ .$$

Aus dieſen beiden Gleichungen ergiebt ſich, wenn man $G' = G'' = b^2$ ſetzt,

$$G = A^2 + C^2 - a^2 + b^2,\ G = \frac{a^2 C^2}{b^2}\ ,$$

und hieraus folgt:

$$A^2 + C^2 - a^2 + b^2 = \frac{a^2 C^2}{b^2}\ ,$$

d. i.

$$(a^2 - b^2)(C^2 + b^2) = b^2 A^2\ .$$

Dieſe Gleichung muß alſo nebſt der Gleichung $B = 0$ erfüllt ſeyn, wenn der Fall, den wir hier betrachten, überhaupt eintreten ſoll.

Weil nun

$$a^2 + G = \frac{a^2(C^2 + b^2)}{b^2},\ b^2 + G = \frac{a^2 C^2 + b^4}{b^2},\ G + G' = G + G'' = \frac{a^2 C^2 + b^4}{b^2}$$

iſt; ſo ergiebt ſich aus der Gleichung 18.

$$\gamma = \sqrt{\frac{a^2(C^2 + b^2)}{a^2 C^2 + b^4}}\ ,$$

und endlich erhält man auch leicht nach 1. und 2.

$$\alpha = \sqrt{\frac{b^4 A^2}{(C^2 + b^2)(a^2 C^2 + b^2)}} = \sqrt{\frac{b^2(a^2 - b^2)}{a^2 C^2 + b^4}},\ \beta = 0\ .$$

Weil

$$b^2 - G' = b^2 - G'' = G' - G'' = 0$$

iſt; ſo bleiben in dieſem Falle, wie aus den Formeln 19. und 20. erhellet, die Werthe von γ', γ'', ſo wie auch die Werthe von α', β', α'', β'', unbeſtimmt. Man kann aber jederzeit durch einen dieſer Coefficienten alle übrigen beſtimmen, wie ſich auf folgende Art zeigen läßt. Weil $\beta = 0$ iſt, ſo iſt nach den Gleichungen VII

$$\gamma\gamma = 1 + \alpha\alpha,\ \alpha\alpha' = \gamma\gamma'\ .$$

Ferner iſt auch

$$\alpha'\alpha' + \beta'\beta' - \gamma'\gamma' = 1 .$$

Alſo iſt

$$\beta'\beta' + \frac{\gamma'\gamma'}{\alpha\alpha} = 1 - \alpha'\alpha' + \gamma'\gamma' + \frac{\gamma'\gamma'}{\alpha\alpha}$$

$$= 1 - \alpha'\alpha' + \frac{1 + \alpha\alpha}{\alpha\alpha} . \gamma'\gamma' = 1 - \alpha'\alpha' + \frac{\gamma\gamma\gamma'\gamma'}{\alpha\alpha}$$

$$= 1 - \alpha'\alpha' + \frac{\alpha\alpha\alpha'\alpha'}{\alpha\alpha} = 1 - \alpha'\alpha' + \alpha'\alpha' = 1 .$$

Folglich kann man

$$\beta' = \cos f, \quad \gamma' = \alpha \sin f$$

und

$$\alpha' = \gamma \frac{\gamma'}{\alpha} = \gamma \sin f$$

ſetzen. Dann folgt aus den aus dem Obigen bekannten Formeln

$$\varepsilon\alpha'' = \beta\gamma' - \gamma\beta', \quad \varepsilon\beta'' = \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \quad \varepsilon\gamma'' = \beta\alpha' - \alpha\beta', \quad \varepsilon\varepsilon = 1 ,$$

weil hier $\beta = 0$ und $\gamma\gamma - \alpha\alpha = 1$ iſt, leicht:

$$\alpha'' = - \varepsilon\gamma \cos f, \quad \beta'' = \varepsilon \sin f, \quad \gamma'' = \varepsilon\alpha \cos f ,$$

ſo daß man alſo zur Beſtimmung von β', α', γ', α'', β'', γ'' folgende Formeln hat:

$$\beta' = \cos f, \quad \alpha' = \gamma \sin f, \quad \gamma' = \alpha \sin f ;$$

$$\alpha'' = - \varepsilon\gamma \cos f, \quad \beta'' = \varepsilon \sin f, \quad \gamma'' = \varepsilon\alpha \cos f .$$

Der Winkel f kann hier willkührlich angenommen werden, und man kann auch nach Belieben $\varepsilon = + 1$ oder $\varepsilon = - 1$ ſetzen.

Wenn G' und G'' ungleich ſind; ſo werden die Coefficienten γ, γ', γ'' durch die Formeln 18., 19., 20. offenbar völlig beſtimmt. Verſchwindet aber eine der Größen $a^2 - G'$, $b^2 - G'$, $a^2 - G''$, $b^2 - G''$; ſo ſcheint reſpective der Coefficient α', β', α'', β'' durch die Formeln 4., 5., 7., 8. nicht beſtimmt zu werden. Dieſe Coefficienten laſſen ſich aber in dieſem Falle auf folgende Art beſtimmen. Iſt z. B. $a^2 - G' = 0$ und folglich, wie aus 19. erhellet, $\gamma' = 0$; ſo iſt nach 5., wenn a^2 nicht $= b^2$ iſt, $\beta' = 0$, und folglich nach der zweiten der Gleichungen VII $\alpha = \pm 1$. Iſt aber $a^2 = b^2$; ſo folgt aus der Gleichung

$$- \gamma'(AA + BB + CC) - \alpha' a A - \beta' b B = \gamma' G' ,$$

die ganz auf dieſelbe Art wie die Gleichung

$$\gamma(AA + BB + CC) - \alpha a A - \beta b B = \gamma G ,$$

welche in (6.) ausführlich entwickelt worden iſt, gefunden wird, daß

$$\alpha' A + \beta' B = 0$$

iſt. Verbindet man nun dieſe Gleichung mit der Gleichung

$$\alpha'\alpha' + \beta'\beta' = 1 ;$$

ſo erhält man

$$\alpha' = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \beta' = -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

wodurch, wenn **A** und **B** nicht zugleich verſchwinden, α' und β' völlig beſtimmt ſind. Iſt aber zugleich $A=0$, $B=0$; ſo iſt, weil $a^2=b^2$ iſt,

$$B = 0 \text{ und } (a^2-b^2)(C^2+b^2) = b^2 A^2,$$

und wir haben alſo dann wieder den ſchon vorher ausführlich betrachteten Fall.

12. Nachdem wir gezeigt haben, wie ſich die Größen **G**, **G′**, **G″**; α, α', α''; β, β', β''; γ, γ', γ'' in allen Fällen beſtimmen laſſen, gehen wir nun zur Entwickelung des Differentials ∂E über, und ſetzen zu dem Ende wieder

$$35.\quad t = \gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T,$$
$$36.\quad t\cos E = \alpha + \alpha' \cos T + \alpha'' \sin T,$$
$$37.\quad t\sin E = \beta + \beta' \cos T + \beta'' \sin T.$$

Aus 36. und 37. folgt

$$-t\sin E\,\partial E + \cos E\,\partial t = -\alpha' \sin T\,\partial T + \alpha'' \cos T\,\partial T,$$
$$t\cos E\,\partial E + \sin E\,\partial t = -\beta' \sin T\,\partial T + \beta'' \cos T\,\partial T.$$

Multiplicirt man nun die erſte dieſer beiden Gleichungen mit $\sin E$, die zweite mit $\cos E$, und zieht dann die erſte Gleichung von der zweiten ab; ſo erhält man

$$t\,\partial E = \cos E(\beta'' \cos T - \beta' \sin T)\,\partial T - \sin E(\alpha'' \cos T - \alpha' \sin T)\,\partial T,$$

und folglich, wenn man mit t auf beiden Seiten multiplicirt und für $t\cos E$ und $t\sin E$ ihre Ausdrücke aus 36. und 37. ſetzt:

$$\begin{aligned} t^2\,\partial E &= (\alpha + \alpha' \cos T + \alpha'' \sin T)(\beta'' \cos T - \beta' \sin T)\,\partial T \\ &\quad - (\beta + \beta' \cos T + \beta'' \sin T)(\alpha'' \cos T - \alpha' \sin T)\,\partial T \\ &= (\beta''\alpha - \alpha''\beta) \cos T\,\partial T + (\beta\alpha' - \alpha\beta') \sin T\,\partial T \\ &\quad + (\beta''\alpha' - \alpha''\beta')(\sin T^2 + \cos T^2)\,\partial T, \end{aligned}$$

und folglich nach der ſechſten, neunten und dritten der Gleichungen **II**

$$\begin{aligned} t^2\,\partial E &= \varepsilon\gamma' \cos T\,\partial T + \varepsilon\gamma'' \sin T\,\partial T + \varepsilon\gamma\,\partial T \\ &= \varepsilon(\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T)\,\partial T, \end{aligned}$$

d. i. nach 35.

$$t^2\,\partial E = \varepsilon t\,\partial T,$$

oder

$$38.\quad t\,\partial E = \varepsilon\,\partial T.$$

Weil

$$\begin{aligned} (\gamma' \cos T + \gamma'' \sin T)^2 &+ (\gamma'' \cos T - \gamma' \sin T)^2 \\ &= \gamma'\gamma' + \gamma''\gamma'' = \gamma\gamma - 1 \end{aligned}$$

iſt; ſo iſt die Größe

$$\gamma' \cos T + \gamma'' \sin T$$

ohne Rückſicht auf das Vorzeichen offenbar immer kleiner wie γ, und das Vorzeichen der Größe t hängt alſo immer bloß von dem Vorzeichen von γ ab, oder γt iſt jederzeit eine poſitive Größe. Da nun

$$\gamma t \partial E = \varepsilon \gamma \partial T$$

iſt; ſo haben ∂E und ∂T jederzeit gleiches oder entgegengeſetztes Vorzeichen, jenachdem die Größe $\varepsilon\gamma$ poſitiv oder negativ iſt. Iſt alſo $\varepsilon\gamma$ poſitiv, ſo werden die Größen E und T gleichzeitig zu- und abnehmen; dagegen wird, wenn $\varepsilon\gamma$ negativ iſt, die eine immer wachſen, wenn die andere abnimmt.

Die Art des Zuſammenhanges der Größen E und T unter einander läßt ſich noch deutlicher auf folgende Art überſehen. Weil nach der erſten der Gleichungen VII

$$\gamma\gamma = 1 + \alpha\alpha + \beta\beta$$

und folglich im Allgemeinen $\gamma\gamma > 1$ iſt; ſo kann man

$$\sqrt{\gamma\gamma - 1} = \delta$$

ſetzen, ſo daß alſo nach den Gleichungen VII und V

$$\delta\delta = \alpha\alpha + \beta\beta = \gamma'\gamma' + \gamma''\gamma''$$

iſt. Nach 35., 36., 37. iſt

$$\begin{aligned} t(\delta + \alpha\cos E + \beta\sin E) &= \delta t + \alpha . t\cos E + \beta . t\sin E \\ &= \gamma\delta + \gamma'\delta\cos T + \gamma''\delta\sin T \\ &\quad + \alpha\alpha + \beta\beta + (\alpha\alpha' + \beta\beta')\cos T + (\alpha\alpha'' + \beta\beta'')\sin T, \end{aligned}$$

oder, weil nach dem Vorhergehenden $\alpha\alpha + \beta\beta = \delta\delta$ und nach den Gleichungen VII

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = \gamma\gamma', \quad \alpha\alpha'' + \beta\beta'' = \gamma\gamma''$$

iſt,

$$\begin{aligned} 39.\quad t(\delta + \alpha\cos E + \beta\sin E) &= \delta(\delta + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T) \\ &\quad + \gamma(\delta + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T) \\ &= (\gamma + \delta)(\delta + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T). \end{aligned}$$

Ferner hat man nach 36. und 37.

$$t\beta\cos E = \alpha\beta + \alpha'\beta\cos T + \alpha''\beta\sin T,$$
$$t\alpha\sin E = \alpha\beta + \alpha\beta'\cos T + \alpha\beta''\sin T;$$

alſo durch Subtraction

$$t(\alpha\sin E - \beta\cos E) = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\cos T + (\alpha\beta'' - \alpha''\beta)\sin T,$$

und folglich nach II

$$40.\quad t(\alpha\sin E - \beta\cos E) = \varepsilon(\gamma'\sin T - \gamma''\cos T).$$

Weil nun nach dem Vorhergehenden

$$\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^2 = 1, \; \left(\frac{\gamma'}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{\gamma''}{\delta}\right) = 1$$

iſt; ſo kann man

$$\frac{\alpha}{\delta} = \cos L, \quad \frac{\beta}{\delta} = \sin L, \quad \frac{\gamma'}{\delta} = \cos M, \quad \frac{\gamma''}{\delta} = \sin M$$

ſetzen. Dadurch werden die Gleichungen 39. und 40.

$$t\{1 + \cos(E-L)\} = (\gamma+\delta)\{1 + \cos(T-M)\},$$
$$t \sin(E-L) = \varepsilon \sin(T-M),$$

oder

$$2t \cos\tfrac{1}{2}(E-L)^2 = 2(\gamma+\delta)\cos\tfrac{1}{2}(T-M)^2,$$
$$2t \sin\tfrac{1}{2}(E-L)\cos\tfrac{1}{2}(E-L) = 2\varepsilon \sin\tfrac{1}{2}(T-M)\cos\tfrac{1}{2}(T-M);$$

alſo, wenn man dieſe Gleichungen durch einander dividirt,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E-L) = \frac{\varepsilon}{\gamma+\delta}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T-M).$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $\frac{\varepsilon}{\gamma-\delta}$; ſo erhält man

$$\frac{\varepsilon}{\gamma-\delta}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E-L) = \frac{\varepsilon\varepsilon}{(\gamma+\delta)(\gamma-\delta)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T-M),$$

oder, weil bekanntlich

$$\varepsilon\varepsilon = 1, \ (\gamma+\delta)(\gamma-\delta) = \gamma\gamma - \delta\delta = 1$$

iſt,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T-M) = \frac{\varepsilon}{\gamma-\delta}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E-L),$$

ſo daß wir alſo jetzt die beiden folgenden Gleichungen haben:

41. $\varepsilon \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E-L) = (\gamma-\delta)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T-M)$,

42. $\varepsilon \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T-M) = (\gamma+\delta)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E-L)$,

oder, wenn man auf beiden Seiten mit ε multiplicirt,

43. $\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E-L) = \varepsilon(\gamma-\delta)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T-M)$,

44. $\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T-M) = \varepsilon(\gamma+\delta)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E-L)$.

Setzt man, welches, weil $\gamma\gamma - \delta\delta = 1$ iſt, verſtattet iſt,

$$\delta = \operatorname{tang} N, \ \gamma = \sec N;$$

ſo erhält man leicht

$$\gamma - \delta = \operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}N), \ \gamma + \delta = \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}N).$$

Bezeichnen wir den dem Werthe $E + 2\pi$ von E entſprechenden Werth von T durch T'; ſo iſt nach 44.

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T'-M) = \varepsilon(\gamma+\delta)\operatorname{tang}\{\tfrac{1}{2}(E-L) + \pi\},$$

d. i. nach bekannten goniometriſchen Formeln

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T'-M) = \varepsilon(\gamma+\delta)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E-L),$$

oder

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T'-M) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T-M),$$

und folglich nach dem Artikel Goniometrie (32. III.) i. d. Z., wenn n eine poſitive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$\tfrac{1}{2}(T'-M) = \tfrac{1}{2}(T-M) + n\pi.$$

Weil nun aber nach dem Vorhergehenden T mit E gleichzeitig wächſt und abnimmt, wenn $\varepsilon\gamma$ poſitiv iſt, dagegen die eine dieſer Größen, wenn $\varepsilon\gamma$ negativ iſt, immer zu= oder abnimmt, indem die andere reſpective ab= oder zunimmt; ſo iſt klar, daß n poſitiv oder negativ iſt, jenachdem $\varepsilon\gamma$ reſpective poſitiv oder negativ iſt. Denkt man ſich nun aber nur, daß E von E bis $E+2\pi$ ſtetig wachſe, und daß alſo auch T ſich von T bis T′ ſtetig verändere; ſo erhellet auf der Stelle, daß $n=+1$ oder $=-1$ zu ſetzen iſt, jenachdem $\varepsilon\gamma$ poſitiv oder negativ iſt. Alſo iſt, indem das obere oder untere Zeichen zu nehmen iſt, jenachdem $\varepsilon\gamma$ poſitiv oder negativ iſt,

$$\tfrac{1}{2}(T'-M)=\tfrac{1}{2}(T-M)\pm\pi$$

oder

$$\tfrac{1}{2}T'=\tfrac{1}{2}T\pm\pi,\quad T'=T\pm 2\pi,$$

und man ſieht alſo, daß, wenn E um 2π wächſt, T jederzeit um 2π zu= oder abnimmt, jenachdem $\varepsilon\gamma$ poſitiv oder negativ iſt, welches man des Folgenden wegen wohl zu beachten hat.

13. Wir wollen nun im Folgenden

$$\varrho=\sqrt{(A-a\cos E)^2+(B-b\sin E)^2+C^2}$$

immer als poſitiv annehmen und auch unter

$$\sqrt{G+G'\cos T^2+G''\sin T^2}$$

ſtets den poſitiven Werth dieſer Wurzelgröße verſtehen; ſo iſt, weil das Vorzeichen von t bloß von dem Vorzeichen von γ abhängt, nach (5.)

$$\varrho t=\pm\sqrt{G+G'\cos T^2+G''\sin T^2}$$

zu ſetzen, und das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem γ poſitiv oder negativ iſt.

Iſt alſo zuerſt γ poſitiv; ſo iſt nach 38.

$$\frac{\partial E}{\varrho}=\frac{\varepsilon\partial T}{\sqrt{G+G'\cos T^2+G''\sin T^2}}.$$

Iſt nun τ der dem Werthe $E=0$ entſprechende Werth von T; ſo iſt nach (12.) $\tau+2\pi$ oder $\tau-2\pi$ der dem Werthe $E=2\pi$ entſprechende Werth von T, jenachdem $\varepsilon\gamma$ poſitiv oder negativ iſt, d. i. in dieſem Falle, wo γ poſitiv iſt, jenachdem $\varepsilon=+1$ oder $=-1$ iſt. Alſo iſt für $\varepsilon=+1$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial E}{\varrho}=\int_\tau^{\tau+2\pi}\frac{\partial T}{\sqrt{G+G'\cos T^2+G''\sin T^2}},$$

und für $\varepsilon=-1$ iſt

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial E}{\varrho}=-\int_\tau^{\tau-2\pi}\frac{\partial T}{\sqrt{G+G'\cos T^2+G''\sin T^2}},$$

oder

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial E'}{\varrho} = \int_{\tau-2\pi}^{\tau} \frac{\partial T}{\sqrt{G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2}}.$$

Nun erhellet aber leicht, daß für jedes T

$$\int_T^{T+2\pi} \frac{\partial T}{\sqrt{G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2}} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial T}{\sqrt{G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2}}$$

iſt. Alſo iſt in dieſem Falle, wo γ poſitiv iſt, jederzeit

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial E}{\varrho} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial T}{\sqrt{G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2}}.$$

Iſt ferner γ negativ; ſo iſt nach 38.

$$\frac{\partial E}{\varrho} = -\frac{\varepsilon \partial T}{\sqrt{G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2}}.$$

Folglich iſt, wenn $\varepsilon\gamma$ poſitiv, d. i. $\varepsilon = -1$ iſt,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial E}{\varrho} = \int_\tau^{\tau+2\pi} \frac{\partial T}{\sqrt{G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2}},$$

und, wenn $\varepsilon\gamma$ negativ, d. i. $\varepsilon = +1$ iſt,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial E}{\varrho} = -\int_\tau^{\tau-2\pi} \frac{\partial T}{\sqrt{G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2}},$$

oder

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial E}{\varrho} = \int_{\tau-2\pi}^{\tau} \frac{\partial T}{\sqrt{G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2}}.$$

Alſo iſt auch in dieſem Falle immer

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial E}{\varrho} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial T}{\sqrt{G + G' \cos T^3 + G'' \sin T^2}},$$

und wir haben daher in völliger Allgemeinheit

$$45. \int_0^{2\pi} \frac{\partial E}{\varrho} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial T}{\sqrt{G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2}}.$$

14. Gauß hat nun in ſeiner berühmten Abhandlung vorzüglich die drei folgenden für die phyſiſche Aſtronomie höchſt wichtigen Integrale betrachtet:

$$\xi = \int_0^{2\pi} \frac{(A - a \cos E)(1 - e \cos E) \partial E}{2\pi\varrho^3},$$

$$\eta = \int_0^{2\pi} \frac{(B - b \sin E)(1 - e \cos E) \partial E}{2\pi\varrho^3},$$

$$\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{C(1 - e \cos E) \partial E}{2\pi\varrho^3},$$

wo $a^2 e^2 = a^2 - b^2$ iſt.

Um dieſe Integrale zu entwickeln, haben wir nach dem Vorhergehenden zunächſt

$$\begin{aligned} & \mathrm{a\,t(A - a\cos E)} \\ &= \mathrm{aA}(\gamma + \gamma' \cos \mathrm{T} + \gamma'' \sin \mathrm{T}) - \mathrm{a}^2(\alpha + \alpha' \cos \mathrm{T} + \alpha'' \sin \mathrm{T}) \\ &= \mathrm{a}(\mathrm{A}\gamma - \mathrm{a}\alpha) + \mathrm{a}(\mathrm{A}\gamma' - \mathrm{a}\alpha')\cos \mathrm{T} + \mathrm{a}(\mathrm{A}\gamma'' - \mathrm{a}\alpha'')\sin \mathrm{T}\,. \end{aligned}$$

Nach 1., 4., 7. iſt aber

$$\alpha = \frac{\gamma \mathrm{aA}}{\mathrm{a}^2 + \mathrm{G}},\ \alpha' = \frac{\gamma' \mathrm{aA}}{\mathrm{a}^2 - \mathrm{G}'},\ \alpha'' = \frac{\gamma'' \mathrm{aA}}{\mathrm{a}^2 - \mathrm{G}''},$$

und folglich

$$\mathrm{A}\gamma - \mathrm{a}\alpha = \frac{\alpha(\mathrm{a}^2 + \mathrm{G})}{\mathrm{a}} - \mathrm{a}\alpha = \frac{\alpha \mathrm{G}}{\mathrm{a}},$$

$$\mathrm{A}\gamma' - \mathrm{a}\alpha' = \frac{\alpha'(\mathrm{a}^2 - \mathrm{G}')}{\mathrm{a}} - \mathrm{a}\alpha' = -\frac{\alpha' \mathrm{G}'}{\mathrm{a}},$$

$$\mathrm{A}\gamma'' - \mathrm{a}\alpha'' = \frac{\alpha''(\mathrm{a}^2 - \mathrm{G}'')}{\mathrm{a}} - \mathrm{a}\alpha'' = -\frac{\alpha'' \mathrm{G}''}{\mathrm{a}}.$$

Alſo

$$\mathrm{a\,t(A - a\cos E)} = \alpha \mathrm{G} - \alpha' \mathrm{G}' \cos \mathrm{T} - \alpha'' \mathrm{G}'' \sin \mathrm{T},$$

und ganz eben ſo

$$\mathrm{b\,t(B - b\sin E)} = \beta \mathrm{G} - \beta' \mathrm{G}' \cos \mathrm{T} - \beta'' \mathrm{G}'' \sin \mathrm{T}.$$

Ferner iſt

$$\begin{aligned} & \mathrm{t(1 - e\cos E) = t - e\,t\cos E} \\ &= \gamma - \mathrm{e}\alpha + (\gamma' - \mathrm{e}\alpha')\cos \mathrm{T} + (\gamma'' - \mathrm{e}\alpha'')\sin \mathrm{T} \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} & \mathrm{a\,t^2(A - a\cos E)(1 - e\cos E)} \\ &= (\alpha \mathrm{G} - \alpha' \mathrm{G}' \cos \mathrm{T} - \alpha'' \mathrm{G}'' \sin \mathrm{T})\{\gamma - \mathrm{e}\alpha + (\gamma' - \mathrm{e}\alpha')\cos \mathrm{T} + (\gamma'' - \mathrm{e}\alpha'')\sin \mathrm{T}\}, \\ & \mathrm{b\,t^2(B - b\sin E)(1 - e\cos E)} \\ &= (\beta \mathrm{G} - \beta' \mathrm{G}' \cos \mathrm{T} - \beta'' \mathrm{G}'' \sin \mathrm{T})\{\gamma - \mathrm{e}\alpha + (\gamma' - \mathrm{e}\alpha')\cos \mathrm{T} + (\gamma'' - \mathrm{e}\alpha'')\sin \mathrm{T}\}, \\ & \mathrm{C\,t^2(1 - e\cos E)} \\ &= \mathrm{C}(\gamma + \gamma' \cos \mathrm{T} + \gamma'' \sin \mathrm{T})\{\gamma - \mathrm{e}\alpha + (\gamma' - \mathrm{e}\alpha')\cos \mathrm{T} + (\gamma'' - \mathrm{e}\alpha'')\sin \mathrm{T}\}. \end{aligned}$$

Setzen wir alſo der Kürze wegen die Größen auf den rechten Seiten der drei vorhergehenden Gleichungen nach der Reihe $=\mathrm{aX}$, bY, Z; ſo iſt

$$\partial\xi = \frac{\mathrm{X}\partial \mathrm{E}}{2\pi \mathrm{t}^2 \varrho^3},\ \partial\eta = \frac{\mathrm{Y}\partial \mathrm{E}}{2\pi \mathrm{t}^2 \varrho^3},\ \partial\zeta = \frac{\mathrm{Z}\partial \mathrm{E}}{2\pi \mathrm{t}^2 \varrho^3};$$

oder nach 38.

$$\partial\xi = \frac{\varepsilon \mathrm{X}\partial \mathrm{T}}{2\pi \mathrm{t}^3 \varrho^3},\ \partial\eta = \frac{\varepsilon \mathrm{Y}\partial \mathrm{T}}{2\pi \mathrm{t}^3 \varrho^3},\ \partial\zeta = \frac{\varepsilon \mathrm{Z}\partial \mathrm{T}}{2\pi \mathrm{t}^3 \varrho^3}.$$

Hieraus erhält man nun auf ganz ähnliche Art wie in (13.)

$$\xi = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{X}\partial \mathrm{T}}{2\pi(\mathrm{G} + \mathrm{G}' \cos \mathrm{T}^2 + \mathrm{G}'' \sin \mathrm{T}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\eta = \int_0^{2\pi} \frac{Y \partial T}{2\pi(G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{Z \partial T}{2\pi(G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dieſe Formeln hier ausführlich zu entwickeln, iſt unnöthig, weil das anzuwendende Raiſonnement von dem in (13.) gebrauchten durchaus nicht weſentlich verſchieden iſt. Bemerkt man nun, daß, wie auf der Stelle erhellet,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos T \partial T}{(G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin T \partial T}{(G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos T \sin T \partial T}{(G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

iſt; ſo erhält man, wenn man in die Formeln für ξ, η, ζ die obigen Ausdrücke von **X**, **Y**, **Z** einführt, ſehr leicht

$$\xi = \int_0^{2\pi} \frac{(\gamma - e\alpha)\alpha G - (\gamma' - e\alpha')\alpha' G' \cos T^2 - (\gamma'' - e\alpha'')\alpha'' G'' \sin T^2}{2\pi a (G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)^{\frac{3}{2}}} \partial T,$$

$$\eta = \int_0^{2\pi} \frac{(\gamma - e\alpha)\beta G - (\gamma' - e\alpha')\beta' G' \cos T^2 - (\gamma'' - e\alpha'')\beta'' G'' \sin T^2}{2\pi b (G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)^{\frac{3}{2}}} \partial T,$$

$$\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{(\gamma - e\alpha)\gamma + (\gamma' - e\alpha')\gamma' \cos T^2 + (\gamma'' - e\alpha'')\gamma'' \sin T^2}{2\pi (G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)^{\frac{3}{2}}} C \partial T.$$

Setzen wir aber

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos T^2 \partial T}{2\pi\{(G + G') \cos T^2 + (G + G'') \sin T^2\}^{\frac{3}{2}}} = P,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin T^2 \partial T}{2\pi\{(G + G') \cos T^2 + (G + G'') \sin T^2\}^{\frac{3}{2}}} = Q;$$

ſo wird

$$\begin{aligned} a\xi &= \{(\gamma - e\alpha)\alpha G - (\gamma' - e\alpha')\alpha' G'\} P \\ &\quad + \{(\gamma - e\alpha)\alpha G - (\gamma'' - e\alpha'')\alpha'' G''\} Q, \\ b\eta &= \{(\gamma - e\alpha)\beta G - (\gamma' - e\alpha')\beta' G'\} P \\ &\quad + \{(\gamma - e\alpha)\beta G - (\gamma'' - e\alpha'')\beta'' G''\} Q, \\ \zeta &= \{(\gamma - e\alpha)\gamma - (\gamma' - e\alpha')\gamma'\} CP \\ &\quad + \{(\gamma - e\alpha)\gamma + (\gamma'' - e\alpha'')\gamma''\} CQ. \end{aligned}$$

15. Man ſieht nun, daß ſich alle hier und in (13.) betrachteten Integrale auf die drei Integrale:

$$\int \frac{\partial T}{\sqrt{G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2}},$$

$$\int \frac{\cos T^2 \, \partial T}{(G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\int \frac{\sin T^2 \, \partial T}{(G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)^{\frac{3}{2}}},$$

oder

$$\int \frac{\partial T}{\sqrt{(G + G') \cos T^2 + (G + G'') \sin T^2}},$$

$$\int \frac{\cos T^2 \, \partial T}{\{(G + G') \cos T^2 + (G + G'') \sin T^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$\int \frac{\sin T^2 \, \partial T}{\{(G + G') \cos T^2 + (G + G'') \sin T^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

oder, wenn wir

$$\sqrt{G + G'} = m, \quad \sqrt{G + G''} = n$$

ſetzen, auf die drei Integrale

$$\int \frac{\partial T}{\sqrt{m^2 \cos T^2 + n^2 \sin T^2}},$$

$$\int \frac{\cos T^2 \, \partial T}{\{m^2 \cos T^2 + n^2 \sin T^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$\int \frac{\sin T^2 \, \partial T}{\{m^2 \cos T^2 + n^2 \sin T^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

zurückführen laſſen. Wie ſich aber die Werthe dieſer zwiſchen beliebigen Gränzen genommenen Integrale in allen Fällen nach einer ſehr bequemen Methode näherungsweiſe, und zwar mit jedem beliebigen Grade der Annäherung, berechnen laſſen, ſoll gleich nachher in dem beſondern Artikel Integration durch Annäherung ebenfalls nach Gauß ausführlich gezeigt werden. Ueber den Zuſammenhang, in welchem die hier betrachteten Integrale mit der phyſiſchen Aſtronomie ſtehen, hier Etwas beizubringen, geſtattet die Natur dieſes Werkes nicht. Wir haben es uns aber angelegen ſeyn laſſen, den Hauptinhalt der mehr erwähnten meiſterhaften Abhandlung hier vollſtändig wiederzugeben, und wenn wir uns bei dieſem Geſchäft faſt nur mit der Rolle des Ueberſetzers begnügen mußten; ſo liegt der Grund hiervon lediglich in der hohen Vollendung dieſer trefflichen Arbeit von Gauß, die uns an keiner Stelle etwas Weſentliches hinzuzuſetzen oder wegzulaſſen erlaubt hat. Als weitere Ausführungen der Abhandlung von Gauß ſind einige, doppelte und vielfache Integrale betreffende, ſchöne Abhandlungen von C. G. J. Jacobi zu

betrachten, die ſich in **Crelles Journal B. II., VIII., X., XII.** finden. Auch vergleiche man einen Aufſatz von Clauſen in demſelben Journal. **B. VI.** S. 290. Hier geſtattet der Raum größere Ausführlichkeit nicht.

16. Nachdem wir die vorhergehende merkwürdige Transformation eines wichtigen irrationalen Differentials ausführlich betrachtet haben, wollen wir nun auch an einigen Beiſpielen zeigen, wie ſich irrationale Differentiale häufig dadurch integriren laſſen, daß man ſie durch ſchickliche Subſtitutionen rational macht, und wählen dazu einige von N. Fuß in einer in den von der Petersburger Akademie herausgegebenen **Mémoires posthumes de L. Euler, F. T. Schubert et N. Fuss. Pétersb.** 1830. p. 305. ſich findenden Abhandlung betrachtete Integrale deshalb, weil dieſe Integrale, wenigſtens größtentheils, ziemlich allgemein ſind, und ſich daher vorkommende Integrale öfters werden auf dieſelben zurückführen laſſen.

$$\text{I. } P = \int \frac{x^{in-1}(\alpha + \beta x^{in})^r \partial x}{(f + g x^{in})^\lambda \sqrt[n]{(a + b x^{in})^m}}.$$

m, n, r, λ ſollen ganze Zahlen ſeyn; **i** kann jede ganze oder gebrochene Zahl bezeichnen.

Man ſetze $a + bx^{in} = y^n$; ſo ergiebt ſich

$$x^{in-1} \partial x = \frac{y^{n-1} \partial y}{bi},\quad x^{in} = \frac{y^n - a}{b},$$

und hieraus

$$(\alpha + \beta x^{in})^r = \frac{(\alpha b + \beta (y^n - a))^r}{b},\quad (f + g x^{in})^\lambda = \frac{(bf + g(y^n - a))^\lambda}{b^\lambda};$$

folglich

$$P = \frac{b^{\lambda - r - 1}}{i} \int \frac{y^{n-m-1} \partial y (\alpha b - \beta a + \beta y^n)^r}{(bf - ag + gy^n)^\lambda}.$$

Dieſe Formel iſt für jedes ganze oder gebrochene **i** rational.

1. Für **i** $= \frac{1}{2}$ iſt

$$P = \int \frac{x^{\frac{1}{2}n-1}(a + \beta x^{\frac{1}{2}n})^r \partial x}{(f + gx^{\frac{1}{2}n})^\lambda \sqrt[n]{(a + bx^{\frac{1}{2}n})^m}} = 2b^{\lambda - r - 1} \int \frac{y^{n-m-1}(\alpha b - \beta a + \beta y^n)^r \partial y}{(bf - ag + gy^n)^\lambda}.$$

2. Für **r** $= 0$ iſt

$$P = \int \frac{x^{in-1} \partial x}{(x + gx^{in})^\lambda \sqrt[n]{(a + bx^{in})^m}} = \frac{b^{\lambda - 1}}{i} \int \frac{y^{n-m-1} \partial y}{(bf - ag + gy^n)^\lambda}.$$

3. Für $m = 2,\ n = 3,\ i = 1,\ \lambda = 1$ folgt hieraus

$$P = \int \frac{x^2 \partial x}{(f + \gamma x^3) \sqrt[3]{a + bx^3}} = \int \frac{\partial y}{bf - ag + gy^3}.$$

$$\text{II.}\quad P = \int \frac{x^{im-1}(\alpha + \beta x^{in})^r \partial x}{(f + gx^{in})^\lambda \sqrt[n]{(a + bx^{in})^m}}.$$

m, n, r, λ bezeichnen ganze Zahlen; i kann jede ganze oder gebrochene Zahl ſeyn.

Man ſetze

$$\frac{x^i}{\sqrt[n]{a + bx^{in}}} = y, \quad \frac{x^{in}}{a + bx^{in}} = y^n,$$

nehme auf beiden Seiten die Logarithmen und differentiire; ſo erhält man

$$n l y = i n l x - l(a + bx^{in}), \quad \frac{\partial y}{y} = \frac{a i \partial x}{x(a + bx^{in})},$$

$$\partial y = \frac{a i x^{i-1} \partial x}{(a + bx^{in}) \sqrt[n]{a + bx^{in}}}.$$

Hieraus folgt, weil

$$x^{in} = \frac{ay^n}{1 - by^n}, \quad a + bx^{in} = \frac{a}{1 - by^n}$$

iſt, leicht

$$\frac{x^{i-1} \partial x}{\sqrt[n]{a + bx^{in}}} = \frac{\partial y}{i(1 - by^n)},$$

oder

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial y}{i y (1 - by^n)}.$$

Nun iſt

$$\frac{x^{im}}{\sqrt[n]{(a + bx^{in})^m}} = y^m, \quad \sqrt[n]{(a + bx^{in})^m} = \frac{x^{im}}{y^m}.$$

Alſo iſt

$$\frac{x^{im-1} \partial x}{\sqrt[n]{(a + bx^{in})^m}} = y^m \frac{\partial x}{x} = \frac{y^{m-1} \partial y}{i(1 - by^n)}.$$

Weil ferner

$$(\alpha + \beta x^{in})^r = \frac{(\alpha - (\alpha b - \beta a) y^n)^r}{(1 - by^n)^r}, \quad (f + gx^{in})^\lambda = \frac{(f - c(bf - ag) y^n)^\lambda}{(1 - by^n)^\lambda}$$

iſt; ſo erhält man nach gehöriger Subſtitution

$$P = \frac{1}{i} \int \frac{y^{m-1}(\alpha - (\alpha b - \beta a) y^n)^r \partial y}{(1 - by^n)^{r-\lambda+1} (f - (bf - ag) y^n)^\lambda},$$

welche Formel wieder für jedes i rational iſt.

1. Für $r = 0$ erhält man

$$P = \int \frac{x^{im-1}\,\partial x}{(f + gx^{in})^{\lambda}\,\sqrt[n]{(a + bx^{in})^m}} = \frac{1}{i}\int \frac{y^{m-1}(1 - by^n)^{\lambda-1}\,\partial y}{(f - (bf - ag)\,y^n)^{\lambda}}.$$

2. Setzt man hierin $i = 1$, $\lambda = 1$, $m = 1$, $f = 1$, $g = 0$; ſo ergiebt ſich

$$P = \int \frac{\partial x}{\sqrt[n]{a + bx^n}} = \int \frac{\partial y}{1 - by^n}.$$

3. Durch Verbindung von I. und II. mit einander kann man jederzeit die ſehr allgemeine Formel

$$\int \frac{(Ax^{in-1} \pm Bx^{im-1})(\alpha + \beta x^{in})^r\,\partial x}{(f + gx^{in})^{\lambda}\,\sqrt[n]{(a + bx^{in})^m}}$$

für jedes ganze oder gebrochene i rational machen. Alſo kann man, wenn man $r = 0$ ſetzt, auch jederzeit die Formel

$$\int \frac{(Ax^{in-1} \pm Bx^{im-1})\,\partial x}{(f + gx^{in})^{\lambda}\,\sqrt[n]{(a + bx^{in})^m}}$$

für jedes ganze oder gebrochene i rational machen.

$$\text{III.}\quad P = \int \frac{x^{in-1}(\alpha + \beta x^{\varepsilon in})^r\,\partial x}{(f + gx^{\delta in})^{\lambda}\,\sqrt[n]{(a + bx^{in})^m}}.$$

Man ſetze

$$a + bx^{in} = y^n,\quad x^{in-1}\,\partial x = \frac{y^{n-1}\,\partial y}{bi};$$

ſo iſt

$$(\alpha + bx^{\varepsilon in})^r = \frac{(\alpha b^{\varepsilon} + \beta(y^n - a)^{\varepsilon})^r}{b^{\varepsilon r}},$$

$$(f + gx^{\delta in})^{\lambda} = \frac{(fb^{\delta} + g(y^n - a)^{\delta})^{\lambda}}{b^{\delta\lambda}},$$

und nach gehöriger Subſtitution erhält man:

$$P = \frac{b^{\delta\lambda - \varepsilon r - 1}}{i}\int \frac{y^{n-m-1}(ab^{\varepsilon} + \beta(y^n - a)^{\varepsilon})^r\,\partial y}{(fb^{\delta} + g(y^n - a)^{\delta})^{\lambda}}.$$

Für $\varepsilon = \delta = 1$ erhält man den Fall I.

$$\text{IV.}\quad P = \int \frac{x^{im-1}(a + \beta x^{\varepsilon in})^r\,\partial x}{(f + gx^{\delta in})^{\lambda}\,\sqrt[n]{(a + bx^{in})^m}}.$$

Man ſetze

$$\frac{x^i}{\sqrt[n]{a + bx^{in}}} = y,\quad \frac{x^{in}}{a + bx^{in}} = y^n,\quad x^{in} = \frac{ay^n}{1 - by^n};$$

ſo erhält man ganz wie in II.

$$\frac{x^{im-1}\partial x}{\sqrt[n]{(a+bx^{in})^m}} = \frac{y^{m-1}\partial y}{i(1-by^n)} .$$

Auch findet man leicht:

$$(\alpha + \beta x^{\varepsilon in})^r = \frac{(\alpha(1-by^n)^\varepsilon + \beta a^\varepsilon y^{\varepsilon n})^r}{(1-by^n)^{\varepsilon r}} ,$$

$$(f + gx^{\delta in})^r = \frac{(f(1-by^n)^\delta + ga^\delta y^{\delta n})}{(1-by^n)^{\delta\lambda}} ,$$

und folglich nach gehöriger Subſtitution

$$P = \frac{1}{i}\int \frac{y^{m-1}(\alpha(1-by^n)^\varepsilon + \beta a^\varepsilon y^{\varepsilon n})^r \partial y}{(1-by^n)^{\varepsilon r-\delta\lambda+1}(f(1-by^n)^\delta + ga^\delta y^{\delta n})^\lambda} .$$

Für $\varepsilon = \delta = 1$ erhält man den Fall II.

$$\text{V.}\quad P = \int \frac{(1+x)^2 \partial x}{(3x+x^3)\sqrt[3]{1+3x^2}} .$$

Man ſetze

$$\frac{1-x}{\sqrt[3]{1+3x^2}} = p ;$$

ſo iſt

$$l(1-x) - \tfrac{1}{3}l(1+3x^2) = lp ,$$

$$-\frac{\partial x}{1-x} - \frac{2x\partial x}{1+3x^2} = \frac{\partial p}{p}, \text{ d. i. } \frac{(1+x)^2\partial x}{(1-x)(1+3x^2)} = -\frac{\partial p}{p} .$$

Folglich iſt

$$\frac{(1+x)^2\partial x}{(1+3x^2)\sqrt[3]{1+3x^2}} = -\partial p .$$

Weil nun

$$\frac{3x+x^3}{1+3x^2} = 1 - p^3$$

iſt; ſo iſt

$$P = -\int \frac{\partial p}{1-p^3} .$$

$$\text{VI.}\quad Q = \int \frac{(1-x)^2 \partial x}{(3x+x^3)\sqrt[3]{1+3x^2}} .$$

Man ſetze

$$\frac{1+x}{\sqrt[3]{1+3x^2}} = q ;$$

ſo iſt

$$l(1+x) - \tfrac{1}{3}l(1+3x^2) = lq ,$$

$$\frac{\partial x}{1+x} - \frac{2x\partial x}{1+3x^2} = \frac{\partial q}{q}, \text{ d. i. } \frac{(1-x)^2\partial x}{(1+x)(1+3x^2)} = \frac{\partial q}{q} ,$$

und folglich

$$\frac{(1-x)^2 \partial x}{(1+3x^2)\sqrt[3]{1+3x^3}} = \partial q .$$

Weil nun

$$\frac{3x + x^3}{1+3x^2} = -(1-q^3)$$

iſt; ſo iſt

$$Q = -\int \frac{\partial x}{1-q^3} .$$

VII. Weil

$$P - Q = \frac{4\partial x}{(3+x^2)\sqrt[3]{1+3x^2}}$$

iſt; ſo iſt

$$4\int \frac{\partial x}{(3+x^2)\sqrt[3]{1+3x^3}} = \int \frac{\partial q}{1-q^3} - \int \frac{\partial p}{1-p^3} ,$$

wie auch ſchon Euler in den Nov. Act. Petrop. T. X. gefunden hat.

Wir müſſen uns hier mit den obigen Mittheilungen begnügen, und bemerken nur noch, daß in den Integraltafeln oder Sammlung von Integralformeln von Meier Hirsch. Berlin. 1810. die vollſtändigſte Sammlung von Integralformeln enthalten iſt, welche wir gegenwärtig beſitzen. Auch F. X. Moth hatte in Schumachers aſtronomiſchen Nachrichten. B. IV. S. 489. neue Integraltafeln angekündigt.

Integrallogarithmus (logarithme intégral) nennt man nach Soldners (Théorie et Tables d'une nouvelle fonction transcendante. Munic. 1809. p. 7.) und Beſſels (Königsberger Archiv für Naturwiſſenschaft und Mathematik. 1811. St. 1. S. 7.) Vorgange jetzt gewöhnlich das in vieler Beziehung merkwürdige und ſchwierige Integral

$$\int_0^x \frac{\partial x}{lx} ,$$

mit dem ſchon Euler ſich vielfach beſchäftigt hat, und bezeichnet daſſelbe auf eine ganz zweckmäßige Weiſe nach Soldner durch li.x, ſo daß alſo

$$1. \quad li.x = \int_0^x \frac{\partial x}{lx}$$

iſt. Daß, wenn imaginäre Größen vermieden werden ſollen, für x, wie hier auch immer geſchehen ſoll, bloß poſitive Werthe geſetzt werden dürfen, bedarf wohl kaum noch einer beſondern Erwäh-

nung. Maſcheroni, der ſich in ſeinen Adnot. ad calculum integralem Euleri auch viel mit dieſem Integral beſchäftigt hat, ſchlug für daſſelbe den Namen Hyperlogarithmus, Caluſo (Memorie della Societa italiana. T. XII. p. 268.) dagegen, weil

$$\int \frac{\partial x}{lx} = \int \frac{\partial x}{\int \frac{\partial x}{x}}$$

iſt, den Namen Logologarithmus vor.

1. Weil x immer poſitiv iſt, ſo kann man jederzeit $x = e^y$, wo y poſitiv und negativ ſeyn kann, ſetzen. Dann iſt $lx = y$, $\partial x = e^y \partial y$, und folglich

$$\frac{\partial x}{lx} = \frac{e^y \partial y}{y}.$$

Weil nun dem Werthe $x = 0$ offenbar der Werth $y = -\infty$ entſpricht; ſo iſt

$$2. \quad li.x = \int_{-\infty}^{y} \frac{e^y \partial y}{y}.$$

y iſt, was man wohl zu betrachten hat, $= lx$. Uebrigens kann man, was ſich von ſelbſt verſteht, dieſe Gleichung auch auf folgende Art ſchreiben:

$$3. \quad li.e^y = \int_{-\infty}^{y} \frac{e^y \partial y}{y}.$$

2. Um die Natur unſers Integrals kennen zu lernen, wollen wir es in eine convergirende Reihe zu entwickeln ſuchen. Bekanntlich hat man die für jedes poſitive x convergirende Reihe

$$x = e^{lx} = 1 + \frac{lx}{1} + \frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{(lx)^3}{1.2.3} + \frac{(lx)^4}{1\ldots4} + \ldots.$$

Alſo iſt, wenn man differentiirt,

$$\partial x = \partial lx + \frac{lx.\partial lx}{1} + \frac{(lx)^2 \partial lx}{1.2} + \frac{(lx)^3 \partial lx}{1.2.3} + \ldots..,$$

und folglich

$$\frac{\partial x}{lx} = \frac{\partial lx}{lx} + \frac{\partial lx}{1} + \frac{lx.\partial lx}{1.2} + \frac{(lx)^2 \partial lx}{1.2.3} + \ldots..$$

Integrirt man nun; ſo erhält man

$$\int \frac{\partial x}{lx} = \int \frac{\partial lx}{lx} + \frac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Weil aber

$$\partial l(\pm lx) = \frac{\pm \partial lx}{\pm lx} = \frac{\partial lx}{lx}$$

iſt; ſo iſt

$$\int \frac{\partial lx}{lx} = l(\pm lx) + \text{Const.}$$

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{lx} = \text{Const.} + l(\pm lx) + \frac{1}{1}\cdot\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo Const. eine beliebige Conſtante bezeichnet. In Bezug auf das doppelte Zeichen in dieſer Formel iſt, weil unſer Integral, da wir x immer poſitiv nehmen, ſeiner Natur nach eine reelle Größe iſt, klar, daß man jederzeit das untere oder obere Zeichen nehmen muß, jenachdem x kleiner oder größer als die Einheit iſt. Für $x < 1$ muß man alſo

$$\int \frac{\partial x}{lx} = C' + l(-lx) + \frac{1}{1}\cdot\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

für $x > 1$ dagegen

$$\int \frac{\partial x}{lx} = C'' + l(+lx) + \frac{1}{1}\cdot\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo C' und C'' zwei ganz willkührliche Conſtanten bezeichnen, ſetzen, woraus man ſieht, daß ſich die Werthe unſers Integrals für alle Werthe der Größe x von 0 bis ∞ nicht durch eine Formel darſtellen laſſen.

3. Bezeichnen wir nun den Werth der willkührlichen Conſtante C', welchen dieſelbe erhält, wenn man ſich das Integral in dem Falle, wo $x < 1$ iſt, ſo beſtimmt denkt, daß es für $x = 0$ verſchwindet, durch C; ſo iſt für jedes poſitive x, welches < 1 iſt,

$$4.\quad li.x = C + l(-lx) + \frac{1}{1}\cdot\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots$$

Für $x > 1$ läßt ſich, wenn ε eine unendlich kleine poſitive Größe bezeichnet, li . x nach bekannten Sätzen von den beſtimmten Integralen auf folgende Art ausdrücken:

$$li.x = \int_0^x \frac{\partial x}{lx} = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\partial x}{lx} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{\partial x}{lx}$$

$$= li.(1-\varepsilon) + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{\partial x}{lx}.$$

Weil nun nach dem Vorhergehenden

$$\int_{1+\varepsilon}^x \frac{\partial x}{lx} = C'' + l(+lx) + \frac{1}{1}\cdot\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lx)^2}{1.2} + \ldots$$

$$- C'' - l(+l(1+\varepsilon)) - \frac{1}{1}\cdot\frac{l(1+\varepsilon)}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(l(1+\varepsilon))^2}{1.2} - \ldots$$

iſt; ſo iſt für $x > 1$

$$li.x = C + l(-l(1-\varepsilon)) + \frac{1}{1}\cdot\frac{l(1-\varepsilon)}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(l(1-\varepsilon))^2}{1.2} + \ldots.$$

$$- l(+l(1+\varepsilon)) - \frac{1}{1}\cdot\frac{l(1+\varepsilon)}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(l(1+\varepsilon))^2}{1.2} - \ldots.$$

$$+ l(+lx) + \frac{1}{1}\cdot\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Es iſt aber

$$l(-(l-\varepsilon)) - l(+l(1+\varepsilon)) = l\left\{-\frac{l(1-\varepsilon)}{l(1+\varepsilon)}\right\}$$

$$= l\left\{-\frac{-\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon^2-\frac{1}{3}\varepsilon^3-\ldots}{+\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{1}{3}\varepsilon^3-\ldots}\right\} = l\left\{-\frac{-1-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{3}\varepsilon^2-\ldots}{+1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon^2-\ldots}\right\};$$

alſo iſt

$$li.x = C + l\left\{-\frac{-1-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{3}\varepsilon^2-\frac{1}{4}\varepsilon^3-\ldots.}{+1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon^2-\frac{1}{4}\varepsilon^3+\ldots.}\right\}$$

$$+ \frac{1}{1}\cdot\frac{l(1-\varepsilon)}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(l(1-\varepsilon))^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(l(1-\varepsilon))^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$- \frac{1}{1}\cdot\frac{l(1+\varepsilon)}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(l(1+\varepsilon))^2}{1.2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{(l(1-\varepsilon))^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$+ l(+lx) + \frac{1}{1}\cdot\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

und folglich, weil ε eine unendlich kleine poſitive Größe bezeichnet, offenbar für jedes x, welches > 1 iſt:

5. $$li.x = C + l(+ x) + \frac{1}{1}\cdot\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

ſo daß alſo

6. $$li.x = C + l(\mp lx) + \frac{1}{1}\cdot\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

iſt, mit der Beſtimmung, daß man das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem reſpective das immer poſitive x kleiner oder größer als die Einheit iſt. Für $x = 1$ findet, wie man leicht überſehen wird, eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function li.x Statt. Noch deutlicher fällt dies in die Augen, wenn man ſich eine Curve verzeichnet, deren Abſciſſen und entſprechende rechtwinklige Ordinaten reſpective x und $\frac{1}{lx}$ ſind. Dieſe Curve wird ungefähr die in Fig. 33., wo A der Anfang der Abſciſſen und AB = 1 iſt, dargeſtellte Geſtalt haben, und beſteht alſo jederzeit aus zwei von einander völlig abgeſonderten Theilen oder Zweigen, von denen der eine ganz unter-, der andere ganz oberhalb der Abſciſſenaxe liegt. Ueberlegt man nun, daß durch li.x das den Coordinaten x und $\frac{1}{lx}$ entſprechende Flächenſtück dieſer Curve dargeſtellt wird; ſo wird man ſich leicht von der Richtigkeit der oben gemachten Bemerkung überzeugen, und hieran auch noch andere geometriſche Betrachtungen, zu denen es hier an Raum fehlt, knüpfen können.

Für $x > 1$ iſt $\frac{1}{x} < 1$. Alſo iſt unter der Vorausſetzung, daß $x > 1$ iſt, jederzeit nach (6.)

$$7.\quad li.x = C + llx + \tfrac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \tfrac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} + \tfrac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots\ldots,$$

$$8.\quad li.\frac{1}{x} = C + llx - \tfrac{1}{1}.\frac{lx}{1} + \tfrac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2} - \tfrac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

Auch iſt immer

$$9.\quad li.e^x = C + lx + \tfrac{1}{1}.\frac{x}{1} + \tfrac{1}{2}.\frac{x^2}{1.2} + \tfrac{1}{3}.\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots,$$

$$10.\quad li.e^{-x} = C + lx - \tfrac{1}{1}.\frac{x}{1} + \tfrac{1}{2}.\frac{x^2}{1.2} - \tfrac{1}{3}.\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

4. Beſondere Schwierigkeit macht die Beſtimmung der Conſtante C. Man gelangt dazu nach Soldner mittelſt der Formel (10.) auf folgende Art. Bekanntlich iſt

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \ldots,$$

und folglich

$$\frac{e^{-x}-1}{x}\partial x = -\frac{\partial x}{1} + \frac{x\partial x}{1.2} - \frac{x^2\partial x}{1.2.3} + \frac{x^3\partial x}{1\ldots4} - \ldots$$

Alſo iſt, wie man leicht findet,

$$\int_0^x \frac{e^{-x}-1}{x}\partial x = -\tfrac{1}{1}.\frac{x}{1} + \tfrac{1}{2}.\frac{x^2}{1.2} - \tfrac{1}{3}.\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Folglich iſt nach der Gleichung (10.)

$$11.\quad li.e^{-x} = C + lx + \int_0^x \frac{e^{-x}-1}{x}\partial x.$$

Weil nun $li.0 = 0$, d. i. $li.e^{-\infty} = 0$ iſt; ſo iſt

$$12.\quad C = -l\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-x}-1}{x}\partial x,$$

oder, wenn im Folgenden n immer eine poſitive Größe bezeichnet, die man ſich in's Unendliche wachſend denkt:

$$13.\quad C = -\operatorname{Lim}\left\{ln + \int_0^n \frac{e^{-x}-1}{x}\partial x\right\}.$$

Nun iſt aber nach dem Binomiſchen Lehrſatze

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = 1 - \frac{x}{1} + \left(1-\frac{1}{n}\right).\frac{x^2}{1.2} - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right).\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

und folglich, wie leicht erhellen wird, indem n immer ſeine vorige Bedeutung behält,

$$14.\quad \operatorname{Lim}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}.$$

Setzen wir jetzt

$$1 - \frac{x}{n} = z;$$

ſo iſt

$$\frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n - 1}{x}\partial x = \frac{1-z^n}{1-z}\partial z,$$

und folglich, weil für $x = 0$ und $x = n$ reſpective $z = 1$ und $z = 0$ iſt,

$$\int_0^n \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n - 1}{x}\partial x = \int_1^0 \frac{1-z^n}{1-z}\partial z.$$

Alſo iſt offenbar

$$\text{Lim}\int_0^n \frac{e^{-x}-1}{x}\partial x = \text{Lim}\int_1^0 \frac{1-z^n}{1-z}\partial z,$$

und folglich nach (13.)

$$15.\quad C = -\text{Lim}\left\{ln + \int_1^0 \frac{1-z^n}{1-z}\partial z\right\}.$$

Nun iſt aber

$$\frac{1-z^n}{1-z}\partial z = (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots . + z^{n-1})\partial z;$$

alſo

$$\int_0^1 \frac{1-z^n}{1-z}\partial z = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots . + \frac{1}{n}$$

oder

$$\int_1^0 \frac{1-z^n}{1-z}\partial z = -\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

Folglich iſt nach (15.)

$$16.\quad C = \text{Lim}\left\{1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - ln\right\}.$$

Denſelben Ausdruck für die Conſtante C hat, aber auf einem ganz andern Wege, auch Maſcheroni a. a. O. gefunden. Ueber das weitere Verfahren bei der Berechnung von C iſt der Artikel Summirung der Reihen (39.) im vierten Theile dieſes Wörterbuchs nachzuſehen. Hier mag bloß noch erwähnt werden, daß Maſcheroni, wie Lacroix im Traité du calc. diff. et du calc. int. T. III. p. 521. anführt, für $n = 100$

$$C = 0{,}577215\ 664901\ 532860\ 618112\ 090082\ 39$$

gefunden hat. Soldner iſt a. a. O. p. 13. bloß bis zur zwei- und zwanzigſten Decimale gegangen; ſeine drei letzten Ziffern ſind 065, und weichen alſo von den entſprechenden Ziffern in der von Maſcheroni gefundenen Zahl, welche 181 ſind, ab.

5. Soldner giebt in ſeiner empfehlenswerthen Schrift noch eine Reihe für li.(a + x), die wir hier auch noch kurz entwickeln wollen. Man ſetze

$$l\left(1 + \frac{x}{a}\right) = y\,;$$

ſo iſt

$$\frac{1}{l(a+x)} = \frac{1}{la + l\left(1 + \frac{x}{a}\right)} = \frac{1}{la + y} = \frac{1}{la.\left(1 + \frac{y}{la}\right)}.$$

Iſt nun der abſolute Werth von

$$\frac{y}{la} = \frac{l\left(1 + \frac{x}{a}\right)}{la}$$

kleiner als die Einheit; ſo hat man die convergirende Reihe

$$\frac{1}{1 + \frac{y}{la}} = 1 - \frac{y}{la} + \frac{y^2}{(la)^2} - \frac{y^2}{(la)^3} + \ldots.,$$

die auch convergent bleibt, wenn man jedes Glied auf ſeinen abſoluten Werth reducirt, wie aus der Lehre von der Convergenz der Reihen hier als bekannt vorausgeſetzt wird. Alſo kann man

$$\frac{1}{l(a+x)} = \frac{1}{la}\left\{1 - \frac{y}{la} + \frac{y^2}{(la)^2} - \frac{y^3}{(la)^3} + \ldots.\right\}$$

und folglich

$$\int_0^x \frac{\partial x}{l(a+x)} = \frac{x}{la} - \frac{1}{la}\int_0^x \left\{\frac{y}{la} - \frac{y^2}{(la)^2} + \frac{y^2}{(la)^3} - \ldots\right\}\partial x$$

ſetzen. Weil nun aber

$$1 + \frac{x}{a} = e^y,$$

und folglich

$$\partial x = ae^y\,\partial y = a\left\{1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \ldots\right\}\partial y$$

iſt; ſo iſt

$$\int_0^x \frac{\partial x}{l(a+x)} =$$

$$\frac{x}{la} - \frac{a}{la}\int_0^x \left\{1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \ldots\right\}\left\{\frac{y}{la} - \frac{y^3}{(la)^2} + \frac{y^3}{(la)^3} - \ldots\right\}\partial y\,,$$

oder, weil offenbar $y = 0$ iſt, wenn $x = 0$ iſt:

$$\int_0^x \frac{\partial x}{l(a+x)} =$$

$$\frac{x}{la} - \frac{a}{la}\int_0^y \left\{1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \ldots\right\}\left\{\frac{y}{la} - \frac{y^2}{(la)^2} + \frac{y^3}{(la)^3} - \ldots\right\}\partial y\,.$$

Die beiden unter dem Integralzeichen in einander multiplicirten Reihen ſind, wenn der abſolute Werth von $\frac{y}{\mathrm{l}a}$ kleiner als die Einheit iſt, convergent und bleiben auch convergent, wenn man für jedes Glied derſelben ſeinen abſoluten Werth ſetzt. Daher kann man auf das Product dieſer beiden Reihen den im Artikel Convergenz der Reihen (20.) i. d. Z. bewieſenen Satz anwenden, und erhält alſo, wenn wir die Coefficienten der durch Multiplication der beiden Reihen in einander hervorgehenden Reihe einſtweilen durch A_1, A_2, A_3, A_4, ... bezeichnen,

$$\int_0^x \frac{\partial x}{\mathrm{l}(a+x)}$$

$$= \frac{x}{\mathrm{l}a} - \frac{a}{\mathrm{l}a}\int_0^y (A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + A_4 y^4 + \ldots)\partial y\,,$$

oder

$$17.\quad \int_0^x \frac{\partial x}{\mathrm{l}(a+x)}$$

$$= \frac{x}{\mathrm{l}a} - \frac{a}{\mathrm{l}a}(\tfrac{1}{2}A_1 y^2 + \tfrac{1}{3}A_2 y^3 + \tfrac{1}{4}A_3 y^4 + \tfrac{1}{5}A_4 y^5 + \ldots.)\,,$$

wo aber, was man wohl zu beachten hat, der abſolute Werth von

$$\frac{y}{\mathrm{l}a} = \frac{\mathrm{l}\left(1+\frac{x}{a}\right)}{\mathrm{l}a}$$

kleiner als die Einheit ſeyn muß. Das Geſetz der Coefficienten A_1, A_2, A_3, A_4, ... findet man leicht. Es iſt nämlich

$$18.\quad A_1 = \frac{1}{\mathrm{l}a}$$

und allgemein

$$A_n = \frac{1}{1..(n-1)\mathrm{l}a} - \frac{1}{1..(n-2)(\mathrm{l}a)^2} + \ldots. \pm \frac{1}{(\mathrm{l}a)^{n+1}}\,,$$

$$A_{n+1} = \frac{1}{1...n\mathrm{l}a} - \frac{1}{1..(n-1)(\mathrm{l}a)^2} + \frac{1}{1..(n-2)(\mathrm{l}a)^3} - \ldots. \mp \frac{1}{(\mathrm{l}a)^n}\,.$$

Dies giebt die Relation

$$19.\quad \frac{A_n}{\mathrm{l}a} + A_{n+1} = \frac{1}{1...n\mathrm{l}a}\,,$$

mittelſt welcher und des in (18.) angegebenen Werths von A_1 die Coefficienten leicht berechnet werden können.

Setzt man

$$20.\quad \int_0^x \frac{\partial x}{\mathrm{l}(a+x)}$$

$$= \frac{x}{\mathrm{l}a} - a\left\{\tfrac{1}{2}B_1\frac{y^2}{(\mathrm{l}a)^2} + \tfrac{1}{3}B_2\frac{y^3}{(\mathrm{l}a)^3} + \tfrac{1}{4}B_3\frac{y^4}{(\mathrm{l}a)^4} + \ldots.\right\};$$

ſo iſt

$$B_1 = A_1 la,\ B_2 = A_2 (la)^2,\ B_3 = A_3 (la)^3, \ldots,$$

d. i. allgemein

$$B_n = A_n (la)^n.$$

Folglich iſt

$$A_n = \frac{B_n}{(la)^n},$$

und alſo nach (19.)

$$\frac{B_n}{(la)^{n+1}} + \frac{B_{n+1}}{(la)^{n+1}} = \frac{1}{1\ldots n la};$$

alſo

$$21.\quad B_n + B_{n+1} = \frac{(la)^n}{1\ldots n},$$

wozu man noch die Gleichung

$$22.\quad B_1 = 1$$

zu nehmen hat. Die Gleichung (21.) gewährt, wie es uns ſcheint, die bequemſte Berechnung der Coefficienten.

Aus dem in (20.) gefundenen Integral läßt ſich nun $li.(a+x)$ auf folgende Art ableiten.

Es iſt nämlich offenbar

$$li.(a+x) = \int_0^{a+x} \frac{\partial z}{lz},$$

oder

$$li.(a+x) = \int_0^a \frac{\partial z}{lz} + \int_a^{a+x} \frac{\partial z}{lz},$$

d. i., wie ſogleich in die Augen fällt,

$$li.(a+x) = li.a + \int_a^{a+x} \frac{\partial z}{lz}.$$

Setzen wir nun

$$z = a + u,\ \partial z = u;$$

ſo iſt

$$\frac{\partial z}{lz} = \frac{\partial u}{l(a+u)},$$

und folglich, weil für $z = a$ und $z = a + x$ reſpective $u = 0$ und $u = x$ iſt,

$$\int_a^{a+x} \frac{\partial z}{lz} = \int_0^x \frac{\partial u}{l(a+u)},$$

oder, was daſſelbe iſt

$$\int_a^{a+x} \frac{\partial z}{lz} = \int_0^x \frac{\partial x}{l(a+x)}.$$

Alſo iſt nach dem Obigen

$$\mathrm{li}.(a+x) = \mathrm{li}.a + \int_0^x \frac{\partial x}{l(a+x)},$$

und folglich nach (20.)

$$23.\quad \mathrm{li}.(a+x)$$

$$= \mathrm{li}.a + \frac{x}{la} - a\left\{\tfrac{1}{2}B_1\frac{y^2}{(la)^2} + \tfrac{1}{3}B_2\frac{y^3}{(la)^3} + \tfrac{1}{4}B_3\frac{y^4}{(la)^4} + \ldots\right\},$$

wo aber immer der abſolute Werth von

$$\frac{y}{la} = \frac{l\left(1+\frac{x}{a}\right)}{la}$$

kleiner als die Einheit ſeyn muß. Mittelſt dieſer Formel und der directen Formel (6.) hat Soldner eine Tafel von $\mathrm{li}.x$ berechnet, welche ſich von $x = 0$ bis $x = 1280$ erſtreckt. Mittelſt der directen Formel ging er bis zu $x = 10$, und ſchritt von hier an von Glied zu Glied mittelſt der Formel (23.) bis zur Gränze der Tafel fort. Wir theilen dieſe Tafel am Ende dieſes Artikels mit, ohne weitere Erläuterungen über ihren Gebrauch beizufügen, indem ſich jeder von ſelbſt leicht in denſelben finden wird.

Bekanntlich iſt $\mathrm{li}.0 = 0$. Man findet aber leicht, daß für Werthe von x, die größer als die Einheit, aber nicht viel von derſelben verſchieden ſind, $\mathrm{li}.x$ negativ iſt; für größere Werthe von x iſt dagegen $\mathrm{li}.x$ poſitiv; daher muß es außer dem Werthe $x = 0$ nothwendig noch einen zweiten die Einheit überſteigenden Werth von x geben, für welchen $\mathrm{li}.x = 0$ iſt. Soldner findet

$$\mathrm{li}.1{,}4513692346 = 0\,;$$

nach Beſſels Rechnung (a. a. O. S. 14.) iſt

$$\mathrm{li}.1{,}45136923495 = 0\,.$$

Auch mögen hier aus Soldners Schrift noch folgende ein beſonderes Intereſſe habende Integrallogarithmen mitgetheilt werden:

$$\mathrm{li}.0{,}1 = -\,0{,}0323897896$$
$$\mathrm{li}.10 = 6{,}1655995048$$
$$\mathrm{li}.e^{-1} = -\,0{,}2193839344$$
$$\mathrm{li}.e = 1{,}8951178164\,.$$

6. Wenn x ſehr groß oder ſehr klein iſt; ſo convergirt die Reihe (6.) nur ſehr langſam. Der Grund dieſer langſamen Convergenz liegt, wie Beſſel in ſeinem ſchönen Aufſatze über den Integrallogarithmus ganz richtig bemerkt, in der geringen Convergenz der Reihe

$$x = 1 + \frac{lx}{1} + \frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{(lx)^3}{1.2.3} + \frac{(lx)^4}{1\ldots4} + \ldots\ldots$$

Könnte man dieſe Reihe convergenter machen, oder lx durch

eine ſtark convergirende Reihe ausdrücken; ſo würde man dadurch einen brauchbarern Ausdruck für den Integrallogarithmus erhalten. Eine ſolche ſtark convergirende Reihe für lx erhält nun Beſſel durch folgenden an ſich ſehr einfachen, aber bemerkenswerthen, Kunſtgriff. Es iſt

$$24. \quad lx = il.x^{\frac{1}{i}} = il\{1 + (x^{\frac{1}{i}} - 1)\},$$

wo man, welchen poſitiven Werth auch x haben mag, die Größe $x^{\frac{1}{i}} - 1$ durch zweckmäßige Annahme der willkührlichen Zahl i der Null beliebig nahe bringen kann. Wenigſtens muß i jederzeit ſo angenommen werden, daß $x^{\frac{1}{i}} < 2$ iſt, damit der abſolute Werth von $x^{\frac{1}{i}} - 1$ kleiner als die Einheit werde. Dann iſt nach der bekannten logarithmiſchen Reihe

$$25. \quad lx = i\{(x^{\frac{1}{i}}-1) - \tfrac{1}{2}(x^{\frac{1}{i}}-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x^{\frac{1}{i}}-1)^3 - \tfrac{1}{4}(x^{\frac{1}{i}}-1)^4 + \ldots\},$$

wobei zu bemerken iſt, daß ſich dieſe Reihe durch zweckmäßige Annahme der willkührlichen Zahl i beliebig convergent machen läßt. Alſo iſt

$$26. \quad \frac{1}{lx} = \frac{1}{i}\left\{(x^{\frac{1}{i}}-1) - \tfrac{1}{2}(x^{\frac{1}{i}}-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x^{\frac{1}{i}}-1)^3 - \tfrac{1}{4}(x^{\frac{1}{i}}-1)^4 + \ldots\right\}^{-1}$$

$$= \frac{1}{i(x^{\frac{1}{i}}-1)} + \frac{A_0}{i} + \frac{A_1}{i}\left(x^{\frac{1}{i}}-1\right) + \frac{A_2}{i}\left(x^{\frac{1}{i}}-1\right)^2 + \frac{A_3}{i}\left(x^{\frac{1}{i}}-1\right)^3 + \ldots,$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten mit ∂x multiplicirt und dann zwiſchen den Gränzen 0 und x integrirt:

$$27. \quad li.x = \frac{1}{i}\int_0^x \frac{\partial x}{x^{\frac{1}{i}}-1} + \frac{A_0}{i}x + \frac{A_1}{i}\int_0^x (x^{\frac{1}{i}}-1)\partial x$$

$$+ \frac{A_2}{i}\int_0^x (x^{\frac{1}{i}}-1)^2\partial x + \frac{A_3}{i}\int_0^x (x^{\frac{1}{i}}-1)^3\partial x + \ldots\ldots$$

Setzen wir nun $x^{\frac{1}{i}} = z$; ſo erhalten wir

$$\frac{1}{i}\int_0^x \frac{\partial x}{x^{\frac{1}{i}}-1} = \int_0^z \frac{z^{i-1}\partial z}{z-1} = \int_0^z \left\{\frac{z^{i-1}-1}{z-1} + \frac{1}{z-1}\right\}\partial z$$

$$= \int_0^z \left\{1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{i-2} + \frac{1}{z-1}\right\}\partial z$$

$$= z + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 + \ldots + \frac{1}{i-1}z^{i-1} + \int_0^z \frac{\partial z}{z-1}$$

$$= x^{\frac{1}{i}} + \tfrac{1}{2}x^{\frac{2}{i}} + \tfrac{1}{3}x^{\frac{3}{i}} + \ldots + \frac{1}{i-1}x^{\frac{i-1}{i}} + \int_0^z \frac{\partial z}{z-1}.$$

Ferner iſt allgemein nach dem binomiſchen Lehrſatze

$$\frac{1}{i}(x^{\frac{1}{i}}-1)^k \partial x = (z-1)^k z^{i-1}\partial z$$

$$= (z^{i+k-1} - k_1 z^{i+k-2} + k_2 z^{i+k-3} - \ldots \mp k_1 z^i \pm z^{i-1})\partial z\,,$$

$$\frac{1}{i}\int_0^x (x^{\frac{1}{i}}-1)^k \partial x = \int_0^z (z-1)^k z^{i-1}\partial z$$

$$= \frac{1}{i+k} z^{i+k} - \frac{k_1}{i+k-1} z^{i+k-1} + \frac{k_2}{i+k-2} z^{i+k-2} - \ldots.$$

$$\ldots.. \mp \frac{k_1}{i+1} z^{i+1} \pm \frac{1}{i} z^i\,.$$

Alſo iſt, wie man leicht findet,

$$\frac{1}{i}\int_0^x (x^{\frac{1}{i}}-1)^k \partial x$$

$$= \frac{x}{i}\left\{\frac{x^{\frac{k}{i}}}{1+\frac{k}{i}} - \frac{k_1 x^{\frac{k-1}{i}}}{1+\frac{k-1}{i}} + \frac{k_2 x^{\frac{k-2}{i}}}{1+\frac{k-2}{i}} - \ldots \mp \frac{k_1 x^{\frac{1}{i}}}{1+\frac{1}{i}} \pm 1\right\},$$

und folglich

$$\text{li}.x = \int_0^z \frac{\partial z}{z-1} + x^{\frac{1}{i}} + \tfrac{1}{2}x^{\frac{2}{i}} + \tfrac{1}{3}x^{\frac{3}{i}} + \ldots + \frac{1}{i-1}x^{\frac{i-1}{i}}$$

$$+ A_0 \frac{x}{i}$$

$$+ A_1 \frac{x}{i}\left\{\frac{x^{\frac{1}{i}}}{1+\frac{1}{i}} - 1\right\}$$

$$+ A_2 \frac{x}{i}\left\{\frac{x^{\frac{2}{i}}}{1+\frac{2}{i}} - \frac{2x^{\frac{1}{i}}}{1+\frac{1}{i}} + 1\right\}$$

$$+ A_3 \frac{x}{i}\left\{\frac{x^{\frac{3}{i}}}{1+\frac{3}{i}} - \frac{3x^{\frac{2}{i}}}{1+\frac{2}{i}} + \frac{3x^{\frac{1}{i}}}{1+\frac{1}{i}} - 1\right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder auch, wie leicht aus bekannten Sätzen der Differenzenrechnung erhellet, wenn man die erſten Glieder der ſucceſſiven Differenzenreihen der Reihe

$$1,\ \frac{x^{\frac{1}{i}}}{1+\frac{1}{i}},\ \frac{x^{\frac{2}{i}}}{1+\frac{2}{i}},\ \frac{x^{\frac{3}{i}}}{1+\frac{3}{i}},\ \frac{x^{\frac{4}{i}}}{1+\frac{4}{i}},\ \ldots..$$

nach der Ordnung durch

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \ldots.$$

bezeichnet, und $\Delta_0 = 1$ ſetzt:

$$\mathrm{li}.x = \int_0^z \frac{\partial z}{z-1} + x^{\frac{1}{i}} + \tfrac{1}{2}x^{\frac{2}{i}} + \tfrac{1}{3}x^{\frac{3}{i}} + \ldots + \frac{1}{i-1}x^{\frac{i-1}{i}}$$
$$+ \frac{x}{i}\left\{A_0\Delta_0 + A_1\Delta_1 + A_2\Delta_2 + A_3\Delta_3 + A_4\Delta_4 + \ldots\right\}.$$

Weil nun

$$\partial l\{\pm(z-1)\} = \frac{\pm\partial z}{\pm(z-1)} = \frac{\partial z}{z-1}$$

iſt; ſo iſt

$$\int \frac{\partial z}{z-1} = \mathrm{Const.} + l\{\pm(z-1)\},$$

wo man das obere oder das untere Zeichen nehmen muß, jenachdem z, d. i. $x^{\frac{1}{i}}$, größer oder kleiner als die Einheit iſt. Iſt nun z kleiner als die Einheit, ſo iſt offenbar Const. $= 0$, wenn man das Integral zwiſchen den Gränzen 0 und z nimmt, und folglich für $z < 1$

$$\int_0^z \frac{\partial z}{z-1} = l\{-(z-1)\}.$$

Iſt aber $z > 1$; ſo iſt, wenn ε eine unendlich kleine poſitive Größe bezeichnet,

$$\int_0^z \frac{\partial z}{z-1} = \int_0^{1-\varepsilon}\frac{\partial z}{z-1} + \int_{1+\varepsilon}^z \frac{\partial z}{z-1},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden, wie leicht erhellen wird,

$$\int_0^z \frac{\partial z}{z-1} = l\{-(1-\varepsilon-1)\} + l\{+(z-1)\} - l\{+(1+\varepsilon-1)\}$$
$$= l\varepsilon + l\{+(z-1)\} - l\varepsilon = l\{+(z-1)\}.$$

Alſo iſt

$$\int_0^z \frac{\partial z}{z-1} = l\{\mp(z-1)\} = l\{\mp(x^{\frac{1}{i}}-1)\},$$

und in dieſer Formel das obere oder das untere Zeichen zu nehmen, jenachdem $x^{\frac{1}{i}}$ kleiner oder größer als die Einheit iſt. Nach dem Obigen iſt nun

28. $$\mathrm{li}.x = l\{\mp(x^{\frac{1}{i}}-1)\} + x^{\frac{1}{i}} + \tfrac{1}{2}x^{\frac{2}{i}} + \tfrac{1}{3}x^{\frac{3}{i}} + \ldots + \frac{1}{i-1}x^{\frac{i-1}{i}}$$
$$+ \frac{x}{i}\left\{A_0\Delta_0 + A_1\Delta_1 + A_2\Delta_2 + A_3\Delta_3 + A_4\Delta_4 + \ldots\right\}$$

und auch in dieſer Formel das obere oder das untere Zeichen zu nehmen, jenachdem $x^{\frac{1}{i}}$ kleiner oder größer als die Einheit iſt.

Es kommt nun noch auf das Geſetz der Coefficienten A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, ... an, welches Beſſel auf die folgende ſinnreiche Weiſe findet. Es iſt nämlich, wenn wir

$$\frac{\alpha}{l(1+\alpha)} = f(\alpha)$$

ſetzen und die Differentialquotienten nach Lagrange bezeichnen, wie ſehr leicht erhellen wird,

$$A_n = \frac{f^{(n+1)}(0)}{1.2.3..(n+1)}.$$

Sey nun $(1+\alpha)^x = u$; ſo iſt

$$x\,l(1+\alpha) = lu,\ \frac{\partial u}{u} = l(1+\alpha).\partial x,\ \partial u = l(1+\alpha).u\partial x,$$

und folglich, wenn man zwiſchen den Gränzen $x=0$, $x=1$ integrirt,

$$\frac{\alpha}{l(1+\alpha)} = f(\alpha) = \int_0^1 (1+\alpha)^x \partial x.$$

Differentiirt man nun nach α, auf der rechten Seite unter dem Integralzeichen; ſo erhält man nach und nach:

$$f'(\alpha) = \int_0^1 x(1+\alpha)^{x-1}\partial x,$$

$$f''(\alpha) = \int_0^1 x(x-1)(1+\alpha)^{x-2}\partial x,$$

$$f'''(\alpha) = \int_0^1 x(x-1)(x-2)(1+\alpha)^{x-3}\partial x,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

$$f^{(n+1)}(\alpha) = \int_0^1 x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)(1+\alpha)^{x-n-1}\partial x$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Setzt man alſo $\alpha = 0$, ſo erhält man

$$f(0) = \int_0^1 \partial x = 1,$$

$$f^{(n+1)}(0) = \int_0^1 x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)\partial x.$$

Folglich iſt nach dem Obigen offenbar

$$A_n = \int_0^1 \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{1.2.3\ldots.(n+1)}\partial x.$$

Mittelſt dieſer Formel, zu welcher Beſſel auf einem von dem hier eingeſchlagenen etwas verſchiedenen Wege gelangt, findet man nun ohne Schwierigkeit:

$$A_0 = \frac{1}{2} = +\frac{1}{2},$$

$$A_1 = \frac{1}{1.2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12},$$

$$A_2 = \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{2}{2}\right) = +\frac{1}{24},$$

$$A_3 = \frac{1}{1..4}\left(\frac{1}{5}-\frac{6}{4}+\frac{11}{3}-\frac{6}{2}\right) = -\frac{19}{720},$$

$$A_4 = \frac{1}{1..5}\left(\frac{1}{6}-\frac{10}{5}+\frac{35}{4}-\frac{50}{3}+\frac{24}{2}\right) = +\frac{3}{160},$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Beſſel entwickelt in ſeiner Abhandlung noch mehrere andere Formeln zur Berechnung des Integrallogarithmus, die wir aber hier der Beſchränktheit des Raumes wegen nicht mittheilen können, ſondern auf die vieles Bemerkenswerthe enthaltende Abhandlung ſelbſt verweiſen müſſen. Noch ſ. m. über den Integrallogarithmus eine Abhandlung von Bidone in den Mém. de l'Acad. de Turin. 1805—1808, Sciences phys. et math., p. 19. des Mém. présentés. Eine Anwendung ſeiner Methode zur annähernden Berechnung des Integrallogarithmus macht auch Gauß in der betreffenden berühmten Abhandlung in den Comment. soc. reg. gott. recent. Vol. III. p. 75. Die Soldnerſche Tafel laſſen wir nun folgen.

Zahl	li. —	Diff. I.	Diff. II.	Diff. III. ∓	Zahl	li. —	Diff. I.	Diff. II.	Diff. III.
0,00	0,0000000	18297	5458	2128	0,41	0,2640133	113708	3165	100
0,01	0,0018297	23755	3330	598	0,42	0,2753841	116873	3265	107
0,02	0,0042052	27085	2732	309	0,43	0,2870714	120138	3372	113
0,03	0,0069137	29817	2423	190	0,44	0,2990852	123510	3485	122
0,04	0,0098954	32240	2233	125	0,45	0,3114362	126995	3607	126
0,05	0,0131194	34473	2108	88	0,46	0,3241357	130602	3733	134
0,06	0,0165667	36581	2023	63	0,47	0,3371959	134335	3867	146
0,07	0,0202248	38604	1960	42	0,48	0,3506294	138202	4013	149
0,08	0,0240852	40564	1918	31	0,49	0,3644496	142215	4162	164
0,09	0,0281416	42482	1887	21	0,50	0,3786711	146377	4326	172
0,10	0,0323898	44369	1866	11	0,51	0,3933088	150703	4498	184
0,11	0,0368267	46235	1855	7	0,52	0,4083791	155201	4682	197
0,12	0,0414502	48090	1848	0	0,53	0,4238992	159883	4879	209
0,13	0,0462592	49938	1848	5	0,54	0,4398875	164762	5088	225
0,14	0,0512530	51786	1853	8	0,55	0,4563637	169850	5313	240
0,15	0,0564316	53639	1861	13	0,56	0,4733487	175163	5553	260
0,16	0,0617955	55500	1874	16	0,57	0,4908650	180716	5813	278
0,17	0,0673455	57374	1890	18	0,58	0,5089366	186529	6091	296
0,18	0,0730829	59264	1908	23	0,59	0,5275895	192620	6387	326
0,19	0,0790093	61172	1931	24	0,60	0,5468515	199007	6713	346
0,20	0,0851265	63103	1955	28	0,61	0,5667522	205720	7059	381
0,21	0,0914368	65058	1983	30	0,62	0,5873242	212779	7440	407
0,22	0,0979426	67041	2013	33	0,63	0,6086021	220219	7847	447
0,23	0,1046467	69054	2046	36	0,64	0,6306240	228066	8294	485
0,24	0,1115521	71100	2082	37	0,65	0,6534306	236360	8779	531
0,25	0,1186621	73182	2119	42	0,66	0,6770665	245139	9310	583
0,26	0,1259803	75301	2161	43	0,67	0,7015805	254449	9893	638
0,27	0,1335104	77462	2204	47	0,68	0,7270254	264342	10530	704
0,28	0,1412566	79666	2251	49	0,69	0,7534596	274873	11235	780
0,29	0,1492232	81917	2300	52	0,70	0,7809469	286108	12015	863
0,30	0,1574149	84217	2352	55	0,71	0,8095577	298123	12878	963
0,31	0,1658366	86569	2407	58	0,72	0,8393700	311001	13841	1074
0,32	0,1744935	88976	2465	63	0,73	0,8704701	324842	14915	1209
0,33	0,1833911	91441	2528	65	0,74	0,9029543	339757	16124	1362
0,34	0,1925352	93969	2593	68	0,75	0,9369300	355881	17486	1542
0,35	0,2019321	96562	2661	74	0,76	0,9795181	373367	19028	1762
0,36	0,2115883	99223	2735	76	0,77	1,0098548	392395	20790	2017
0,37	0,2215106	101958	2811	81	0,78	1,0490943	413185	22807	2327
0,38	0,2317064	104769	2892	86	0,79	1,0904128	435992	25134	2709
0,39	0,2421833	107661	2978	91	0,80	1,1340120	461126	27843	3170
0,40	0,2529494	110639	3069	95					

Zahl	li. —	Zahl	li. —
,80	1,1340120	0,91	1,8760780
,81	1,1801246	0,92	1,9887871
,82	1,2290215	0,93	2,1172535
,83	1,2810197	0,94	2,2663481
,84	1,3364941	0,95	2,4436226
0,85	1,3958924	0,96	2,6617277
0,86	1,4597547	0,97	2,9443801
0,87	1,5287419	0,98	3,3448241
0,88	1,6036733	0,99	4,0329587
0,89	1,6855829	1,00	unendlich
0,90	1,7758007		

Zahl	li. ∓	Zahl	li. +	Zahl	li. +	Zahl	li. +
1,0	unendlich	11	6,5919851	45	17,173366	260	61,233401
1,1	1,6757728	12	7,0005477	50	18,468696	280	64,806034
1,2	0,9337873	13	7,3965480	55	19,731245	300	68,333612
1,3	0,4801779	14	7,7808256	60	20,965412	320	71,820157
1,4	0,1449911	15	8,1548249	65	22,174669	360	78,683375
1,5	$\overline{0,1250650}$	16	8,5197165	70	23,361813	400	85,417888
1,6	0,3537475	17	8,8764646	75	24,529138	440	92,040677
1,7	0,5537438	18	9,2258743	80	25,678554	480	98,565102
1,8	0,7326370	19	9,5686258	90	27,929887	520	105,00191
1,9	0,8953266	20	9,9053000	100	30,126139	560	111,35993
2,0	1,0451638	22	10,562353	110	32,275096	600	117,64651
2,5	1,6672946	24	11,200316	120	34,382807	640	123,86784
3	2,1635889	26	11,821734	130	36,454085	720	136,13526
4	2,9675853	28	12,428628	140	38,492841	800	148,19668
5	3,6345880	30	13,022632	150	40,502303	880	160,07861
6	4,2222224	32	13,605092	160	42,485178	960	171,80200
7	4,7570508	34	14,177131	180	46,380020	1040	183,38376
8	5,2537182	36	14,739697	200	50,192168	1120	194,83783
9	5,7212387	38	15,293602	220	53,932872	1200	206,17582
10	6,1655895	40	15,839544	240	57,610933	1280	217,40761

Integration durch Annäherung. Von den verſchiedenen Methoden Integrale durch Annäherung zu finden, oder von den ſogenannten mechaniſchen Quadraturen, iſt in dem Artikel Integral (135.), vorzüglich aber in dem Artikel Quadratur (122.), ſchon in ſo großer Ausführlichkeit die Rede geweſen, daß wir uns hier nur mit einer kleinen Nachleſe begnügen müſſen. Namentlich können wir es uns nicht verſagen, eine überaus einfache, aber höchſt ſinnreiche, Methode hier mitzutheilen, welche Gauß in der in jeder Beziehung ſo wichtigen Abhandlung: Determinatio attractionis etc. Comment. soc. reg. Gott. rec. Vol. IV. Gott. 1820. zur annähernden Beſtimmung der Integrale von der Form

$$\int \frac{\partial \varphi}{\sqrt{m^2 \cos \varphi^2 + n^2 \sin \varphi^2}},$$

und ähnlicher, von denen nachher die Rede ſeyn wird, gegeben hat

Dieſe Methode beruhet vorzüglich auf dem folgenden arithmetiſchen Theorem, welches Gauß a. a. O. ohne Beweis mitgetheilt hat, und das daher hier von uns zunächſt in aller Strenge bewieſen werden ſoll.

1. Wenn m und n zwei beliebige poſitive Größen ſind, und, indem man die Quadratwurzel immer poſitiv nimmt,

$$m' = \tfrac{1}{2}(m+n),\ n' = \sqrt{mn}\,;$$

$$m'' = \tfrac{1}{2}(m'+n'),\ n'' = \sqrt{m'n'}\,;$$

$$m''' = \tfrac{1}{2}(m''+n''),\ n''' = \sqrt{m''n''}$$

$$m^{IV} = \tfrac{1}{2}(m'''+n'''),\ n^{IV} = \sqrt{m'''n'''}\,;$$

u. ſ. w. u. ſ. w

geſetzt wird; ſo nähern ſich die Größen m, m′, m″, m‴, ... und n, n′, n″, n‴, ... immer mehr und mehr einer und derſelben beſtimmten Gränze, der ſie auch beliebig nahe gebracht werden können, wenn man nur die Berechnung dieſer Größen weit genug fortſetzt.

Dieſer Satz kann auf folgende Art bewieſen werden.

I. Zuerſt erhellet, daß die Größen m, m′, m″, m‴, m^{IV}, ... von der zweiten an nie zunehmen. Wäre nämlich $m'' > m'$; ſo wäre, da

$$m' = \tfrac{1}{2}(m+n),\ m'' = \tfrac{1}{2}(m'+n')$$

iſt,

$$m'+n' > m+n\,;$$

folglich

$$\tfrac{1}{2}(m+n) + \sqrt{mn} > m+n$$

oder

$$2\sqrt{mn} > m+n\,;$$

alſo

$$m - 2\sqrt{mn} + n < 0$$

oder

$$(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2 < 0\,,$$

welches ungereimt iſt, da bekanntlich immer

$$(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2 \overline{\overline{>}}\ 0$$

iſt. Man ſieht alſo, daß m″ nicht größer als m′, überhaupt keine der Größen m′, m″, m‴, m^{IV}, ... größer als die nächſt vorhergehende ſeyn kann, oder daß die Größen m, m′, m″, m‴, m^{IV}, ... von der zweiten an nie zunehmen. Daß m′ in gewiſſen Fällen größer wie m ſeyn kann, erhellet leicht.

II. Ferner läßt ſich leicht zeigen, daß die Größen n, n′, n″, n‴, n^{IV}, ... von der zweiten an nie abnehmen. Wäre nämlich $n'' < n'$; ſo wäre $\sqrt{m'n'} < \sqrt{mn}$, $m'n' < mn$, d. i.

$$\tfrac{1}{2}(m+n)\sqrt{mn} < mn, \quad m+n < 2\sqrt{mn},$$

und folglich wieder

$$m - 2\sqrt{mn} + n < 0,$$

d. i.

$$(\sqrt{m} - \sqrt{n})^2 < 0,$$

welches dieſelbe Ungereimtheit iſt, wie vorher.

III. Die Differenzen

$$m-n,\ m'-n',\ m''-n'',\ m'''-n''',\ m^{\text{IV}}-n^{\text{IV}}, \ldots,$$

bloß in Bezug auf ihre abſoluten Werthe genommen, bilden eine fortwährend abnehmende Reihe, und können beliebig klein gemacht werden, wenn man ſie nur weit genug vom Anfange der obigen Reihe entfernt nimmt.

Es iſt nämlich

$$m'-n' = \tfrac{1}{2}(m+n) - \sqrt{mn} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2,$$

$$m''-n'' = \tfrac{1}{2}(m'+n') - \sqrt{m'n'} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{m'}-\sqrt{n'})^2,$$

$$m'''-n''' = \tfrac{1}{2}(m''+n'') - \sqrt{m''n''} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{m''}-\sqrt{n''})^2,$$

$$m^{\text{IV}}-n^{\text{IV}} = \tfrac{1}{2}(m'''+n''') - \sqrt{m'''n'''} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{m'''}-\sqrt{n'''})^2,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

oder, wie ſich hieraus leicht ergiebt,

$$m'-n' = (m-n).\frac{m-n}{2(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2},$$

$$m''-n'' = (m'-n').\frac{m'-n'}{2(\sqrt{m'}+\sqrt{n'})^2},$$

$$m'''-n''' = (m''-n'').\frac{m''-n''}{2(\sqrt{m''}+\sqrt{n''})^2},$$

$$m^{\text{IV}}-n^{\text{IV}} = (m'''-n''').\frac{m'''-n'''}{2(\sqrt{m'''}+\sqrt{n'''})^2},$$

u. ſ. w. u ſ. w.

d. i.

$$m'-n' = \tfrac{1}{2}(m-n).\frac{m-n}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2},$$

$$m''-n'' = \frac{1}{2^2}(m-n).\frac{m-n}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2}.\frac{m'-n'}{(\sqrt{m'}+\sqrt{n'})^2},$$

$$m'''-n''' = \frac{1}{2^3}(m-n).\frac{m-n}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2}.\frac{m'-n'}{(\sqrt{m'}+\sqrt{n'})^2}.\frac{m''-n''}{(\sqrt{m''}+\sqrt{n''})^2},$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Da nun

$$(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2 = m+n+2\sqrt{mn}$$

iſt; ſo überſteigt offenbar der abſolute Werth keiner der Brüche

$$\frac{m-n}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2},\ \frac{m'-n'}{(\sqrt{m'}+\sqrt{n'})^2},\ \frac{m''-n''}{(\sqrt{m''}+\sqrt{n''})^2}, \ldots.$$

die Einheit, und im Allgemeinen iſt alſo für kein k der abſolute Werth von $m^{(k)} - n^{(k)}$ größer als der abſolute Werth der Größe

$$\frac{1}{2^k}(m-n),$$

woraus das zu Beweiſende ſich unmittelbar ergiebt.

IV. Nach I., II. und III. nehmen alſo die Größen $m, m', m'', m''', m^{IV}, \ldots$ von der zweiten an nie zu, die Größen $n, n', n'', n''', n^{IV}, \ldots$ dagegen nehmen von der zweiten an nie ab, und die abſoluten Werthe der Differenzen

$$m-n,\ m'-n',\ m''-n'',\ m'''-n''', \ldots$$

nehmen fortwährend ab, können auch beliebig klein gemacht werden, wenn man ſie nur weit genug vom Anfange dieſer Reihe entfernt nimmt. Dies führt aber offenbar unmittelbar zu dem zu beweiſenden Satze.

Zugleich erhellet aus dieſem Beweiſe, daß, wenn namentlich m und n nur wenig von einander verſchieden ſind, die Differenzen $m-n$, $m'-n'$, $m''-n''$, $m'''-n'''$, ... bald ſehr klein werden.

Die gemeinſchaftliche Gränze, welcher ſich die Größen $m, m', m'', m''', \ldots$ und $n, n', n'', n''', \ldots$ immer mehr und mehr, und, wenn man ſich nur weit genug vom Anfange dieſer Reihen entfernt, bis zu jedem beliebigen Grade nähern, wollen wir im Folgenden mit Gauß durch μ bezeichnen und das arithmetiſch-geometriſche Mittel zwiſchen m und n nennen, eine Benennung, welche offenbar daher entſtanden iſt, weil m', n'; m'', n''; m''', n'''; m^{IV}, n^{IV}; ...... reſpective die arithmetiſchen und geometriſchen Mittel zwiſchen m, n; m', n'; m'', n''; m''', n'''; ..... ſind. Aus dem Beweiſe des vorigen Lehrſatzes ergiebt ſich unmittelbar, daß die Größe μ zwiſchen jeden zwei zuſammengehörenden der Größen m', n'; m'', n''; m''', m'''; m^{IV}, n^{IV}; ..... als zwei Gränzen enthalten iſt, eine Bemerkung, welche für die Beurtheilung des Fehlers, welchen man begeht, wenn man die eine von zwei zuſammengehörenden Gränzen der Größe μ als einen Näherungswerth dieſer Größe betrachtet, von Wichtigkeit iſt.

Dies vorausgeſetzt, läßt ſich nun ferner der folgende Lehrſatz beweiſen.

2. Behält μ ſeine vorige Bedeutung; ſo iſt jederzeit

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}} = \frac{1}{\mu}.$$

Um dies zu beweiſen, denke man ſich den Winkel φ' ſo beſtimmt, daß

$$\sin\varphi = \frac{2m\sin\varphi'}{(m+n)\cos\varphi'^2+2m\sin\varphi'^2}$$

iſt. Daß dieſe Beſtimmung immer möglich iſt, läßt ſich auf folgende Art überſehen. Zuerſt erhellet, daß der abſolute Werth des Bruchs auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nie größer als die Einheit iſt. Wäre nämlich, immer bloß rückſichtlich der abſoluten Werthe,

$$\frac{2m \sin \varphi'}{(m+n)\cos \varphi'^2 + 2m \sin \varphi'^2} > 1\,;$$

ſo wäre

$$2m \sin \varphi' > (m+n)\cos \varphi'^2 + 2m \sin \varphi'^2\,,$$

oder

$$2m \sin \varphi' > m(1 + \sin \varphi'^2) + n \cos \varphi'^2\,,$$

und folglich, da wir m und n als poſitiv annehmen, um ſo mehr

$$2m \sin \varphi' > m(1 + \sin \varphi'^2)$$

oder

$$2 \sin \varphi' > 1 + \sin \varphi'^2$$

immer bloß rückſichtlich des abſoluten Werths von $\sin \varphi'$. Alſo wäre, wenn man quadrirt,

$$4 \sin \varphi'^2 > 1 + 2 \sin \varphi'^2 + \sin \varphi'^4$$

oder

$$1 - 2 \sin \varphi'^2 + \sin \varphi'^4 < 0\,,$$

d. i.

$$(1 - \sin \varphi'^2)^2 < 0 \text{ oder } \cos \varphi'^4 < 0\,,$$

welches ungereimt iſt. Da nun ferner die Function

$$\frac{2m \sin \varphi'}{(m+n)\cos \varphi'^2 + 2m \sin \varphi'^2}$$

für $\varphi' = 0$ verſchwindet, für $\varphi' = \pm \frac{1}{2}\pi$ dagegen $= \pm 1$ wird, und ſich offenbar ſtetig ändert, wenn man φ' ſich von 0 bis $\pm \frac{1}{2}\pi$ ſtetig ändern läßt; ſo iſt klar, daß ſich φ' immer ſo beſtimmen laſſen muß, daß der Gleichung

$$\sin \varphi = \frac{2m \sin \varphi'}{(m+n)\cos \varphi'^2 + 2m \sin \varphi'^2}$$

genügt wird. Daſſelbe ergiebt ſich übrigens auch unmittelbar aus dem gleich nachher vollſtändig entwickelten Ausdrucke von $\sin \varphi'$, welcher offenbar unter allen Umſtänden eine reelle Größe iſt. Auch überzeugt man ſich auf der Stelle, daß, wenn φ' von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π wächſt, auch φ reſpective von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π wächſt, wenn auch in ungleichen Intervallen, ſo daß alſo $\sin \varphi$, $\sin \varphi'$ und $\cos \varphi$, $\cos \varphi'$ immer gleiche Vorzeichen haben.

Entwickelt man mittelſt der Gleichung $\cos \varphi^2 = 1 - \sin \varphi^2$ aus dem obigen Ausdrucke des Sinus den Coſinus von φ; ſo erhält man

$$\cos\varphi = \cos\varphi' \cdot \frac{\sqrt{(m+n)^2 \cos\varphi'^2 + 4mn \sin\varphi'^2}}{(m+n)\cos\varphi'^2 + 2m\sin\varphi'^2},$$

oder, weil

$$(m+n)^2 = 4m'^2,\ 4mn = 4n'^2$$

iſt,

$$\cos\varphi = 2\cos\varphi' \cdot \frac{\sqrt{m'^2 \cos\varphi'^2 + n'^2 \sin\varphi'^2}}{(m+n)\cos\varphi'^2 + 2m\sin\varphi'^2},$$

die Quadratwurzel poſitiv genommen, weil $\cos\varphi$ und $\cos\varphi'$ gleiche Vorzeichen haben.

Aus dem obigen Ausdrucke für $\sin\varphi$ ergiebt ſich auch leicht die Gleichung

$$(m+n)\sin\varphi + (m-n)\sin\varphi\sin\varphi'^2 = 2m\sin\varphi',$$

und aus dieſer Gleichung erhält man ohne Schwierigkeit

$$\sin\varphi' = \frac{m \pm \sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}}{(m-n)\sin\varphi},$$

wo es ſich nun bloß noch fragt, welches Zeichen man zu nehmen hat. Man überzeugt ſich aber leicht, daß, wenn man das obere Zeichen nimmt, der abſolute Werth des Bruchs auf der rechten Seite jederzeit größer als die Einheit iſt. Daher muß man das untere Zeichen nehmen, und ſetzt alſo

$$\sin\varphi' = \frac{m - \sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}}{(m-n)\sin\varphi}.$$

Aus dieſer Gleichung folgt auf der Stelle

$$\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2} = m - (m-n)\sin\varphi\sin\varphi'.$$

Da aus der Formel für $\sin\varphi$

$$(m+n)\cos\varphi'^2 + 2m\sin\varphi'^2 = 2m\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi}$$

folgt; ſo kann man die Formel für $\cos\varphi$ auch auf folgenden Ausdruck bringen:

$$\cos\varphi = \cos\varphi' \cdot \frac{\sin\varphi\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2 + n'^2\sin\varphi'^2}}{m\sin\varphi'},$$

und erhält hieraus ferner leicht

$$\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2 + n'^2\sin\varphi'^2} = m\cot\varphi\tan\varphi'.$$

Differentiirt man nun die Gleichung

$$(m+n)\sin\varphi + (m-n)\sin\varphi\sin\varphi'^2 = 2m\sin\varphi';$$

ſo erhält man

$$\{m+n+(m-n)\sin\varphi'^2\}\cos\varphi\,\partial\varphi = 2\{m-(m-n)\sin\varphi\sin\varphi\}\cos\varphi'\partial\varphi',$$

oder

$$\frac{\partial\varphi}{m-(m-n)\sin\varphi\sin\varphi'} = \frac{2\cos\varphi'\partial\varphi'}{\cos\varphi\{m+n+(m-n)\sin\varphi'^2\}},$$

oder

$$\frac{\partial\varphi}{m-(m-n)\sin\varphi\sin\varphi'} = \frac{2\cos\varphi'\partial\varphi}{\cos\varphi\{(m+n)\cos\varphi'^2+2m\sin\varphi'^2\}}.$$

Nach dem Obigen iſt aber

$$m-(m-n)\sin\varphi\sin\varphi' = \sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2},$$

$$\frac{2\cos\varphi'}{\cos\varphi\{(m+n)\cos\varphi'^2+2m\sin\varphi'^2\}} = \frac{1}{\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2}}.$$

Alſo iſt

$$\frac{\partial\varphi}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}} = \frac{\partial\varphi'}{\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2}},$$

und folglich, wie nach dem Obigen nun leicht erhellet, da φ und φ' zugleich $=0$ und 2π ſind:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}} = \int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi'}{2\pi\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2}}.$$

Ganz auf dieſelbe Weiſe iſt

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi'}{2\pi\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2}} = \int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi''}{2\pi\sqrt{m''^2\cos\varphi''^2+n''^2\sin\varphi''^2}}.$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi''}{2\pi\sqrt{m''^2\cos\varphi''+n''^2\sin\varphi''^2}} = \int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi''}{2\pi\sqrt{m'''^2\cos\varphi'''^2+n'''^2\sin\varphi'''^2}}.$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi'''}{2\pi\sqrt{m'''^2\cos\varphi'''+n'''^2\sin\varphi'''^2}} = \int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi^{\text{IV}}}{2\pi\sqrt{m^{\text{IV}2}\cos\varphi^{\text{IV}2}+n^{\text{IV}2}\sin\varphi^{\text{IV}2}}}.$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Da ſich nun die Größen m, m', m'', m''', ... und n, n', n'', n''', ... immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Größe μ nähern; ſo iſt offenbar

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}} = \int_0^{2\pi}\frac{\partial\Theta}{2\pi\sqrt{\mu^2\cos\Theta^2+\mu^2\sin\Theta^2}},$$

oder, wie leicht erhellet,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}} = \frac{1}{2\pi\mu}\int_0^{2\pi}\partial\Theta,$$

oder, weil offenbar

$$\int_0^{2\pi}\partial\Theta = 2\pi$$

iſt,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}} = \frac{1}{\mu},$$

wie bewieſen werden ſollte.

3. Nach (2.) iſt

$$\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2} = m - (m-n)\sin\varphi\sin\varphi',$$

$$\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2 + n'^2\sin\varphi'^2} = m\cot\varphi\,\tang\varphi'.$$

Multiplicirt man dieſe Gleichungen mit $\sin\varphi\sin\varphi'$ und $\cos\varphi\cos\varphi'$, und zieht ſie dann von einander ab; ſo erhält man

$$\sin\varphi\sin\varphi'\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2} - \cos\varphi\cos\varphi'\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2 + n'^2\sin\varphi'^2}$$
$$= m\sin\varphi\sin\varphi' - (m-n)\sin\varphi^2\sin\varphi'^2 - \frac{m\cos\varphi^2\sin\varphi'}{\sin\varphi}.$$

Aber nach (2.)

$$m\sin\varphi' = \tfrac{1}{2}(m+n)\sin\varphi + \tfrac{1}{2}(m-n)\sin\varphi\sin\varphi'^2.$$

Alſo

$$\sin\varphi\sin\varphi'\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2} - \cos\varphi\cos\varphi'\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2 + n'^2\sin\varphi'^2}$$
$$= \tfrac{1}{2}(m+n)\sin\varphi^2 + \tfrac{1}{2}(m-n)\sin\varphi^2\sin\varphi'^2$$
$$- \tfrac{1}{2}(m+n)\cos\varphi^2 - \tfrac{1}{2}(m-n)\cos\varphi^2\sin\varphi'^2 - (m-n)\sin\varphi^2\sin\varphi'^2$$
$$= -\tfrac{1}{2}(m+n)(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2) - \tfrac{1}{2}(m-n)\sin\varphi'^2,$$

und folglich, weil $\frac{1}{2}(m+n) = m'$ iſt,

$$\sin\varphi\sin\varphi'\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2} + m'(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)$$
$$= \cos\varphi\cos\varphi'\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2 + n'^2\sin\varphi'^2} - \tfrac{1}{2}(m-n)\sin\varphi'^2.$$

Multiplicirt man nun dieſe Gleichung mit

$$\frac{\partial\varphi}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}} = \frac{\partial\varphi'}{\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2 + n'^2\sin\varphi'^2}};$$

ſo ergiebt ſich

$$\sin\varphi\sin\varphi'\partial\varphi + \frac{m'(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)\partial\varphi}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}}$$
$$= \cos\varphi\cos\varphi'\partial\varphi' - \frac{\frac{1}{2}(m-n)\sin\varphi'^2\partial\varphi'}{\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2 + n'^2\sin\varphi'^2}},$$

woraus dann ferner leicht

$$\frac{m'(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)\partial\varphi}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}}$$
$$= -\frac{\frac{1}{2}(m-n)\sin\varphi'^2\partial\varphi'}{\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2 + n'^2\sin\varphi'^2}} + \partial.\cos\varphi\sin\varphi'$$

folgt.

Multipliciren wir nun dieſe Gleichung mit $\frac{m-n}{\pi}$ und ſetzen

$$m'(m-n) = \tfrac{1}{2}(m^2 - n^2),$$
$$(m-n)^2 = 4(m'^2 - n'^2),$$
$$\sin\varphi'^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(\cos\varphi'^2 - \sin\varphi'^2);$$

ſo erhalten wir

$$\frac{\frac{1}{2}(m^2-n^2)(\cos\varphi^2-\sin\varphi^2)\partial\varphi}{\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}}$$

$$=-\frac{(m'^2-n'^2)\partial\varphi'}{\pi\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2}}+\frac{(m'^2-n'^2)(\cos\varphi'^2-\sin\varphi'^2)\partial\varphi'}{\pi\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2}}$$

$$+\frac{m-n}{\pi}\partial.\cos\varphi\sin\varphi';$$

alſo, wenn man integrirt und alle Integrale zwiſchen den Gränzen $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$; $\varphi'=0$, $\varphi'=2\pi$ nimmt, nach (2.)

$$(m^2-n^2)\int_0^{2\pi}\frac{(\cos\varphi^2-\sin\varphi^2)\partial\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}}$$

$$=-\frac{2(m'^2-n'^2)}{\mu}+2(m'^2-n'^2)\int_0^{2\pi}\frac{(\cos\varphi'^2-\sin\varphi'^2)\partial\varphi'}{2\pi\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2}}.$$

Das Integral von $\partial.\cos\varphi\sin\varphi'$ iſt nämlich $\cos\varphi\sin\varphi'$, und verſchwindet alſo offenbar, wenn man es zwiſchen den angegebenen Gränzen nimmt, wobei man zu bemerken hat, daß, wie wir aus dem Obigen wiſſen, φ und φ' zugleich $=0$ und $=2\pi$ ſind.

Bezeichnen wir nun das Integral auf der linken Seite der vorhergehenden Gleichung durch Φ und alle ähnlichen Integrale auf ähnliche Weiſe; ſo haben wir, wenn wir der Kürze wegen auch

$$m^2-n^2=L,\ m'^2-n'^2=L',\ m''^2-n''^2=L'',\ \ldots..$$

ſetzen, überhaupt folgende Gleichungen:

$$L\Phi=-\frac{2L'}{\mu}+2L'\Phi',$$

$$L'\Phi'=-\frac{2L''}{\mu}+2L''\Phi'',$$

$$L''\Phi''=-\frac{2L'''}{\mu}+2L'''\Phi''',$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

$$L^{(k-1)}\Phi^{(k-1)}=-\frac{2L^{(k)}}{\mu}+2L^{(k)}\Phi^{(k)}.$$

Hieraus erhält man ſehr leicht nach und nach durch Subſtitution:

$$L\Phi=-\frac{2L'+2^2L''+2^3L'''+\ldots+2^kL^{(k)}}{\mu}+2^kL^{(k)}\Phi^{(k)}.$$

Nun iſt

$$L'=m'^2-n'^2=\tfrac{1}{4}(m+n)^2-mn=\tfrac{1}{4}(m-n)^2,$$

$$L''=m''^2-n''^2=\tfrac{1}{4}(m'+n')^2-m'n'=\tfrac{1}{4}(m'-n')^2,$$

$$L'''=m'''^2-n'''^2=\tfrac{1}{4}(m''+n'')^2-m''n''=\tfrac{1}{4}(m''-n'')^2,$$

$$L^{IV}=m^{IV2}-n^{IV2}=\tfrac{1}{4}(m'''+n''')^2-m'''n'''=\tfrac{1}{4}(m'''-n''')^2,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Weil aber

$$(m'-n')^2=(m'-n')(m'-n'),\quad m'^2-n'^2=(m'-n')(m'+n');$$
$$(m''-n'')^2=(m''-n'')(m''-n''),\quad m''^2-n''^2=(m''-n'')(m''+n'');$$
$$(m'''-n''')^2=(m'''-n''')(m'''-n'''),\quad m'''^2-n'''^2=(m'''-n''')(m'''+n''');$$
$$\text{u. ſ. w.}\qquad\qquad \text{u. ſ. w.}$$

iſt; ſo iſt offenbar

$$(m'-n')^2 \overline{\overline{<}} L'$$
$$(m''-n'')^2 \overline{\overline{<}} L'',$$
$$(m'''-n''')^2 \overline{\overline{<}} L''',$$
$$\text{u. ſ. w.}$$

Alſo iſt

$$L'=\tfrac{1}{4}(m-n)^2,\ L'' \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{4}L',\ L''' \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{4}L'',\ L^{\text{IV}} \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{4}L''',\ \ldots .$$

und folglich

$$L'=\frac{1}{4}(m-n)^2,$$
$$L'' \overline{\overline{<}} \frac{1}{4^2}(m-n)^2,$$
$$L''' \overline{\overline{<}} \frac{1}{4^3}(m-n)^2,$$
$$L^{\text{IV}} \overline{\overline{<}} \frac{1}{4^4}(m-n)^2,$$
$$\text{u. ſ. w.}$$

alſo

$$2L'=\frac{1}{2}(m-n)^2,$$
$$2^2L'' \overline{\overline{<}} \frac{1}{2^2}(m-n)^2,$$
$$2^3L''' \overline{\overline{<}} \frac{1}{2^3}(m-n)^2,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$2^kL^{(k)} \overline{\overline{<}} \frac{1}{2^k}(m-n)^2.$$

Für ein unendlich großes k iſt folglich $2^kL^{(k)}=0$, oder dieſe Größe nähert ſich, wenn k wächſt, immer mehr und mehr der Null, und kann derſelben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur k groß genug nimmt. Alſo iſt nach dem Obigen offenbar

$$\int_0^{2\pi}\frac{(\cos\varphi^2-\sin\varphi^2)\,\partial\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}}$$
$$=-\frac{2L'+2^2L''+2^3L'''+2^4L^{\text{IV}}+\ldots+2^kL^{(k)}}{\mu L}.$$

deſto genauer, je größer k iſt, und mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit, wenn man nur k groß genug nimmt. Setzen wir

$$\frac{2L' + 2^2 L'' + 2^3 L''' + 2^4 L^{IV} + \ldots + 2^k L^{(k)}}{L} = K;$$

ſo iſt

$$\int_0^{2\pi} \frac{(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)\partial\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}} = -\frac{K}{\mu}.$$

Die Größe **K** wird am leichteſten gefunden, wenn man ſich bei der numeriſchen Berechnung ihrer einzelnen Theile der Logarithmen und der nachfolgend entwickelten Formeln bedient. Man ſetze nämlich

$$\lambda = \tfrac{1}{4}\sqrt{L},\ \lambda' = \tfrac{1}{4}\sqrt{L'},\ \lambda'' = \tfrac{1}{4}\sqrt{L''},\ \lambda''' = \tfrac{1}{4}\sqrt{L'''},\ \ldots\ldots$$

Bekanntlich iſt nun

$$\lambda' = \tfrac{1}{4}\sqrt{(m'^2 - n'^2)} = \tfrac{1}{4}\sqrt{\{\tfrac{1}{4}(m+n)^2 - mn\}},$$

woraus man auf der Stelle

$$\lambda' = \tfrac{1}{8}(m-n)$$

erhält. Nun iſt aber

$$\frac{\lambda^2}{m'} = \frac{\frac{1}{16}L}{m'} = \frac{\frac{1}{16}(m^2-n^2)}{\frac{1}{2}(m+n)} = \tfrac{1}{8}(m-n);$$

alſo iſt

$$\lambda' = \frac{\lambda^2}{m'},$$

und man hat folglich die zur logarithmiſchen Berechnung der Größen λ', λ'', λ''', λ^{IV}, ... ſehr bequemen Formeln:

$$\lambda' = \frac{\lambda^2}{m'},\ \lambda'' = \frac{\lambda'^2}{m''},\ \lambda''' = \frac{\lambda''^2}{m'''},\ \lambda^{IV} = \frac{\lambda'''^2}{m^{IV}},\ \ldots\ldots$$

Hat man aber dieſe Größen, ſo findet man **K** aus der Formel

$$K = \frac{2\lambda'^2 + 2^2\lambda''^2 + 2^3\lambda'''^2 + \ldots + 2^k\lambda^{(k)2}}{\lambda^2}.$$

4. Setzen wir jetzt

$$P = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi^2\,\partial\varphi}{2\pi\{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2\}^{\frac{3}{2}}},\ Q = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi^2\,\partial\varphi}{2\pi\{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2\}^{\frac{3}{2}}};$$

ſo iſt, wie ſogleich in die Augen fällt

$$m^2 P + n^2 Q = \int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}},$$

und folglich nach (2.)

$$\text{I.}\quad m^2 P + n^2 Q = \frac{1}{\mu}.$$

Ferner iſt

$$\frac{(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)\,\partial\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}} + \frac{(m^2\cos\varphi^2 - n^2\sin\varphi^2)\,\partial\varphi}{2\pi\{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{(m^2\cos\varphi^4 - n^2\sin\varphi^4)\,\partial\varphi}{\pi\{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2\}^{\frac{3}{2}}} = \partial.\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}}.$$

Integrirt man nun dieſe Gleichung zwiſchen den Gränzen $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$; ſo erhält man nach (3.) in der eingeführten Bezeichnung auf der Stelle

$$\text{II.}\quad -\frac{K}{\mu} + m^2 P - n^2 Q = 0.$$

Aus den beiden Gleichungen **I.** und **II.** ergiebt ſich aber ſehr leicht

$$P = \frac{1+K}{2m^2\mu},\quad Q = \frac{1-K}{2n^2\mu},$$

wodurch alſo die beiden beſtimmten Integrale **P** und **Q** gefunden ſind.

5. Bisher haben wir nur die zwiſchen den Gränzen 0 und 2π genommenen Integrale beſtimmt; man kann aber mittelſt des Vorhergehenden auch leicht überhaupt die zwiſchen den Gränzen 0 und φ genommenen Integrale finden, wie nun noch gezeigt werden ſoll. Zu dem Ende beſtimme man nämlich eben ſo, wie vorher der Winkel φ' aus den Größen m, n, φ beſtimmt worden iſt, die Winkel φ'', φ''', φ^{IV}, ... reſpective aus den Größen m', n', φ'; m'', n'', φ''; m''', n''', φ'''; u. ſ. w., ſo daß man alſo folgende Gleichungen hat:

$$(m + n)\sin\varphi + (m - n)\sin\varphi\sin\varphi'^2 = 2m\sin\varphi',$$

$$(m' + n')\sin\varphi' + (m' - n')\sin\varphi'\sin\varphi''^2 = 2m'\sin\varphi'',$$

$$(m'' + n'')\sin\varphi'' + (m'' - n'')\sin\varphi''\sin\varphi'''^2 = 2m''\sin\varphi''',$$

$$(m''' + n''')\sin\varphi''' + (m''' - n''')\sin\varphi'''\sin\varphi^{\text{IV}2} = 2m'''\sin\varphi^{\text{IV}},$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Weil nun die Größen m, m', m'', m''', ... und n, n', n'', n''', ... ſich der gemeinſchaftlichen Gränze μ immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähern, und z. B. die erſte der vorhergehenden Gleichungen für $m = n$ in die Gleichung $\sin\varphi = \sin\varphi'$ übergeht; ſo iſt klar, daß auch die Winkel φ, φ', φ'', φ''', ... ſich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade einer gewiſſen beſtimmten Gränze nähern werden, die wir in der Folge durch Θ bezeichnen wollen. Da nun nach (2.)

$$\frac{\partial\varphi}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}} = \frac{\partial\varphi'}{\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2 + n'^2\sin\varphi'^2}},$$

$$\frac{\partial\varphi'}{\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2 + n'^2\sin\varphi'^2}} = \frac{\partial\varphi''}{\sqrt{m''^2\cos\varphi''^2 + n''^2\sin\varphi''^2}},$$

$$\frac{\partial\varphi''}{\sqrt{m''^2\cos\varphi''^2+n''^2\sin\varphi''^2}}=\frac{\partial\varphi'''}{\sqrt{m'''^2\cos\varphi'''^2+n'''^2\sin\varphi'''^2}},$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

iſt; ſo iſt offenbar auch

$$\frac{\partial\varphi}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}}=\frac{\partial\Theta}{\sqrt{\mu^2\cos\Theta^2+\mu^2\sin\Theta^2}},$$

d. i.

$$\frac{\partial\varphi}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}}=\frac{\partial\Theta}{\mu}.$$

Für $\varphi=0$ iſt offenbar auch $\Theta=0$. Alſo iſt

$$\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}}=\int_0^\Theta\frac{\partial\Theta}{\mu},$$

woraus ſich augenblicklich

$$\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}}=\frac{\Theta}{\mu}$$

ergiebt.

Bezeichnen wir jetzt ferner die Größen

$$\frac{\cos\varphi^2-\sin\varphi^2}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}},\ m-n$$

reſpective durch $\frac{1}{\Omega}$, Δ, und alle ähnlichen Größen auf ähnliche Weiſe; ſo haben wir nach (3.) die Gleichung

$$L\frac{\partial\varphi}{\Omega}=-2L'\frac{\partial\varphi'}{\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2}}+2L'\frac{\partial\varphi'}{\Omega'}+2\Delta\partial.\cos\varphi\sin\varphi',$$

und folglich, wenn wir zwiſchen den gehörigen Gränzen integriren,

$$L\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{\Omega}$$

$$=-2L'\int_0^{\varphi'}\frac{\partial\varphi'}{\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2}}+2L'\int_0^{\varphi'}\frac{\partial\varphi}{\Omega'}+2\Delta\cos\varphi\sin\varphi',$$

oder, weil nach dem Vorhergehenden überhaupt

$$\int_0^{\varphi'}\frac{\partial\varphi'}{\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2}}=\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}}=\frac{\Theta}{\mu}$$

iſt,

$$L\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{\Omega}=-\frac{2L'\Theta}{\mu}+2L'\int_0^{\varphi'}\frac{\partial\varphi'}{\Omega'}+2\Delta\cos\varphi\sin\varphi'.$$

Bezeichnen wir alſo der Kürze wegen das Integral

$$\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{\Omega}$$

durch Ψ und alle ähnlichen Größen durch ähnliche Zeichen; ſo haben wir jetzt die folgende Reihe von Gleichungen:

$$L\Psi = -\frac{2L'\Theta}{\mu} + 2L'\Psi' + 2\Delta\cos\varphi\sin\varphi',$$

$$L'\Psi' = -\frac{2L''\Theta}{\mu} + 2L''\Psi'' + 2\Delta'\cos\varphi'\sin\varphi'',$$

$$L''\Psi'' = -\frac{2L'''\Theta}{\mu} + 2L'''\Psi''' + 2\Delta''\cos\varphi''\sin\varphi''',$$

. . . .

$$L^{(k-1)}\Psi^{(k-1)} = -\frac{2L^{(k)}\Theta}{\mu} + 2L^{(k)}\Psi^{(k)} + 2\Delta^{(k-1)}\cos\varphi^{(k-1)}\sin\varphi^{(k)},$$

aus denen ſich ganz auf ähnliche Art wie in (3.)

$$\Psi = -\frac{\{2L' + 2^2L'' + 2^3L''' + \ldots + 2^kL^{(k)}\}\Theta}{L\mu}$$
$$+ \frac{2\Delta\cos\varphi\sin\varphi' + 2^2\Delta'\cos\varphi'\sin\varphi'' + \ldots + 2^k\Delta^{(k-1)}\cos\varphi^{(k-1)}\sin\varphi^{(k)}}{L},$$

oder

$$\int_0^\varphi \frac{(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)\,\partial\varphi}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}}$$
$$= -\frac{K\Theta}{\mu} + \frac{2\Delta\cos\varphi\sin\varphi' + 2^2\Delta'\cos\varphi'\sin\varphi'' + \ldots + 2^k\Delta^{(k-1)}\cos\varphi^{(k-1)}\sin\varphi^{(k)}}{L}$$

ergiebt. Nach (3.) iſt

$$\Delta = m - n = 8\lambda',$$
$$\Delta' = m' - n' = 8\lambda'',$$
$$\Delta'' = m'' - n'' = 8\lambda''',$$

u. ſ. w.

und L iſt $= 16\lambda^2$. Führt man alſo die Größen $\lambda, \lambda', \lambda'', \lambda'''$ .... ein; ſo erhält man

$$\int_0^\varphi \frac{(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)\,\partial\varphi}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}} =$$
$$-\frac{K\Theta}{\mu} + \frac{\lambda'\cos\varphi\sin\varphi' + 2\lambda''\cos\varphi'\sin\varphi'' + \ldots + 2^{k-1}\lambda^{(k)}\cos\varphi^{(k-1)}\sin\varphi^{(k)}}{\lambda^2},$$

immer mit deſto größerer Genauigkeit, je größer k iſt, aber auch zugleich mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit, wenn man nur k groß genug nimmt.

Zur Berechnung der Winkel $\varphi', \varphi'', \varphi'''$, ... wird man ſich vielleicht am beſten folgender Methode bedienen. Nach (2.) iſt

$$\sin\varphi' = \frac{m - \sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}}{(m-n)\sin\varphi},$$

und folglich, wenn man den Hülfswinkel ψ aus der Formel

$$\tang\psi = \frac{n}{m}\tang\varphi$$

berechnet:

$$\sin\varphi' = \frac{m(1 - \cos\varphi \sec\psi)}{(m-n)\sin\varphi},$$

d. i.

$$\sin\varphi' = \frac{m(\cos\psi - \cos\varphi)}{(m-n)\sin\varphi\cos\psi},$$

oder nach bekannten trigonometriſchen Formeln

$$\sin\varphi' = \frac{2m\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)}{(m-n)\sin\varphi\cos\psi}.$$

Hat man auf dieſe Art φ' gefunden, ſo berechnet man den Hülfswinkel ψ' aus der Formel

$$\tang\psi' = \frac{n'}{m'}\tang\varphi',$$

und findet dann φ'' mittelſt der Formel

$$\sin\varphi'' = \frac{2m'\sin\frac{1}{2}(\varphi'+\psi')\sin\frac{1}{2}(\varphi'-\psi')}{(m'-n')\sin\varphi'\cos\psi'}.$$

Wie man auf dieſe Art immer weiter gehen und ſich der oben durch Θ bezeichneten Gränze immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähern kann, iſt klar.

Wir wollen uns nun mit fernern den vorhergehenden ähnlichen Unterſuchungen über die in (4.) betrachteten beſtimmten Integrale der Beſchränktheit des Raumes wegen nicht weiter beſchäftigen, ſondern bloß noch in der Kürze die Anwendung des Vorhergehenden auf die Rectification der Ellipſe zeigen.

6. Die Gleichung der Ellipſe aus dem Mittelpunkte iſt bekanntlich

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Setzen wir nun

$$\frac{x}{a} = \sin\varphi;$$

ſo iſt offenbar

$$\frac{y}{b} = \cos\varphi$$

und wir haben folglich

$$x = a\sin\varphi,\quad y = b\cos\varphi;$$
$$\partial x = a\cos\varphi\,\partial\varphi,\quad \partial y = -b\sin\varphi\,\partial\varphi.$$

Alſo iſt, wenn wir den den Coordinaten x, y entſprechenden, vom Scheitel der kleinen Axe an gerechneten Bogen der Ellipſe durch s bezeichnen,

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \partial\varphi\sqrt{a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2};$$

$$s=\int_0^\varphi \partial\varphi \sqrt{a^2\cos\varphi^2+b^2\sin\varphi^2};$$

oder

$$s=\int_0^\varphi \frac{(a^2\cos\varphi^2+b^2\sin\varphi^2)\partial\varphi}{\sqrt{a^2\cos\varphi^2+b^2\sin\varphi^2}}.$$

Hieraus ergiebt ſich leicht

$$s=\int_0^\varphi \frac{a^2-(a^2-b^2)\sin\varphi^2}{\sqrt{a^2\cos\varphi^2+b^2\sin\varphi^2}}\partial\varphi,$$

$$s=\int_0^\varphi \frac{(a^2-b^2)\cos\varphi^2+b^2}{\sqrt{a^2\cos\varphi^2+b^2\sin\varphi^2}}\partial\varphi;$$

alſo

$$2s=\int_0^\varphi \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2\cos\varphi^2+b^2\sin\varphi^2}}\partial\varphi+\int_0^\varphi \frac{(a^2-b^2)(\cos\varphi^2-\sin\varphi^2)}{\sqrt{a^2\cos\varphi^2+b^2\sin\varphi^2}}\partial\varphi,$$

oder

$$s=\frac{a^2+b^2}{2}\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\sqrt{a^2\cos\varphi^2+b^2\sin\varphi^2}}+\frac{a^2-b^2}{2}\int_0^\varphi \frac{(\cos\varphi^2-\sin\varphi^2)\partial\varphi}{\sqrt{a^2\cos\varphi^2+b^2\sin\varphi^2}}.$$

Da man nun nach dem Vorhergehenden die beiden Integrale auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens immer mit jedem beliebigem Grade der Annäherung berechnen kann; ſo iſt durch das Vorhergehende zugleich die ſogenannte beſtimmte und unbeſtimmte Rectification der Ellipſe gefunden. Für den elliptiſchen Quadranten muß man natürlich $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ ſetzen.

7. In dieſen Artikel gehörende Beiſpiele der annähernden Berechnung von Integralen bietet vorzüglich auch der Artikel Elliptiſche Functionen. **XIV. XV. XVI.** i. d. Z. dar. Auf den Artikel Quadratur im vierten Theile iſt ſchon oben verwieſen worden, wo man die vorzüglichſten allgemeinen Methoden zur annähernden Berechnung der Integrale zuſammengeſtellt findet. Außerdem verweiſen wir noch auf eine die berühmte Gaußiſche allgemeine Annäherungsmethode betreffende Abhandlung von C. G. J. Jacobi in **Crelles Journ. B. I. S. 301.**, und auf eine ſich allgemein über dieſen Gegenſtand verbreitende Abhandlung von Dirkſen in den Schriften der Berliner Academie der Wiſſenſchaften, die auch (Berlin. 1832.) beſonders gedruckt erſchienen iſt. Auch v. Ettingshauſen hat in der Wiener Zeitſchrift für Mathematik und Phyſik. Bd. **VII.** S. 429. eine Abhandlung über die Gaußiſche Näherungsmethode geliefert. Endlich ſehe man auch noch außer den im Artikel Quadratur angeführten Schriften Legendre's **Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes. T. II. Paris. 1826. p. 572.** und Crelles Sammlung mathematiſcher Aufſätze und Bemerkungen. Bd. **I.** Berlin. 1821., wo man S. 218 — 277. dreizehn verſchiedene Näherungsmethoden zuſammengeſtellt findet. Ueber die annähernde Berech-

nung der Werthe doppelter Integrale ſ. m. einen Aufſatz von Minding in Crelles Journal B. VI. S. 91.

Integration der Differentialgleichungen. Wir werden uns in dieſem Artikel, durch welchen der Artikel Integralgleichung im zweiten Theile dieſes Wörterbuchs einigermaßen ergänzt werden ſoll, bloß mit der Integration einiger beſonders wichtigen Differentialgleichungen beſchäftigen.

I. Integration der Gleichung

$$A\frac{\partial^n y}{\partial x^n}+B\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}+C\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}}+\ldots\ldots+L\frac{\partial y}{\partial x}+Ny=0,$$

wo A, B, C, ... L, N conſtante Größen bezeichnen.

1. Für $y=ce^{\lambda x}$ hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x}=c\lambda e^{\lambda x},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=c\lambda^2 e^{\lambda x},\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=c\lambda^3 e^{\lambda x},\ \ldots\ \frac{\partial^n y}{\partial x^n}=c\lambda^n e^{\lambda x},$$

und folglich

$$ce^{\lambda x}(A\lambda^n+B\lambda^{n-1}+C\lambda^{n-2}+\ldots+L\lambda+N)=0,$$

oder

$$1.\quad A\lambda^n+B\lambda^{n-1}+C\lambda^{n-2}+\ldots+L\lambda+N=0,$$

ſo daß alſo, wenn λ_1 eine Wurzel dieſer Gleichung, c_1 eine ganz willkührliche Conſtante bezeichnet, $y_1=c_1e^{\lambda_1 x}$ jederzeit ein Integral unſerer Differentialgleichung iſt, aber bloß ein partikuläres Integral, weil daſſelbe bloß eine willkührliche Conſtante enthält, da im Gegentheil das vollſtändige Integral unſerer Differentialgleichung n willkührliche Conſtanten enthalten müßte. Bezeichnen jetzt aber $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots \lambda_n$ die n Wurzeln der Gleichung (1.); ſo ſind

$$2.\ y_1=c_1e^{\lambda_1 x},\ y_2=c_2e^{\lambda_2 x},\ y_3=c_3e^{\lambda_3 x},\ \ldots\ldots\ y_n=c_ne^{\lambda_n x},$$

wo $c_1, c_2, c_3 \ldots\ldots c_n$ ſämmtlich ganz willkührliche Conſtanten bezeichnen, n partikuläre Integrale unſerer Differentialgleichung, und man kann nun beweiſen, daß auch jederzeit

$$3.\quad y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}+c_3e^{\lambda_3 x}+\ldots+c_ne^{\lambda_n x},$$

oder

$$4.\quad y=y_1+y_2+y_3+y_4+\ldots\ldots+y_n$$

ein Integral derſelben iſt, woraus dann von ſelbſt folgt, daß dieſes Integral, weil daſſelbe n willkührliche Conſtanten enthält, im Allgemeinen jederzeit das vollſtändige Integral der gegebenen Differentialgleichung iſt. Der Beweis aber, daß

$$y=y_1+y_2+y_3+y_4+\ldots\ldots+y_n$$

ein Integral dieſer Differentialgleichung iſt, kann ſehr leicht auf folgende Art geführt werden. Es iſt nämlich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial y_2}{\partial x} + \frac{\partial y_3}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial x},$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 y_3}{\partial x^3} + \ldots + \frac{\partial^3 y_n}{\partial x^3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} + \frac{\partial^n y_2}{\partial x^n} + \frac{\partial^n y_3}{\partial x^n} + \ldots + \frac{\partial^n y_n}{\partial x^n}.$$

Alſo iſt

$$A\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y}{\partial x} + Ny$$
$$= A\frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y_1}{\partial x} + Ny_1$$
$$+ A\frac{\partial^n y_2}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y_2}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y_2}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y_2}{\partial x} + Ny_2$$
$$+ A\frac{\partial^n y_3}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y_3}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y_3}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y_3}{\partial x} + Ny_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A\frac{\partial^n y_n}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y_n}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y_n}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y_n}{\partial x} + Ny_n.$$

Weil nun aber $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ ſämmtlich partikuläre Integrale der gegebenen Differentialgleichung ſind; ſo iſt

$$A\frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y_1}{\partial x} + Ny_1 = 0,$$
$$A\frac{\partial^n y_2}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y_2}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y_2}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y_2}{\partial x} + Ny_2 = 0,$$
$$A\frac{\partial^n y_3}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y_3}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y_3}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y_3}{\partial x} + Ny_3 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A\frac{\partial^n y_n}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y_n}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y_n}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y_n}{\partial x} + Ny_n = 0,$$

und folglich, für

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots + y_n,$$

auch

$$A\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y}{\partial x} + Ny = 0,$$

wie bewieſen werden ſollte.

Dieſe allgemeinen Betrachtungen auf einige ſpecielle Fälle anzuwenden, iſt hier um ſo nöthiger, weil bei denſelben noch einige wichtige Bemerkungen zu machen ſind, die ſich aber an

ſpecielle Fälle beſſer anknüpfen laſſen, als an die obigen ganz allgemeinen Betrachtungen.

2. Die gegebene Gleichung ſey zuerſt

$$5.\quad A\frac{\partial y}{\partial x} + By = 0\,.$$

Iſt nun λ_1 die Wurzel der Gleichung

$$6.\quad A\lambda + B = 0\,;$$

ſo iſt nach dem Vorhergehenden

$$7.\quad y = c_1 e^{\lambda_1 x}\,,$$

oder, weil $\lambda_1 = -\frac{B}{A}$ iſt,

$$8.\quad y = c_1 e^{-\frac{B}{A}x}$$

das vollſtändige Integral der gegebenen Differentialgleichung.

Iſt ferner

$$9.\quad A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B\frac{\partial y}{\partial x} + Cy = 0$$

die gegebene Gleichung; ſo iſt, wenn λ_1, λ_2 die beiden Wurzeln der quadratiſchen Gleichung

$$10.\quad A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

ſind, im Allgemeinen

$$11.\quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

das geſuchte vollſtändige Integral, wo nun aber die folgenden Fälle beſonders zu betrachten ſind.

Die beiden Wurzeln λ_1, λ_2 der Gleichung (10.) können nämlich entweder beide reell und ungleich, oder beide reell und einander gleich, oder auch beide imaginär ſeyn.

I. Im erſten Falle, wenn λ_1, λ_2 beide reell und ungleich ſind, iſt in der That

$$11^*.\quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

das vollſtändige Integral der gegebenen Differentialgleichung, und dieſes Integral auch, weil es reell iſt, keiner weitern Umformung fähig.

II. Wenn aber λ_1, λ_2 beide reell und einander gleich ſind; ſo iſt

$$y = (c_1 + c_2)\,e^{\lambda_1 x}\,,$$

und enthält alſo in der That nur die eine willkührliche Conſtante $c_1 + c_2$, kann folglich auch nicht das vollſtändige Integral der gegebenen Differentialgleichung ſeyn. In dieſem Falle betrachte man zuerſt λ_1 und λ_2 nicht als einander gleich, ſondern laſſe

dieſelben, indem man $\lambda_2 = \lambda_1 + \Theta$ ſetzt, um die unendlich kleine Größe Θ unterſchieden ſeyn; ſo iſt

$$\begin{aligned} y &= e^{\lambda_1 x}(c_1 + c_2 e^{\Theta x}) \\ &= e^{\lambda_1 x}\left\{c_1 + c_2\left(1 + \frac{\Theta x}{1} + \frac{\Theta^2 x^2}{1.2} + \frac{\Theta^3 x^3}{1.2.3} + \ldots\right)\right\}, \end{aligned}$$

oder, wenn man

$$c_1 + c_2 = C_1,\; c_2 \Theta = C_2$$

ſetzt,

$$y = e^{\lambda_1 x}\left\{C_1 + C_2 x\left(1 + \frac{\Theta x}{2} + \frac{\Theta^2 x^2}{2.3} + \ldots\right)\right\},$$

und folglich, wenn man nun $\Theta = 0$ ſetzt,

$$12.\quad y = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x)$$

das vollſtändige Integral der gegebenen Differentialgleichung. Uebrigens kann man ſich nun auch leicht a posteriori von der Richtigkeit dieſes Reſultats überzeugen. Es iſt nämlich, wie man leicht findet,

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= (C_1 + C_2 x)\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_1 x}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= (C_1 + C_2 x)\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + 2C_2\lambda_1 e^{\lambda_1 x}. \end{aligned}$$

Alſo iſt

$$\begin{aligned} & e^{-\lambda_1 x}\left(A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B\frac{\partial y}{\partial x} + Cy\right) \\ &= A\{(C_1 + C_2 x)\lambda_1^2 + 2C_2\lambda_1\} + B\{(C_1 + C_2 x)\lambda_1 + C_2\} \\ &\quad + C(C_1 + C_2 x). \end{aligned}$$

Durch Auflöſung der quadratiſchen Gleichung

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

erhält man aber

$$\lambda = -\frac{B}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

und folglich

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{B}{2A} + \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \\ \lambda_2 &= -\frac{B}{2A} - \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \end{aligned}$$

Weil aber $\lambda_1 = \lambda_2$ iſt; ſo iſt

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{B}{2A}$$

und

$$B^2 - 4AC = 0,\; C = \frac{B^2}{4A}.$$

Führt man nun dieſe Werthe von λ_1 und C in die obige Gleichung ein; ſo findet man, daß

$$A\{(C_1 + C_2 x)\lambda_1^2 + 2C_2\lambda_1\} + B\{(C_1 + C_2 x)\lambda_1 + C_2\}$$
$$+ C(C_1 + C_2 x) = 0,$$

und folglich auch

$$A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B\frac{\partial y}{\partial x} + Cy = 0,$$

alſo

$$y = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x),$$

wo C_1, C_2 zwei ganz willkührliche Conſtanten ſind, das richtige vollſtändige Integral der gegebenen Differentialgleichung iſt.

III. Wenn λ_1 und λ_2 beide imaginär ſind; ſo iſt bekanntlich

$$\lambda_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1},\ \lambda_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

wo nach dem Vorhergehenden

$$\alpha = -\frac{B}{2A},\ \beta = \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A}$$

iſt. Alſo iſt

$$c_1 e^{\lambda_1 x} = c_1 e^{\alpha x}.e^{\beta x\sqrt{-1}} = c_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sin\beta x.\sqrt{-1}),$$

$$c_2 e^{\lambda_2 x} = c_2 e^{\alpha x}.e^{-\beta x\sqrt{-1}} = c_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x - \sin\beta x.\sqrt{-1});$$

folglich

$$y = e^{\alpha x}\{(c_1 + c_2)\cos\beta x + (c_1 - c_2)\sin\beta x.\sqrt{-1}\},$$

oder, wenn man

$$c_1 + c_2 = E_1,\ (c_1 - c_2)\sqrt{-1} = E_2$$

ſetzt,

$$13.\quad y = e^{\alpha x}(E_1\cos\beta x + E_2\sin\beta x).$$

Ferner ſey

$$14.\quad A\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + B\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + C\frac{\partial y}{\partial x} + Dy = 0$$

die gegebene Differentialgleichung, und λ_1, λ_2, λ_3 ſeyen die drei Wurzeln der cubiſchen Gleichung

$$A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda + D = 0;$$

ſo iſt im Allgemeinen

$$15.\quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 e^{\lambda_3 x}$$

das vollſtändige Integral der Gleichung (14.), wo nun aber wieder die folgenden Fälle beſonders zu betrachten ſind.

I. Wenn die drei Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 alle drei reell und ſämmtlich unter einander ungleich ſind; ſo iſt

15*. $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 e^{\lambda_3 x}$

das vollſtändige Integral unſerer Differentialgleichung.

II. Wenn die Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 alle drei reell, aber zwei derſelben, z. B. λ_1 und λ_2, einander gleich ſind; ſo iſt

$$y = (c_1 + c_2) e^{\lambda_1 x} + c_3 e^{\lambda_3 x},$$

und dieſes Integral enthält alſo bloß zwei willkührliche Conſtanſtanten $c_1 + c_2$ und c_3, und kann alſo nicht das vollſtändige Integral unſerer Differentialgleichung ſeyn. In dieſem Falle ſetze man zuerſt $\lambda_2 = \lambda_1 + \Theta$, wo Θ eine unendlich kleine Größe bezeichnet; ſo iſt

$$y = e^{\lambda_1 x}(c_1 + c_2 e^{\Theta x}) + c_3 e^{\lambda_3 x}$$

$$= e^{\lambda_1 x}\left\{c_1 + c_2\left(1 + \frac{\Theta x}{1} + \frac{\Theta^2 x^2}{1.2} + \frac{\Theta^3 x^3}{1.2.3} + \ldots\right)\right\} + c_3 e^{\lambda_3 x},$$

$$= e^{\lambda_1 x}\left\{C_1 + C_2 x\left(1 + \frac{\Theta x}{2} + \frac{\Theta^2 x^2}{2.3} + \ldots\right)\right\} + C_3 e^{\lambda_3 x},$$

wenn man

$$c_1 + c_2 = C_1,\quad c_2 \Theta = C_2,\quad c_3 = C_3$$

ſetzt. Setzt man nun $\Theta = 0$, ſo ergiebt ſich

16. $y = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x) + C_3 e^{\lambda_3 x}$

als vollſtändiges Integral unſerer Differentialgleichung, von deſſen Richtigkeit man ſich auch leicht wieder a posteriori überzeugen kann.

III. Wenn die drei Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 alle drei reell und ſämmtlich unter einander gleich ſind; ſo hat man zuerſt $\lambda_3 = \lambda_1 + \Theta = \lambda_2 + \Theta$, wo Θ wieder eine unendlich kleine Größe bezeichnet. Dann iſt nach (16.)

$$y = e^{\lambda_1 x}(c_1 + c_2 x + c_3 e^{\Theta x}),$$

wenn man jetzt wieder c_1, c_2, c_3 für C_1, C_2, C_3 ſetzt, d. i.

$$y = e^{\lambda_1 x}\left\{c_1 + c_2 x + c_3\left(1 + \frac{\Theta x}{1} + \frac{\Theta^2 x^2}{1.2} + \ldots\right)\right\}$$

$$= e^{\lambda_1 x}\left\{c_1 + c_3 + (c_2 + c_3\Theta)x + \tfrac{1}{2}c_3\,\Theta^2 x^2\left(1 + \frac{\Theta x}{3} + \ldots\right)\right\}$$

$$= e^{\lambda_1 x}\left\{C_1 + C_2 x + C_3 x^2\left(1 + \frac{\Theta x}{3} + \frac{\Theta^2 x^2}{3.4} + \ldots\right)\right\},$$

wenn wir

$$c_1 + c_3 = C_1,\quad c_2 + c_3\Theta = C_2,\quad \tfrac{1}{2}c_3\Theta^2 = C_3$$

ſetzen, und folglich, wenn wir nun $\Theta = 0$ ſetzen,

17. $y = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$

das vollſtändige Integral unſerer Differentialgleichung, von deſſen Richtigkeit man ſich auch leicht a posteriori überzeugen kann.

IV. Sind endlich die beiden Wurzeln λ_1, λ_2 der Gleichung

$$A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda + D = 0$$

imaginär, die dritte λ_3 aber reell; ſo iſt bekanntlich

$$\lambda_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1},\ \lambda_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

und folglich auf ganz ähnliche Art wie oben

$$18.\quad y = e^{\alpha x}(E_1 \cos\beta x + E_2 \sin\beta x) + E_3 e^{\lambda_3 x}$$

das vollſtändige Integral der gegebenen Differentialgleichung.

Aus dem Vorhergehenden erhellet nun ſchon deutlich genug, wie man auf dieſe Art immer weiter gehen kann.

II. Integration der Gleichung

$$A\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y}{\partial x} + Ny = X,$$

wo A, B, C, ... L, N conſtante Größen bezeichnen, X eine beliebige Function von x iſt.

2. Bevor wir zur Integration dieſer Gleichung übergehen, wollen wir zuerſt in der Kürze das Integral der Gleichung

$$19.\quad \frac{\partial y}{\partial x} + Py = Q,$$

wo P und Q Functionen von x ſind, entwickeln, obgleich von dieſer Gleichung auch ſchon Thl. II. S. 891. die Rede geweſen iſt. Man ſetze $y = uz$, wo u und z Functionen von x ſind, von denen man die eine ſich offenbar immer willkührlich angenommen denken kann; ſo iſt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = u\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial u}{\partial x},$$

und folglich

$$20.\quad u\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + Pu\right)z = Q.$$

Denkt man ſich nun u ſo beſtimmt, daß

$$21.\quad \frac{\partial u}{\partial x} + Pu = 0$$

iſt, ſo iſt

$$22.\quad u\frac{\partial z}{\partial x} = Q.$$

Aus der Gleichung (21.) folgt

$$23.\quad \frac{\partial u}{u} = -P\partial x;$$

alſo, wenn man integrirt,

$$24.\quad lu = -\int P\partial x + C$$

oder

$$25.\quad u = e^{-\int P\partial x + C} = e^C . e^{-\int P\partial x} = ae^{-\int P\partial x} .$$

Führt man dies in die Gleichung (22.) ein, ſo erhält man

$$26.\quad a\partial z = Qe^{\int P\partial x}\partial x ,$$

und folglich

$$27.\quad az = \int Qe^{\int P\partial x}\partial x + C .$$

Aber

$$z = \frac{y}{u} = \frac{1}{a}ye^{\int P\partial x} .$$

Alſo iſt

$$28.\quad y = e^{-\int P\partial x} . \{\int Qe^{\int P\partial x}\partial x + C\} ,$$

wodurch folglich das Integral unſerer Differentialgleichung gefunden iſt.

3. Sey nun

$$29.\quad A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B\frac{\partial y}{\partial x} + Cy = X$$

die gegebene Differentialgleichung. Um dieſe Differentialgleichung zu integriren, ſetze man $y = Yz$; ſo iſt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = Y\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial x}z ,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = Y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}z ,$$

und folglich

$$30.\quad (A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial z}{\partial x} + Cz)Y$$

$$+ 2A\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + \left(A\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + B\frac{\partial Y}{\partial x}\right)z = X .$$

Beſtimmt man nun z ſo, daß

$$31.\quad A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial z}{\partial x} + Cz = 0$$

iſt, welches nach I. immer möglich iſt; ſo iſt

$$32.\quad 2A\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + \left(A\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + B\frac{\partial Y}{\partial x}\right)z = X ,$$

oder, wenn wir

$$33.\quad \frac{\partial Y}{\partial x} = Y' ,$$

ſetzen,

$$34.\quad Az\frac{\partial Y'}{\partial x}+\left(Bz+2A\frac{\partial z}{\partial x}\right)Y'=X,$$

oder

$$35.\quad \frac{\partial Y'}{\partial x}+\left(\frac{B}{A}+\frac{2\partial z}{z\partial x}\right)Y'=\frac{X}{Az},$$

oder, wenn wir

$$36.\quad \frac{B}{A}+\frac{2\partial z}{z\partial x}=P,\ \frac{X}{Az}=Q$$

ſetzen, wo P und Q bekannte Functionen von x ſind,

$$37.\quad \frac{\partial Y'}{\partial x}+PY'=Q.$$

Aus dieſer Gleichung findet man Y' nach (28.), und hat dann

$$38.\quad Y=\int Y'\partial x+c,\ y=z(\int Y'\partial x+c),$$

wodurch alſo y, da z bekannt iſt, gefunden iſt.

Um nun völlig entwickelte Formeln zu erhalten, wollen wir wieder die folgenden Fälle unterſcheiden.

I. Wenn die Wurzeln λ_1, λ_2 der Gleichung

$$A\lambda^2+B\lambda+C=0$$

beide reell und ungleich ſind; ſo kann man, wie aus dem Obigen hervorgeht,

$$z=e^{\lambda_1 x},\ \frac{\partial z}{\partial x}=\lambda_1 e^{\lambda_1 x}$$

ſetzen. Nach der Theorie der quadratiſchen Gleichungen iſt

$$\frac{B}{A}=-\lambda_1-\lambda_2.$$

Alſo iſt nach (36.)

$$P=-\lambda_1-\lambda_2+\frac{2\lambda_1 e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_1 x}}=\lambda_1-\lambda_2,$$

und

$$Q=\frac{X}{Ae^{\lambda_1 x}}.$$

Ferner iſt

$$\int P\partial x=\int(\lambda_1-\lambda_2)\partial x=(\lambda_1-\lambda_2)x.$$

Deshalb iſt nach (28.)

$$Y'=e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}.\left\{\int\frac{Xe^{(\lambda_1-\lambda_2)x}\partial x}{Ae^{\lambda_1 x}}+c_1\right\}$$

$$=e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}.\left\{\frac{1}{A}\int Xe^{-\lambda_2}\ \partial x+c_1\right\}$$

$$=\frac{1}{A}e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}\int Xe^{-\lambda_2 x}\partial x+c_1 e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}.$$

Folglich iſt

$$\int Y'\partial x = \frac{1}{A}\int e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}\partial x\int Xe^{-\lambda_2 x}\partial x + c_1\int e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}\partial x$$

$$= \frac{1}{A}\int Xe^{-\lambda_2 x}\partial x . \int e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}\partial x$$

$$-\frac{1}{A}\int Xe^{-\lambda_2 x}\partial x\int e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}\partial x$$

$$+c_1\int e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}\partial x$$

$$= -\frac{1}{A(\lambda_1-\lambda_2)}e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}\int Xe^{-\lambda_2 x}\partial x$$

$$+\frac{1}{A(\lambda_1-\lambda_2)}\int Xe^{-\lambda_1 x}\partial x - \frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}$$

$$= \frac{\int Xe^{-\lambda_1 x}\partial x - e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}\int Xe^{-\lambda_2 x}\partial x}{A(\lambda_1-\lambda_2)} - \frac{c_1 e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}}{\lambda_1-\lambda_2},$$

und daher nach (38.)

$$39.\quad y = ce^{\lambda_1 x} - \frac{c_1 e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1-\lambda_2}$$

$$+\frac{e^{\lambda_1 x}\int Xe^{-\lambda_1 x}\partial x - e^{\lambda_2 x}\int Xe^{-\lambda_2 x}\partial x}{A(\lambda_1-\lambda_2)}.$$

II. Wenn die Wurzeln der Gleichung

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

beide reell, aber einander gleich ſind; ſo iſt nach (12.)

$$z = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x)$$

das vollſtändige Integral, und wir können alſo, da C_1, C_2 ganz willkührliche Conſtanten ſind, wieder

$$z = e^{\lambda_1 x},\ \frac{\partial z}{\partial x} = \lambda_1 e^{\lambda_1 x}$$

ſetzen. Weil in dieſem Falle

$$\frac{B}{A} = -2\lambda_1$$

iſt; ſo iſt, wie man leicht findet,

$$P = 0,\ \int P\partial x = 0 .$$

Alſo iſt nach (28.)

$$Y' = \int Q\partial x + c_1 ,$$

d. i.

$$Y' = \frac{1}{A}\int Xe^{-\lambda_1 x}\partial x + c_1$$

und folglich

$$\int Y'\partial x = \frac{1}{A}\int\partial x\int Xe^{-\lambda_1 x}\partial x + c_1 x$$

$$= \frac{x}{A}\int Xe^{-\lambda_1 x}\partial x - \frac{1}{A}\int Xe^{-\lambda_1 x}x\partial x + c_1 x\,.$$

Alſo iſt in dieſem Falle

40. $$y = \frac{e^{\lambda_1 x}}{A}\{x\int Xe^{-\lambda_1 x}\partial x - \int Xe^{-\lambda_1 x}x\partial x\} + e^{\lambda_1 x}(c + c_1 x).$$

III. Sind endlich die Wurzeln der Gleichung

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

beide imaginär, nämlich $= \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$; ſo hat man in der Formel (39.)

$$\lambda_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1},\ \lambda_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1},\ \lambda_1 - \lambda_2 = 2\beta\sqrt{-1}$$

zu ſetzen. Dadurch erhält man

$$e^{\lambda_1 x} = e^{\alpha x}.e^{\beta x\sqrt{-1}} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sin\beta x.\sqrt{-1})\,,$$

$$e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x}.e^{-\beta x\sqrt{-1}} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - \sin\beta x.\sqrt{-1})\,,$$

und folglich

$$y = ce^{\alpha x}(\cos\beta x + \sin\beta x.\sqrt{-1}) - \frac{c_1 e^{\alpha x}}{2\beta\sqrt{-1}}(\cos\beta x - \sin\beta x.\sqrt{-1})$$

$$+\frac{\left\{\begin{array}{l} e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sin\beta x.\sqrt{-1})\int Xe^{-\alpha x}(\cos\beta x - \sin\beta x.\sqrt{-1})\partial x \\ - e^{\alpha x}(\cos\beta x - \sin\beta x.\sqrt{-1})\int Xe^{-\alpha x}(\cos\beta x + \sin\beta x.\sqrt{-1})\partial x\end{array}\right\}}{2A\beta\sqrt{-1}}\,,$$

woraus nach leichter Rechnung

41. $$y = e^{\alpha x}\left\{\left(c - \frac{c_1}{2\beta\sqrt{-1}}\right)\cos\beta x + \left(c + \frac{c_1}{2\beta\sqrt{-1}}\right)\sin\beta x.\sqrt{-1}\right\}$$

$$+ \frac{e^{\alpha x}}{A\beta}\left(\sin\beta x\int Xe^{-\alpha x}\cos\beta x\partial x - \cos\beta x\int Xe^{-\alpha x}\sin\beta x\partial x\right)\,,$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$c - \frac{c_1}{2\beta\sqrt{-1}} = C,\ c\sqrt{-1} + \frac{c_1}{2\beta} = C_1$$

ſetzt,

42. $$y = e^{\alpha x}(C\cos\beta x + C_1\sin\beta x)$$

$$+ \frac{e^{\alpha x}}{A\beta}(\sin\beta x\int Xe^{-\alpha x}\cos\beta x\partial x - \cos\beta x\int Xe^{-\alpha x}\sin\beta x\partial x)\,.$$

4. Durch ein anderes Verfahren wie das vorher bei der Integration der Gleichung (29.) angewandte läßt ſich nun aber ganz im Allgemeinen zeigen, daß die Integration der Gleichung

$$A\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y}{\partial x} + Ny = X$$

immer auf die Integration einer Gleichung von derſelben Form, in welcher aber der höchſte vorkommende Differentialquotient von y nur von der (n—1)ſten Ordnung iſt, zurückgeführt werden kann. Um jedoch nicht zu weitläufig zu werden, wollen wir dies bloß an der Gleichung

$$43.\quad A\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + B\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + C\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + D\frac{\partial y}{\partial x} + Ey = X$$

zeigen. Man multiplicire dieſe Gleichung auf beiden Seiten mit $e^{\lambda x}\partial x$, wo λ eine ganz unbeſtimmte Größe bezeichnet, ſo erhält man

$$44.\quad Xe^{\lambda x}\partial x$$
$$= e^{\lambda x}\left(A\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + B\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + C\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + D\frac{\partial y}{\partial x} + Ey\right)\partial x,$$

und ſuche nun λ und die conſtanten Coefficienten A_1, B_1, C_1, D_1 ſo zu beſtimmen, daß

$$45.\quad \int Xe^{\lambda x}\partial x = e^{\lambda x}\left(A_1\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + B_1\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + C_1\frac{\partial y}{\partial x} + D_1 y\right)$$

iſt. Differentiirt man zu dem Ende dieſe Gleichung; ſo erhält man

$$46.\quad e^{\lambda x}\partial x\left\{\begin{aligned}&A_1\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + B_1\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + C_1\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + D_1\frac{\partial y}{\partial x}\\ &\qquad + \lambda A_1\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \lambda B_1\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \lambda C_1\frac{\partial y}{\partial x} + \lambda D_1 y\end{aligned}\right\}$$
$$= e^{\lambda x}\partial x\left(A\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + B\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + C\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + D\frac{\partial y}{\partial x} + Ey\right),$$

und folglich

$$47.\quad \left\{\begin{aligned}A_1 &= A\\ B_1 + \lambda A_1 &= B\\ C_1 + \lambda B_1 &= C\\ D_1 + \lambda C_1 &= D\\ \lambda D_1 &= E\end{aligned}\right. \qquad 48.\quad \left\{\begin{aligned}A_1 &= A\\ B_1 &= B - \lambda A_1\\ C_1 &= C - \lambda B_1\\ D_1 &= D - \lambda C_1\\ \lambda D_1 &= E\end{aligned}\right.$$

Hieraus ſieht man, daß, wenn λ beſtimmt wäre, durch die vier erſten der Gleichungen (48.) die Coefficienten A_1, B_1, C_1, D_1 vollkommen beſtimmt ſeyn würden. Nun hat man aber noch die Gleichung $\lambda D_1 = E$, welche offenbar zur Beſtimmung von λ führen wird. Es iſt nämlich

$$\begin{aligned}D_1 &= D - \lambda C_1\\ &= D - C\lambda + \lambda^2 B_1\\ &= D - C\lambda + B\lambda^2 - \lambda^3 A_1\\ &= D - C\lambda + B\lambda^2 - A\lambda^3;\end{aligned}$$

alſo

$$\lambda D_1 = D\lambda - C\lambda^2 + B\lambda^3 - A\lambda^4,$$

oder

$$A\lambda^4 - B\lambda^3 + C\lambda^2 - D\lambda + \lambda D_1 = 0\,,$$

d. i.

$$49.\quad A\lambda^4 - B\lambda^3 + C\lambda^2 - D\lambda + E = 0\,,$$

ſo daß alſo für λ jede Wurzel dieſer Gleichung geſetzt werden kann. Hat man aber auf dieſe Art einen Werth von λ gefunden; ſo ſind, wie ſchon bemerkt worden iſt, auch A_1, B_1, C_1, D_1 bekannt, und die Beſtimmung von y iſt folglich auf die Integration der Gleichung (45.), oder, wenn wir

$$50.\quad \frac{\int X e^{\lambda x} \partial x}{e^{\lambda x}} = X_1$$

ſetzen, auf die Integration der Gleichung

$$51.\quad A_1 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + B_1 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + C_1 \frac{\partial y}{\partial x} + D_1 y = X_1$$

zurückgeführt.

Beſtimmen wir nun ferner λ_1 aus der Gleichung

$$52.\quad A_1 \lambda_1^3 - B_1 \lambda_1^2 + C_1 \lambda_1 - D_1 = 0\,,$$

und ſetzen

$$53.\quad \begin{cases} A_2 = A_1 \\ B_2 = B_1 - \lambda_1 A_2 \\ C_2 = C_1 - \lambda_1 B_2\,, \end{cases}$$

ſo wie

$$54.\quad \frac{\int X_1 e^{\lambda_1 x} \partial x}{e^{\lambda_1 x}} = X_2\,;$$

ſo hat man zur Beſtimmung von y die Gleichung

$$55.\quad A_2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B_2 \frac{\partial y}{\partial x} + C_2 y = X_2\,,$$

welche rückſichtlich ihrer Form völlig mit der oben ſchon vollſtändig integrirten Gleichung (29.) übereinſtimmt, und daher auch integrirt, y alſo gefunden werden kann. Man könnte aber auch λ_2 aus der Gleichung

$$56.\quad A_2 \lambda_2^2 - B_2 \lambda_2 + C_2 = 0$$

beſtimmen, und

$$57.\quad \begin{cases} A_3 = A_2 \\ B_3 = B_2 - \lambda_2 A_3, \end{cases}$$

ſo wie

$$58.\quad \frac{\int X_2 e^{\lambda_2 x} \partial x}{e^{\lambda_2 x}} = X_3$$

ſetzen, und hätte zur Beſtimmung von y die Gleichung

$$59.\quad A_3\frac{\partial y}{\partial x}+B_3 y=X_3\ ,$$

welche wie die Gleichung (19.) integrirt werden kann. Indeß könnte man auch λ_3 aus der Gleichung

$$60.\quad A_3\lambda_3-B_3=0$$

beſtimmen, und

$$61.\quad A_4=A_3\ ,\quad 62.\ \frac{\int X_3 e^{\lambda_3 x}\partial x}{e^{\lambda_3 x}}=X_4$$

ſetzen. Dann hätte man zur Beſtimmung von y die Gleichung

$$63.\quad A_4 y=X_4\ ,$$

woraus ſich

$$64.\ y=\frac{X_4}{A_4}$$

ergiebt.

Fernere Entwickelungen über dieſen Gegenſtand würden uns hier zu weit führen.

III. Ueber die Integration der Gleichungen

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n}+P\frac{\partial^{n-1}y}{\partial x^{n-1}}+Q\frac{\partial^{n-2}y}{\partial x^{n-2}}+\ldots+T\frac{\partial y}{\partial x}+Uy=0\ ,$$

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n}+P\frac{\partial^{n-1}y}{\partial x^{n-1}}+Q\frac{\partial^{n-2}y}{\partial x^{n-2}}+\ldots+T\frac{\partial y}{\partial x}+Uy=X\ ,$$

wo P, Q, ... T, U, X Functionen von x bezeichnen.

5. Zuerſt bemerken wir, daß die erſte der beiden obigen Gleichungen, nämlich die Gleichung

$$65.\quad \frac{\partial^n y}{\partial x^n}+P\frac{\partial^{n-1}y}{\partial x^{n-1}}+Q\frac{\partial^{n-2}y}{\partial x^{n-2}}+\ldots+T\frac{\partial y}{\partial x}+Uy=0$$

durch die Subſtitution

$$y=e^{\int t\partial x}$$

immer auf eine Differentialgleichung der (n—1)ſten Ordnung zurückgeführt werden kann, welches an ein Paar Beiſpielen zu zeigen hier hinreichend ſeyn wird. Hat man nämlich die Gleichung

$$66.\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+P\frac{\partial y}{\partial x}+Qy=0$$

und ſetzt

$$y=e^{\int t\partial x};$$

ſo iſt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = e^{\int t\partial x} t = yt\ ,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = e^{\int t\partial x}\left(t^2 + \frac{\partial t}{\partial x}\right) = y\left(t^2 + \frac{\partial t}{\partial x}\right),$$

und folglich nach gehöriger Subſtitution und Diviſion durch y:

$$67.\quad \frac{\partial t}{\partial x} + t^2 + Pt + Q = 0\ ,$$

welche Gleichung bloß von der erſten Ordnung iſt. Hat man ferner die Gleichung

$$68.\quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y}{\partial x} + Ry = 0\ ,$$

und ſetzt wieder

$$y = e^{\int t\partial x}\ ;$$

ſo wird

$$\frac{\partial y}{\partial x} = e^{\int t\partial x} t = yt\ ,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = e^{\int t\partial x}\left(t^2 + \frac{\partial t}{\partial x}\right) = y\left(t^2 + \frac{\partial t}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = e^{\int t\partial x}\left(t^3 + 3t\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right) = y\left(t^3 + 3t\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right),$$

und folglich

$$69.\quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + (3t + P)\frac{\partial t}{\partial x} + t^3 + Pt^2 + Qt + R = 0\ ;$$

eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung. Man wird hierdurch die oben ausgeſprochene allgemeine Behauptung hinreichend gerechtfertigt finden.

6. Die Gleichung

$$70.\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P\frac{\partial y}{\partial x} + Qy = 0$$

läßt ſich, wenn **P** und **Q** conſtante Größen ſind, wie wir aus dem Obigen wiſſen, immer; wenn **P** und **Q**, wie wir hier vorausſetzen, Functionen von x ſind, dagegen nur in ſeltenen Fällen integriren. Um ein einfaches Beiſpiel zu geben, habe man die Gleichung

$$71.\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{A}{a + bx}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{By}{(a + bx)^2} = 0\ .$$

Für $y = e^{\int t\partial x}$ geht dieſe Gleichung nach (67.) über in:

$$72.\quad \frac{\partial t}{\partial x} + t^2 + \frac{At}{a + bx} + \frac{B}{(a + bx)_2} = 0\ .$$

Setzt man nun

$$73.\quad (a + bx)\,t = u\ ;$$

ſo wird die Gleichung (72.)

$$74.\quad (a + bx)\frac{\partial u}{\partial x} + u^2 + (A - b)u + B = 0.$$

Dieſer Gleichung wird genügt, wenn man u ſo beſtimmt, daß

$$75.\quad u^2 + (A - b)u + B = 0$$

iſt, weil dann u eine Conſtante, und folglich

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

iſt. Bezeichnen wir nun die beiden Wurzeln der Gleichung

$$u^2 + (A - b)u + B = 0$$

durch u' und u''; ſo hat man für t die beiden folgenden Ausdrücke

$$76.\quad t = \frac{u'}{a + bx}, \quad 77.\quad t = \frac{u''}{a + bx}.$$

Weil nun

$$y = e^{\int t \partial x}$$

iſt; ſo iſt

$$78.\quad y = e^{\int \frac{u' \partial x}{a + bx}} = (a + bx)^{\frac{u'}{b}}$$

oder

$$79.\quad y = e^{\int \frac{u'' \partial x}{a + bx}} = (a + bx)^{\frac{u''}{b}},$$

und folglich, wie unmittelbar aus dem Satze hervorgeht, den wir ſogleich in der folgenden Nummer beweiſen werden,

$$80.\quad y = C(a + bx)^{\frac{u'}{b}} + C'(a + bx)^{\frac{u''}{b}},$$

wo C und C' zwei willkührliche Conſtanten ſind, das vollſtändige Integral der gegebenen Differentialgleichung (71.).

7. Der Satz, auf welchen wir uns ſo eben bezogen haben, iſt folgender.

Wenn $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$ n partikuläre Integrale der Differentialgleichung (65.) ſind; ſo iſt jederzeit

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4 + \ldots + C_n y_n,$$

wo $C_1, C_2, C_3, C_4, \ldots C_n$ n willkührliche Conſtanten bezeichnen, das vollſtändige Integral der in Rede ſtehenden Differentialgleichung.

Es iſt nämlich

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = C_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} + C_2 \frac{\partial y_2}{\partial x} + C_3 \frac{\partial y_3}{\partial x} + \ldots + C_n \frac{\partial y_n}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = C_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + C_3 \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} + \ldots + C_n \frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2},$$

. . . .

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = C_1 \frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} + C_2 \frac{\partial^n y_2}{\partial x^n} + C_3 \frac{\partial^n y_3}{\partial x^n} + \ldots + C_n \frac{\partial^n y_n}{\partial x^n},$$

und folglich

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} + \ldots + T\frac{\partial y}{\partial x} + Uy$$

$$= C_1\left\{\frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}} + \ldots + Uy_1\right\}$$

$$+ C_2\left\{\frac{\partial^n y_2}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y_2}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y_2}{\partial x^{n-2}} + \ldots + Uy_2\right\}$$

$$+ C_3\left\{\frac{\partial^n y_3}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y_3}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y_3}{\partial x^{n-2}} + \ldots + Uy_3\right\}$$

. . . .

$$+ C_n\left\{\frac{\partial^n y_n}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y_n}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y_n}{\partial x^{n-2}} + \ldots + Uy_n\right\}.$$

Weil aber nach der Vorausſetzung y_1, y_2, y_3, ... y_n partikuläre Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} + \ldots + Uy = 0$$

ſind; ſo iſt

$$\frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}} + \ldots + Uy_1 = 0,$$

$$\frac{\partial^n y_2}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y_2}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y_2}{\partial x^{n-2}} + \ldots + Uy_2 = 0,$$

$$\frac{\partial^n y_3}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y_3}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y_3}{\partial x^{n-2}} + \ldots + Uy_3 = 0,$$

. . . .

$$\frac{\partial^n y_n}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y_n}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y_n}{\partial x^{n-2}} + \ldots + Uy_n = 0,$$

und folglich, für den Werth

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n$$

von y, auch

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} + \ldots + T\frac{\partial y}{\partial x} + Uy = 0,$$

ſo daß alſo auch

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n$$

ein Integral der Gleichung (65.), und weil dieſes Integral n willkührliche Conſtanten enthält, im Allgemeinen offenbar das vollſtändige Integral dieſer Differentialgleichung iſt.

8. Merkwürdig iſt es, daß das vollſtändige Integral der Gleichung

$$81.\quad \frac{\partial^n y}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} + \ldots + T\frac{\partial y}{\partial x} + Uy = X$$

jederzeit gefunden werden kann, wenn man n partikuläre Integrale der Gleichung (65.) kennt. Um dies zu zeigen, wollen wir der Kürze wegen bloß die Gleichung

$$82.\quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y}{\partial x} + Ry = X$$

betrachten, und wollen annehmen, daß y_1, y_2, y_3 drei partikuläre Integrale der Gleichung

$$83.\quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y}{\partial x} + Ry = 0$$

ſind. Man ſetze nun

$$84.\quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3\,;$$

wo jetzt aber C_1, C_2, C_3 keine conſtanten Größen, ſondern Functionen von x bezeichnen ſollen, und ſuche dieſe Functionen ſo zu beſtimmen, daß durch den obigen Ausdruck von y der Gleichung (82.) genügt wird. Zu dem Ende differentiire man die Gleichung (84.); ſo ergiebt ſich

$$85.\quad \frac{\partial y}{\partial x} = C_1\frac{\partial y_1}{\partial x} + C_2\frac{\partial y_2}{\partial x} + C_3\frac{\partial y_3}{\partial x} + y_1\frac{\partial C_1}{\partial x} + y_2\frac{\partial C_2}{\partial x} + y_3\frac{\partial C_3}{\partial x}\,.$$

Denkt man ſich aber die Functionen C_1, C_2, C_3 ſo beſtimmt, daß

$$86.\quad y_1\frac{\partial C_1}{\partial x} + y_2\frac{\partial C_2}{\partial x} + y_3\frac{\partial C_3}{\partial x} = 0$$

iſt; ſo iſt

$$87.\quad \frac{\partial y}{\partial x} = C_1\frac{\partial y_1}{\partial x} + C_2\frac{\partial y_2}{\partial x} + C_3\frac{\partial y_3}{\partial x}\,.$$

Differentiirt man dieſe Gleichung von Neuem; ſo erhält man

$$88.\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} =$$

$$C_1\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + C_2\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + C_3\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} + \frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{\partial y_3}{\partial x}\frac{\partial C_3}{\partial x}\,,$$

wo man ſich nun aber die drei Functionen C_1, C_2, C_3 wieder ſo beſtimmt denken kann, daß, außer der Gleichung (86.), auch zugleich noch der Gleichung

$$89.\quad \frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{\partial y_3}{\partial x}\frac{\partial C_3}{\partial x} = 0$$

genügt wird. Dann erhält man für den zweiten Differentialquotienten von y den folgenden einfachern Ausdruck:

$$90.\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = C_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + C_3 \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2},$$

und erhält aus dieſer Gleichung endlich

$$91.\quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} =$$

$$C_1 \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + C_2 \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} + C_3 \frac{\partial^3 y_3}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2}\frac{\partial C_3}{\partial x}.$$

Führt man nun die gefundenen Ausdrücke von

$$\frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

in die Gleichung (82.) ein; ſo ergiebt ſich:

$$92.\quad \left.\begin{array}{l} C_1\left(\frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y_1}{\partial x} + Ry_1\right) \\ + C_2\left(\frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y_2}{\partial x} + Ry_2\right) \\ + C_3\left(\frac{\partial^3 y_3}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y_3}{\partial x} + Ry_3\right) \\ + \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2}\frac{\partial C_3}{\partial x} \end{array}\right\} = X;$$

Weil aber nach der Vorausſetzung y_1, y_2, y_3 partikuläre Integrale der Gleichung

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y}{\partial x} + Ry = 0$$

ſind; ſo iſt

$$\frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y_1}{\partial x} + Ry_1 = 0,$$

$$\frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y_2}{\partial x} + Ry_2 = 0,$$

$$\frac{\partial^3 y_3}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y_3}{\partial x} + Ry_3 = 0,$$

und folglich

$$93.\quad \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2}\frac{\partial C_3}{\partial x} = X;$$

ſo daß alſo, wenn durch

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$$

der Gleichung (82.) genügt werden ſoll, die Größen C_1, C_2, C_3 ſo beſtimmt werden müſſen, daß ſie den drei Gleichungen

$$94.\quad \left\{\begin{array}{l} y_1\frac{\partial C_1}{\partial x} + y_2\frac{\partial C_2}{\partial x} + y_3\frac{\partial C_3}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{\partial y_3}{\partial x}\frac{\partial C_3}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2}\frac{\partial C_3}{\partial x} = X \end{array}\right.$$

oder

$$95.\quad \begin{cases} y_1\partial C_1 + y_2\partial C_2 + y_3\partial C_3 = 0, \\ \partial y_1\partial C_1 + \partial y_2\partial C_2 + \partial y_3\partial C_3 = 0, \\ \partial^2 y_1\partial C_1 + \partial^2 y_2\partial C_2 + \partial^2 y_3\partial C_3 = X\partial x^3 \end{cases}$$

genügen, welches offenbar immer möglich ſeyn wird, indem man nämlich, wenn man

$$\frac{\partial C_1}{\partial x}, \frac{\partial C_2}{\partial x}, \frac{\partial C_3}{\partial x}$$

aus den Gleichungen (94.) durch gewöhnliche algebraiſche Elimination entwickelt, für dieſe Differentialquotienten Ausdrücke von der Form

$$96.\quad \frac{\partial C_1}{\partial x} = V_1,\ \frac{\partial C_2}{\partial x} = V_2,\ \frac{\partial C_3}{\partial x} = V_3,$$

wo V_1, V_2, V_3 gegebene Functionen von x ſind, oder

$$97.\quad \partial C_1 = V_1\partial x,\ \partial C_2 = V_2\partial x,\ \partial C_3 = V_3\partial x$$

erhält. Aus dieſen Gleichungen ergiebt ſich aber auf der Stelle

$$98.\quad C_1 = \int V_1\partial x + c_1,\ C_2 = \int V_2\partial x + c_2,\ C_3 = \int V_3\partial x + c_3,$$

und nach dem Obigen iſt alſo die drei, willkührliche Conſtanten c_1, c_2, c_3 enthaltende Größe

$$99.\quad y = y_1\left(\int V_1\partial x + c_1\right) + y_2\left(\int V_2\partial x + c_2\right) + y_3\left(\int V_3\partial x + c_3\right)$$

das vollſtändige Integral der Gleichung

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y}{\partial x} + Ry = X.$$

Es kann auch der Fall vorkommen, daß man bloß zwei partikuläre Integrale der Gleichung

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y}{\partial x} + Ry = 0$$

kennt. In dieſem Falle ſetze man, wenn y_1 und y_2 die beiden in Rede ſtehenden partikulären Integrale ſind,

$$100.\quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

wo C_1 und C_2 wieder Functionen von x bezeichnen. Durch Differentiation der Gleichung (100.) ergiebt ſich

$$101.\quad \frac{\partial y}{\partial x} = C_1\frac{\partial y_1}{\partial x} + C_2\frac{\partial y_2}{\partial x} + y_1\frac{\partial C_1}{\partial x} + y_2\frac{\partial C_2}{\partial x},$$

und folglich, wenn man ſich C_1 und C_2 ſo beſtimmt denkt, daß der Gleichung

$$102.\quad y_1\frac{\partial C_1}{\partial x} + y_2\frac{\partial C_2}{\partial x} = 0$$

genügt wird,

$$103.\quad \frac{\partial y}{\partial x} = C_1\frac{\partial y_1}{\partial x} + C_2\frac{\partial y_2}{\partial x}.$$

Differentiirt man dieſe Gleichung zwei Mal nach einander; ſo kommt

$$104.\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = C_1\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + C_2\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + \frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial C_2}{\partial x},$$

$$105.\quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = C_1\frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + C_2\frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} + 2\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\frac{\partial C_1}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2};$$

alſo, wenn man die gefundenen Ausdrücke von

$$\frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

in die Gleichung (82.) einführt,

$$106.\quad \left.\begin{array}{l} C_1\left(\frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y_1}{\partial x} + Ry_1\right) \\ + C_2\left(\frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y_2}{\partial x} + Ry_2\right) \\ + \frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\frac{\partial C_1}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\frac{\partial C_2}{\partial x} \\ + P\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial x} + P\frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial C_2}{\partial x} \end{array}\right\} = X.$$

Weil nun aber y_1 und y_2 Integrale der Gleichung

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y}{\partial x} + Ry = 0$$

ſind; ſo iſt

$$107.\quad \frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\frac{\partial C_1}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\frac{\partial C_2}{\partial x} + P\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial x} + P\frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial C_2}{\partial x} = X,$$

und man hat alſo zur Beſtimmung von C_1 und C_2 die beiden Gleichungen:

$$108.\quad \left\{\begin{array}{l} y_1\frac{\partial C_1}{\partial x} + y_2\frac{\partial C_2}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\frac{\partial C_1}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\frac{\partial C_2}{\partial x} \\ + P\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial x} + P\frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial C_2}{\partial x} = X; \end{array}\right.$$

oder

$$109.\quad \left\{\begin{array}{l} y_1\partial C_1 + y_2\partial C_2 = 0, \\ \partial y_1\partial^2 C_1 + \partial y_2\partial^2 C_2 + 2\partial^2 y_1\partial C_1 + 2\partial^2 y_2\partial C_2 \\ + P\partial y_1\partial C_1\partial x + P\partial y_2\partial C_2\partial x = X\partial x^3. \end{array}\right.$$

Mittelſt der erſten der beiden Gleichungen (108.) kann man aus der zweiten $\frac{\partial C_2}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2}$ eliminiren, und wird dann zur Beſtimmung von C_1 eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung erhalten, welche offenbar bloß $\frac{\partial C_1}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2}$, nicht C_1 ſelbſt, enthalten wird. Eine ſolche Differentialgleichung läßt ſich aber immer, wie leicht erhellen wird, durch eine einfache Subſtitution in eine Differentialgleichung der erſten Ordnung transformiren.

Hat man endlich bloß ein partikuläres Integral y_1 der Gleichung

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y}{\partial x} + Ry = 0;$$

ſo ſetze man

$$110. \quad y = C_1 y_1,$$

und erhält hieraus durch Differentiation leicht:

$$111. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = C_1\frac{\partial y_1}{\partial x} + y_1\frac{\partial C_1}{\partial x},$$

$$112. \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = C_1\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial x} + y_1\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2};$$

$$113. \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = C_1\frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\frac{\partial C_1}{\partial x} + 3\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + y_1\frac{\partial^3 C_1}{\partial x^3}.$$

Setzt man nun dieſe Ausdrücke von

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

in die Gleichung (82.); ſo erhält man:

$$114. \quad \left.\begin{aligned} & C_1\left(\frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y_1}{\partial x} + Ry_1\right) \\ & + y_1\frac{\partial^3 C_1}{\partial x^3} + 3\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\frac{\partial C_1}{\partial x} \\ & + Py_1\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + 2P\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial x} + Qy_1\frac{\partial C_1}{\partial x} \end{aligned}\right\} = X,$$

oder, weil nach der Vorausſetzung y_1 der Gleichung

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y}{\partial x} + Ry = 0$$

genügt, und folglich

$$\frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y_1}{\partial x} + Ry = 0$$

iſt,

$$115. \quad \left.\begin{array}{r} y_1\frac{\partial^3 C_1}{\partial x^3} + 3\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\frac{\partial C_1}{\partial x} \\ + Py_1\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + 2P\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial x} \\ + Qy_1\frac{\partial C_1}{\partial x} \end{array}\right\} = X$$

oder

$$116. \quad \left.\begin{array}{r} y_1\partial^3 C_1 + 3\partial y_1\partial^2 C_1 + 3\partial^2 y_1\partial C_1 \\ + Py_1\partial^2 C_1\partial x + 2P\partial y_1\partial C_1\partial x \\ + Qy_1\partial C_1\partial x^2 \end{array}\right\} = X\partial x^3,$$

und man hat alſo jetzt zur Beſtimmung von C_1 eine Differentialgleichung der dritten Ordnung, die ſich aber, weil bloß $\frac{\partial C_1}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 C_1}{\partial x^3}$ in ihr enthalten ſind, durch eine einfache Subſtitution immer leicht in eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung transformiren läßt.

Daß ſich die obigen Betrachtungen leicht zu völliger Allgemeinheit erheben laſſen würden, fällt auf der Stelle in die Augen, und bedarf hier keiner weitern Erläuterung.

IV. Riccati's Gleichung, durch Reihen integrirt.

. 9. Riccati's Gleichung iſt bekanntlich (Thl. II. S. 895.) die Gleichung

$$117. \quad \frac{\partial z}{\partial x} + az^2 + bx^n = 0.$$

Setzt man aber

$$118. \quad z = \frac{\partial y}{ay\partial x}, \quad ayz = \frac{\partial y}{\partial x};$$

ſo erhält man durch Differentiation

$$ay\frac{\partial z}{\partial x} + az\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

oder

$$ay\frac{\partial z}{\partial x} + a^2yz^2 = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten abx^ny addirt,

$$ay\left(\frac{\partial z}{\partial x} + az^2 + bx^n\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + abx^ny,$$

d. i. nach (117.)

$$119. \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + abx^ny = 0,$$

oder, wenn wir jetzt a für ab ſchreiben,

$$120. \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + ax^ny = 0.$$

In dieſer Form iſt die Gleichung zur Integration durch Reihen geſchickter als in der Form (117.). Um nun dieſe Gleichung durch Reihen zu integriren, ſetze man

$$y = x^\lambda (A + Bx^{n+2} + Cx^{2n+4} + Dx^{3n+6} + Ex^{4n+8} + \ldots);$$

ſo erhält man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \lambda A x^{\lambda-1} + (\lambda + n + 2) B x^{\lambda+n+1}$$
$$+ (\lambda + 2n + 4) C x^{\lambda+2n+3} + (\lambda + 3n + 6) D x^{\lambda+3n+5} + \ldots,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \lambda(\lambda - 1) A x^{\lambda-2}$$
$$+ (\lambda + n + 2)(\lambda + n + 1) B x^{\lambda+n}$$
$$+ (\lambda + 2n + 4)(\lambda + 2n + 3) C x^{\lambda+2n+2}$$
$$+ (\lambda + 3n + 6)(\lambda + 3n + 5) D x^{\lambda+3n+4}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

und folglich nach (120.)

$$0 = \lambda(\lambda - 1) A x^{\lambda-2}$$
$$+ \{(\lambda + n + 2)(\lambda + n + 1) B + aA\} x^{\lambda+n}$$
$$+ \{(\lambda + 2n + 4)(\lambda + 2n + 3) C + aB\} x^{\lambda+2n+2}$$
$$+ \{(\lambda + 3n + 6)(\lambda + 3n + 5) D + aC\} x^{\lambda+3n+4}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Alſo iſt

$$121.\quad \begin{cases} \lambda(\lambda - 1) A = 0, \\ (\lambda + n + 2)(\lambda + n + 1) B + aA = 0, \\ (\lambda + 2n + 4)(\lambda + 2n + 3) C + aB = 0, \\ (\lambda + 3n + 6)(\lambda + 3n + 5) D + aC = 0, \\ \text{u. ſ. w.} \qquad \text{u. ſ. w.} \end{cases}$$

Die Größe λ iſt hierbei eine ganz unbeſtimmte Größe, die nun beſtimmt werden muß. Die erſte der vorhergehenden Gleichungen wird für jedes ganz beliebige **A** erfüllt für $\lambda = 0$ und für $\lambda = 1$. Für $\lambda = 0$ hat man die Gleichungen

$$122.\quad \begin{cases} (n + 2)(n + 1) B + aA = 0, \\ (2n + 4)(2n + 3) C + aB = 0, \\ (3n + 6)(3n + 5) D + aC = 0, \\ (4n + 8)(4n + 7) E + aD = 0, \\ \text{u. ſ. w.} \end{cases}$$

und für $\lambda = 1$ hat man, wenn man jetzt **A', B', C', D', ...** für **A, B, C, D, ...** ſchreibt, die Gleichungen:

$$123.\quad \begin{cases} (n + 3)(n + 2) B' + aA' = 0, \\ (2n + 5)(2n + 4) C' + aB' = 0, \\ (3n + 7)(3n + 6) D' + aC' = 0, \\ (4n + 9)(4n + 8) E' + aD' = 0, \\ \text{u. ſ. w.} \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (122.) erhält man:

$$124.\quad \begin{cases} B = -\dfrac{aA}{(n+1)(n+2)}, \\ C = \dfrac{a^2 A}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)}, \\ D = -\dfrac{a^3 A}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)(3n+5)(3n+6)}, \\ \text{u. ſ. w.} \end{cases}$$

und aus (123.) ergiebt ſich

$$125.\quad \begin{cases} B' = -\dfrac{aA'}{(n+2)(n+3)}, \\ C' = \dfrac{a^2 A'}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)}, \\ D' = -\dfrac{a^3 A'}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)(3n+6)(3n+7)}, \\ \text{u. ſ. w.} \end{cases}$$

Alſo ſind offenbar

$$126.\quad y_1 = A\left\{1 - \frac{ax^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{a^2 x^{2n+4}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)} - \frac{a^3 x^{3n+6}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)(3n+5)(3n+6)} + \dots\right\}$$

und

$$127.\quad y_2 = A'x\left\{1 - \frac{ax^{n+2}}{(n+2)(n+3)} + \frac{a^2 x^{2n+4}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)} - \frac{a^3 x^{3n+6}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)3n+6)(3n+7)} + \dots\right\}.$$

wo A und A′ zwei ganz willkührliche Conſtanten ſind, zwei partikuläre Integrale der Gleichung (120.), und leicht wird man ſich nun auch überzeugen, daß die Größe

$$128.\quad y = y_1 + y_2,$$

welche zwei willkührliche Conſtanten enthält, das vollſtändige Integral der in Rede ſtehenden Gleichung iſt.

E. E. Kummer hat in einem ſchönen Aufſatze, der in Crelles Journal. B. XII. S. 144. abgedruckt iſt, gezeigt, daß ſich die beiden Reihen, durch welche das vollſtändige Integral der Riccatiſchen Gleichung dargeſtellt wird, durch beſtimmte Integrale ſummiren laſſen, und eine ähnliche Arbeit hatte früher Scherk in demſelben Journal B. X. S. 92. über die Gleichung

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = (\alpha + \beta x)\, y$$

geliefert, zu der ſich auch noch eine Bemerkung von C. G. J. Jacobi in demſelben Bande S. 279. findet. Die Beſchränktheit des Raumes verbietet uns hier weitere Mittheilungen über dieſe intereſſanten Arbeiten zu machen.

Als die wichtigſte Erweiterung der Lehre von der Integration der Differentialgleichungen iſt ohne Widerrede die methodus generalis, aequationes differentiarum partialium, nec non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotcunque variabiles, complete integrandi zu betrachten, welche J. F. Pfaff in ſeiner eben ſo überſchriebenen berühmten Abhandlung (Abhandlungen der mathematischen Klasse der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften aus den Jahren 1814 — 1815. Berl. 1818. S. 76.) ausführlich entwickelt hat. Die Natur dieſes Gegenſtandes geſtattet aber keine Mittheilung in dieſem Wörterbuche, weil dazu ein zu großer Raum erforderlich ſeyn würde. Auch wird man auf jeden Fall dieſe ſchöne Methode, über die auch C. G. J. Jacobi in dem Crelleſchen Journal. B. II. einige Aufſätze geliefert hat, am beſten an der Quelle ſelbſt ſtudiren.

K.

Kegel. Ueber die Berechnung der Oberfläche des ſchiefen Kegels ſ. m. den Art. Cylinder (6.) i. d. Z.

Kegelſchnitt. Zur Literatur kann noch bemerkt werden: Grüſon die Kegelſchnitte elem. abgeh. Berl. 1828. Schneider Lehre von den Kegelſchnitten für Anfänger. Berl. 1824. Umpfenbach über die verſchiedene Entſtehung der Kegelſchnitte. Gießen. 1821. Märtens der Koniſector, ein Inſtrument die Kegelſchnitte zu verzeichnen. Halberſt. 1821. Auch iſt es dem Verf. dieſer Supplemente wohl erlaubt, ſeiner beiden Schriften über dieſen Gegenſtand hier Erwähnung zu thun, von denen die eine, welche die Lehre von den Kegelſchnitten ſehr ausführlich analytiſch behandelt, Leipzig 1824. erſchienen iſt, die andere (Brandenburg. 1832.) den vierten Theil ſeines mathematiſchen Lehrbuchs für die obern Klaſſen höherer Lehranſtalten ausmacht.

Keplers Aufgabe. In dem Artikel Beſtimmtes Integral. (56.) i. d. Z. iſt ſchon Beſſels berühmte Auflöſung dieſes wichtigen Problems mitgetheilt worden. Hier wollen wir nun noch in der Kürze die ſchöne, wenn auch indirecte, Auflöſung deſſelben entwickeln, welche Gauß in der Theoria motus corporum coelestium p. 10. gegeben hat.

Bekanntlich kommt es bei der Kepler'ſchen Aufgabe im Allgemeinen darauf an, aus einer Gleichung von der Form

$$\mu = u - e \sin u,$$

in welcher μ und e als bekannt angenommen werden, die Größe u zu beſtimmen. Durch einige Verſuche wird man immer leicht einen ſchon ſehr genäherten Werth von u finden können, welchen wir durch Θ bezeichnen wollen. Iſt nun x der in Secunden

ausgedrückte Fehler, ſo iſt genau $u = \Theta + x$. Man berechne $e \sin \Theta$ in Secunden durch Logarithmen und notire zugleich aus den Tafeln die $1''$ entſprechende Veränderung δ von $\log \sin \Theta$, ſo wie die einer Veränderung von einer Einheit in der Zahl $e \sin \Theta$ entſprechende Veränderung δ' von $\log . e \sin \Theta$. Dies vorausgeſetzt, hat man nun im erſten Quadranten

$$\log . e \sin(\Theta + x) - \log . e \sin \Theta = \log \sin(\Theta + x) - \log \sin \Theta$$
$$= \{e \sin(\Theta + x) - e \sin \Theta\}\delta',$$
$$\log \sin(\Theta + x) - \log \sin \Theta = \delta x;$$

alſo

$$\delta x = \{e \sin(\Theta + x) - e \sin \Theta\}\delta',$$

und folglich

$$e \sin(\Theta + x) = e \sin \Theta + \frac{\delta x}{\delta'}.$$

Im zweiten Quadranten iſt

$$\log e \sin \Theta - \log . e \sin(\Theta + x) = \log \sin \Theta - \log \sin(\Theta + x)$$
$$= \{e \sin \Theta - e \sin(\Theta + x)\}\delta',$$
$$\log \sin \Theta - \log \sin(\Theta + x) = \delta x;$$

alſo

$$\delta x = \{e \sin \Theta - e \sin(\Theta + x)\}\delta',$$

und folglich

$$e \sin(\Theta + x) = e \sin \Theta - \frac{\delta x}{\delta'}.$$

Im dritten Quadranten iſt

$$\log . - e \sin(\Theta + x) - \log . - e \sin \Theta = \log . - \sin(\Theta + x) - \log . - \sin \Theta$$
$$= \{(- e \sin(\Theta + x)) - (- e \sin \Theta)\}\delta'$$
$$= \{e \sin \Theta - e \sin(\Theta + x)\}\delta',$$
$$\log . - \sin(\Theta + x) - \log . - \sin \Theta = \delta x;$$

alſo

$$\delta x = \{e \sin \Theta - e \sin(\Theta + x)\}\delta'$$

und folglich

$$e \sin(\Theta + x) = e \sin \Theta - \frac{\delta x}{\delta'}.$$

Im vierten Quadranten iſt

$$\log . - e \sin \Theta - \log . - e \sin(\Theta + x) = \log . - \sin \Theta - \log . - \sin(\Theta + x)$$
$$= \{(- e \sin \Theta) - (- e \sin(\Theta + x))\}\delta'$$
$$= \{e \sin(\Theta + x) - e \sin \Theta\}\delta',$$
$$\log . - \sin \Theta - \log . - \sin(\Theta + x) = \delta x;$$

alſo

$$\delta x = \{e \sin(\Theta + x) - e \sin \Theta\}\delta',$$

und folglich

$$e \sin(\Theta + x) = e \sin \Theta + \frac{\delta x}{\delta'}.$$

Alſo iſt überhaupt

$$e\sin(\Theta+x) = e\sin\Theta \pm \frac{\delta x}{\delta'},$$

und das obere Zeichen gilt für den erſten und vierten, das untere für den zweiten und dritten Quadranten. Weil nun

$$u = \mu + e\sin u, \quad u = \Theta + x$$

iſt; ſo iſt

$$\Theta + x = \mu + e\sin(\Theta+x),$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\Theta + x = \mu + e\sin\Theta \pm \frac{\delta x}{\delta'},$$

woraus ſich leicht

$$x = \frac{\delta'}{\delta' \mp \delta}(\mu + e\sin\Theta - \Theta)$$

und folglich

$$u = \Theta + x = \Theta + \frac{\delta'}{\delta' \mp \delta}(\mu + e\sin\Theta - \Theta)$$

$$= \mu + e\sin\Theta \pm \frac{\delta}{\delta' \mp \delta}(\mu + e\sin\Theta - \Theta)$$

ergiebt. Dies iſt ein zweiter genäherter Werth von u, von dem man ganz auf dieſelbe Art zu einem dritten, von dieſem zu einem vierten, u. ſ. w. übergehen kann. Um mit Leichtigkeit einen erſten genäherten Werth von u zu finden, kann man bemerken, daß u, wie ſich aus der Gleichung

$$u = \mu + e\sin u$$

auf der Stelle ergiebt, immer zwiſchen den Gränzen μ und u $\pm$ e liegt, indem man für den erſten und zweiten Quadranten das obere, für den dritten und vierten Quadranten das untere Zeichen nimmt.

Ueber das Kepler'ſche Problem ſ. m. auch noch **Mécanique céleste. T. I. Liv. II. n. 22. Schubert Traité d'Astronomie théorique. T. II. Petersb. 1822. p. 200. Pontécoulant Théorie analytique du système du monde. T. I. Paris. 1829. p. 255.** Eine ältere Diſſertation von Detmoldt (Gött. 1798.) enthält bloß die Auflöſung von La Caille.

Kettenbruch. Die Lehre von den Kettenbrüchen hat in neuerer Zeit mehrere wichtige Zuſätze erhalten, von denen hier jedoch nur Einiges des Bemerkenswertheſten mitgetheilt werden kann.

1. Eine Erweiterung der Elementarlehre von den Kettenbrüchen verdanken wir dem ſcharfſinnigen Möbius, welcher, geſtützt auf eine Abhandlung von Euler (**Specimen algorithmi singularis. Nov. Comment. Petrop. T. IX.**), in einer in **Crelles Journal. B. VI. S. 215.** mitgetheilten ſchönen Abhandlung mehrere wichtige und intereſſante Sätze von dieſer

merkwürdigen analytiſchen Größenform bewieſen hat. Möbius betrachtet in dieſer Abhandlung überhaupt Kettenbrüche von der Form

$$\cfrac{1}{a-\cfrac{1}{b-\cfrac{1}{c-\cfrac{1}{d-\ldots\ldots,}}}}$$

auf welche ſich, wie ſogleich erhellen wird, jeder Kettenbruch leicht zurückführen läßt, und bezeichnet einen Kettenbruch von dieſer Form, deſſen letzter Nenner p iſt, der Kürze wegen durch $(a, b, c, d, \ldots\, p)$ oder auch bloß durch $(a, \ldots p)$. Unmittelbar aus einer ganz einfachen Betrachtung des vorſtehenden Kettenbruchs ergeben ſich nun die Relationen:

$$1.\quad (a) = \frac{1}{a},\ (a, b) = \frac{1}{a-(b)},\ (a, b, c) = \frac{1}{a-(b, c)}, \ldots\ldots,$$

oder auch umgekehrt

$$2.\quad a = \frac{1}{(a)},\quad a-(b) = \frac{1}{(a, b)},\quad a-(b, c) = \frac{1}{(a, b, c)}; \ldots$$

Alſo iſt allgemein

$$1^*.\quad (a) = \frac{1}{a},\ (a, \ldots p) = \frac{1}{a-(b, \ldots p)};$$

$$2^*.\quad a = \frac{1}{(a)},\ a-(b, \ldots p) = \frac{1}{(a, \ldots p)}.$$

Auch iſt, wie auf der Stelle erhellet

$$\begin{aligned} 3.\quad (a, \ldots p) &= (a, b-(c, \ldots p)) \\ &= (a, b, c-(d, \ldots p)) \\ &= (a, b, c, d-(e, \ldots p)) \\ &= (a, b, c, d, e-(f, \ldots p)) \end{aligned}$$

u. ſ. w.

Ferner iſt

$$4.\quad (a, \ldots q, \infty) = (a, \ldots q),$$

$$5.\quad (a, \ldots q, 0) = (a, \ldots p),$$

wovon man ſich eben ſo leicht wie von der Richtigkeit der vorhergehenden Relationen überzeugen wird.

2. Wir wollen nun annehmen, daß zwiſchen den veränderlichen Größen x, y und den Conſtanten a, b, c, ... p, q, r die Gleichung

$$x = (a, \ldots r, y)$$

gegeben ſey, und wollen nun umgekehrt y durch dieſelben Conſtanten und die Größe x auszudrücken ſuchen. Zu dem Ende haben wir nach (1*.)

$$x = \frac{1}{a-(b, \ldots r, y)},$$

und folglich

$$(b, \ldots r, y) = a - \frac{1}{x} = a - (x);$$

alſo nach (2*.)

$$(b, \ldots r, y) = \frac{1}{(a, x)}.$$

Ganz auf dieſelbe Art ergiebt ſich nun aus dieſer Gleichung mittelſt (1*.)

$$(c, \ldots r, y) = b - (a, x);$$

alſo nach (2*.)

$$(c, \ldots r, y) = \frac{1}{(b, a, x)}.$$

Hieraus erhält man ferner ganz auf ähnliche Art mittelſt (1*.)

$$(d, \ldots r, y) = c - (b, a, x),$$

und folglich nach (2*.)

$$(d, \ldots r, y) = \frac{1}{(c, b, a, x)}.$$

Aus dieſer Gleichung erhält man ferner auf ähnliche Art mittelſt (1*.)

$$(e, \ldots r, y) = d - (c, b, a, x),$$

und folglich nach (2*.)

$$(e, \ldots r, y) = \frac{1}{(d, c, b, a, x)}.$$

Wie man auf dieſe Art weiter gehen kann, iſt klar. Endlich wird man offenbar auf

$$(r, y) = \frac{1}{(q, \ldots a, x)}$$

kommen. Aus dieſer Gleichung folgt aber nach (1*.)

$$(y) = r - (q, \ldots a, x),$$

und daher nach (2*.)

$$(y) = \frac{1}{(r, \ldots a, x)}.$$

Nun iſt aber $(y) = \frac{1}{y}$; alſo iſt

$$6. \quad y = (r, \ldots a, x),$$

und hiermit folglich unſere Aufgabe vollſtändig aufgelöſt.

Aus der allgemeinen Gleichung

$$x = (a, \ldots r, y)$$

folgt alſo immer die Gleichung

$$y = (r, \ldots a, x),$$

wo, wie wohl nicht erſt beſonders erinnert zu werden braucht,

in der Reihe r, ... a die Elemente der Reihe a, ... r in umgekehrter Folge genommen ſind.

3. Wegen der beiden Gleichungen

$$7.\quad x = (a, \dots r, y)$$

$$8.\quad y = (r, \dots a, x)$$

entſpricht offenbar jedem Werthe von y nur **ein** Werth von x, und jedem Werthe von x nur **ein** Werth von y. Daher kann die zwiſchen x und y Statt findende gewöhnliche algebraiſche Gleichung bloß die allgemeine Form

$$9.\quad A + Bx + Cy + Dxy = 0.$$

haben. Für $y = \infty$ wird wegen (7.) nach (4.)

$$x = (a, \dots r),$$

und wegen (9.) offenbar

$$C + Dx = 0;$$

alſo, wenn man in dieſe Gleichung den gefundenen Werth von x einführt:

$$10.\quad \frac{C}{D} = -(a, \dots r).$$

Für $y = 0$ wird wegen (7.) nach (5.)

$$x = (a, \dots q),$$

und wegen (9.)

$$A + Bx = 0;$$

alſo, wenn man in dieſe Gleichung den gefundenen Werth von x einführt:

$$11.\quad \frac{A}{B} = -(a, \dots q).$$

Für $x = \infty$ wird wegen (8.) nach (4.)

$$y = (r, \dots a)$$

und wegen (9.)

$$B + Dy = 0;$$

alſo iſt

$$12.\quad \frac{B}{D} = -(r, \dots a).$$

Für $x = 0$ iſt wegen (8.) nach (5.)

$$y = (r, \dots b)$$

und wegen (9.)

$$A + Cy = 0;$$

alſo iſt

$$12.\quad \frac{A}{C} = -(r, \dots b).$$

Aus (10.) und (13) erhält man durch Multiplication

$$\frac{A}{D} = (a, \ldots r)(r, \ldots b)\,,$$

und eben ſo ergiebt ſich aus (11.) und (12.)

$$\frac{A}{D} = (r, \ldots a)(a, \ldots q)\,.$$

Alſo iſt

$$14.\quad (a, \ldots r)(r, \ldots b) = (r, \ldots a)(a, \ldots q)\,,$$

oder

$$15.\quad (a, \ldots r)(r, \ldots b) - (r, \ldots a)(a, \ldots q) = 0\,,$$

eine ganz allgemeine, offenbar ſehr merkwürdige Gleichung.

Bringt man die Gleichung (9.) auf die Form

$$\frac{A}{D} + \frac{B}{D}x + \frac{C}{D}y + xy = 0\,,$$

und ſetzt für $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$ ihre vorher gefundenen Werthe; ſo erhält man

$$16.\quad \begin{cases}(a, \ldots r)(r, \ldots b) - (r, \ldots a)x - (a, \ldots r)y + xy = 0\,,\\ (r, \ldots a)(a, \ldots q) - (r, \ldots a)x - (a, \ldots r)y + xy = 0\,,\end{cases}$$

oder, wie man durch leichte Rechnung findet,

$$\begin{aligned}17.\quad \{x - (a, \ldots r)\}\{y - (r, \ldots a)\} &= (a, \ldots r)\{(r, \ldots a) - (r, \ldots b)\}\\ &= (r, \ldots a)\{(a, \ldots r) - (a, \ldots q)\}\,.\end{aligned}$$

Weil nun nach (7.)

$$x = (a, \ldots r, y)$$

und nach (2*.)

$$y - (r, \ldots a) = \frac{1}{(y, r, \ldots a)}$$

iſt; ſo erhält man aus (17.) die identiſche Gleichung

$$\begin{aligned}18.\quad \frac{(a, \ldots r, y) - (a, \ldots r)}{(y, r, \ldots a)} &= (a, \ldots r)\{(r, \ldots a) - (r, \ldots b)\}\\ &= (r, \ldots a)\{(a, \ldots r) - (a, \ldots q)\}.\end{aligned}$$

Schreibt man in dieſer Gleichung s für y und bezeichnet der Kürze wegen die Differenzen

$$(a, \ldots s) - (a, \ldots r),\ (a, \ldots r) - (a, \ldots q),\ \text{u. ſ. w.}$$

durch $\Delta(a, \ldots r)$, $\Delta(a, \ldots q)$, u. ſ. w.; ſo kann man die in Rede ſtehende Gleichung auch auf folgenden Ausdruck bringen:

$$19.\quad \Delta(a, \ldots r) = (s, \ldots a)(r, \ldots a)\Delta(a, \ldots q)\,,$$

und es iſt alſo

$$20.\quad \begin{cases} \Delta(a, b) = (c, b, a)(b, a)\Delta(a), \\ \Delta(a, b, c) = (d, c, b, a)(c, b, a)\Delta(a, b), \\ \Delta(a, b, c, d) = (e, d, c, b, a)(d, c, b, a)\Delta(a, b, c), \\ \qquad \text{u. ſ. w.} \qquad\qquad \text{u. ſ. w.} \end{cases}$$

Weil nun

$$\Delta(a) = (a, b) - (a) = \frac{1}{a - \frac{1}{b}} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a(ab - 1)}$$

$$= \frac{a}{ab - 1} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b - \frac{1}{a}} \cdot \frac{1}{a^2} = (b, a)(a)^2$$

iſt; ſo iſt

$$21.\quad \begin{cases} \Delta(a) = (b, a)(a)^2, \\ \Delta(a, b) = (c, b, a)(b, a)^2(a)^2, \\ \Delta(a, b, c) = (d, c, b, a)(c, b, a)^2(b, a)^2(a)^2, \\ \Delta(a, b, c, d) = (e, d, c, b, a)(d, c, b, a)^2(c, b, a)^2(b, a)^2(a)^2, \\ \qquad \text{u. ſ. w.} \qquad\qquad \text{u. ſ. w.} \end{cases}$$

Daher kann man die Gleichung (17.) offenbar auch auf folgende Art darſtellen:

$$22.\quad \{x - (a, \ldots r)\}\{y - (r, \ldots a)\}$$
$$= (r, \ldots a)^2 (q, \ldots a)^2 \ldots (c, b, a)^2 (b, a)^2 (a)^2,$$

welches offenbar eine ſehr merkwürdige Form dieſer Gleichung iſt. Zugleich ſieht man, daß das Product

$$\{x - (a, \ldots r)\}\{y - (r, \ldots a)\}$$

ſtets poſitiv iſt, und zieht daher hieraus leicht den folgenden Schluß:

Wenn zwei veränderliche Größen x, y auf eine ſolche Art von einander abhängen, daß $x = (a, \ldots r, y)$, und nach dem Obigen folglich $y = (r, \ldots a, x)$ iſt; ſo iſt, wenn x größer oder kleiner als die Größe $(a, \ldots r)$ iſt, jederzeit y reſpective größer oder kleiner als die Größe $(r, \ldots a)$.

Nach (17.) ſind die beiden Producte

$$(r, \ldots a)\{(a, \ldots r) - (a, \ldots q)\},$$
$$(a, \ldots r)\{(r, \ldots a) - (r, \ldots b)\}$$

einander gleich, und das zweite entſteht aus dem erſten, wenn man die Größen a, b, c, ... r nach der Ordnung mit den Größen r, ... c, b, a vertauſcht. Daher ändert die Differenz

$$(r, \ldots a)\{a, \ldots r) - (a, \ldots q)\}$$

ihren Werth nicht, wenn man für die Größen a, b, c, ... r reſpective die Größen r, ... c, b, a ſetzt. Weil nun nach (21.)

$$(r, \ldots a)\{(a, \ldots r) - (a, \ldots q)\}$$
$$= (r, \ldots a)^2 (q, \ldots a)^2 \ldots (c, b, a)^2 (b, a)^2 (a)^2$$

iſt; ſo ändert auch das Product auf der rechten Seite des Gleichheitszeichen ſeinen Werth nicht, wenn man die Größen a, b, c, ... r mit den Größen r, ... c, b, a vertauſcht, und es iſt folglich

$$(r, \ldots a)^2 (q, \ldots a)^2 \ldots\ldots (b, a)^2 (a)^2$$
$$= (a, \ldots r)^2 (b, \ldots r)^2 \ldots\ldots (q, r)^2 (r)^2 ,$$

oder nach Ausziehung der Quadratwurzel auf beiden Seiten:

$$23. \quad (r, \ldots a)\{(q, \ldots a) \ldots (b, a)(a)\}$$
$$= \pm (a, \ldots r)(b, \ldots r) \ldots (q, r)(r) ,$$

wo nun noch eine Beſtimmung wegen des Vorzeichens nöthig iſt. Man kann dieſe Gleichung aber noch auf eine andere Art aus dem Obigen ableiten, und dieſe zweite Art der Ableitung hat den weſentlichen Vorzug vor der vorhergehenden, daß ſie das Zeichen nicht unbeſtimmt läßt, weshalb wir dieſelbe hier nun ebenfalls noch mittheilen wollen. Nach (14.) iſt nämlich

$$(a, \ldots r)(r, \ldots b) = (r, \ldots a)(a, \ldots q) ,$$
$$(b, \ldots r)(r, \ldots c) = (r, \ldots b)(b, \ldots q) ,$$
$$(c, \ldots r)(r, \ldots d) = (r, \ldots c)(c, \ldots q) ,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

$$(p, q, r)(r, q) = (r, q, p)(p, q) ,$$
$$(q, r)(r) = (r, q)(q) ,$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten multiplicirt und aufhebt, was ſich aufheben läßt:

$$(a, \ldots r)(b, \ldots r) \ldots\ldots (q, r)(r)$$
$$= (r, \ldots a)(a, \ldots q)(b, \ldots q) \ldots (p, q)(q) .$$

Setzen wir nun mit Möbius

$$24. \quad \frac{1}{(a, \ldots r)(b, \ldots r) \ldots (q, r)(r)} = \{a, \ldots r\} ;$$

ſo iſt

$$\frac{1}{\{a, \ldots r\}} = \frac{(r, \ldots a)}{\{a, \ldots q\}} ,$$

und durch mehrfache Anwendung dieſer Gleichung erhält man:

$$\frac{1}{\{a, \ldots r\}} = \frac{(r, \ldots a)}{\{a, \ldots q\}} ,$$
$$\frac{1}{\{a, \ldots q\}} = \frac{(q, \ldots a)}{\{a, \ldots p\}} ,$$
$$\frac{1}{\{a, \ldots p\}} = \frac{(p, \ldots a)}{\{a, \ldots o\}} ,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

$$\frac{1}{\{a, b, c\}} = \frac{(c, b, a)}{\{a, b\}} ,$$
$$\frac{1}{\{a, b\}} = \frac{(b, a)}{\{a\}} .$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten, hebt auf, was ſich aufheben läßt, und überlegt, daß offenbar $\frac{1}{\{a\}} = (a)$ iſt; ſo erhält man

$$\frac{1}{\{a, \ldots r\}} = (r, \ldots a)(q, \ldots a) \ldots (b, a)(a),$$

d. i.

$$25.\quad (a, \ldots r)(b, \ldots r) \ldots (q, r)(r) = (r, \ldots a)(q, \ldots a) \ldots (b, a)(a),$$

oder in der eingeführten Bezeichnung

$$26.\quad \{a, \ldots r\} = \{r, \ldots a\}.$$

Dieſe Gleichung iſt offenbar mit der Gleichung (23.), wenn man in derſelben das obere Zeichen nimmt, identiſch, ſo daß alſo hieraus zugleich erhellet, daß man in der Gleichung (23.) jederzeit das obere Zeichen nehmen muß. Möbius rechtfertigt dies auf eine andere Art; es ſcheint uns aber das obige Verfahren Vorzüge zu haben.

4. Die Function $\{a, \ldots r\}$ ſpielt in der Lehre von den Kettenbrüchen eine ſehr wichtige Rolle, weshalb wir hier auf die Haupteigenſchaften derſelben beſonders aufmerkſam machen wollen:

a. Der Werth dieſer Function ändert nach (26.) ſich nicht, wenn ihre Elemente in umgekehrter Folge genommen werden.

b. Nach (24.) iſt

$$\frac{1}{(a, \ldots r)(b, \ldots r) \ldots (q, r)(r)} = \{a, \ldots r\},$$

$$\frac{1}{(b, \ldots r)(c, \ldots r) \ldots (q, r)(r)} = \{b, \ldots r\};$$

alſo durch Diviſion

$$27.\quad (a, \ldots r) = \frac{\{b, \ldots r\}}{\{a, \ldots r\}}.$$

Man kann alſo den Kettenbruch $(a, \ldots r)$ jederzeit als einen Quotienten zweier ſolchen Functionen mit Klammern darſtellen. Auch iſt nach (26.)

$$28.\quad (a, \ldots r) = \frac{\{r, \ldots b\}}{\{r, \ldots a\}}.$$

Eben ſo iſt

$$29.\quad (r, \ldots a) = \frac{\{q, \ldots a\}}{\{r, \ldots a\}} = \frac{\{a, \ldots q\}}{\{a, \ldots r\}}.$$

c. Nach (1*.) und (29.) iſt

$$(r, \ldots a) = \frac{1}{r-(q, \ldots a)} = \frac{1}{r - \frac{\{a, \ldots p\}}{\{a, \ldots q\}}} = \frac{\{a, \ldots q\}}{\{a, \ldots q\}\, r - \{a, \ldots p\}},$$

und folglich nach (29.)

$$\frac{\{a, \ldots q\}}{\{a, \ldots q\} r - \{a, \ldots p\}} = \frac{\{a, \ldots q\}}{\{a, \ldots r\}}.$$

Dies giebt die Relation

$$30. \quad \{a, \ldots r\} = \{a, \ldots q\} r - \{a, \ldots p\}.$$

Alſo hat man z. B.

$$\{a, b, c, d, e\} = \{a, b, c, d\} e - \{a, b, c\}$$
$$\{a, b, c, d\} = \{a, b, c\} d - \{a, b\},$$
$$\{a, b, c\} = \{a, b\} c - \{a\},$$

und folglich

$$\{a, a, c, d, e\} = \{a, b, c\}(de - 1) - \{a, b\} e$$
$$= \{a, b\}(c(de - 1) - e) - \{a\}(de - 1).$$

Weil nun

$$\{a, b\} = \frac{1}{(a, b)(b)} = ab - 1, \quad \{a\} = \frac{1}{(a)} = a$$

iſt; ſo iſt offenbar die Function $\{a, b, c, d, e\}$ eine ganze rationale Function ihrer Elemente. Daß dies allgemein, und folglich überhaupt die Function $\{a, \ldots r\}$ jederzeit eine ganze rationale Function ihrer Elemente iſt, wird leicht erhellen. Nach dem Obigen läßt ſich alſo der Kettenbruch $(a, \ldots r)$ immer als ein gemeiner Bruch darſtellen, deſſen Zähler und Nenner ganze rationale Functionen der Elemente $a, b, c, d \ldots r$ ſind.

d. Nach (21.) und (29.) iſt

$$\Delta(a, \ldots q) = (r, \ldots a)(q, \ldots a)^2 \ldots (c, b, a)^2 (b, a)^2 (a)^2$$
$$= \frac{(r, \ldots a)}{\{q, \ldots a\}^2} = \frac{1}{\{q, \ldots a\}\{r, \ldots a\}},$$

oder nach (26.)

$$\Delta(a, \ldots q) = \frac{1}{\{a, \ldots q\}\{a, \ldots r\}},$$

d. i.

$$\frac{1}{\{a, \ldots q\}\{a, \ldots r\}} = (a, \ldots r) - (a, \ldots q)$$
$$= \frac{\{b, \ldots r\}}{\{a, \ldots r\}} - \frac{\{b, \ldots q\}}{\{a, \ldots q\}};$$

folglich, wenn man mit dem Nenner des Bruchs auf der linken Seite multiplicirt,

$$31. \quad \{a, \ldots q\}\{b, \ldots r\} - \{a, \ldots r\}\{b, \ldots q\} = 1,$$

welches eine ebenfalls ſehr merkwürdige Gleichung iſt.

e. Der Gleichung (22.) kann man auch die ſehr einfache Form

32. $$\left\{x - (a, \ldots r)\right\}\left\{y - (r, \ldots a)\right\} = \frac{1}{\{a, \ldots r\}^2}$$

geben, oder, wenn man die Kettenbrüche durch Functionen mit Klammern ausdrückt, und (31.) berückſichtigt:

33. $$\{a, \ldots r\}xy - \{a, \ldots q\}x - \{b, \ldots r\}y + \{b, \ldots q\} = 0.$$

5. Wir wollen nun

34. $$x = (a, b, \ldots q, r, s, a', b', \ldots q', r', y)$$

ſetzen, d. h. uns die Elemente, aus denen der, der Größe x gleiche Kettenbruch beſteht, in zwei Gruppen zerlegt denken; ſo iſt, wenn wir

35. $$w = (a', \ldots r', y)$$

ſetzen,

36. $$x = (a, \ldots r, s - w),$$

oder

37. $$x = (a, \ldots r, v),$$

wenn wir

38. $$s - w = v, \quad s = v + w$$

ſetzen. Setzen wir nun der Kürze wegen

$$(a, \ldots r) = \alpha; \ (r, \ldots a) = \beta, \ 1 : \{a, \ldots r\} = \gamma;$$

$$(a', \ldots r') = \alpha', \ (r', \ldots a') = \beta', \ 1 : \{a', \ldots r'\} = \gamma';$$

ſo iſt wegen (37.) und (35.) nach (32.)

39. $$(x - \alpha)(v - \beta) = \gamma^2,$$

40. $$(w - \alpha')(y - \beta') = \gamma'^2,$$

und folglich, wenn man aus dieſen beiden Gleichungen und der Gleichung (38.) die Größen v, w eliminirt:

41. $$\frac{\gamma^2}{x - \alpha} + \frac{\gamma'^2}{y - \beta'} = \delta,$$

für

42. $$\delta = s - \beta - \alpha'.$$

Ferner iſt, wenn wir der Kürze wegen

$$(a, \ldots r') = \alpha'', \ (r', \ldots a) = \beta'', \ 1 : \{a, \ldots r'\} = \gamma''$$

ſetzen, wegen der Gleichung (34.) nach (32.)

43. $$(x - \alpha'')(y - \beta'') = \gamma''^2.$$

Aus dieſer Gleichung ergiebt ſich, daß $y = \infty$ für $x = \alpha''$, und $x = \infty$ für $y = \beta''$ iſt. Setzt man dieſe zuſammengehörenden Werthe von x und y in die Gleichung (41.); ſo erhält man:

44. $$\gamma^2 = (\alpha'' - \alpha)\delta, \quad$$ 45. $$\gamma'^2 = (\beta'' - \beta')\delta.$$

Da ferner wegen der Gleichung (41.) offenbar auch α und β' zwei zuſammengehörende Werthe von x und y ſind; ſo erhält man nach (43.) auf der Stelle die Gleichung

$$46.\ (\alpha - \alpha'')(\beta' - \beta'') = \gamma''^2.$$

Durch Verbindung der drei letzten Gleichungen erhält man ſehr leicht:

$$47.\ (\alpha'' - \alpha)^2 = \frac{\gamma^2\gamma''^2}{\gamma'^2},\quad 48.\ (\beta'' - \beta')^2 = \frac{\gamma'^2\gamma''^2}{\gamma^2},\quad 49.\ \delta^2 = \frac{\gamma^2\gamma'^2}{\gamma''^2};$$

folglich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$50.\ \alpha'' - \alpha = \pm\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'},\quad 51.\ \beta'' - \beta' = \pm\frac{\gamma'\gamma''}{\gamma},\quad 52.\ \delta = \pm\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''}.$$

Daß in dieſen drei Gleichungen die obern und untern Zeichen auf einander zu beziehen ſind, läßt ſich leicht auf folgende Art überſehen. Wäre nämlich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\alpha'' - \alpha = \pm\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'},\quad \beta'' - \beta' = \mp\frac{\gamma'\gamma''}{\gamma};$$

ſo wäre

$$(\alpha'' - \alpha)(\beta'' - \beta') = -\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'}.\frac{\gamma'\gamma''}{\gamma} = -\gamma''^2,$$

da doch nach (46.) offenbar

$$(\alpha'' - \alpha)(\beta'' - \beta') = \gamma''^2$$

iſt. Wäre ferner mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\alpha'' - \alpha = \pm\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'},\quad \delta = \mp\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''};$$

ſo wäre

$$(\alpha'' - \alpha)\delta = -\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'}.\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''} = -\gamma^2,$$

da doch nach (44.)

$$(\alpha'' - \alpha)\delta = \gamma^2$$

iſt. Alſo ſind in den Gleichungen (50.), (51.), (52.) die obern und untern Zeichen auf einander zu beziehen. Die Frage aber, welche Zeichen in dieſen Gleichungen zu nehmen ſind, läßt ſich, wie es uns ſcheint, am Beſten auf folgende Art beantworten. Setzt man nämlich in die Gleichung (50.) für α, α'', γ, γ', γ'' ihre Werthe aus dem Obigen; ſo erhält man

$$(a, \ldots r') - (a, \ldots r) = \pm\frac{\{a', \ldots r'\}}{\{a, \ldots r\}\{a, \ldots r'\}},$$

oder nach (27.)

$$\pm\frac{\{a' \ldots r'\}}{\{a, \ldots r\}\{a, \ldots r'\}} = \frac{\{b, \ldots r'\}}{\{a, \ldots r'\}} - \frac{\{b, \ldots r\}}{\{a, \ldots r\}};$$

folglich

$$53.\quad \pm\left\{a', \ldots r'\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots r'\right\} - \left\{a, \ldots r'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}.$$

Nun iſt aber nach (30.)

$$\text{I.}\quad \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\} - \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\}a' - \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$- \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}a' + \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\}a' - \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}a'$$

$$= a'(31.) = \left\{a'\right\}.$$

Ferner iſt nach (30.)

$$\text{II.}\quad \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots b'\right\} - \left\{a, \ldots b'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\}b' - \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\}$$

$$- \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}b' + \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\}b' - \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}b'$$

$$- \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\} + \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= a'b' - 1\,(\text{I. } 31.) = \left\{a', b'\right\}.$$

Ferner iſt nach (30.)

$$\text{III.}\quad \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots c'\right\} - \left\{a, \ldots c'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots b'\right\}c' - \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\}$$

$$- \left\{a, \ldots b'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}c' + \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots b'\right\}c' - \left\{a, \ldots b'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}c'$$

$$- \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\} + \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a', b'\right\}c' - \left\{a'\right\}(\text{II. I.}) = \left\{a', b', c'\right\}(30.).$$

Ferner iſt nach (30.)

$$\text{IV.}\quad \left\{a \ldots r\right\}\left\{b, \ldots d'\right\} - \left\{a, \ldots d'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

Da ferner wegen der Gleichung (41.) offenbar auch α und β' zwei zuſammengehörende Werthe von x und y ſind; ſo erhält man nach (43.) auf der Stelle die Gleichung

$$46.\quad (\alpha - \alpha'')(\beta' - \beta'') = \gamma''^2.$$

Durch Verbindung der drei letzten Gleichungen erhält man ſehr leicht:

$$47.\ (\alpha'' - \alpha)^2 = \frac{\gamma^2\gamma''^2}{\gamma'^2},\quad 48.\ (\beta'' - \beta')^2 = \frac{\gamma'^2\gamma''^2}{\gamma^2},\quad 49.\ \delta^2 = \frac{\gamma^2\gamma'^2}{\gamma''^2};$$

folglich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$50.\ \alpha'' - \alpha = \pm\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'},\quad 51.\ \beta'' - \beta' = \pm\frac{\gamma'\gamma''}{\gamma},\quad 52.\ \delta = \pm\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''}.$$

Daß in dieſen drei Gleichungen die obern und untern Zeichen auf einander zu beziehen ſind, läßt ſich leicht auf folgende Art überſehen. Wäre nämlich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\alpha'' - \alpha = \pm\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'},\quad \beta'' - \beta' = \mp\frac{\gamma'\gamma''}{\gamma},$$

ſo wäre

$$(\alpha'' - \alpha)(\beta'' - \beta') = -\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'}.\frac{\gamma'\gamma''}{\gamma} = -\gamma''^2,$$

da doch nach (46.) offenbar

$$(\alpha'' - \alpha)(\beta'' - \beta') = \gamma''^2$$

iſt. Wäre ferner mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\alpha'' - \alpha = \pm\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'},\quad \delta = \mp\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''};$$

ſo wäre

$$(\alpha'' - \alpha)\delta = -\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'}.\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''} = -\gamma^2,$$

da doch nach (44.)

$$(\alpha'' - \alpha)\delta = \gamma^2$$

iſt. Alſo ſind in den Gleichungen (50.), (51.), (52.) die obern und untern Zeichen auf einander zu beziehen. Die Frage aber, welche Zeichen in dieſen Gleichungen zu nehmen ſind, läßt ſich, wie es uns ſcheint, am Beſten auf folgende Art beantworten. Setzt man nämlich in die Gleichung (50.) für $\alpha, \alpha'', \gamma, \gamma', \gamma''$ ihre Werthe aus dem Obigen; ſo erhält man

$$(a, \ldots r') - (a, \ldots r) = \pm\frac{\{a', \ldots r'\}}{\{a, \ldots r\}\{a, \ldots r'\}},$$

oder nach (27.)

$$\pm\frac{\{a' \ldots r'\}}{\{a, \ldots r\}\{a, \ldots r'\}} = \frac{\{b, \ldots r'\}}{\{a, \ldots r'\}} - \frac{\{b, \ldots r\}}{\{a, \ldots r\}};$$

folglich

$$53. \quad \pm\{a', \dots r'\}$$
$$= \{a, \dots r\}\{b, \dots r'\} - \{a, \dots r'\}\{b, \dots r\}.$$

Nun iſt aber nach (30.)

$$\text{I.} \quad \{a, \dots r\}\{b, \dots a'\} - \{a, \dots a'\}\{b, \dots r\}$$
$$= \{a, \dots r\}\{b, \dots s\}a' - \{a, \dots r\}\{b, \dots r\}$$
$$- \{a, \dots s\}\{b, \dots r\}a' + \{a, \dots r\}\{b, \dots r\}$$
$$= \{a, \dots r\}\{b, \dots s\}a' - \{a, \dots s\}\{b, \dots r\}a'$$
$$= a' (31.) = \{a'\}.$$

Ferner iſt nach (30.)

$$\text{II.} \quad \{a, \dots r\}\{b, \dots b'\} - \{a, \dots b'\}\{b, \dots r\}$$
$$= \{a, \dots r\}\{b, \dots a'\}b' - \{a, \dots r\}\{b, \dots s\}$$
$$- \{a, \dots a'\}\{b, \dots r\}b' + \{a, \dots s\}\{b, \dots r\}$$
$$= \{a, \dots r\}\{b, \dots a'\}b' - \{a, \dots a'\}\{b, \dots r\}b'$$
$$- \{a, \dots r\}\{b, \dots s\} + \{a, \dots s\}\{b, \dots r\}$$
$$= a'b' - 1 (\text{I. } 31.) = \{a', b'\}.$$

Ferner iſt nach (30.)

$$\text{III.} \quad \{a, \dots r\}\{b, \dots c'\} - \{a, \dots c'\}\{b, \dots r\}$$
$$= \{a, \dots r\}\{b, \dots b'\}c' - \{a, \dots r\}\{b, \dots a'\}$$
$$- \{a, \dots b'\}\{b, \dots r\}c' + \{a, \dots a'\}\{b, \dots r\}$$
$$= \{a, \dots r\}\{b, \dots b'\}c' - \{a, \dots b'\}\{b, \dots r\}c'$$
$$- \{a, \dots r\}\{b, \dots a'\} + \{a, \dots a'\}\{b, \dots r\}$$
$$= \{a', b'\}c' - \{a'\} (\text{II. I.}) = \{a', b', c'\} (30.).$$

Ferner iſt nach (30.)

$$\text{IV.} \quad \{a \dots r\}\{b, \dots d'\} - \{a, \dots d'\}\{b, \dots r\}$$

Da ferner wegen der Gleichung (41.) offenbar auch α und β' zwei zuſammengehörende Werthe von x und y ſind; ſo erhält man nach (43.) auf der Stelle die Gleichung

$$46.\ (\alpha - \alpha'')(\beta' - \beta'') = \gamma''^2 .$$

Durch Verbindung der drei letzten Gleichungen erhält man ſehr leicht:

$$47.\ (\alpha'' - \alpha)^2 = \frac{\gamma^2\gamma''^2}{\gamma'^2},\quad 48.\ (\beta'' - \beta')^2 = \frac{\gamma'^2\gamma''^2}{\gamma^2},\quad 49.\ \delta^2 = \frac{\gamma^2\gamma'^2}{\gamma''^2};$$

folglich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$50.\ \alpha'' - \alpha = \pm\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'},\quad 51.\ \beta'' - \beta' = \pm\frac{\gamma'\gamma''}{\gamma},\quad 52.\ \delta = \pm\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''}.$$

Daß in dieſen drei Gleichungen die obern und untern Zeichen auf einander zu beziehen ſind, läßt ſich leicht auf folgende Art überſehen. Wäre nämlich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\alpha'' - \alpha = \pm\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'},\quad \beta'' - \beta' = \mp\frac{\gamma'\gamma''}{\gamma},$$

ſo wäre

$$(\alpha'' - \alpha)(\beta'' - \beta') = -\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'}.\frac{\gamma'\gamma''}{\gamma} = -\gamma''^2,$$

da doch nach (46.) offenbar

$$(\alpha'' - \alpha)(\beta'' - \beta') = \gamma''^2$$

iſt. Wäre ferner mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\alpha'' - \alpha = \pm\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'},\quad \delta = \mp\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''};$$

ſo wäre

$$(\alpha'' - \alpha)\delta = -\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'}.\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''} = -\gamma^2,$$

da doch nach (44.)

$$(\alpha'' - \alpha)\delta = \gamma^2$$

iſt. Alſo ſind in den Gleichungen (50.), (51.), (52.) die obern und untern Zeichen auf einander zu beziehen. Die Frage aber, welche Zeichen in dieſen Gleichungen zu nehmen ſind, läßt ſich, wie es uns ſcheint, am Beſten auf folgende Art beantworten. Setzt man nämlich in die Gleichung (50.) für α, α'', γ, γ', γ'' ihre Werthe aus dem Obigen; ſo erhält man

$$(a, \ldots r') - (a, \ldots r) = \pm\frac{\{a', \ldots r'\}}{\{a, \ldots r\}\{a, \ldots, r'\}},$$

oder nach (27.)

$$\pm\frac{\{a' \ldots r'\}}{\{a, \ldots r\}\{a, \ldots r'\}} = \frac{\{b, \ldots r'\}}{\{a, \ldots r'\}} - \frac{\{b, \ldots r\}}{\{a, \ldots r\}};$$

folglich

$$53.\quad \pm\left\{a', \ldots r'\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots r'\right\} - \left\{a, \ldots r'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}.$$

Nun iſt aber nach (30.)

$$\text{I.}\quad \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\} - \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\}a' - \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$- \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}a' + \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\}a' - \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}a'$$

$$= a' (31.) = \left\{a'\right\}.$$

Ferner iſt nach (30.)

$$\text{II.}\quad \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots b'\right\} - \left\{a, \ldots b'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\}b' - \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\}$$

$$- \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}b' + \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\}b' - \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}b'$$

$$- \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\} + \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= a'b' - 1 (\text{I. } 31.) = \left\{a', b'\right\}.$$

Ferner iſt nach (30.)

$$\text{III.}\quad \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots c'\right\} - \left\{a, \ldots c'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots b'\right\}c' - \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\}$$

$$- \left\{a, \ldots b'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}c' + \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots b'\right\}c' - \left\{a, \ldots b'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}c'$$

$$- \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\} + \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a', b'\right\}c' - \left\{a'\right\} (\text{II. I.}) = \left\{a', b', c'\right\} (30.).$$

Ferner iſt nach (30.)

$$\text{IV.}\quad \left\{a \ldots r\right\}\left\{b, \ldots d'\right\} - \left\{a, \ldots d'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

Da ferner wegen der Gleichung (41.) offenbar auch α und β' zwei zuſammengehörende Werthe von x und y ſind; ſo erhält man nach (43.) auf der Stelle die Gleichung

$$46.\ (\alpha - \alpha'')(\beta' - \beta'') = \gamma''^2 .$$

Durch Verbindung der drei letzten Gleichungen erhält man ſehr leicht:

$$47.\ (\alpha'' - \alpha)^2 = \frac{\gamma^2\gamma''^2}{\gamma'^2},\quad 48.\ (\beta'' - \beta')^2 = \frac{\gamma'^2\gamma''^2}{\gamma^2},\quad 49.\ \delta^2 = \frac{\gamma^2\gamma'^2}{\gamma''^2};$$

folglich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$50.\ \alpha'' - \alpha = \pm\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'},\quad 51.\ \beta'' - \beta' = \pm\frac{\gamma'\gamma''}{\gamma},\quad 52.\ \delta = \pm\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''}.$$

Daß in dieſen drei Gleichungen die obern und untern Zeichen auf einander zu beziehen ſind, läßt ſich leicht auf folgende Art überſehen. Wäre nämlich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\alpha'' - \alpha = \pm\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'},\quad \beta'' - \beta' = \mp\frac{\gamma'\gamma''}{\gamma},$$

ſo wäre

$$(\alpha'' - \alpha)(\beta'' - \beta') = -\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'}.\frac{\gamma'\gamma''}{\gamma} = -\gamma''^2,$$

da doch nach (46.) offenbar

$$(\alpha'' - \alpha)(\beta'' - \beta') = \gamma''^2$$

iſt. Wäre ferner mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\alpha'' - \alpha = \pm\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'},\quad \delta = \mp\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''};$$

ſo wäre

$$(\alpha'' - \alpha)\delta = -\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'}.\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''} = -\gamma^2,$$

da doch nach (44.)

$$(\alpha'' - \alpha)\delta = \gamma^2$$

iſt. Alſo ſind in den Gleichungen (50.), (51.), (52.) die obern und untern Zeichen auf einander zu beziehen. Die Frage aber, welche Zeichen in dieſen Gleichungen zu nehmen ſind, läßt ſich, wie es uns ſcheint, am Beſten auf folgende Art beantworten. Setzt man nämlich in die Gleichung (50.) für α, α'', γ, γ', γ'' ihre Werthe aus dem Obigen; ſo erhält man

$$(a, \ldots r') - (a, \ldots r) = \pm\frac{\{a', \ldots r'\}}{\{a, \ldots r\}\{a, \ldots r'\}},$$

oder nach (27.)

$$\pm\frac{\{a' \ldots r'\}}{\{a, \ldots r\}\{a, \ldots r'\}} = \frac{\{b, \ldots r'\}}{\{a, \ldots r'\}} - \frac{\{b, \ldots r\}}{\{a, \ldots r\}};$$

folglich

$$53.\ \pm\left\{a', \ldots r'\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots r'\right\} - \left\{a, \ldots r'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}.$$

Nun iſt aber nach (30.)

$$\text{I.}\quad \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\} - \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\}a' - \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$- \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}a' + \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\}a' - \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}a'$$

$$= a' (31.) = \left\{a'\right\}.$$

Ferner iſt nach (30.)

$$\text{II.}\quad \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots b'\right\} - \left\{a, \ldots b'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\}b' - \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\}$$

$$- \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}b' + \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\}b' - \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}b'$$

$$- \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\} + \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= a'b' - 1 (\text{I. } 31.) = \left\{a', b'\right\}.$$

Ferner iſt nach (30.)

$$\text{III.}\quad \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots c'\right\} - \left\{a, \ldots c'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots b'\right\}c' - \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\}$$

$$- \left\{a, \ldots b'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}c' + \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots b'\right\}c' - \left\{a, \ldots b'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}c'$$

$$- \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\} + \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a', b'\right\}c' - \left\{a'\right\} (\text{II. I.}) = \left\{a', b', c'\right\} (30.).$$

Ferner iſt nach (30.)

$$\text{IV.}\quad \left\{a \ldots r\right\}\left\{b, \ldots d'\right\} - \left\{a, \ldots d'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

Da ferner wegen der Gleichung (41.) offenbar auch α und β' zwei zuſammengehörende Werthe von x und y ſind; ſo erhält man nach (43.) auf der Stelle die Gleichung

$$46.\ (\alpha - \alpha'')(\beta' - \beta'') = \gamma''^2.$$

Durch Verbindung der drei letzten Gleichungen erhält man ſehr leicht:

$$47.\ (\alpha'' - \alpha)^2 = \frac{\gamma^2\gamma''^2}{\gamma'^2},\quad 48.\ (\beta'' - \beta')^2 = \frac{\gamma'^2\gamma''^2}{\gamma^2},\quad 49.\ \delta^2\ \frac{\gamma^2\gamma'^2}{\gamma''^2};$$

folglich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$50.\ \alpha'' - \alpha = \pm\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'},\quad 51.\ \beta'' - \beta' = \pm\frac{\gamma'\gamma''}{\gamma},\quad 52.\ \delta = \pm\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''}.$$

Daß in dieſen drei Gleichungen die obern und untern Zeichen auf einander zu beziehen ſind, läßt ſich leicht auf folgende Art überſehen. Wäre nämlich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\alpha'' - \alpha = \pm\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'},\quad \beta'' - \beta' = \mp\frac{\gamma'\gamma''}{\gamma};$$

ſo wäre

$$(\alpha'' - \alpha)(\beta'' - \beta') = -\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'}\cdot\frac{\gamma'\gamma''}{\gamma} = -\gamma''^2,$$

da doch nach (46.) offenbar

$$(\alpha'' - \alpha)(\beta'' - \beta') = \gamma''^2$$

iſt. Wäre ferner mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\alpha'' - \alpha = \pm\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'},\quad \delta = \mp\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''};$$

ſo wäre

$$(\alpha'' - \alpha)\delta = -\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'}\cdot\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''} = -\gamma^2,$$

da doch nach (44.)

$$(\alpha'' - \alpha)\delta = \gamma^2$$

iſt. Alſo ſind in den Gleichungen (50.), (51.), (52.) die obern und untern Zeichen auf einander zu beziehen. Die Frage aber, welche Zeichen in dieſen Gleichungen zu nehmen ſind, läßt ſich, wie es uns ſcheint, am Beſten auf folgende Art beantworten. Setzt man nämlich in die Gleichung (50.) für α, α'', γ, γ', γ'' ihre Werthe aus dem Obigen; ſo erhält man

$$(a, \ldots r') - (a, \ldots r) = \pm\frac{\{a', \ldots r'\}}{\{a, \ldots r\}\{a, \ldots, r'\}},$$

oder nach (27.)

$$\pm\frac{\{a' \ldots r'\}}{\{a, \ldots r\}\{a, \ldots r'\}} = \frac{\{b, \ldots r'\}}{\{a, \ldots r'\}} - \frac{\{b, \ldots r\}}{\{a, \ldots r\}};$$

folglich

$$53.\quad \pm\left\{a', \ldots r'\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots r'\right\} - \left\{a, \ldots r'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}.$$

Nun iſt aber nach (30.)

$$\text{I.}\quad \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\} - \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\}a' - \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$- \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}a' + \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\}a' - \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}a'$$

$$= a'\,(31.) = \left\{a'\right\}.$$

Ferner iſt nach (30.)

$$\text{II.}\quad \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots b'\right\} - \left\{a, \ldots b'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\}b' - \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\}$$

$$- \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}b' + \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\}b' - \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}b'$$

$$- \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\} + \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= a'b' - 1\,(\text{I. }31.) = \left\{a', b'\right\}.$$

Ferner iſt nach (30.)

$$\text{III.}\quad \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots c'\right\} - \left\{a, \ldots c'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots b'\right\}c' - \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\}$$

$$- \left\{a, \ldots b'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}c' + \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots b'\right\}c' - \left\{a, \ldots b'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}c'$$

$$- \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\} + \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a', b'\right\}c' - \left\{a'\right\}(\text{II. I.}) = \left\{a', b', c'\right\}(30.).$$

Ferner iſt nach (30.)

$$\text{IV.}\quad \left\{a \ldots r\right\}\left\{b, \ldots d'\right\} - \left\{a, \ldots d'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

Da ferner wegen der Gleichung (41.) offenbar auch α und β' zwei zuſammengehörende Werthe von x und y ſind; ſo erhält man nach (43.) auf der Stelle die Gleichung

$$46.\quad (\alpha - \alpha'')(\beta' - \beta'') = \gamma''^2.$$

Durch Verbindung der drei letzten Gleichungen erhält man ſehr leicht:

$$47.\ (\alpha'' - \alpha)^2 = \frac{\gamma^2\gamma''^2}{\gamma'^2},\quad 48.\ (\beta'' - \beta')^2 = \frac{\gamma'^2\gamma''^2}{\gamma^2},\quad 49.\ \delta^2 = \frac{\gamma^2\gamma'^2}{\gamma''^2};$$

folglich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$50.\ \alpha'' - \alpha = \pm\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'};\quad 51.\ \beta'' - \beta' = \pm\frac{\gamma'\gamma''}{\gamma};\quad 52.\ \delta = \pm\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''}.$$

Daß in dieſen drei Gleichungen die obern und untern Zeichen auf einander zu beziehen ſind, läßt ſich leicht auf folgende Art überſehen. Wäre nämlich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\alpha'' - \alpha = \pm\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'},\quad \beta'' - \beta' = \mp\frac{\gamma'\gamma''}{\gamma};$$

ſo wäre

$$(\alpha'' - \alpha)(\beta'' - \beta') = -\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'}\cdot\frac{\gamma'\gamma''}{\gamma} = -\gamma''^2,$$

da doch nach (46.) offenbar

$$(\alpha'' - \alpha)(\beta'' - \beta') = \gamma''^2$$

iſt. Wäre ferner mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\alpha'' - \alpha = \pm\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'},\quad \delta = \mp\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''};$$

ſo wäre

$$(\alpha'' - \alpha)\delta = -\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'}\cdot\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''} = -\gamma^2,$$

da doch nach (44.)

$$(\alpha'' - \alpha)\delta = \gamma^2$$

iſt. Alſo ſind in den Gleichungen (50.), (51.), (52.) die obern und untern Zeichen auf einander zu beziehen. Die Frage aber, welche Zeichen in dieſen Gleichungen zu nehmen ſind, läßt ſich, wie es uns ſcheint, am Beſten auf folgende Art beantworten. Setzt man nämlich in die Gleichung (50.) für α, α'', γ, γ', γ'' ihre Werthe aus dem Obigen; ſo erhält man

$$(a, \ldots r') - (a, \ldots r) = \pm\frac{\{a', \ldots r'\}}{\{a, \ldots r\}\{a, \ldots r'\}},$$

oder nach (27.)

$$\pm\frac{\{a' \ldots r'\}}{\{a, \ldots r\}\{a, \ldots r'\}} = \frac{\{b, \ldots r'\}}{\{a, \ldots r'\}} - \frac{\{b, \ldots r\}}{\{a, \ldots r\}};$$

folglich

$$53.\quad \pm\left\{a', \ldots r'\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots r'\right\} - \left\{a, \ldots r'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}.$$

Nun iſt aber nach (30.)

$$\text{I.}\quad \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\} - \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\}a' - \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$- \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}a' + \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\}a' - \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}a'$$

$$= a'\,(31.) = \left\{a'\right\}.$$

Ferner iſt nach (30.)

$$\text{II.}\quad \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots b'\right\} - \left\{a, \ldots b'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\}b' - \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\}$$

$$- \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}b' + \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\}b' - \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}b'$$

$$- \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\} + \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= a'b' - 1\,(\text{I. } 31.) = \left\{a', b'\right\}.$$

Ferner iſt nach (30.)

$$\text{III.}\quad \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots c'\right\} - \left\{a, \ldots c'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots b'\right\}c' - \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\}$$

$$- \left\{a, \ldots b'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}c' + \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots b'\right\}c' - \left\{a, \ldots b'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}c'$$

$$- \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\} + \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a', b'\right\}c' - \left\{a'\right\}\,(\text{II. I.}) = \left\{a', b', c'\right\}\,(30.).$$

Ferner iſt nach (30.)

$$\text{IV.}\quad \left\{a \ldots r\right\}\left\{b, \ldots d'\right\} - \left\{a, \ldots d'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots c'\right\}d' - \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots b'\right\}$$

$$- \left\{a, \ldots c'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}d' + \left\{a, \ldots b'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots c'\right\}d' - \left\{a, \ldots c'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}d'$$

$$- \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots b'\right\} + \left\{a, \ldots b'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a', b', c'\right\}d' - \left\{a', b'\right\} \text{(III. II.)} = \left\{a', b', c', d'\right\} \text{(30.)}.$$

Wie man auf dieſe Art weiter gehen kann, iſt klar, und es iſt folglich in völliger Allgemeinheit:

$$54. \quad \left\{a', \ldots r'\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots r'\right\} - \left\{a, \ldots r'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}.$$

Folglich muß man in der Gleichung (53.), und daher offenbar auch in jeder der Gleichungen (50.), (51.), (52.) das obere Zeichen nehmen, ſo daß alſo

$$55. \; \alpha'' - \alpha = \frac{\gamma\gamma''}{\gamma'}, \quad 56. \; \beta'' - \beta' = \frac{\gamma'\gamma''}{\gamma}, \quad 57. \; \delta = \frac{\gamma\gamma'}{\gamma''}$$

iſt. Führt man nun auch in die Gleichungen (56.) und (57.) für β', β'', γ, γ', γ'' und δ ihre Werthe aus dem Obigen ein; ſo erhält man:

$$58. \; (r', \ldots a) - (r', \ldots a') = \frac{\left\{a, \ldots r\right\}}{\left\{a, \ldots r'\right\}\left\{a', \ldots r'\right\}},$$

$$59. \; s - (r, \ldots a) - (a', \ldots r') = \frac{\left\{a, \ldots r'\right\}}{\left\{a, \ldots r\right\}\left\{a', \ldots r'\right\}}.$$

Nach dem Obigen iſt aber

$$(r, \ldots a) = \frac{\left\{a, \ldots q\right\}}{\left\{a, \ldots r\right\}}, \; (a', \ldots r') = \frac{\left\{b', \ldots r'\right\}}{\left\{a', \ldots r'\right\}}.$$

Alſo giebt die Gleichung (59.) nach leichter Rechnung

$$60. \; \left\{a, \ldots r\right\}\left\{a' \ldots r'\right\}s - \left\{a, \ldots r'\right\}$$

$$= \left\{a, \ldots q\right\}\left\{a', \ldots r'\right\} + \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b', \ldots r'\right\},$$

oder auch, weil nach (30.)

$$\left\{a, \ldots r\right\}s - \left\{a, \ldots q\right\} = \left\{a, \ldots s\right\}$$

iſt,

$$61. \; \left\{a, \ldots s\right\}\left\{a', \ldots r'\right\} = \left\{a, \ldots r'\right\} + \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b', \ldots r'\right\}.$$

6. Möbius hat a. a. O. noch mehrere andere merkwürdige Relationen entwickelt. Der Raum geſtattet uns hier aber bloß noch, die Anwendung der vorhergehenden Sätze bei der Trans-

formation der Kettenbrüche in der Kürze zu zeigen. Zu dem Ende wollen wir wieder annehmen, daß x durch mehrere conſtante Elemente und die Größe y mittelſt eines Kettenbruchs von der hier immer zum Grunde gelegten Form ausgedrückt ſey, und wollen uns nun die conſtanten Elemente in mehrere einzelne Gruppen, hier z. B. in vier, getheilt denken. Sey alſo

62. $x = (a, \ldots r, s, a', \ldots r', s', a'', \ldots r'', s'', a''', \ldots r''', y)$

und

$$\begin{aligned} x' &= (a', \ldots r', s', a'', \ldots\ldots y), \\ x'' &= (a'', \ldots r'', s'', a''', \ldots\ldots y), \\ x''' &= (a''', \ldots r''', y); \end{aligned}$$

ſo iſt

$$\begin{aligned} x &= (a, \ldots r, s - x'), \\ x' &= (a', \ldots r', s' - x''), \\ x'' &= (a'', \ldots r'', s'' - x'''), \\ x''' &= (a''', \ldots r''', y). \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$(a, \ldots r) = \alpha,\ (r, \ldots a) = \beta,\ 1 : \left| a, \ldots r \right| = \gamma;$$
$$(a', \ldots r') = \alpha',\ (r', \ldots a') = \beta',\ 1 : \left| a', \ldots r' \right| = \gamma';$$
$$(a'', \ldots r'') = \alpha'',\ (r'', \ldots a'') = \beta'',\ 1 : \left| a'', \ldots r'' \right| = \gamma'';$$
$$(a''', \ldots r''') = \alpha''',\ (r''', \ldots a''') = \beta''',\ 1 : \left| a''', \ldots r''' \right| = \gamma''';$$

ſo iſt nach (32.)

$$\begin{aligned} (x - \alpha)(s - x' - \beta) &= \gamma^2, \\ (x' - \alpha')(s' - x'' - \beta') &= \gamma'^2, \\ (x'' - \alpha'')(s'' - x''' - \beta'') &= \gamma''^2, \\ (x''' - \alpha''')(y - \beta''') &= \gamma'''^2; \end{aligned}$$

alſo iſt

$$x = \alpha + \frac{\gamma^2}{s - \beta - x'},$$
$$x' = \alpha' + \frac{\gamma'^2}{s' - \beta' - x''},$$
$$x'' = \alpha'' + \frac{\gamma''^2}{s'' - \beta'' - x'''},$$
$$x''' = \alpha''' + \frac{\gamma'''^2}{y - \beta'''},$$

und folglich:

63. $x = \alpha + \cfrac{\gamma^2}{s - \beta - \alpha'} - \cfrac{\gamma'^2}{s' - \beta' - \alpha''} - \cfrac{\gamma''^2}{s'' - \beta'' - \alpha'''} - \cfrac{\gamma'''^2}{y - \beta'''}.$

Dieſer Kettenbruch enthält nur vier, d. i. immer bloß ſo viel

Glieder, als in wie viel Gruppen man die Elemente des gegebenen Kettenbruchs getheilt hat.

Man kann aber dieſen Kettenbruch noch auf eine andere für die Rechnung bequemere Form bringen. Setzt man nämlich

$$x - \alpha = z,\ x' - \alpha' = z',\ x'' - \alpha'' = z'',\ x''' - \alpha''' = z''';$$

ſo iſt nach dem Vorhergehenden

$$64.\ \begin{cases} z(s - \beta - \alpha' - z') = \gamma^2, \\ z'(s' - \beta' - \alpha'' - z'') = \gamma'^2, \\ z''(s'' - \beta'' - \alpha''' - z''') = \gamma''^2, \\ \qquad z'''(y - \beta''') = \gamma'''^2. \end{cases}$$

Es iſt aber nach (59.)

$$s - \beta - \alpha' = s - (r, \ldots a) - (a', \ldots r') = \frac{\{a, \ldots r'\}}{\{a, \ldots r\}\{a', \ldots r'\}},$$

$$s' - \beta' - \alpha'' = s' - (r', \ldots a') - (a'', \ldots r'') = \frac{\{a', \ldots r''\}}{\{a', \ldots r'\}\{a'', \ldots r''\}},$$

$$s'' - \beta'' - \alpha''' = s'' - (r'', \ldots a'') - (a''', \ldots r''') = \frac{\{a'', \ldots r'''\}}{\{a'', \ldots r''\}\{a''', \ldots r'''\}};$$

und nach (29.)

$$y - \beta''' = y - (r''', \ldots a''') = y - \frac{\{a''', \ldots q'''\}}{\{a''', \ldots r'''\}}.$$

Setzt man nun der Kürze wegen

$$\{a, \ldots r\}z = v,\ \{a', \ldots r'\}z' = v',\ \{a'', \ldots r''\}z'' = v'',$$
$$\{a''', \ldots r'''\}r''' = v''';$$

ſo werden die Gleichungen (64.):

$$v\left[\{a, \ldots r'\} - \{a, \ldots r\}v'\right] = \{a', \ldots r'\},$$
$$v'\left[\{a', \ldots r''\} - \{a', \ldots r'\}v''\right] = \{a'', \ldots r''\},$$
$$v''\left[\{a'', \ldots r'''\} - \{a'', \ldots r''\}v'''\right] = \{a''', \ldots r'''\},$$
$$x'''\left[\{a''', \ldots r'''\}y - \{a''', \ldots q'''\}\right] = 1.$$

Endlich iſt

$$x = \alpha + z = \frac{1}{\{a, \ldots r\}}\left[\{b, \ldots r\} + v\right],$$

und folglich, wenn man die aus den vorhergehenden Gleichungen ſich ergebenden Ausdrücke von v, v', v'', v''' nach und nach ſubſtituirt:

$$65.\ \left\{a, \ldots r\right\}.x =$$

$$\left\{b, \ldots r\right\} + \cfrac{\{a', \ldots r'\}}{\{a, \ldots r'\} - \cfrac{\{a, \ldots r\}\{a'', \ldots r''\}}{\{a', \ldots r''\} - \cfrac{\{a', \ldots r'\}\{a''', \ldots r'''\}}{\{a'', \ldots r'''\} - \cfrac{\{a'', \ldots r''\}}{\{a''', \ldots r'''\}y - \{a''', \ldots q'''\}}}}}.$$

Daß man dieſe Formel auch leicht verallgemeinern könnte, iſt klar, und eben ſo leicht erhellet auch, daß die Anzahl der Glieder dieſes Kettenbruchs immer der Anzahl der Gruppen gleich iſt, in welche man die Elemente des gegebenen Kettenbruchs getheilt hat.

Wegen der weitern Ausführung dieſes Gegenſtandes verweiſen wir auf die Abhandlung von Möbius ſelbſt.

Viele Zuſätze zu der Elementarlehre von den Kettenbrüchen bietet auch der Artikel Unbeſtimmte Analytik dar, auf welchen uns daher hier zu verweiſen erlaubt ſeyn mag. Namentlich iſt in dieſem Artikel (36. ff.) von der Verwandlung der irrationalen Quadratwurzeln und dem periodiſchen Fortſchreiten der durch dieſe Operation erhaltenen Kettenbrüche ausführlich gehandelt. Einen bemerkenswerthen Satz von den Kettenbrüchen, durch welche die Wurzeln einer quadratiſchen Gleichung dargeſtellt werden, ſ. m. ſowohl in der Abhandlung von Möbius (§. 12.), als auch in einem beſondern Aufſatze von Galois, welcher den in Rede ſtehenden Satz zuerſt gefunden hat, in den **Annales de Mathématiques. T. XIX. p. 294.** Der für dieſen Artikel noch übrige Raum ſoll der Verwandlung der Reihen in Kettenbrüche gewidmet ſeyn.

7. Das meiſte Verdienſt um die Verwandlungen der Reihen in Kettenbrüche hat ſich in neuerer Zeit unſtreitig Gauß erworben, indem er in der berühmten Abhandlung: **Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc.** eine ſehr allgemeine Reihe, unter der viele andere Reihen als ſpecielle Fälle enthalten ſind, in einen nach einem ſehr merkwürdigen Geſetze fortſchreitenden Kettenbruch zu verwandeln gelehrt hat. Gauß bezeichnet nämlich a. a. O. die Reihe

$$1 + \frac{\alpha}{1}.\frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}.\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3}.\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \ldots$$

durch

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

und ſucht nun zunächſt den Quotienten

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)},$$

den er der Kürze wegen durch

$$G(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

bezeichnet, in einen Kettenbruch umzugeſtalten. Dazu gelangt er auf folgende Art. Der Coefficient von x^n in

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

ſey K; ſo iſt

$$66.\quad K = \frac{\alpha(\alpha+1)..(\alpha+n-1)}{1.2.3...n} \cdot \frac{\beta(\beta+1)..(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)..(\gamma+n-1)}.$$

Der Coefficient von x^n in

$$F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)$$

ſey K'; ſo iſt

$$67.\quad K' = \frac{\alpha(\alpha+1)..(\alpha+n-1)}{1.2.3...n} \cdot \frac{(\beta+1)(\beta+2)..(\beta+n)}{(\gamma+1)(\gamma+2)..(\gamma+n)}.$$

Alſo iſt

$$68.\quad K' = K.\frac{\gamma(\beta+n)}{\beta(\gamma+n)}.$$

Bezeichnen wir nun den Coefficienten von x^n in der Differenz

$$F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x) - F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

durch K''; ſo iſt

$$69.\quad K'' = K' - K = K.\frac{n(\gamma-\beta)}{\beta(\gamma+n)}.$$

Ferner ſey K''' der Coefficient von x^n in

$$x.F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x);$$

ſo iſt

$$70.\quad K''' = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n-1)}{1.2.3...(n-1)} \cdot \frac{(\beta+1)(\beta+2)..(\beta+n-1)}{(\gamma+2)(\gamma+3)..(\gamma+n)}$$

und folglich nach (66.)

$$71.\quad K''' = K.\frac{n\gamma(\gamma+1)}{\alpha\beta(\gamma+n)}.$$

Alſo iſt nach (69.)

$$72.\quad K'' = K'''.\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)},$$

und es findet folglich offenbar die folgende Gleichung Statt:

$$73.\quad F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x) - F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x.F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x).$$

Dividirt man auf beiden Seiten dieſe Gleichung mit ihrem erſten Gliede; ſo ergiebt ſich

$$74.\quad \frac{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}$$

$$= 1 - \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x.\frac{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x)}{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)},$$

oder

$$75.\quad \frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}$$
$$= \frac{1}{1-\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}x.\frac{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x)}{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}}.$$

Nun iſt aber, wie ſogleich erhellen wird,

$$F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)=F(\beta+1,\alpha,\gamma+1,x),$$
$$F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x)=F(\beta+1,\alpha+1,\gamma+2,x).$$

Alſo iſt

$$76.\quad \frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}$$
$$= \frac{1}{1-\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}x.\frac{F(\beta+1,\alpha+1,\gamma+2,x)}{F(\beta+1,\alpha,\gamma+1,x)}},$$

d. i. in der oben eingeführten Bezeichnung:

$$77.\quad G(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{1}{1-\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}x.G(\beta+1,\alpha,\gamma+1,x)}.$$

Aus dieſer Gleichung ergiebt ſich nun überhaupt die folgende Reihe von Gleichungen:

$$G(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{1}{1-\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}x.G(\beta+1,\alpha,\gamma+1,x)},$$

$$G(\beta+1,\alpha,\gamma+1,x)=\frac{1}{1-\frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}x.G(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x)},$$

$$G(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x)=\frac{1}{1-\frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}x.G(\beta+2,\alpha+1,\gamma+3,x)},$$

$$G(\beta+2,\alpha+1,\gamma+3,x)=\frac{1}{1-\frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)}x.G(\alpha+2,\beta+2,\gamma+4,x)},$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Setzt man alſo der Kürze wegen

$$a_1=\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)},\quad a_2=\frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)};$$
$$a_3=\frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+3)},\quad a_4=\frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)};$$
$$a_5=\frac{(\alpha+2)(\gamma+2-\beta)}{(\gamma+4)(\gamma+5)},\quad a_6=\frac{(\beta+3)(\gamma+3-\alpha)}{(\gamma+5)(\gamma+6)};$$
$$a_7=\frac{(\alpha+3)(\gamma+3-\beta)}{(\gamma+6)(\gamma+7)},\quad a_8=\frac{(\beta+4)(\gamma+4-\alpha)}{(\gamma+7)(\gamma+8)};$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

ſo iſt

$$78.\quad G(\alpha,\beta,\gamma,x) = \cfrac{1}{1-\cfrac{a_1 x}{1-\cfrac{a_2 x}{1-\cfrac{a_3 x}{1-\cfrac{a_4 x}{1-\cfrac{a_5 x}{1-\ldots}}}}}}$$

Für $\beta = 0$ iſt

$$F(\alpha, 0, \gamma, x) = 1,$$

und folglich

$$G(\alpha, 0, \gamma, x) = F(\alpha, 1, \gamma+1, x)$$

oder

$$G(\alpha, 0, \gamma-1, x) = F(\alpha, 1, \gamma, x).$$

Setzt man alſo in der Gleichung (78.) $\beta = 0$ und $\gamma -$ für γ; ſo erhält man

$$79.\quad F(\alpha, 1, \gamma, x) = \cfrac{1}{1-\cfrac{c_1 x}{1-\cfrac{c_2 x}{1-\cfrac{c_3 x}{1-\cfrac{c_4 x}{1-\cfrac{c_5 x}{1-\ldots,}}}}}}$$

wo

$$F(\alpha, 1, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \ldots,$$

und

$$c_1 = \frac{\alpha}{\gamma}, \qquad c_2 = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma(\gamma+1)};$$

$$c_3 = \frac{(\alpha+1)\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)}, \quad c_4 = \frac{2(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+2)(\gamma+3)};$$

$$c_5 = \frac{(\alpha+2)(\gamma+1)}{(\gamma+3)(\gamma+4)}, \quad c_6 = \frac{3(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+4)(\gamma+5)};$$

$$c_7 = \frac{(\alpha+3)(\gamma+2)}{(\gamma+5)(\gamma+6)}, \quad c_8 = \frac{4(\gamma+3-\alpha)}{(\gamma+6)(\gamma+7)},$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

iſt.

Mit der hier in einen Kettenbruch verwandelten Reihe laſſen ſich die meiſten Reihen, welche ſonſt in der Analyſis betrachtet zu werden pflegen, vergleichen. Setzt man z. B. $-\alpha$ für α, $-x$ für x, und $\gamma = 1$; ſo geht dieſelbe in die Binomial-Reihe über. Eben ſo iſt

$$80.\quad l(1+x) = xF(1, 1, 2, -x),$$

$$81.\quad l\frac{1+x}{1-x} = 2xF(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, x^2),$$

$$82.\quad \text{Arc tang}\, x = xF(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, -x^2),$$

und auf ähnliche Art in andern Fällen. Mit Mehrerem ſ. m. die angeführte Abhandlung von Gauß, und vergleiche auch die

Theoria motus corporum coelestium. p. 97. p. 98. p. 113, Noch bemerken wir, daß, wenn man ſich γ unendlich groß denkt.

$$83.\quad F\left(\frac{m}{n}, 1, \gamma, -n\gamma x\right) = 1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + \ldots\ldots$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{mx}{1 + \cfrac{nx}{1 + \cfrac{(m+n)x}{1 + \cfrac{2nx}{1 + \cfrac{(m+2n)x}{1 + \cfrac{3nx}{1 + \ldots}}}}}}}$$

iſt.

8. In der Mécanique céleste. T. IV. p. 255. hat Laplace das in vieler Beziehung wichtige beſtimmte Integral

$$\int_x^\infty e^{-x^2}\partial x$$

in einen Kettenbruch entwickelt. Einen ſehr ſchönen Beweis dieſes Kettenbruchs hat neuerdings C. G. J. Jacobi in Crelles Journal. B. XII. S. 346. gegeben, welchen wir hier, weil er auch in anderer Beziehung, wovon nachher ausführlicher die Rede ſeyn wird, bemerkenswerth iſt, noch mittheilen wollen. Man ſetze

$$84.\quad v = e^{x^2}\int_x^\infty e^{-x^2}\partial x$$

und differentiire; ſo erhält man

$$\partial v = e^{x^2}\partial\int_x^\infty e^{-x^2}\partial x + 2xe^{x^2}\partial x\int_x^\infty e^{-x^2}\partial x$$

$$= 2xv\partial x + e^{x^2}\partial\int_x^\infty e^{-x^2}\partial x.$$

Setzen wir nun überhaupt

$$\int e^{-x^2}\partial x = \varphi(x) + C;$$

ſo iſt

$$\partial\varphi(x) = e^{-x^2}\partial x.$$

Nun iſt aber

$$\int_x^\infty e^{-x^2}\partial x = \varphi(\infty) - \varphi(x),$$

und folglich

$$\partial\int_x^\infty e^{-x^2}\partial x = -\partial\varphi(x).$$

Alſo iſt

$$\partial \int_x^{\infty} e^{-x^2} \partial x = - e^{-x^2} \partial x ;$$

folglich nach dem Vorhergehenden

$$\partial v = 2xv\partial x - \partial x ,$$

oder

$$85. \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2xv - 1 .$$

Durch ſucceſſive Differentiation dieſer Gleichung ergiebt ſich leicht:

$$86. \quad \frac{\partial^{n+1} v}{\partial x^{n+1}} = 2x \frac{\partial^n v}{\partial x^n} + 2n \frac{\partial^{n-1} v}{\partial x^{n-1}} ,$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$87. \quad \frac{\partial^n v}{1.2.3..n\,\partial x^n} = v_n$$

ſetzt,

$$88. \quad v_1 = 2xv - 1, \quad (n+1)\, v_{n+1} = 2xv_n + 2v_{n-1} .$$

Setzt man nun ferner

$$89. \quad (-1)^n . 2x^{n+1} v_n = y_{n+1}, \quad q = \frac{1}{2x^2} ;$$

ſo iſt

$$90. \quad 1 = y_1 + qy_2 , \quad y_n = y_{n+1} + (n+1)\, q\, y_{n+2} ,$$

und folglich

$$\frac{1}{y_1} = 1 + q\frac{y_2}{y_1} = 1 + q : \frac{y_1}{y_2} ,$$

$$\frac{y_1}{y_2} = 1 + 2q\frac{y_3}{y_2} = 1 + 2q : \frac{y_2}{y_3} ,$$

$$\frac{y_2}{y_3} = 1 + 3q\frac{y_4}{y_3} = 1 + 3q : \frac{y_3}{y_4} ,$$

$$\frac{y_3}{y_4} = 1 + 4q\frac{y_5}{y_4} = 1 + 4q : \frac{y_4}{y_5} ,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = 1 + nq\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + nq : \frac{y_n}{y_{n+1}} ,$$

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = 1 + \frac{(n+1)\, q\, y_{n+2}}{y_{n+1}} .$$

Alſo iſt

$$91. \quad y_1 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{q}{1 + \cfrac{2q}{1 + \cfrac{3q}{1 + \ddots + \cfrac{nq}{1 + \cfrac{(n+1)q\,y_{n+2}}{y_{n+1}}}}}}} .$$

Da nun nach (89.)

$$y_1 = 2xv = 2xe^{x^2}\int_x^\infty e^{-x^2}\partial x$$

iſt; ſo iſt

$$92.\ \int_x^\infty e^{-x^2}\partial x =$$

$$\frac{e^{-x^2}}{2x}\cdot\frac{1}{1+\frac{q}{1+\frac{2q}{1+\frac{3q}{1+\ddots+\frac{nq}{1+\frac{(n+1)q\,y_{n+2}}{y_{n+1}}}}}}}.$$

q iſt $=\frac{1}{2x^2}$, und folglich immer eine poſitive Größe. Ferner iſt

$$y_{n+1} = (-1)^n.2x^{n+1}v_n = (-1)^n.2x^{n+1}\frac{\partial^n v}{1.2\ldots n\,\partial x^n}.$$

Man kann y_{n+1} aber noch auf eine andere Art durch ein beſtimmtes Integral ausdrücken. Da nämlich

$$v = e^{x^2}\int_x^\infty e^{-T^2}\partial T$$

iſt; ſo iſt, wenn wir

$$T = t + x$$

ſetzen, offenbar

$$v = e^{x^2}\int_0^\infty e^{-(t+x)^2}\partial t,$$

und folglich, wenn wir e^{x^2}, welches jetzt als conſtant zu betrachten iſt, unter das Integralzeichen nehmen:

$$v = \int_0^\infty e^{-t^2}e^{-2tx}\partial t.$$

Differentiiren wir nun nach x; ſo erhalten wir, wobei der Artikel Beſtimmtes Integral (18.) i. d. Z. zu vergleichen iſt,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \int_0^\infty (-2t)e^{-t^2}e^{-2tx}\partial t,$$

$$\frac{\partial_2 v}{\partial x^2} = \int_0^\infty (-2t)^2 e^{-t^2}e^{-2tx}\partial t,$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = \int_0^\infty (-2t)^3 e^{-t^2}e^{-2tx}\partial t,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

$$\frac{\partial^n v}{\partial x^n} = \int_0^\infty (-2t)^n e^{-t^2}e^{-2tx}\partial t,$$

und folglich nach (87.)

$$v_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\int_0^\infty (-2t)^n e^{-t^2} e^{-2tx}\,\partial t,$$

oder

$$v_n = \frac{e^{x^2}}{1.2.3\ldots n}\int_0^\infty (-2t)^n e^{-(t+x)^2}\,\partial t,$$

oder, wenn man wieder $t + x = T$ ſetzt,

$$v_n = \frac{(-2)^n e^{x^2}}{1.2.3\ldots n}\int_x^\infty (T-x)^n e^{-T^2}\,\partial T,$$

und daher nach (89.)

$$93.\quad y_{n+1} = \frac{(2x)^{n+1} e^{x^2}}{1.2.3\ldots n}\int_x^\infty (T-x)^n e^{-T^2}\,\partial T;$$

alſo

$$94.\quad \frac{y_{n+2}}{y_{n+1}} = \frac{2x}{n+1}\cdot\frac{\int_x^\infty (T-x)^{n+1} e^{-T^2}\,\partial T}{\int_x^\infty (T-x)^n e^{-T^2}\,\partial T};$$

folglich

$$95.\quad \frac{(n+1)\,q\,y_{n+2}}{y_{n+1}} = \frac{1}{x}\cdot\frac{\int_x^\infty (T-x)^{n+1} e^{-T^2}\,\partial T}{\int_x^\infty (T-x)^n e^{-T^2}\,\partial T}.$$

Iſt nun x eine poſitive Größe; ſo iſt die Größe

$$\frac{(n+1)\,q\,y_{n+2}}{y_{n+1}}$$

offenbar für jedes n poſitiv, woraus ſich mittelſt (92.) nach bekannten Elementarſätzen von den Kettenbrüchen ergiebt, daß, wenn man

$$93.\quad \int_x^\infty e^{-x^2}\,\partial x = \frac{e^{-x^2}}{2x}\cdot\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\cfrac{3q}{1+\cfrac{4q}{1+\ldots\ldots}}}}}$$

ſetzt, im Falle eines poſitiven x durch jede zwei auf einander folgende Partialwerthe dieſes Kettenbruchs zwei Gränzen geliefert werden, zwiſchen denen das beſtimmte Integral

$$\int_x^\infty e^{-x^2}\,\partial x$$

enthalten iſt.

Das Integral $\int_0^x e^{-x^2}\,\partial x$ kann man im Falle eines poſi-

tiven x auf folgende Art entwickeln. Es iſt nach bekannten Sätzen von den beſtimmten Integralen

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\partial x = \int_0^x e^{-x^2}\partial x + \int_x^\infty e^{-x^2}\partial x.$$

Nach dem Artikel Beſtimmtes Integral (24.) i. d. Z. iſt aber

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\partial x = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Alſo iſt nach (93.) für jedes poſitive x:

$$94.\quad \int_0^x e^{-x^2}\partial x = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{e^{-x^2}}{2x}\cdot\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\cfrac{3q}{1+\cfrac{4q}{1+\ldots}}}}}$$

Auch erhellet leicht, daß

$$95.\quad \int_0^{-x} e^{-x^2}\partial x = -\int_0^x e^{-x^2}\partial x$$

iſt, und daher auch immer mittelſt (94.) gefunden werden kann.

Endlich iſt

$$\int_{-x}^\infty e^{-x^2}\partial x = \int_{-x}^0 e^{-x^2}\partial x + \int_0^\infty e^{-x^2}\partial x$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_0^{-x} e^{-x^2}\partial x$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} + \int_0^x e^{-x^2}\partial x,$$

und folglich nach (94.)

$$96.\quad \int_{-x}^\infty e^{-x^2}\partial x = \sqrt{\pi} - \frac{e^{-x^2}}{2x}\cdot\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\cfrac{3q}{1+\cfrac{4q}{1+\ldots}}}}}$$

Die hier mitgetheilte Darſtellung von Jacobi ſcheint uns in jeder Beziehung, vorzüglich aber deshalb ſehr bemerkenswerth zu ſeyn, weil man durch dieſelbe zu einer genauen Kenntniß der Natur der Größe gelangt, welche man vernachläſſigt, wenn man den Kettenbruch bei einem beliebigen Gliede abbricht. Kennt man auch nicht den beſtimmten Werth dieſer Größe; ſo zeigt doch der vorhergehende Beweis ganz unzweideutig, daß dieſe Größe für ein poſitives x jederzeit poſitiv iſt, und daß alſo, wenn x poſitiv iſt, jede zwei auf einander folgende Partialwerthe des Kettenbruchs in der That zwei Gränzen liefern, zwiſchen denen das durch den Kettenbruch darzuſtellende beſtimmte Integral enthalten iſt. Dieſer ſchöne Beweis iſt daher zugleich ein nicht unwichtiger Beitrag zu der

Lehre von der Convergenz der Kettenbrüche, welche bis jetzt von den Mathematikern faſt noch gar nicht bearbeitet worden iſt, und daher ihrer Aufmerkſamkeit hier zugleich angelegentlich empfohlen werden mag. Das wenige Land, welches man in dieſer wichtigen Lehre gewonnen hat, iſt bis jetzt ziemlich unfruchtbar geweſen und überhaupt kaum der Beachtung werth.

Das ausführlichſte, auch manches Neue enthaltende, in jeder Beziehung zu empfehlende Werk über die Theorie der Kettenbrüche und deren Anwendung in der Algebra und Analyſis iſt jetzt: **Theorie der Kettenbrüche von Stern. Berlin 1834.** In dieſem Werke findet man alles Wichtige auf eine zweckmäßige Art zuſammengeſtellt. Auch ſ. m. Eytelweins Grundlehren der höhern Analyſis. Berlin. 1824. und vergleiche die Artikel Cyklometrie. IV. i. d. Z. und Quadratur (58.).

Knotenfurche, ſ. Einhüllende Curven und Flächen (11.) und Evolution (4.) i. d. Z.

Knotenkante, ſ. Einhüllende Curven und Flächen (11.) und Evolution (4.) i. d. Z.

Krümmungskreis. Die Zuſätze, deren dieſer Artikel in nicht geringer Anzahl bedurfte, ſind mit dem Artikel Berührung i. d. Z. verſchmolzen worden, welches hier nicht einer beſondern Rechtfertigung bedürfen, ſondern bei genauerer Anſicht des zuletzt genannten Artikels, auf den wir alſo hier in ſeiner ganzen Ausdehnung verweiſen, ſich von ſelbſt als zweckmäßig und nothwendig bewähren wird. Ueber den ſogenannten ſchiefen Krümmungshalbmeſſer ſ. m. den Art. Cauſtiſche Flächen und Linien (32.) i. d. Z.

L.

Lambertiſche Reihe. Der Beweis für dieſe Reihe iſt in dem Artikel Reihe nicht, wohl aber in dem Artikel Umkehrung der Reihen (21.) gegeben worden.

Lexicographiſch in der Combinationslehre, ſ. Combination (8.).

Linie und Ebene. Die analytiſche Theorie der geraden Linie und der Ebene iſt für die ganze Mathematik ſo wichtig, die im dritten Theile dieſes Wörterbuchs gelieferte Darſtellung derſelben dagegen ſo mangelhaft und ſo wenig den Anforderungen der neuern Mathematik entſprechend, daß uns eine neue Entwickelung der dieſe wichtige Theorie bildenden Gleichungen und Formeln unbedingt nothwendig zu ſeyn ſcheint.

I. Die gerade Linie in der Ebene.

1. In der Ebene, in welcher wir für jetzt alle Conſtructionen auszuführen uns vornehmen, denken wir uns zwei unter einem beliebigen Winkel ſich ſchneidende gerade Linien gezogen, und nennen dieſelben die Axen, ihren Durchſchnittspunkt aber, der im Folgenden immer durch O bezeichnet werden mag, den Anfang. Die eine dieſer beiden Axen, welche wir der Einfachheit wegen immer in horizontaler Lage annehmen wollen, heißt die Abſciſſenaxe; die andere wird die Ordinatenaxe genannt. Der Anfang O theilt jede der beiden Axen in zwei Theile, von denen wir den einen immer den poſitiven, den andern den negativen Theil der entſprechenden Axe nennen wollen, wobei es an ſich willkührlich iſt, welchen Theil man bei jeder Axe als den poſitiven, und welchen man als den negativen Theil annimmt. Da jedoch in dieſer Beziehung eine beſtimmte Uebereinkunft getroffen werden muß; ſo ſetzen wir hiermit feſt, daß jederzeit der rechts vom Anfange O liegende Theil der Abſciſſenaxe als der poſitive, der links vom Anfange liegende Theil derſelben dagegen als der negative Theil dieſer Axe angenommen werden ſoll. Bei der Ordinatenaxe wollen wir immer den oberhalb der Abſciſſenaxe liegenden Theil als den poſitiven, den unterhalb der Abſciſſenaxe liegenden Theil dagegen als den negativen Theil annehmen. Auch ſoll immer die Seite einer jeden der beiden Axen, auf welcher der poſitive oder negative Theil der andern Axe liegt, reſpective die poſitive oder negative Seite der erſtern Axe genannt werden.

2. Durch einen beliebigen Punkt M in der Ebene der beiden Axen denke man ſich nun mit der Ordinatenaxe eine Parallellinie gezogen, welche die Abſciſſenaxe in dem Punkte N ſchneiden mag; ſo wird zwiſchen dieſem Punkte und dem Anfange O ein gewiſſes Stück ON der Abſciſſenaxe liegen. Dieſes Stück ON wird als poſitiv oder negativ betrachtet, jenachdem es auf dem poſitiven oder negativen Theile der Abſciſſenaxe liegt, und dies durch Vorſetzung des Zeichens + oder — vor das Symbol ON bezeichnet. Eben ſo nimmt man auch MN als poſitiv oder negativ an, jenachdem dieſe Linie auf der poſitiven oder negativen Seite der Abſciſſenaxe liegt, und bezeichnet dies ebenfalls durch Vorſetzung des Zeichens + oder — vor das Symbol MN. Daher zeigt alſo +ON oder —ON an, daß im erſten Falle die Linie ON auf dem poſitiven, im zweiten dagegen auf dem negativen Theile der Abſciſſenaxe liegt, und eben ſo zeigt +MN und —MN an, daß im erſten Falle die Linie MN auf der poſitiven, im zweiten dagegen auf der negativen Seite der Abſciſſenaxe liegt. Die Linien ON und MN, mit Rückſicht auf die Vorzeichen, welche ihnen nach dem Vorhergehenden zukommen, d. h. eigentlich die Ausdrücke oder Symbole ±ON und ±MN, wo

keine Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander Statt findet, heißen die Coordinaten des Punktes M, und zwar heißt $\pm$ON jederzeit die Abſciſſe, $\pm$MN dagegen die Ordinate deſſelben.

3. Durch ſeine beiden Coordinaten iſt die Lage des Punktes M in der Ebene der beiden Axen offenbar vollkommen beſtimmt. Um den Anfang O herum liegen nämlich vier Winkel, welche von dem poſitiven Theile der Abſciſſenaxe und dem poſitiven Theile der Ordinatenaxe, von dem poſitiven Theile der Ordinatenaxe und dem negativen Theile der Abſciſſenaxe, von dem negativen Theile der Abſciſſenaxe und dem negativen Theile der Ordinatenaxe, von dem negativen Theile der Ordinatenaxe und dem poſitiven Theile der Abſciſſenaxe gebildet werden, und nach dieſer Ordnung der erſte, zweite, dritte und vierte Axenwinkel genannt werden ſollen, wobei man auch zugleich merken kann, daß der erſte Axenwinkel gewöhnlich der Coordinatenwinkel genannt wird, eine Benennung, die wir auch im Folgenden beibehalten wollen. Jenachdem nun der Punkt M im erſten, zweiten, dritten oder vierten Axenwinkel liegt, ſind ſeine beiden Coordinaten offenbar:

$$+\mathrm{ON},\ +\mathrm{MN};$$
$$-\mathrm{ON},\ +\mathrm{MN};$$
$$-\mathrm{ON},\ -\mathrm{MN};$$
$$+\mathrm{ON},\ -\mathrm{MN};$$

und man wird hierdurch, auch ohne daß wir noch weitere Erläuterungen über dieſen Gegenſtand hinzuzufügen nöthig haben, die obige Behauptung, daß durch ſeine beiden Coordinaten die Lage des Punktes M in der Conſtructionsebene jederzeit vollſtändig beſtimmt wird, gewiß auf der Stelle gerechtfertigt finden. Liegt der Punkt M in der Abſciſſenaxe, ſo iſt ſeine Ordinate $=0$; ſeine Abſciſſe kann aber poſitiv und negativ ſeyn, und kann jede beliebige abſolute Größe haben. Das Umgekehrte findet Statt, wenn der in Rede ſtehende Punkt in der Ordinatenaxe liegt. Die Coordinaten des Anfangs ſind jederzeit beide $=0$.

4. Wir wollen uns nun zwei neue oder ſecundäre Axen denken, und wollen die neue oder ſecundäre Abſciſſenaxe mit der erſten oder primitiven Abſciſſenaxe zuſammenfallen laſſen, die neue oder ſecundäre Ordinatenaxe aber der erſten oder primitiven Ordinatenaxe parallel annehmen. Die poſitiven und negativen ſecundären Abſciſſen ſollen vom ſecundären Anfangspunkte an nach denſelben Seiten hin genommen werden, wie die poſitiven und negativen primitiven Abſciſſen vom primitiven Anfangspunkte an. Die primitive Abſciſſe und Ordinate des ſecundären Anfangs ſeyen **a**, 0; die primitiven und ſecundären Coordinaten des beliebigen Punktes M ſeyen reſpective x, y und x′, y′, wobei das Symbol der Abſciſſe immer voran geſchrieben werden ſoll.

Stellen wir uns nun die Aufgabe, die primitiven Coordinaten x, y durch die ſecundären Coordinaten x′, y′ auszudrücken; ſo erhellet zuerſt in völliger Allgemeinheit, daß jederzeit $y = y'$ iſt. Um aber x durch x′ auszudrücken, muß man folgende Fälle unterſcheiden:

I. Wenn a poſitiv iſt, ſo ſey zuerſt x′ und folglich auch x poſitiv. Dann iſt offenbar

$$x = a + x'.$$

Iſt ferner in dieſem Falle x′ negativ und x poſitiv, ſo iſt

$$x + (-x') = a,\ x = a + x'.$$

Iſt endlich x′ negativ und auch x negativ, ſo iſt

$$(-x') - (-x) = a,\ x = a + x'.$$

Alſo iſt immer $x = a + x'$, und zugleich wird man ſich auch leicht überzeugen, daß dieſe Gleichung noch richtig bleibt, wenn eine der beiden Größen x, x′ verſchwindet.

II. Wenn a negativ iſt; ſo ſey zuerſt x′ und folglich auch x negativ. Dann iſt offenbar

$$-x = (-a) + (-x'),\ x = a + x'.$$

Iſt ferner in dieſem Falle x′ poſitiv und x negativ, ſo iſt

$$-x + x' = -a,\ x = a + x'.$$

Iſt endlich x′ poſitiv und auch x poſitiv, ſo iſt

$$x' - x = -a,\ x = a + x'.$$

Alſo iſt wieder immer $x = a + x'$, ſo daß wir folglich in völliger Allgemeinheit

$$1.\quad x = a + x',\ y = y'$$

haben.

Laſſen wir jetzt die ſecundäre Ordinatenaxe mit der primitiven Ordinatenaxe zuſammenfallen, und nehmen die ſecundäre Abſciſſenaxe der primitiven Abſciſſenaxe parallel; ſo iſt, wenn wir jetzt die primitiven Coordinaten des neuen Anfangs durch 0, b bezeichnen, offenbar ganz auf dieſelbe Art wie vorher

$$2.\quad x = x',\ y = b + y'.$$

Nehmen wir nun aber die beiden ſecundären Axen den beiden primitiven Axen bloß parallel an, nämlich die ſecundäre Abſciſſenaxe der primitiven Abſciſſenaxe, die ſecundäre Ordinatenaxe der primitiven Ordinatenaxe, und nehmen die poſitiven und negativen ſecundären Coordinaten von dem ſecundären Anfangspunkte an nach denſelben Seiten hin, wie die entſprechenden poſitiven und negativen primitiven Coordinaten vom primitiven Anfangspuncte an; ſo iſt, wenn wir die primitiven und ſecundären Coordinaten des beliebigen Punktes M wieder durch x, y und x′, y′, die primitiven Coordinaten des ſecundären Anfangs aber durch a, b bezeichnen, wie aus (1.) und (2.) auf der Stelle folgt, in völliger Allgemeinheit

$$3.\quad x = a + x',\ y = b + y'.$$

5. Durch den Anfangspunkt **O** des primitiven Axenſyſtems denke man ſich jetzt eine beliebige gerade Linie gezogen; ſo kann dieſelbe gegen die beiden Axen, deren poſitive Theile in den Figuren immer durch **O**x und **O**y bezeichnet werden ſollen, offenbar bloß eine der beiden in Fig. 32. dargeſtellten Lagen haben. Denkt man ſich nun durch beliebige Punkte M, M_1, M_2, ...; M', M'_1, M'_2, ... dieſer Linie Ordinaten gezogen; ſo iſt in dem erſten der beiden in der Figur dargeſtellten Fälle:

$$\left.\begin{aligned} &+ON : +MN \\ &= +ON_1 : +M_1N_1 \\ &= +ON_2 : +M_2N_2 \\ &= +ON_3 : +M_3N_3 \\ &\quad \text{u. ſ. w.} \end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} &-ON' : -M'N' \\ &= -ON'_1 : -M'_1N'_1 \\ &= -ON'_2 : -M'_2N'_2 \\ &= -ON'_3 : -M'_3N'_3 \\ &\quad \text{u. ſ. w.} \end{aligned}\right.$$

und im zweiten der beiden in der Figur dargeſtellten Fälle iſt:

$$\left.\begin{aligned} &+ON : -MN \\ &= +ON_1 : -M_1N_1 \\ &= +ON_2 : -M_2N_2 \\ &= +ON_3 : -M_3N_3 \\ &\quad \text{u. ſ. w.} \end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} &-ON' : +M'N' \\ &= -ON'_1 : +M'_1N'_1 \\ &= -ON'_2 : +M'_2N'_2 \\ &= -ON'_3 : +M'_3N'_3 \\ &\quad \text{u. ſ. w.} \end{aligned}\right.$$

Hieraus ſieht man, daß für jeden Punkt einer beliebigen durch den Anfang gehenden geraden Linie das Verhältniß der Abſciſſe zur Ordinate ein conſtantes Verhältniß iſt. Setzen wir alſo dieſes conſtante Verhältniß $= 1 : A$, und bezeichnen die beiden Coordinaten eines jeden Punktes einer durch den Anfang gehenden geraden Linie durch x, y; ſo iſt in völliger Allgemeinheit

$$1 : A = x : y ,$$

d. i.

$$4. \quad y = Ax .$$

Dieſe Gleichung, durch welche die zwiſchen den beiden Coordinaten eines jeden Punktes einer durch den Anfang gehenden geraden Linie Statt findende allgemeine Relation analytiſch dargeſtellt wird, nennt man daher die Gleichung einer durch den Anfang gehenden geraden Linie.

Aus dem Vorhergehenden erhellet auch, daß, wenn $y = Ax$ und $y = A'x$ die Gleichungen zweier durch den Anfang gehenden geraden Linien ſind, welche den beiden in unſerer Figur dargeſtellten Fällen entſprechen, die Größen **A** und **A'** jederzeit entgegengeſetzte Vorzeichen haben.

6. Um nun die Größe **A** in der Gleichung (4.) näher zu beſtimmen, wollen wir den Coordinatenwinkel durch α, den zwei rechte Winkel nicht überſteigenden Winkel dagegen, welchen der oberhalb der Abſciſſenaxe liegende Theil der durch den Anfang gehenden geraden Linie mit dem poſitiven Theile der Abſciſſenaxe einſchließt, durch φ bezeichnen. Dann iſt in dem erſten der beiden

in **Fig. 32.** dargeſtellten Fälle nach einem ſehr bekannten trigonometriſchen Satze, wie auf der Stelle erhellen wird,

$$ON : MN = \sin(\alpha - \varphi) : \sin\varphi$$

oder

$$+ON : +MN = \sin(\alpha - \varphi) : \sin\varphi\ ,$$

oder

$$\frac{+MN}{+ON} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}\ ,$$

und folglich, weil nach dem Vorhergehenden

$$\frac{+MN}{+ON} = A$$

iſt,

$$A = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}\ .$$

In dem zweiten der beiden in **Fig. 32.** dargeſtellten Fälle iſt dagegen offenbar

$$ON : MN = \sin(\varphi - \alpha) : \sin(180^\circ - \varphi)$$

oder

$$+ON : -MN = \sin(\alpha - \varphi) : \sin\varphi\ ,$$

oder

$$\frac{-MN}{+ON} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}\ ,$$

und folglich, weil in dieſem Falle

$$\frac{-MN}{+ON} = A$$

iſt, wieder

$$A = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}\ .$$

Alſo iſt immer

$$5.\quad A = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}\ ,\ y = Ax = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}\,x\ .$$

Sind die beiden Axen auf einander ſenkrecht, d. i. der Coordinatenwinkel ein rechter; ſo iſt $\alpha = 90^\circ$, $\sin(\alpha - \varphi) = \cos\varphi$, und folglich

$$6.\quad A = \tang\varphi\ ,\ y = Ax = x\tang\varphi\ .$$

φ iſt, was man wohl zu merken hat, immer der von dem oberhalb der Abſciſſenaxe liegenden Theile der durch den Anfang gehenden geraden Linie mit dem poſitiven Theile der Abſciſſenaxe eingeſchloſſene 180° nicht überſteigende Winkel.

Zu bemerken iſt noch, daß, wenn die durch den Anfang gehende gerade Linie mit der Abſciſſenaxe zuſammenfällt, $\varphi = 0$, und folglich $A = 0$ iſt. Fällt dagegen die durch den Anfang

gehende gerade Linie mit der Ordinatenaxe zuſammen; ſo iſt $\varphi = \alpha$, und man erhält alſo für A den Ausdruck

$$A = \frac{\sin\alpha}{0},$$

d. h. das Symbol des Unendlichen. Daher iſt auch umgekehrt jede durch den Anfang gehende gerade Linie, in deren Gleichung der conſtante Coefficient A durch das Symbol des Unendlichen dargeſtellt wird, als mit der Ordinatenaxe zuſammenfallend zu betrachten.

7. Um nun auch die allgemeine Gleichung einer beliebigen nicht durch den Anfang gehenden geraden Linie zu finden, denke man ſich durch einen beliebigen Punkt O' derſelben zwei neue mit den primitiven parallele Axen gelegt, und bezeichne die Coordinaten in Bezug auf dieſes neue Axenſyſtem durch x', y', die primitiven Coordinaten des Punktes O' aber durch a, b; ſo iſt nach (4.)

$$y' = Ax'.$$

Nach (3.) iſt aber

$$x = a + x',\ y = b + y';\ x' = x - a,\ y' = y - b.$$

Alſo iſt

$$7.\quad y - b = A(x - a),$$

oder

$$8.\quad y = Ax + b - Aa,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$9.\quad b - Aa = B$$

ſetzen,

$$10.\quad y = Ax + B$$

die geſuchte Gleichung jeder beliebigen geraden Linie. Für $x = 0$ wird $y = B$, woraus man ſieht, daß die Conſtante B jederzeit die Ordinate des Durchſchnittspunkts der geraden Linie mit der Ordinatenaxe iſt. Bezeichnet α wie vorher den Coordinatenwinkel für das primitive Axenſyſtem; ſo iſt α natürlich auch der Coordinatenwinkel für das ſecundäre Axenſyſtem. Alſo iſt nach (5.)

$$A = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)},$$

und der Winkel φ wird jederzeit erhalten, wenn man durch einen beliebigen Punkt der geraden Linie, deren Gleichung geſucht wird, zwei mit den primitiven parallele Axen legt, und den zwei rechte Winkel nicht überſteigenden Winkel nimmt, unter welchem der oberhalb der neuen Abſciſſenaxe liegende Theil der geraden Linie gegen den poſitiven Theil der Abſciſſenaxe geneigt iſt. Zu dem Punkte der geraden Linie, deren Gleichung geſucht wird, durch welchen man die beiden neuen den primitiven parallelen Axen legt, wählt man gewöhnlich, und in der That auch am Einfachſten den Punkt, in welchem die gerade Linie die Abſciſ-

ſenaxe ſchneidet, vorausgeſetzt nämlich, daß es einen ſolchen Durchſchnittspunkt giebt und die gerade Linie alſo nicht mit der Abſciſſenaxe parallel iſt. Für $\alpha = 90^\circ$ iſt $A = \tang \varphi$. Die völlig entwickelte Gleichung jeder geraden Linie iſt alſo für einen beliebigen Coordinatenwinkel

$$11.\quad y = \frac{\sin \varphi}{\sin(\alpha - \varphi)} x + B,$$

und, wenn der Coordinatenwinkel ein rechter iſt,

$$12.\quad y = x \tang \varphi + B.$$

8. Für zwei gerade Linien, deren Gleichungen

$$y = Ax + B,\ y = A'x + B'$$

ſind, und

$$A = \frac{\sin \varphi}{\sin(\alpha - \varphi)},\ A' = \frac{\sin \varphi'}{\sin(\alpha - \varphi')}$$

iſt, muß, wenn dieſe beiden geraden Linien einander parallel ſind, offenbar $\varphi = \varphi'$, und folglich $A = A'$ ſeyn. Dies vorausgeſetzt, kann man nun auch leicht die folgende Aufgabe auflöſen:

Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und einer gegebenen geraden Linie parallel iſt.

Die Coordinaten des gegebenen Punktes ſeyen nämlich x', y', und

$$y = Ax + B$$

ſey die Gleichung der gegebenen geraden Linie. Iſt nun

$$y = A'x + B'$$

die Gleichung der geſuchten geraden Linie, ſo muß wegen der Bedingungen der Aufgabe $A' = A$ ſeyn, ſo daß alſo hierdurch A' beſtimmt iſt. Zu der Beſtimmung der Conſtante B' führt die zweite Bedingung der Aufgabe, daß nämlich die geſuchte gerade Linie durch den gegebenen Punkt $(x'y')$ gehen ſoll. Wegen dieſer Bedingung muß nämlich

$$y' = A'x' + B',$$

oder, weil $A' = A$ iſt,

$$y' = Ax' + B',$$

folglich

$$B' = y' - Ax'$$

ſeyn. Daher iſt die geſuchte Gleichung

$$13.\quad y = Ax + y' - Ax'.$$

Noch etwas einfacher kann man die Rechnung bei dieſer Auflöſung auf folgende Art führen. Weil nämlich die geſuchte gerade Linie durch den Punkt $(x'y')$ gehen ſoll, ſo hat man die beiden Gleichungen

$$y = A'x + B',\ y' = A'x' + B',$$

aus denen durch Subtraction auf der Stelle

$$y - y' = A'(x - x')$$

folgt. Weil nun ganz auf ähnliche Art wie vorher $A' = A$ ſeyn muß; ſo iſt

$$14. \quad y - y' = A(x - x').$$

Daß dieſe Gleichung mit der Gleichung (13.) identiſch iſt, fällt ſogleich in die Augen.

9. Wir wollen nun den von zwei durch die Gleichungen

$$y = Ax + B, \quad y = A'x + B'$$

gegebenen geraden Linien eingeſchloſſenen Winkel Θ zu beſtimmen ſuchen. Legt man durch den gemeinſchaftlichen Durchſchnittspunkt der beiden in Rede ſtehenden geraden Linien zwei mit den primitiven Axen parallele Axen; ſo erhellet, wenn φ und φ' ihre vorige Bedeutung behalten, auf der Stelle, daß

$$\Theta = \pm (\varphi - \varphi'),$$

und in dieſer Gleichung das obere oder untere Zeichen zu nehmen iſt, jenachdem $\varphi > \varphi'$ oder $\varphi < \varphi'$ iſt. Die Beurtheilung aber, ob das Erſte oder das Zweite Statt findet, kann auf folgende Art angeſtellt werden, wobei man zu beachten hat, daß immer

$$A = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}, \quad A' = \frac{\sin\varphi'}{\sin(\alpha - \varphi')}$$

iſt.

I. Zuerſt wollen wir annehmen, daß A und A' gleiche Vorzeichen haben. Iſt dann $A > A'$, ſo iſt

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)} > \frac{\sin\varphi'}{\sin(\alpha - \varphi')},$$

und folglich in dieſem Falle

$$\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin\varphi} < \frac{\sin(\alpha - \varphi')}{\sin\varphi'},$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung

$$\sin\alpha\cot\varphi - \cos\alpha < \sin\alpha\cot\varphi' - \cos\alpha,$$

und folglich

$$\sin\alpha\cot\varphi < \sin\alpha\cot\varphi';$$

alſo, weil $\sin\alpha$ offenbar immer poſitiv iſt, $\cot\varphi < \cot\varphi'$, und folglich, weil keiner der Winkel φ und φ' zwei rechte Winkel überſteigt, $\varphi > \varphi'$.

II. Ferner wollen wir annehmen, daß A und A' ungleiche Vorzeichen haben. Iſt dann $A > A'$, ſo iſt

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)} > \frac{\sin\varphi'}{\sin(\alpha - \varphi')},$$

und folglich in dieſem Falle

$$\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi} > \frac{\sin(\alpha-\varphi')}{\sin\varphi'},$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung

$$\sin\alpha\cot\varphi - \cos\alpha > \sin\alpha\cot\varphi' - \cos\alpha,$$

oder

$$\sin\alpha\cot\varphi > \sin\alpha\cot\varphi',$$

und folglich, weil $\sin\alpha$ immer poſitiv iſt, $\cot\varphi > \cot\varphi'$; alſo, weil keiner der Winkel φ, φ' zwei rechte Winkel überſteigt, $\varphi < \varphi$.

Man ſieht alſo, daß, wenn A und A' gleiche Vorzeichen haben, und $A \gtrless A'$ iſt, jederzeit auch $\varphi \gtrless \varphi'$ iſt. Haben aber A und A' ungleiche Vorzeichen, ſo iſt, wenn $A \gtrless A'$ iſt, jederzeit $\varphi \lessgtr \varphi'$. In jedem Falle wird man aber hiernach immer leicht beurtheilen können, ob man in der Gleichung

$$\Theta = \pm(\varphi - \varphi')$$

das obere oder das untere Zeichen zu nehmen hat.

Da nun

$$A = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha-\varphi)},\quad A' = \frac{\sin\varphi'}{\text{ein}(\alpha-\varphi')}$$

iſt; ſo iſt

$$A = \frac{\tan\varphi}{\sin\alpha - \cos\alpha\tan\varphi},\quad A' = \frac{\tan\varphi'}{\sin\alpha - \cos\alpha\tan\varphi'},$$

und folglich

$$\tan\varphi = \frac{A\sin a}{1 + A\cos\alpha},\quad \tan\varphi' = \frac{A'\sin\alpha}{1 + A'\cos\alpha}.$$

Weil nun bekanntlich

$$\tan(\varphi-\varphi') = \frac{\tan\varphi - \tan\varphi'}{1 + \tan\varphi\tan\varphi'}$$

iſt; ſo iſt, wie man nach leichter Rechnung findet,

$$\tan(\varphi-\varphi') = \frac{(A - A')\sin\alpha}{1 + (A + A')\cos\alpha + AA'}.$$

Alſo iſt

$$15.\quad \tan\Theta = \pm\frac{(A - A')\sin\alpha}{1 + (A + A')\cos\alpha + AA'}.$$

Haben A und A' gleiche Vorzeichen; ſo hat man, wie aus dem Obigen hervorgeht, in dieſer Gleichung das obere oder das untere Zeichen zu nehmen, jenachdem A > oder < als A' iſt. Haben aber A und A' entgegenſetzte Vorzeichen; ſo hat man das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem A < oder > als A' iſt.

Iſt der Coordinatenwinkel ein rechter Winkel, ſo iſt $\alpha = 90°$, und folglich in dieſem Falle

$$16.\quad \tang \Theta = \pm \frac{A - A'}{1 + AA'}.$$

Die Regel wegen der Vorzeichen bleibt dieſelbe wie vorher.

10. Nun iſt es auch leicht, die Bedingung zu finden, unter der zwei durch die Gleichungen

$$y = Ax + B,\ y = A'x + B'$$

gegebene gerade Linien auf einander ſenkrecht ſtehen. Sollen nämlich dieſe beiden Linien auf einander ſenkrecht ſtehen; ſo muß $\Theta = 90°$, $\cot \Theta = 0$, alſo nach (15.)

$$17.\quad 1 + (A + A')\cos\alpha + AA' = 0,$$

und folglich, wenn der Coordinatenwinkel ein rechter Winkel iſt,

$$18.\quad 1 + AA' = 0,\ AA' = -1$$

ſeyn.

Soll man nun die Gleichung einer geraden Linie finden, welche durch den gegebenen Punkt $(x'y')$ geht, und auf der durch die Gleichung

$$y = Ax + B$$

gegebenen geraden Linien ſenkrecht ſteht;

ſo ſey $y = A'x + B'$ die geſuchte Gleichung. Weil nun die dieſer Gleichung entſprechende Linie durch den Punkt $(x'y')$ gehen ſoll; ſo muß $y' = A'x' + B'$ ſeyn, und man erhält folglich auf der Stelle durch Subtraction

$$y - y' = A'(x - x').$$

Nach dem Obigen muß aber auch

$$1 + (A + A')\cos\alpha + AA' = 0,$$

d. i.

$$A' = -\frac{1 + A\cos\alpha}{A + \cos\alpha}$$

ſeyn. Alſo iſt die Gleichung des geſuchten Perpendikels

$$19.\quad y - y' = -\frac{1 + A\cos\alpha}{A + \cos\alpha}(x - x'),$$

oder für $\alpha = 90°$:

$$20.\quad y - y' = -\frac{1}{A}(x - x').$$

11. Seyen nun die beiden Punkte $(x'y')$ und $(x''y'')$ gegeben. Man ſoll auf der dieſe beiden Punkte verbindenden geraden Linie von dem Punkte $(x'y')$ aus ein Stück abſchneiden, welches $\frac{n}{m}$ der ganzen die beiden gegebenen Punkte verbindenden Linie beträgt.

Die Coordinaten des Endpunkts des abzuſchneidenden Stücks ſeyen x, y. Legt man durch dieſen Punkt zwei mit den primitiven Axen parallele Axen, und bezeichnet die Coordinaten der beiden gegebenen Punkte in Bezug auf dieſe beiden Axen durch X′, Y′ und X″, Y″; ſo iſt nach (3.)

$$x' = x + X',\; y' = y + Y';\; x'' = x + X'',\; y'' = y + Y'';$$
$$X' = x' - x,\; Y' = y' - y;\; X'' = x'' - x,\; Y'' = y'' - y.$$

Nun iſt aber, wie ſogleich aus den bekannten Sätzen von der Aehnlichkeit der Dreiecke erhellen wird,

$$-X' : X'' = n : m - n,$$
$$-Y' : Y'' = n : m - n;$$

d. i.

$$(m - n)X' + nX'' = 0,\; (m - n)Y' + nY'' = 0;$$

folglich

$$(m - n)(x' - x) + n(x'' - x) = 0,$$
$$(m - n)(y' - y) + n(y'' - y) = 0;$$

und hieraus

$$21.\quad \begin{cases} x = \dfrac{(m-n)x' + nx''}{m}, \\ y = \dfrac{(m-n)y' + ny''}{m}. \end{cases}$$

Sind x, y die Coordinaten des Mittelpunktes der die beiden gegebenen Punkte mit einander verbindenden geraden Linie; ſo iſt

$$22.\quad x = \tfrac{1}{2}(x' + x''),\; y = \tfrac{1}{2}(y' + y'').$$

12. Die Entfernung e der beiden Punkte (xy) und (x′y′) von einander zu finden.

Durch den Punkt (xy) lege man zwei den primitiven parallele Axen, und bezeichne die Coordinaten des Punktes (x′y′) in Bezug auf dieſe neuen Axen durch X′, Y′; ſo iſt nach bekannten trigonometriſchen Sätzen, wenn X′ und Y′ gleiche Vorzeichen haben,

$$e^2 = X'^2 + Y'^2 - 2X'Y'\cos(180^0 - \alpha)$$
$$= X'^2 + Y'^2 + 2X'Y'\cos\alpha;$$

und, wenn X′ und Y′ ungleiche Vorzeichen haben, iſt:

$$e^2 = X'^2 + Y'^2 + 2X'Y'\cos\alpha.$$

Alſo iſt immer

$$e^2 = X'^2 + Y'^2 + 2X'Y'\cos\alpha,$$

oder, indem man die Quadratwurzel ſtets poſitiv nimmt,

$$e = \sqrt{X'^2 + Y'^2 + 2X'Y'\cos\alpha}.$$

Nun iſt aber nach (3.)

$$x' = x + X',\; y' = y + Y'.$$

Alſo iſt

$$23.\quad e = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + 2(x-x')(y-y')\cos\alpha}\,,$$

und folglich für $\alpha = 90^\circ$

$$24.\quad e = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}\,.$$

13. Die Coordinaten des Durchſchnittspunktes zweier durch die Gleichungen

$$y = Ax + B,\ y = A'x + B'$$

gegebenen geraden Linien zu finden.

Weil der Durchſchnittspunkt zweier geraden Linien ein dieſen beiden geraden Linien gemeinſchaftlicher Punkt iſt; ſo müſſen die Coordinaten deſſelben den Gleichungen der beiden geraden Linien zugleich genügen, und man wird dieſe Coordinaten alſo offenbar erhalten, wenn man x und y aus den beiden Gleichungen

$$y = Ax + B,\ y = A'x + B'$$

durch gewöhnliche algebraiſche Elimination beſtimmt. Das Reſultat der ſehr einfachen Rechnung iſt

$$25.\quad x = -\frac{B-B'}{A-A'},\ y = \frac{AB'-A'B}{A-A'}\,.$$

14. Die Entfernung eines durch ſeine Coordinaten gegebenen Punktes (x′y′) von einer durch die Gleichung $y = Ax + B$ gegebenen geraden Linie zu finden, wenn wir den Coordinatenwinkel der Einfachheit wegen $= 90^\circ$ ſetzen.

Die Gleichung des von dem gegebenen Punkte auf die gegebene gerade Linie gefällten Perpendikels iſt nach (20.)

$$y - y' = -\frac{1}{A}(x - x')\,,$$

oder

$$y = -\frac{1}{A}x + \frac{Ay' + x'}{A}\,.$$

Folglich erhält man nach (25.) für die Coordinaten des Durchſchnittspunktes der gegebenen geraden Linien und des auf ſie gefällten Perpendikels:

$$x = \frac{Ay' + x' - AB}{1 + A^2},\ y = \frac{A(Ay' + x') + B}{1 + A^2}\,.$$

Alſo iſt

$$x - x' = -\frac{A(Ax' - y' + B)}{1 + A^2},\ y - y' = \frac{Ax' - y' + B}{1 + A^2}\,,$$

und folglich nach (24.), wenn wir die Länge des geſuchten Perpendikels $= p$ ſetzen,

$$p^2 = \frac{(Ax' - y' + B)^2}{1 + A^2}\,,$$

oder

$$26.\quad p = \pm \frac{Ax' - y' + B}{\sqrt{1 + A^2}}.$$

Hat die Gleichung der gegebenen geraden Linie die Form

$$Ay + Bx + C = 0;$$

ſo iſt, wie man leicht findet,

$$26^*.\quad p = \pm \frac{Ay' + Bx' + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Da p ſeiner Natur nach eine poſitive Größe iſt; ſo iſt, wenn man die Quadratwurzel im Nenner des Bruchs auf der rechten Seite der Gleichung 26. ſtets poſitiv nimmt, in dieſer Gleichung jederzeit das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem die Größe $Ax' - y' + B$ poſitiv oder negativ iſt.

14. Die Gleichung der geraden Linie zu finden, welche durch die beiden durch ihre Coordinaten gegebenen Punkte $(x'y')$ und $(x''y'')$ geht.

Iſt $y = Ax + B$ die geſuchte Gleichung; ſo hat man, weil die derſelben entſprechende Linie durch die beiden Punkte $(x'y')$, $(x''y'')$ gehen ſoll, zur Beſtimmung der Conſtanten A und B die beiden Gleichungen

$$y' = Ax' + B,\quad y'' = Ax'' + B.$$

Entwickelt man A und B aus dieſen beiden Gleichungen durch gewöhnliche algebraiſche Elimination; ſo erhält man

$$27.\quad A = \frac{y' - y''}{x' - x''},\quad B = \frac{x'y'' - y'x''}{x' - x''}.$$

Alſo iſt die geſuchte Gleichung

$$28.\quad y = \frac{y' - y''}{x' - x''}x + \frac{x'y'' - y'x''}{x' - x''},$$

oder

$$29.\quad y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'),$$

oder

$$30.\quad (x' - x'')y - (y' - y'')x - x'y'' + y'x'' = 0,$$

oder

$$31.\quad (x' - x'')(y - y') = (y' - y'')(x - x'),$$

oder

$$32.\quad (x' - x'')(y - y') - (y' - y'')(x - x') = 0,$$

oder

$$33.\quad \frac{x' - x''}{y' - y''} = \frac{x - x'}{y - y'}.$$

II. Die gerade Linie im Raume.

15. Wir denken uns jeƺt drei durch einen Punkt O gehende auf einander ſenkrechte gerade Linien, und nennen dieſelben die Axen, nämlich die eine die Axe der x, die andere die Axe der y, und die dritte die Axe der z. Jede dieſer Axen wird durch den Punkt O, den Anfang, in zwei Theile getheilt, von denen wir bei jeder der drei Axen den einen als den poſitiven, den andern als den negativen Theil annehmen. Die poſitiven Theile der drei Axen wollen wir uns immer durch Ox, Oy, Oz bezeichnet denken. Die drei Axen beſtimmen drei auf einander ſenkrechte Ebenen, welche die Coordinatenebenen genannt werden, und zwar heißen dieſe Ebenen, jenachdem ſie von den Axen der x und y, der x und z, der y und z beſtimmt werden, reſpective die Ebenen der xy, xz, yz. Jeder der drei Coordinatenebenen legt man eine poſitive und eine negative Seite bei, und nennt jederzeit die Seite die poſitive oder die negative, auf welcher der poſitive oder negative Theil der Axe liegt, welche auf der in Rede ſtehenden Coordinatenebene ſenkrecht iſt, alſo nicht in dieſer Coordinatenebene liegt. Fällt man von einem beliebigen Punkte im Raume auf eine der drei Coordinatenebenen ein Perpendikel; ſo wird daſſelbe jederzeit als poſitiv oder negativ betrachtet, jenachdem es auf der poſitiven oder negativen Seite der in Rede ſtehenden Coordinatenebene liegt. Die drei von einem beliebigen Punkte im Raume auf die drei Coordinatenebenen gefällten Perpendikel, mit Rückſicht auf die Zeichen, welche ihnen nach dem Vorhergehenden zukommen, werden die Coordinaten des in Rede ſtehenden Punktes genannt, und durch x, y, z bezeichnet, jenachdem ſie reſpective auf den Ebenen der yz, xz, xy ſenkrecht ſind. Daß durch ſeine drei Coordinaten die Lage eines Punktes im Raume vollſtändig beſtimmt wird, bedarf keiner weitern Erläuterung. Auch erhellet auf der Stelle, daß, wenn x, y, z und x′, y′, z′ die Coordinaten eines Punktes in Bezug auf zwei Syſteme einander paralleler Coordinatenebenen, und a, b, c die Coordinaten des neuen Anfangs in Bezug auf das primitive Syſtem ſind, jederzeit

$$34.\quad x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'$$

iſt. Der Beweis kann auf ganz ähnliche Art wie in (4.) geführt werden. Auch kann man den Artikel Coordinaten (3.) i. d. Z. vergleichen.

16. Wenn man von einem Punkte im Raume auf eine beliebige Ebene ein Perpendikel fällt; ſo heißt der Fußpunkt dieſes Perpendikels die Projection des gegebenen Punktes im Raume auf der in Rede ſtehenden Ebene. Die ſtetige Folge der Projectionen aller Punkte einer beliebigen geraden oder krummen Linie im Raume auf einer beliebigen Ebene heißt die Projection dieſer Linie auf der in Rede ſtehenden Ebene, wobei

auf der Stelle erhellet, daß die Projection einer geraden Linie jederzeit ſelbſt eine gerade Linie iſt. Sind nun x, y, z wieder die Coordinaten eines beliebigen Punktes im Raume; ſo erhellet auf der Stelle, daß die Coordinaten der drei Projectionen deſſelben auf der Ebene der xy, xz, yz reſpective x, y, o; x, o, z; o, y, z ſind. Hieraus und aus (10.) ergiebt ſich nun unmittelbar, daß, wenn x, y, z die drei Coordinaten jedes beliebigen Punktes einer geraden Linie im Raume bezeichnen, die Gleichungen der drei Projectionen dieſer geraden Linie auf den drei Coordinatenebenen

$$35.\quad y = Ax + a,\quad x = Bz + b,\quad z = Cy + c$$

ſind, und daß alſo auch zwiſchen den drei Coordinaten eines jeden Punktes einer geraden Linie im Raume immer drei Gleichungen von dieſer Form Statt finden. Hieraus erhellet auch, daß die ſechs conſtanten Größen A, B, C, a, b, c nicht ganz von einander unabhängig ſind. Eliminirt man nämlich aus den beiden erſten Gleichungen die Größe x; ſo erhält man

$$y = ABz + Ab + a,$$

und hat folglich die beiden für jedes y und z Statt findenden Gleichungen

$$y = ABz + Ab + a,\quad y = \frac{1}{C}z - \frac{c}{C},$$

woraus, da dieſe beiden Gleichungen für jedes y und z gelten, auf der Stelle

$$36.\quad \begin{cases} ABC = 1 \\ ACb + Ca + c = 0 \end{cases}$$

folgt, ſo daß alſo, wenn vier der Größen A, B, C, a, b, c gegeben ſind, die beiden andern mittelſt dieſer Gleichungen jederzeit gefunden werden können. Bezeichnet man die drei Winkel, welche die drei Projectionen der gegebenen Linie im Raume auf den Ebenen der xy, xz, yz mit den Axen der x, z, y, einſchließen, durch φ, φ', φ''; ſo iſt bekanntlich

$$37.\quad A = \tang\varphi,\quad B = \tang\varphi',\quad C = \tang\varphi'',$$

und folglich nach (36.) immer

$$38.\quad \tang\varphi \tang\varphi' \tang\varphi'' = 1.$$

Aus den vorhergehenden analytiſchen, und auch durch einfache geometriſche Betrachtungen erhellet, daß die Gleichungen zweier Projectionen einer geraden Linie im Raume zur vollſtändigen Beſtimmung derſelben hinreichen. Im Folgenden wollen wir hierzu immer die Projectionen auf den Ebenen der xz und yz wählen, und wollen deren Gleichungen von jetzt an immer unter der Form

$$39.\quad x = Az + a,\quad y = Bz + b$$

darſtellen. Dieſe beiden Gleichungen nennt man gewöhnlich überhaupt die Gleichungen der geraden Linie im Raume.

17. Sind zwei gerade Linien im Raume, deren Gleichungen

$$x = Az + a, \quad y = Bz + b$$

und

$$x = A'z + a', \quad y = B'z + b'$$

ſind, einander parallel; ſo ſind, wie aus den einfachſten ſtereometriſchen Sätzen erhellet, jederzeit auch die Projectionen derſelben auf den Ebenen der xz und yz einander parallel, und es iſt folglich nach dem Obigen für die beiden in Rede ſtehenden einander parallelen Linien jederzeit

$$40. \quad A = A', \quad B = B'.$$

Hierdurch ſind wir nun in den Stand geſetzt, die folgende Aufgabe aufzulöſen:

Wenn die Gleichungen

$$x = Az + a, \quad y = Bz + b$$

einer geraden Linie im Raume und die Coordinaten x', y', z' eines Punktes gegeben ſind; die Gleichungen einer geraden Linie zu finden, welche durch den gegebenen Punkt geht, und der gegebenen geraden Linie parallel iſt.

Die Gleichungen der geſuchten geraden Linie ſeyen

$$x = A'z + a', \quad y = B'z + b'.$$

Weil dieſe Linie durch den Punkt $(x'y'z')$ gehen ſoll; ſo iſt

$$x' = A'z' + a', \quad y' = B'z' + b',$$

und folglich durch Subtraction

$$x - x' = A'(z - z'), \quad y - y' = B'(z - z').$$

Weil ferner die geſuchte Linie der gegebenen parallel ſeyn ſoll; ſo iſt nach (40.)

$$A' = A, \quad B' = B,$$

und folglich ſind

$$41. \quad \begin{cases} x - x' = A(z - z') \\ y - y' = B(z - z') \end{cases}$$

die geſuchten Gleichungen.

18. Die Entfernung e der beiden durch ihre Coordinaten gegebenen Punkte (xyz) und $(x'y'z')$ von einander zu finden.

Man lege durch den Punkt (xyz) drei mit den primitiven parallele Coordinatenebenen und bezeichne die Coordinaten des Punktes $(x'y'z')$ in Bezug auf dieſe drei neuen Coordinatenebenen durch X', Y', Z'; ſo iſt nach (34.)

$$x' = x + X', \quad y' = y + Y', \quad z' = z + Z';$$

oder

$$X' = x' - x, \quad Y' = y' - y, \quad Z' = z' - z.$$

Bezeichnen wir nun die Entfernung der Projection des Punktes $(x'y'z')$ auf der Ebene der (XY) von dem Punkte (xyz), welcher der Anfang des neuen Syſtems iſt, durch E; ſo iſt offenbar in völliger Allgemeinheit nach dem pythagoräiſchen Lehrſatze

$$e^2 = E^2 + Z'^2,$$

und, wie eben ſo leicht erhellet, oder auch nach (24.),

$$E^2 = X'^2 + Y'^2.$$

Alſo iſt

$$e^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2,$$

oder nach dem Obigen

$$e^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2,$$

oder auch

$$e^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2,$$

und folglich

$$42.\quad e = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

wo man die Quadratwurzel immer poſitiv zu nehmen hat.

19. Unter dem von zwei geraden Linien im Raume, auch wenn dieſelben ſich nicht wirklich ſchneiden, eingeſchloſſenen Winkel wollen wir im Folgenden den Winkel verſtehen, welchen zwei durch den Anfang mit den in Rede ſtehenden Linien parallel gezogene Linien mit einander einſchließen, und legen uns nun, dies vorausgeſetzt, die folgende Aufgabe vor:

Wenn die Gleichungen

$$x = Az + a,\quad y = Bz + b$$

und

$$x = A'z + a',\quad y = B'z + b'$$

zweier geraden Linien im Raume gegeben ſind, den von dieſen beiden Linien eingeſchloſſenen Winkel V zu beſtimmen.

Die Gleichungen der durch den Anfang, deſſen Coordinaten alle drei $= 0$ ſind, mit den beiden gegebenen Linien parallel gezogenen Linien ſind nach (41.)

$$x = Az,\quad y = Bz$$

und

$$x = A'z,\quad y = B'z.$$

Schneiden wir nun auf dieſen beiden Linien von dem Anfange aus zwei beliebige Stücke Θ, Θ' ab, und bezeichnen deren Endpunkte durch (xyz) und $(x'y'z')$, die Entfernung dieſer beiden Punkte von einander aber durch e; ſo iſt nach einer ſehr bekannten trigonometriſchen Formel

$$e^2 = \Theta^2 + \Theta'^2 - 2\Theta\Theta'\cos V.$$

Nun iſt aber nach (42.)

$$\Theta^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \Theta'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2;$$

$$e^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2.$$

Alſo iſt

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)} \,.\cos V,$$

und folglich nach leichter Rechnung

$$43. \quad \cos V = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z')^2}},$$

wobei aber zu bemerken iſt, daß man die Quadratwurzel im Nenner poſitiv und negativ nehmen kann, wodurch V zwei Werthe erhält, die ſich zu 180° ergänzen, wie es ſeyn muß, da jede zwei ſich ſchneidende Linien im Allgemeinen zwei von einander verſchiedene Winkel einſchließen. Nun iſt aber offenbar

$$x = Az, \quad y = Bz; \quad x' = A'z', \quad y' = B'z';$$

alſo iſt

$$\cos V = \frac{(1 + AA' + BB')zz'}{z\sqrt{1 + A^2 + B^2}\,.\,z'\sqrt{1 + A'^2 + B'^2}},$$

d. i.

$$44. \quad \cos V = \frac{1 + AA' + BB'}{\sqrt{(1 + A^2 + B^2)(1 + A'^2 + B'^2)}},$$

die Quadratwurzel immer poſitiv und negativ genommen. Leicht ergiebt ſich hieraus auch ferner

$$45. \quad \sin V = \frac{\sqrt{(A-A')^2 + (B-B')^2 + (AB'-A'B)^2}}{\sqrt{(1+A^2+B^2)(1+A'+B'^2)}},$$

$$46. \quad \tang V = \frac{\sqrt{(A-A')^2 + (B-B')^2 + (AB'-A'B)^2}}{1 + AA' + BB'},$$

$$47. \quad \cot V = \frac{1 + AA' + BB'}{\sqrt{(A-A')^2 + (B-B')^2 + (AB'-A'B)^2}}.$$

Soll der von zwei geraden Linien im Raume, deren Gleichungen

$$x = Az + a, \quad y = Bz + b$$

und

$$x = A'z + a', \quad y = B'z + b'$$

ſind, eingeſchloſſene Winkel ein rechter Winkel ſeyn; ſo muß $V = 90°$, $\cos V = 0$, alſo

$$48. \quad 1 + AA' + BB' = 0$$

ſeyn.

20. Wir wollen uns jetzt zwei beliebige von dem Anfange ausgehende gerade Linien denken, und den von denſelben eingeſchloſſenen zwei rechte Winkel nicht überſteigenden Winkel durch V bezeichnen. Nehmen wir nun in dieſen beiden Linien wieder

zwei beliebige Punkte (xyz) und $(x'y'z')$ an, und bezeichnen deren Entfernung von einander durch e, ihre Entfernungen von dem Anfange aber durch Θ und Θ'; ſo iſt

$$e^2 = \Theta^2 + \Theta'^2 - 2\Theta\Theta'\cos V.$$

Bezeichnen wir ferner die von den beiden in Rede ſtehenden geraden Linien mit den poſitiven Theilen der Axen der x, y, z eingeſchloſſenen, 180° nicht überſteigenden, Winkel durch α, β, γ und α', β', γ'; ſo iſt, wie leicht erhellen wird, in völliger Allgemeinheit

$$x = \Theta\cos\alpha,\quad y = \Theta\cos\beta,\quad z = \Theta\cos\gamma;$$
$$x' = \Theta'\cos\alpha',\quad y' = \Theta'\cos\beta',\quad z' = \Theta'\cos\gamma'.$$

Nach dem Vorhergehenden iſt aber

$$\Theta^2 = x^2 + y^2 + z^2,\quad \Theta'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2;$$
$$e^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2.$$

Alſo iſt

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2\Theta\Theta'\cos V,$$

oder

$$xx' + yy' + zz' = \Theta\Theta'\cos V,$$

und folglich

$$\Theta\Theta'(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma') = \Theta\Theta'\cos V,$$

oder

$$49.\quad \cos V = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma',$$

ein ebenfalls ſehr merkwürdiger Ausdruck.

Läßt man die beiden vom Anfange ausgehenden geraden Linien zuſammenfallen; ſo wird $V = 0$, $\cos V = 1$, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, und folglich

$$50.\quad \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1,$$

welche Gleichung alſo immer Statt findet, wenn α, β, γ die von einer beliebigen vom Anfange ausgehenden geraden Linie mit den poſitiven Theilen der drei Axen eingeſchloſſenen, 180° nicht überſteigenden, Winkel bezeichnen.

21. Seyen jetzt wieder

$$x = Az + a,\quad y = Bz + b$$

und

$$x = A'z + a,\quad y = B'z + b'$$

die Gleichungen zweier geraden Linien im Raume. Schneiden ſich nun dieſe geraden Linien in einem gewiſſen Punkte, deſſen Coordinaten x', y', z' ſind; ſo finden zwiſchen dieſen Coordinaten die vier Gleichungen

$$x' = Az' + a,\quad y' = Bz' + b;$$
$$x' = A'z' + a',\quad y' = B'z' + b'$$

Statt. Aus dieſen vier Gleichungen folgt durch Subtraction

$$0 = (A - A')z' + a - a',$$
$$0 = (B - B')z' + b - b'.$$

Iſt nun $z' = 0$, ſo iſt

$$a - a' = 0, \quad b - b' = 0,$$

und folglich

$$(A - A')(b - b') - (B - B')(a - a') = 0.$$

Iſt aber z' nicht $= 0$, ſo hat man wegen der beiden obigen Gleichungen

$$-(A - A')z' = a - a'$$
$$b - b' = -(B - B')z',$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten multiplicirt,

$$(A - A')(b - b')z' = (B - B')(a - a')z';$$

alſo, weil z' nicht $= 0$ iſt,

$$(A - A')(b - b') = (B - B')(a - a'),$$

oder

$$(A - A')(b - b') - (B - B')(a - a') = 0.$$

Wenn alſo die beiden geraden Linien im Raume, deren Gleichungen

$$x = Az + a, \quad y = Bz + b$$

und

$$x = A'z + a', \quad y = B'z + b'$$

ſind, ſich ſchneiden; ſo iſt immer

51. $(A - A')(b - b') - (B - B')(a - a') = 0.$

22. Es ſeyen die Coordinaten eines beliebigen Punktes $(x'y'z')$ im Raume und die Gleichungen

$$x = Az + a, \quad y = Bz + b$$

einer geraden Linie im Raume gegeben; man ſoll die Gleichungen des von dem gegebenen Punkte auf dieſe Linie gefällten Perpendikels finden.

Die geſuchten Gleichungen ſeyen

$$x = A'z + a', \quad y = B'z + b';$$

ſo hat man, weil das Perpendikel durch den Punkt $(x'y'z')$ gehen ſoll, und nach (48.) und (51.), zur Beſtimmung von A', B', a', b' folgende Gleichungen:

$$x' = A'z' + a', \quad y' = B'z' + b';$$
$$1 + AA' + BB' = 0;$$
$$(A - A')(b - b') - (B - B')(a - a') = 0.$$

Durch Subtraction der beiden erſten Gleichungen von den Gleichungen

$$x = A'z + a', \quad y = B'z + b'$$

erhält man

$$x-x'=A'(z-z'),\quad y-y'=B'(z-z')$$

oder

$$A'=\frac{x-x'}{z-z'},\quad B'=\frac{y-y'}{z-z'},$$

und folglich

$$1+A\frac{x-x'}{z-z'}+B\frac{y-y'}{z-z'}=0,$$

oder

$$A(x-x')+B(y-y')+z-z'=0.$$

Ferner iſt

$$a'=x'-A'z',\quad b'=y'-B'z',$$

und folglich wegen der dritten der drei obigen Hauptgleichungen

$$\left.\begin{aligned}(A-A')(b-y'+B'z')\\-(B-B')(a-x'+A'z')\end{aligned}\right\}=0;$$

alſo

$$\left.\begin{aligned}\left\{A-\frac{x-x'}{z-z'}\right\}\left\{b-y'+\frac{y-y'}{z-z'}z'\right\}\\-\left\{B-\frac{y-y'}{z-z'}\right\}\left\{a-x'+\frac{x-x'}{z-z'}z'\right\}\end{aligned}\right\}=0,$$

oder

$$\begin{aligned}&(x-x')(b-y'+Bz')-(y-y')(a-x'+Az')\\&+(z-z')\{B(a-x')-A(b-y')\}=0.\end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen

$$52.\quad\left\{\begin{aligned}&A(x-x')+B(y-y')+z-z'=0,\\&(b-y'+Bz')(x-x')-(a-x'+Az')(y-y')\\&\qquad+\{B(a-x')-A(b-y')\}(z-z')=0,\end{aligned}\right.$$

bei deren weiteren Entwickelung wir uns jetzt nicht aufhalten wollen, können als die beiden Gleichungen des von dem gegebenen Punkte auf die gegebene gerade Linie gefällten Perpendikels angeſehen werden.

23. Seyen die beiden Punkte $(x'y'z')$ und $(x''y''z'')$ durch ihre Coordinaten gegeben; man ſoll auf der dieſe beiden Punkte verbindenden geraden Linie von dem Punkte $(x'y'z')$ aus ein Stück abſchneiden, welches $\frac{n}{m}$ der ganzen die beiden gegebenen Punkte verbindenden geraden Linie beträgt.

Sind x, y, z die drei Coordinaten des Endpunktes des geſuchten Stücks; ſo erhellet, wenn man ſich die, die beiden gegebenen Punkte verbindende gerade Linie nur in den drei durch ſie gelegten auf den drei Coordinatenebenen ſenkrechten Ebenen liegend

vorſtellt, aus (21.) auf der Stelle die Richtigkeit der folgenden Ausdrücke:

$$53. \begin{cases} x = \dfrac{(m-n)x' + nx''}{m} \\ y = \dfrac{(m-n)y' + ny''}{m} \\ z = \dfrac{(m-n)z' + nz''}{m}. \end{cases}$$

Die Coordinaten des Mittelpunktes der die beiden gegebenen Punkte verbindenden geraden Linie ſind:

$$54.\quad x = \tfrac{1}{2}(x' + x''),\quad y = \tfrac{1}{2}(y' + y''),\quad z = \tfrac{1}{2}(z' + z'').$$

24. Die beiden Punkte $(x'y'z')$ und $(x''y''z'')$ im Raume ſind gegeben; man ſoll die Gleichungen der durch dieſe beiden Punkte gehenden geraden Linie finden.

Die geſuchten Gleichungen ſeyen

$$x = Az + a,\quad y = Bz + b;$$

ſo iſt, weil die dieſen Gleichungen entſprechende gerade Linie durch die beiden Punkte $(x'y'z')$, $(x''y''z'')$ gehen ſoll,

$$x' = Az' + a,\quad y' = Bz' + b;$$
$$x'' = Az'' + a,\quad y'' = Bz'' + b;$$

folglich

$$x' - x'' = A(z' - z''),\quad y' - y'' = B(z' - z'');$$
$$A = \frac{x' - x''}{z' - z''},\quad B = \frac{y' - y''}{z' - z''}.$$

Ferner iſt

$$x - x' = A(z - z'),\quad y - y' = B(z - z'),$$

und die geſuchten Gleichungen ſind alſo:

$$54. \begin{cases} x - x' = \dfrac{x' - x''}{z' - z''}(z - z'), \\ y - y' = \dfrac{y' - y''}{z' - z''}(z - z'). \end{cases}$$

III. Die Ebene.

25. Die allgemeine Gleichung der Ebene in Bezug auf drei rechtwinklige Coordinatenebenen kann nach verſchiedenen Methoden entwickelt werden, jenachdem man ſich dieſelbe auf die eine oder die andere Art entſtanden denkt. Hier wird es genügen, auf zwei dieſer Methoden hinzuweiſen, mittelſt welcher man, wie es uns ſcheint, mit vorzüglicher Leichtigkeit zu dem geſuchten Reſultate gelangt.

Der erſten dieſer beiden Methoden liegt die Bemerkung zum Grunde, daß eine gerade Linie, welche ſich um einen Punkt

einer andern geraden Linie herum bewegt, indem ſie gegen die letztere gerade Linie fortwährend unter einem rechten Winkel geneigt iſt, bei ihrer Bewegung jederzeit eine Ebene beſchreibt. Denken wir uns alſo durch einen beliebigen, aber beſtimmten Punkt, deſſen Coordinaten α, β, γ, ſeyn mögen, in der Ebene, deren Gleichung geſucht wird, auf dieſelbe ein Perpendikel errichtet. Die Gleichungen dieſes Perpendikels ſeyen

$$X = GZ + g, \quad Y = HZ + h.$$

Die Coordinaten eines ganz beliebigen Punktes der in Rede ſtehenden Ebene ſeyen x, y, z, und

$$X = G'Z + g', \quad Y = H'Z + h'$$

ſeyen die Gleichungen der geraden Linie, welche die Punkte (xyz) und ($\alpha\beta\gamma$) mit einander verbindet; ſo iſt nach (54*.)

$$G' = \frac{x-\alpha}{z-\gamma}, \quad H' = \frac{y-\beta}{z-\gamma}.$$

Nach (48.) iſt aber

$$1 + GG' + HH' = 0,$$

und es findet alſo zwiſchen den Coordinaten x, y, z eines jeden Punktes in der in Rede ſtehenden Ebene die Gleichung

$$1 + G\frac{x-\alpha}{z-\gamma} + H\frac{y-\beta}{z-\gamma} = 0,$$

in welcher α, β, γ, G, H conſtante Größen, d. h. für alle x, y, z dieſelben ſind, Statt. Dieſe Gleichung, welche ſich auch leicht auf die Form

$$G(x-\alpha) + H(y-\beta) + z - \gamma = 0,$$

oder

$$Gx + Hy + z - G\alpha - H\beta - \gamma = 0$$

bringen läßt, iſt alſo die Gleichung der Ebene. Da man aber auf beiden Seiten dieſer Gleichung noch mit einer beliebigen conſtanten Größe multipliciren kann; ſo iſt klar, daß die allgemeine Gleichung der Ebene die Form

$$55. \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

hat.

Die zweite Methode, mittelſt welcher man zu dieſer allgemeinen Gleichung gelangen kann, beruhet auf der Bemerkung, daß, wenn man durch den Mittelpunkt einer, zwei beliebige Punkte im Raume mit einander verbindenden geraden Linie eine auf derſelben ſenkrechte Ebene legt, jeder Punkt dieſer Ebene von den beiden in Rede ſtehenden Punkten im Raume gleich weit entfernt iſt, ſo daß man alſo eine Ebene auch als die ſtetige Folge von Punkten betrachten kann, deren jeder von zwei beſtimmten Punkten im Raume gleich weit entfernt iſt. Man denke ſich nun wieder eine beliebige Ebene, nehme in derſelben einen beliebigen Punkt an, errichte durch dieſen Punkt auf die Ebene ein Perpendikel, und

ſchneide auf demſelben von der Ebene an auf beiden Seiten derſelben zwei beliebige, aber einander gleiche, Stücke ab, deren Endpunkte durch die Coordinaten α, β, γ und α', β', γ', welche im Folgenden als conſtante Größen zu betrachten ſind, beſtimmt ſeyn mögen. Sind nun x, y, z die Coordinaten eines ganz beliebigen Punktes in der Ebene; ſo ſind nach (42.)

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}$$

und

$$\sqrt{(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 + (z-\gamma')^2}$$

die Entfernungen dieſes Punktes von den beiden Punkten $(\alpha\beta\gamma)$ und $(\alpha'\beta'\gamma')$, und nach der Natur der Ebene iſt alſo für jeden Punkt (xyz) in ihr

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2} = \sqrt{(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 + (z-\gamma')^2},$$

oder

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = (x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 + (z-\gamma')^2,$$

d. i.

$$\left.\begin{array}{l} 2(\alpha-\alpha')x + 2(\beta-\beta')y + 2(\gamma-\gamma')z \\ -\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2 \end{array}\right\} = 0,$$

wodurch man folglich wieder unmittelbar zu der allgemeinen Gleichung

$$55.\quad Ax + By + Cz + D = 0$$

der Ebene geführt wird.

Bemerkt muß endlich noch werden, daß man ſich die Ebene auch entſtanden denken kann, indem ſich eine, ſich ſtets parallel bleibende, gerade Linie ſo bewegt, daß ſie fortwährend über eine andere gegebene gerade Linie hin gleitet. Auch dieſe Vorſtellung führt zu der obigen allgemeinen Gleichung der Ebene, welches wir aber der Beſchränktheit des Raumes wegen hier nicht weiter entwickeln.

26. Die Gleichungen der Durchſchnittslinien einer Ebene, deren Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

iſt, mit den Ebenen der xy, xz, yz erhält man offenbar, wenn man in der obigen Gleichung reſpective $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ ſetzt. Dadurch erhält man für die in Rede ſtehenden Durchſchnittslinien auf der Stelle die Gleichungen:

$$56.\quad \begin{cases} Ax + By + D = 0, \\ Cz + Ax + D = 0, \\ By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Um aber die Gleichungen des gemeinſchaftlichen Durchſchnitts zweier Ebenen, deren Gleichungen

$$57.\quad \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

ſind, zu finden, muß man aus dieſen beiden Gleichungen offenbar zuerſt y, dann x eliminiren. Dadurch erhält man als Gleichungen der in Rede ſtehenden Durchſchnittslinie:

$$58. \quad \begin{cases} (AB'-A'B)x+(B'C-BC')z+B'D-BD'=0, \\ (AB'-A'B)y+(AC'-A'C)z+AD'-A'D=0. \end{cases}$$

27. **Die Bedingungen zu finden, unter denen zwei Ebenen, deren Gleichungen**

$$Ax+By+Cz+D=0,$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0$$

ſind, einander parallel ſind.

Zu dieſen Bedingungen gelangt man ſehr leicht durch die Bemerkung, daß die beiden Durchſchnitte zweier parallelen Ebenen mit jeder der drei Coordinatenebenen einander parallel ſind. Nach (56.) ſind nun die Gleichungen dieſer Durchſchnittslinien

$$Ax+By+D=0,\quad A'x+B'y+D'=0;$$
$$By+Cz+D=0,\quad B'y+C'z+D'=0;$$
$$Cz+Ax+D=0,\quad C'z+A'x+D'=0;$$

oder

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{D}{B},\quad y=-\frac{A'}{B'}x-\frac{D'}{B'};$$
$$z=-\frac{B}{C}y-\frac{D}{C},\quad z=-\frac{B'}{C'}y-\frac{D'}{C'};$$
$$x=-\frac{C}{A}z-\frac{D}{A},\quad x=-\frac{C'}{A'}z-\frac{D'}{A'}.$$

Sollen alſo die beiden Ebenen einander parallel ſeyn; ſo muß nach (8.)

$$69. \quad \frac{A}{B}=\frac{A'}{B'},\ \frac{B}{C}=\frac{B'}{C'},\ \frac{C}{A}=\frac{C'}{A'},$$

oder

$$60. \quad AB'-BA'=0,\ BC'-CB'=0,\ CA'-AC'=0$$

ſeyn. Daß, wie man ſogleich überſieht, jede dieſer drei Bedingungsgleichungen eine unmittelbare Folge aus den beiden andern iſt, liegt ganz in der Natur der Sache, indem zwei Ebenen ſchon einander parallel ſind, wenn nur ihre Durchſchnittslinien mit zweien der drei Coordinatenebenen einander parallel ſind.

Nun kann man auch leicht die folgende Aufgabe auflöſen:

Die Gleichung einer Ebene zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und einer gegebenen Ebene parallel iſt.

Die Gleichungen der gegebenen und geſuchten Ebene ſeyen

$$Ax+By+Cz+1=0$$

und

$$A'x+B'y+C'z+1=0,$$

indem leicht erhellet, daß die Gleichung jeder Ebene durch Diviſion mit ihrem letzten Gliede auf dieſe Form gebracht werden kann. Die Coordinaten des gegebenen Punktes ſeyen x', y', z'. Weil nun die geſuchte Ebene durch dieſen Punkt gehen ſoll; ſo hat man die Gleichung

$$A'x' + B'y' + C'z' + 1 = 0,$$

und nach (60.) hat man, weil die geſuchte Ebene der gegebenen parallel ſeyn ſoll, die beiden Gleichungen

$$AC' - CA' = 0, \quad BC' - CB' = 0.$$

Folglich hat man nun genug Gleichungen, um die drei unbekannten Größen A', B', C' beſtimmen zu können.

28. Die Bedingungen zu finden, unter denen eine gerade Linie mit einer Ebene parallel iſt.

Die Gleichungen der geraden Linie ſeyen

$$x = Az + a, \quad y = Bz + b;$$

die Gleichung der Ebene ſey

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

Durch den Anfang denke man ſich eine gerade Linie und eine Ebene gelegt, deren erſtere der gegebenen geraden Linie, letztere der gegebenen Ebene parallel iſt. Die Gleichungen der durch den Anfang gelegten geraden Linie ſind nach (40.)

$$x = Az, \quad y = Bz,$$

indem die conſtanten Theile in dieſen Gleichungen offenbar beide $= 0$ ſind, da für $z = 0$ ſowohl $x = 0$, als auch $y = 0$ iſt. Die Gleichung der durch den Anfang gelegten Ebene, die der gegebenen Ebene parallel iſt, ſey

$$ax + by + z = 0,$$

indem ſich die in Rede ſtehende Gleichung offenbar auf dieſe Form bringen läßt; ſo iſt nach (59.)

$$a = \frac{A'}{C'}, \quad b = \frac{B'}{C'},$$

und folglich

$$A'x + B'y + C'z = 0$$

die Gleichung der durch den Anfang gelegten, der gegebenen parallelen Ebene. Sind nun die gegebene Ebene und die gegebene gerade Linie einander parallel, ſo muß offenbar die durch den Anfang gelegte gerade Linie ganz in die durch den Anfang gelegte Ebene hinein fallen, und es müſſen alſo zwiſchen den Coordinaten jedes Punktes der durch den Anfang gelegten geraden Linie die drei Gleichungen

$$x = Az, \quad y = Bz, \quad A'x + B'y + C'z = 0$$

Statt finden, woraus ſich, wenn man die Werthe von x und

y aus den beiden erſten Gleichungen in die dritte Gleichung für x und y ſetzt, auf der Stelle die geſuchte Bedingungsgleichung

$$61. \quad AA' + BB' + C' = 0$$

ergiebt.

Soll man nun durch einen gegebenen Punkt, deſſen Coordinaten x', y', z' ſind, eine der durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

gegebenen Ebene parallele gerade Linie legen; ſo hat man, wenn

$$x = A'z + a', \quad y = B'z + b'$$

die Gleichungen der geſuchten geraden Linie ſind, zur Beſtimmung der vier unbekannten Größen A', B', a', b' die drei Gleichungen

$$x' = A'z' + a', \quad y' = B'z' + b', \quad AA' + BB' + C = 0.$$

Daß, wie man hieraus ſieht, eine der vier unbekannten Größen A', B', a', b' jederzeit unbeſtimmt bleibt, iſt ganz der Natur der Sache gemäß, weil durch jeden Punkt unendlich viele einer gegebenen Ebene parallele gerade Linien gelegt werden können.

29. **Die Bedingungen zu finden, unter denen eine gerade Linie, deren Gleichungen**

$$x = Az + a, \quad y = Bz + b$$

ſind, und eine Ebene, deren Gleichung

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

iſt, auf einander ſenkrecht ſtehen.

Wenn eine gerade Linie auf einer Ebene ſenkrecht ſteht; ſo ſind, wie aus bekannten ſtereometriſchen Sätzen leicht erhellet, die Projectionen der geraden Linie auf den drei Coordinatenebenen auf den Durchſchnitten der Ebene mit den entſprechenden Coordinatenebenen ſenkrecht. Die Gleichungen der Durchſchnitte der gegebenen Ebene mit den Ebenen der xy, xz, yz ſind:

$$A'x + B'y + D' = 0,$$
$$C'z + A'x + D' = 0,$$
$$B'y + C'z + D' = 0,$$

oder

$$y = -\frac{A'}{B'}x - \frac{D'}{B'},$$
$$x = -\frac{C'}{A'}z - \frac{D'}{A'},$$
$$y = -\frac{C'}{B'}z - \frac{D'}{B'}.$$

Die Gleichungen der Projectionen der gegebenen geraden Linie auf den drei Coordinatenebenen ſind

$$\frac{x-a}{A}=\frac{y-b}{B},\quad x=Az+a,\quad y=Bz+b,$$

oder

$$y=\frac{B}{A}x-\frac{Ba}{A}+b,\quad x=Az+a,\quad y=Bz+b.$$

Alſo iſt nach (18.)

$$62.\quad \frac{A'B}{B'A}=1,\quad \frac{AC'}{A'}=1,\quad \frac{BC'}{B'}=1;$$

oder

$$63.\quad AB'=BA',\quad AC'=A',\quad BC'=B',$$

und dies ſind die geſuchten Bedingungsgleichungen. Jede dieſer drei Gleichungen iſt eine Folge aus den beiden andern, wovon der Grund leicht erhellet.

30. Die Gleichungen einer geraden Linie zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und auf einer gegebenen Ebene ſenkrecht ſteht.

Die Coordinaten des gegebenen Punktes ſeyen x', y' z'; die Gleichung der gegebenen Ebene ſey

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Die Gleichungen der geſuchten geraden Linie ſeyen

$$x=A'z+a',\quad y=B'z+b';$$

ſo iſt, weil dieſe Linie durch den Punkt $(x'y'z')$ geht,

$$x'=A'z'+a',\quad y'=B'z'+b';$$

folglich

$$x-x'=A'(z-z'),\quad y-y'=B'(z-z').$$

Ferner iſt nach (63.)

$$A'C=A,\quad B'C=B,$$

oder

$$A'=\frac{A}{C},\quad B'=\frac{B}{C};$$

alſo ſind

$$64.\quad \begin{cases} x-x'=\dfrac{A}{C}(z-z') \\ y-y'=\dfrac{B}{C}(z-z') \end{cases}$$

die geſuchten Gleichungen.

Bezeichnen jetzt x, y, z die Coordinaten des Punktes, in welchem die gegebene Ebene von dem auf ſie von dem Punkte $(x'y'z')$ gefällten Perpendikel geſchnitten wird; ſo hat man zur Beſtimmung von x, y, z die drei Gleichungen:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$x - x' = \frac{A}{C}(z - z'),\quad y - y' = \frac{B}{C}(z - z').$$

Setzen wir nun die bekannte Größe

$$Ax' + By' + Cz' + D = \varDelta;$$

ſo iſt

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = -\varDelta$$

oder

$$A^2(z - z') + B^2(z - z') + C^2(z - z') = -C\varDelta.$$

Beſtimmt man hieraus $z - z'$, und dann auch die Größen $x - x'$ und $y - y'$; ſo erhält man

$$65.\quad \begin{cases} x - x' = -\dfrac{A\varDelta}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ y - y' = -\dfrac{B\varDelta}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ z - z' = -\dfrac{C\varDelta}{A^2 + B^2 + C^2}; \end{cases}$$

oder

$$66.\quad \begin{cases} x = x' - \dfrac{A\varDelta}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ y = y' - \dfrac{B\varDelta}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ z = z' - \dfrac{C\varDelta}{A^2 + B^2 + C^2}; \end{cases}$$

oder

$$67.\quad \begin{cases} x = x' - \dfrac{A(Ax' + By' + Cz' + D)}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ y = y' - \dfrac{B(Ax' + By' + Cz' + D)}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ z = z' - \dfrac{C(Ax' + By' + Cz' + D)}{A^2 + B^2 + C^2}. \end{cases}$$

Bezeichnet nun p die Entfernung des Punktes $(x'y'z')$ von der gegebenen Ebene; ſo iſt nach (42.)

$$p = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

die Quadratwurzel poſitiv genommen. Alſo iſt

$$68.\quad p = \pm\frac{\varDelta}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

oder

$$69.\quad p = \pm\frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

wo man, wenn man die Quadratwurzel im Nenner immer po-

ſitiv nimmt, da p ſeiner Natur nach ſtets poſitiv iſt, das obere oder untere Zeichen nehmen muß, jenachdem die Größe

$$\Delta = Ax' + By' + Cz' + D$$

poſitiv oder negativ iſt. Iſt (x′ y′ z′) der Anfang, d. i. $x' = y' = z' = 0$; ſo iſt $\Delta = \mathbf{D}$, folglich

$$70.\quad p = \pm \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

und in dieſer Formel das obere oder das untere Zeichen zu nehmen, jenachdem **D** poſitiv oder negativ iſt.

31. Den von zwei durch die Gleichungen

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

gegebenen Ebenen eingeſchloſſenen Winkel **V** zu finden.

Errichtet man auf jede der beiden Ebenen ein Perpendikel; ſo iſt klar, daß dieſe beiden Perpendikel, deren Gleichungen

$$x = az + \alpha,\quad y = bz + \beta$$

und

$$x = a'z + \alpha',\quad y = b'z + \beta'$$

ſeyn mögen, dieſelben Winkel mit einander einſchließen, wie die beiden gegebenen Ebenen. Alſo iſt nach (44.)

$$\cos V = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)(1 + a'^2 + b'^2)}}.$$

Nach (63.) iſt aber

$$aC = A,\ bC = B;\ a'C' = A',\ b'C' = B'.$$

Alſo iſt

$$1 + aa' + bb' = \frac{AA' + BB' + CC'}{CC'},$$

und

$$1 + a^2 + b^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{C^2},\quad 1 + a'^2 + b'^2 = \frac{A'^2 + B'^2 + C'^2}{C'^2}.$$

Folglich iſt

$$71.\quad \cos V = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}},$$

und in dieſer Formel die Quadratwurzel ſowohl poſitiv, als auch negativ zu nehmen, weil zwei Ebenen im Allgemeinen jederzeit zwei, einander zu 180° ergänzende, Winkel mit einander einſchließen.

Sind die beiden Ebenen auf einander ſenkrecht, ſo iſt $V = 90°$, $\cos V = 0$; folglich

$$72.\quad AA' + BB' + CC' = 0,$$

welches die Bedingung iſt, daß zwei durch die Gleichungen

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

gegebene Ebenen auf einander ſenkrecht ſtehen.

Die Winkel, unter denen die Ebene, deren Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

iſt, gegen die Ebenen der xy, xz, yz geneigt iſt, ſeyen V', V'', V'''; und eben ſo ſeyen W', W'', W''' die von der Ebene, deren Gleichung

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

iſt, mit den Ebenen der xy, xz, yz eingeſchloſſenen Winkel.

Da nun

$$z = 0,\quad y = 0,\quad x = 0$$

die Gleichungen der Ebenen der xy, xz, yz ſind; ſo iſt

$$73.\quad \begin{cases} \cos V' = \dfrac{C}{\surd A^2 + B^2 + C^2}, \\ \cos V'' = \dfrac{B}{\surd A^2 + B^2 + C^2}, \\ \cos V''' = \dfrac{A}{\surd A^2 + B^2 + C^2}; \end{cases}$$

und eben ſo

$$74.\quad \begin{cases} \cos W' = \dfrac{C'}{\surd A'^2 + B'^2 + C'^2}, \\ \cos W'' = \dfrac{B'}{\surd A'^2 + B'^2 + C'^2}, \\ \cos W''' = \dfrac{A'}{\surd A'^2 + B'^2 + C'^2}. \end{cases}$$

Alſo iſt auch

$$75.\quad \begin{cases} \cos V'^2 + \cos V''^2 + \cos V'''^2 = 1, \\ \cos W'^2 + \cos W''^2 + \cos W'''^2 = 1. \end{cases}$$

Bezeichnet man durch (V'), (V''), (V'''); (W'), (W'') (W''') die Werthe von V', V'', V'''; W', W'', W''', für welche man in den Formeln (73.) und (74.) die Quadratwurzeln in den Nennern ſämmtlich poſitiv nehmen muß; ſo iſt

$$\cos(V')\cos(W') + \cos(V'')\cos(W'') + \cos(V''')\cos(W''')$$
$$= \frac{AA' + BB' + CC'}{\surd (A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}.$$

Bezeichnet nun (V) den Werth von V, für welchen man in der Formel (71.) die Quadratwurzel im Nenner poſitiv nehmen muß; ſo iſt offenbar

$$76.\quad \cos(V) = \cos(V')\cos(W') + \cos(V'')\cos(W'') + \cos(V''')\cos(W''').$$

32. Den Winkel V zu finden, unter welchem eine durch die Gleichungen

$$x = Az + a,\ y = Bz + b$$

gegebene gerade Linie gegen eine durch die Gleichung

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

gegebene Ebene geneigt iſt.

Der Winkel einer geraden Linie mit einer Ebene iſt der von dieſer Linie mit ihrer Projection auf der Ebene eingeſchloſſene Winkel. Bezeichnen wir alſo den von einem auf die Ebene errichteten Perpendikel mit der gegebenen geraden Linie eingeſchloſſenen Winkel durch V_1; ſo iſt offenbar $\sin V$ dem abſoluten Werthe von $\cos V'$ gleich. Sind nun

$$x = A_1 z + a_1,\ y = B_1 z + b_1$$

die Gleichungen des in Rede ſtehenden Perpendikels; ſo iſt nach (44.)

$$\cos V_1 = \frac{1 + AA_1 + BB_1}{\sqrt{(1 + A^2 + B^2)(1 + A_1{}^2 + B_1{}^2)}}.$$

Nach (63.) iſt aber

$$A_1 C' = A',\ B_1 C' = B'.$$

Alſo iſt

$$\cos V_1 = \frac{AA' + BB' + C'}{\sqrt{(1 + A^2 + B^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}},$$

und folglich $\sin V$ dem abſoluten Werthe von

$$\frac{AA' + BB' + C'}{\sqrt{(1 + A^2 + B^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}}$$

gleich, d. h.

$$77.\quad \sin V = \frac{AA' + BB' + C'}{\sqrt{(1 + A^2 + B^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}},$$

unter der Bedingung, daß man die Quadratwurzel im Nenner dieſes Bruchs poſitiv oder negativ nimmt, jenachdem der Zähler deſſelben reſpective poſitiv oder negativ iſt.

33. Die Gleichung einer Ebene zu finden, welche durch drei gegebene Punkte geht, deren Coordinaten x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''' ſind.

Iſt

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

die Gleichung der geſuchten Ebene; ſo hat man zur Beſtimmung von

$$\frac{A}{D} = A',\ \frac{B}{D} = B',\ \frac{C}{D} = C',$$

weil die geſuchte Ebene durch die drei gegebenen Punkte gehen ſoll, die drei folgenden Gleichungen:

$$A'x' + B'y' + C'z' + 1 = 0\,,$$
$$A'x'' + B'y'' + C'z'' + 1 = 0\,,$$
$$A'x''' + B'y''' + C'z''' + 1 = 0\,.$$

Beſtimmt man nun A', B', C' aus dieſen drei Gleichungen durch gewöhnliche algebraiſche Elimination; ſo erhält man:

$$A' = \frac{z'(y''-y''') - z''(y'-y''') + z'''(y'-y'')}{x'(y''z'''-y'''z'') - x''(y'z'''-y'''z') + x'''(y'z''-y''z')},$$
$$B' = \frac{x'(z''-z''') - x''(z'-z''') + x'''(z'-z'')}{x'(y''z'''-y'''z'') - x''(y'z'''-y'''z') + x'''(y'z''-y''z')},$$
$$C' = \frac{y'(x''-x''') - y''(x'-x''') + y'''(x'-x'')}{x'(y''z'''-y'''z'') - x''(y'z'''-y'''z') + x'''(y'z''-y''z')},$$

und es iſt alſo offenbar verſtattet,

$$A = z'(y''-y''') - z''(y'-y''') + z'''(y'-y''),$$
$$B = x'(z''-z''') - x''(z'-z''') + x'''(z'-z''),$$
$$C = y'(x''-x''') - y''(x'-x''') + y'''(x'-x''),$$
$$D = x'(y''z'''-y'''z'') - x''(y'z'''-y'''z') + x'''(y'z''-y''z')$$

zu ſetzen.

34. Zum Schluß bemerken wir hier noch, daß man der allgemeinen Gleichung der Ebene immer auch leicht die Form

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

geben kann, welches oft zur Erleichterung der Rechnung dienen kann. Vergleicht man dieſe Gleichung mit der Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0\,;$$

ſo iſt offenbar

$$a = -\frac{D}{A},\quad b = -\frac{D}{B},\quad c = -\frac{D}{C}.$$

Eben ſo kann man immer auch der allgemeinen Gleichung der geraden Linie in der Ebene die Form

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

geben, woraus, wenn man dies mit der allgemeinen Gleichung

$$y = Ax + B$$

vergleicht,

$$a = -\frac{B}{A},\quad b = B$$

folgt. Eine ähnliche Bemerkung iſt auch über die allgemeinen Gleichungen der geraden Linie im Raume zu machen.

Anwendungen der im Obigen entwickelten allgemeinen Formeln zur Auflöſung geometriſcher Aufgaben gehören jetzt nicht hierher, indem ſchon der Artikel Anwendung der Analyſis auf die Geometrie i. d. Z. viele Anwendungen dieſer Art enthält, ſo

daß uns alſo hier auf dieſen Artikel, deſſen Studium zweckmäßig mit dem Studium des gegenwärtigen Artikels verbunden werden wird, zu verweiſen erlaubt ſeyn mag.

Logarithmus. Für die Exponential-Reihe ſind in dieſem Werke an verſchiedenen Stellen mehrere Beweiſe gegeben worden, worüber man den Artikel Exponential-Größe nachſehen kann. Der einfachſte und ſtrengſte Beweis, welcher ſich für die logarithmiſche Reihe geben läßt, ſcheint uns folgender zu ſeyn. Für jedes reelle α und jedes zwiſchen -1 und $+1$ liegende x iſt nach dem binomiſchen Lehrſatze (m. ſ. dieſen Artikel i. d. Z. 17.)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots\ldots$$

Alſo iſt, wie man leicht findet,

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha} = x - (1-\alpha)\frac{x^2}{2} + (1-\alpha)(1-\tfrac{1}{2}\alpha)\frac{x^3}{3}$$
$$- (1-\alpha)(1-\tfrac{1}{2}\alpha)(1-\tfrac{1}{3}\alpha)\frac{x^4}{4} + \ldots,$$

und folglich, wenn man α ſich der Null nähern läßt und zu den Gränzen übergeht,

$$\mathrm{Lim.}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha} = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots..$$

Nun iſt aber, wenn wir die natürlichen Logarithmen durch l bezeichnen,

$$1 + x = e^{l(1+x)},$$

und folglich nach der Exponential-Reihe, die für jeden reellen Exponenten gilt,

$$(1+x)^\alpha = e^{\alpha l(1+x)} = 1 + \frac{\alpha l(1+x)}{1} + \frac{\alpha^2\{l(1+x)\}^2}{1.2}$$
$$+ \frac{\alpha^3\{l(1+x)\}^3}{1.2.3} + \ldots..$$

Alſo

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha} =$$
$$l(1+x) + \frac{\alpha}{1.2}\{l(1+x)\}^2 + \frac{\alpha^2}{1.2.3}\{l(1+x)\}^3 + \ldots..$$

Läßt man nun α ſich der Null nähern und geht zu den Gränzen über; ſo ergiebt ſich auf der Stelle

$$\mathrm{Lim}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha} = l(1+x).$$

Dies, mit dem Obigen verglichen, giebt

$$l(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots.$$

für jedes zwiſchen -1 und $+1$ liegende x, welches die bekannte logarithmiſche Reihe iſt.

Iſt nun M der Modulus des Syſtems, in welchem die Logarithmen durch $\log$ bezeichnet werden; ſo iſt bekanntlich $\log(1+x) = M l(1+x)$, und folglich

$$\log(1+x) = M(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots).$$

Einige Umformungen der logarithmiſchen Reihe ſ. m. im Artikel Umformung der Reihen (16. 28. 29.)

Die logarithmiſche Reihe iſt vorher nur für zwiſchen -1 und $+1$ enthaltene x bewieſen worden. Weil aber die Reihe

$$1, -\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{4}, +\tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{6}, \ldots,$$

wie im Artikel Convergenz der Reihen (15.) bewieſen worden iſt, convergirt; ſo überzeugt man ſich leicht, daß die logarithmiſche Reihe auch noch für $x = +1$ gilt, und folglich

$$l2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \ldots$$

iſt. Daß die logarithmiſche Reihe auch für $x = -1$ gilt, läßt ſich nicht behaupten, weil die Reihe

$$-1, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{6}, \ldots$$

nach dem Artikel Convergenz der Reihen (3.) divergirt.

Ueber die Berechnung der Logarithmen verbreitet ſich der Artikel Logarithmus im dritten Theile ſchon ſo ausführlich, daß hier nichts weiter darüber beizubringen nöthig iſt. Logarithmiſche Tafeln ſind in neuerer Zeit mehrere erſchienen, z. B. von Hahn (Berl. 1823.), Stampffer (Salzb. 1825.), Grüſon (Berl. 1818.), Pasquich (Leipz. 1817.), Schultes (Erl. 1821.), Weſtphal (Königsb. 1821.), Praſſe und Mollweide (Leipz. 1821.), Hantſchl (Wien. 1833.), Urſin (Hafniae, 1824.). Vorzügliche Erwähnung verdient indeß, wegen des beſondern Gebrauchs, zu dem ſie beſtimmt iſt, Matthieſſens Tafel zur bequemen Berechnung des Logarithmen der Summe oder Differenz zweier Größen, welche ſelbſt nur durch ihre Logarithmen gegeben ſind. Altona. 1817. Auch ſ. m. die zu demſelben Gebrauche beſtimmte Tafel von Gauß in der monatl. Correſpondenz. November 1812. Ueber die Fehler beim Interpoliren ſ. m. zwei Aufſätze von Vincent und Bary in den Annales de Mathématiques. T. XVI. p. 19. und T. XXI. p. 281.

Logologarithmus, ſ. Integrallogarithmus i. d. Z.

M.

Maclaurin'ſche Reihe, ſ. Taylors Lehrſatz (10.) i. d. Z.

Malfattis Aufgabe, ſ. Anwendung der Analyſis auf die Geometrie (24.) i. d. Z.

Meniscus, ſ. Lunula.

Mittel oder Mittelgröße zwiſchen mehrern beliebigen poſitiven oder negativen Größen $a, a', a'', a''', a^{IV}, \ldots$ heißt

jede Größe, welche nicht größer wie die größte und nicht kleiner wie die kleinſte unter dieſen Größen iſt, und ſoll im Folgenden überhaupt durch

$$M(a, a', a'', a''', a^{IV}, \ldots)$$

bezeichnet werden. Man ſieht hieraus, daß es zwiſchen Größen, die nicht ſämmtlich unter einander gleich ſind, jederzeit unendlich viele Mittelgrößen geben kann; ſind aber die gegebenen Größen ſämmtlich unter einander gleich, ſo giebt es zwiſchen denſelben nur eine Mittelgröße, welche offenbar keine andere als jede der gegebenen Größen ſelbſt iſt. Wir wollen nun von den Mittelgrößen überhaupt im Folgenden mehrere Sätze beweiſen, welche theils an ſich merkwürdig ſind, theils bei mathematiſchen Unterſuchungen häufig mit beſonderm Vortheil angewandt werden.

1. Zunächſt ergiebt ſich aus der vorhergehenden Definition unmittelbar der folgende Satz:

Jede Größe, welche zwiſchen zwei beliebigen der Größen $a, a', a'', a''', a^{IV}, \ldots$ eine Mittelgröße iſt, iſt eine Mittelgröße zwiſchen allen dieſen Größen.

2. Wenn a, b zwei beliebige Größen ſind, ſo iſt das Product

$$\{a - M(a, b)\}\{M(a, b) - b\}$$

jederzeit poſitiv, wobei wir bemerken, daß dieſes Product auch dann, wenn es verſchwindet, als poſitiv betrachtet werden ſoll.

Wenn $a > b$ iſt, ſo ſind nach der allgemeinen Definition der Mittelgrößen die Differenzen

$$a - M(a, b),\quad M(a, b) - b$$

beide poſitiv, wobei immer Null als poſitiv betrachtet wird. Daher iſt in dieſem Falle das Product

$$\{a - M(a, b)\}\{M(a, b) - b\}$$

offenbar poſitiv. Iſt alſo $a < b$, ſo iſt das Product

$$\{b - M(a, b)\}\{M(a, b) - a\}$$

und folglich natürlich auch das Product

$$\{a - M(a, b)\}\{M(a, b) - b\}$$

poſitiv. Iſt $a = b$, ſo ſind die Differenzen

$$a - M(a, b),\quad M(a, b) - b$$

offenbar beide $= 0$, und ihr Product iſt alſo wieder poſitiv.

3. Wenn das Product

$$(a - A)(A - b)$$

poſitiv iſt; ſo iſt A eine Mittelgröße zwiſchen a und b, oder es iſt $A = M(a, b)$.

Iſt das Product

$$(a - A)(A - b) = 0,$$

ſo iſt entweder $A = a$ oder $A = b$, in beiden Fällen alſo nach der allgemeinen Definition der Mittelgrößen A eine Mittelgröße zwiſchen a und b. Iſt dieſes Product aber nicht $= 0$, ſo haben die Differenzen $a - A$, $A - b$, weil das in Rede ſtehende Produkt poſitiv iſt, gleiche Vorzeichen. Iſt alſo $a - A$ poſitiv, ſo iſt auch $A - b$ poſitiv, d. h. wenn $A < a$ iſt, ſo iſt $A > b$, und folglich offenbar $A = M(a, b)$. Iſt $a - A$ negativ, ſo iſt auch $A - b$ negativ, d. h. wenn $A > a$ iſt, ſo iſt $A < b$, und folglich wieder offenbar $A = M(a, b)$. Im erſten Falle iſt offenbar $a > b$, im zweiten dagegen $a < b$.

4. Wenn

$$A = M(a, a', a'', a''', \ldots)$$

iſt; ſo iſt für jedes poſitive oder negative r immer

$$rA = M(ra, ra', ra'', ra''', \ldots) .$$

Die kleinſte und größte unter den Größen $a, a', a'', a''', \ldots$ ſeyen reſpective α und γ; ſo iſt, weil nach der Vorausſetzung A eine Mittelgröße zwiſchen $a, a', a'', a''' \ldots$ iſt, nach der allgemeinen Definition der Mittelgrößen

$$A = M(\alpha, \gamma)$$

und folglich nach (2.) das Product

$$(\alpha - A)(A - \gamma)$$

poſitiv. Weil nun r^2 poſitiv iſt, ſo iſt auch das Product

$$r^2(\alpha - A)(A - \gamma) ,$$

d. i. das Product

$$r(\alpha - A) . r(A - \gamma) ,$$

oder das Product

$$(r\alpha - rA)(rA - r\gamma)$$

poſitiv, und folglich nach (3.)

$$rA = M(r\alpha, r\gamma) .$$

Weil aber $r\alpha$, $r\gamma$ offenbar zwei Glieder der Reihe

$$ra, ra', ra'', ra''', \ldots$$

ſind; ſo iſt nach (1.) auch

$$rA = M(ra, ra', ra'', ra''', \ldots) .$$

5. Wenn

$$A = M(a, a', a'', a''', \ldots)$$

iſt; ſo iſt für jedes r, indem die obern und untern Zeichen in folgender Gleichung ſich auf einander beziehen,

$$A \pm r = M(a \pm r, a' \pm r, a'' \pm r, a''' \pm r, \ldots) .$$

Die kleinſte und größte unter den Größen $a, a', a'', a''', \ldots$ ſeyen wieder reſpective α und γ; ſo iſt wegen der Vorausſetzung nach der allgemeinen Definition der Mitelgrößen

$$A = M(\alpha, \gamma) .$$

Alſo iſt nach (2.) das Product

$$(\alpha - A)(A - \gamma),$$

und folglich natürlich auch das Product

$$\{\alpha \pm r - (A \pm r)\}\{A \pm r - (\gamma \pm r)\}$$

poſitiv. Daher iſt nach (3.)

$$A \pm r = M(\alpha \pm r, \gamma \pm r),$$

und folglich, weil $\alpha \pm r$, $\gamma \pm r$ offenbar zwei Glieder der Reihe

$$a \pm r, a' \pm r, a'' \pm r, a''' \pm r, \ldots\ldots$$

ſind, nach (1.) auch

$$A \pm r = M(a \pm r, a' \pm r, a'' \pm r, a''' + r, \ldots\ldots).$$

6. **Wenn die Größen a, a', a'', a''', ... ſämmtlich poſitiv ſind, und**

$$A = M(a, a', a'', a''', \ldots\ldots),$$

alſo natürlich auch poſitiv iſt; ſo iſt für jedes r

$$A^r = M(a^r, a'^r, a''^r, a'''^r, \ldots\ldots).$$

Seyen wieder α und γ reſpective die kleinſte und größte unter den Größen a, a', a'', a''', ...; ſo iſt, weil nach der Vorausſetzung

$$A = M(a, a', a'', a''', \ldots.)$$

iſt, offenbar

$$A = M(\alpha, \gamma).$$

Iſt nun A einer der beiden Größen α, γ gleich; ſo iſt offenbar einer der beiden Factoren des Products

$$(\alpha^r - A^r)(A^r - \gamma^r)$$

$= 0$, dieſes Product alſo ſelbſt $= 0$, d. i. poſitiv. Iſt aber A keiner der beiden Größen α, γ gleich; ſo iſt

$$A > \alpha, \quad A < \gamma.$$

Iſt nun r poſitiv, ſo iſt nach dem Artikel Ungleich (8.), da die Größen A, α, γ poſitiv ſind,

$$A^r > \alpha^r, \quad A^r < \gamma^r,$$

oder die Differenzen

$$\alpha^r - A^r, \quad A^r - \gamma^r$$

ſind beide negativ, und das Product

$$(\alpha^r - A^r)(A^r - \gamma^r)$$

iſt alſo poſitiv. Iſt dagegen r negativ, ſo iſt nach dem angeführten Artikel

$$A^r < \alpha^r, \quad A^r > \gamma^r,$$

die Differenzen

$$\alpha^r - A^r, \quad A^r - \gamma^r$$

ſind beide poſitiv, und das Product

$$(\alpha^r - A^r)(A^r - \gamma^r)$$

iſt folglich wieder poſitiv. Da alſo dieſes Product ſtets poſitiv iſt, ſo iſt nach (3.)

$$A^r = M(\alpha^r, \gamma^r),$$

und folglich, weil α^r, γ^r offenbar Glieder der Reihe

$$a^r, a'^r, a''^r, a'''^r, \ldots\ldots$$

ſind, nach (1.)

$$A^r = M(a^r, a'^r, a''^r, a'''^r, \ldots\ldots).$$

Für $r = \frac{1}{2}$ iſt alſo z. B.

$$\sqrt{A} = M(\sqrt{a}, \sqrt{a'}, \sqrt{a''}, \sqrt{a'''} \ldots\ldots).$$

7. Wenn $a, a', a'', a''', \ldots\ldots$ beliebige Größen bezeichnen, r aber poſitiv und

$$A = M(a, a', a'', a''', \ldots\ldots)$$

iſt; ſo iſt immer

$$r^A = M(r^a, r^{a'}, r^{a''}, r^{a'''}, \ldots\ldots).$$

Sind α und γ wieder reſpective die kleinſte und größte unter den Größen $a, a', a'', a''', \ldots\ldots$; ſo iſt

$$A = M(\alpha, \gamma).$$

Iſt nun A einer der Größen α, γ gleich, ſo iſt offenbar einer der Factoren des Products

$$(r^\alpha - r^A)(r^A - r^\gamma)$$

$= 0$, dieſes Product alſo ſelbſt $= 0$, d. i. poſitiv. Iſt dagegen A keiner der Größen α, γ gleich; ſo iſt

$$A > \alpha, \ A < \gamma.$$

Weil nun nach der Vorausſetzung r poſitiv iſt, ſo iſt nach dem Artikel Ungleich (9.)

$$r^A > r^\alpha, \ r^A < r^\gamma$$

oder

$$r^A < r^\alpha, \ r^A > r^\gamma,$$

jenachdem $r > 1$ oder $r < 1$ iſt. Für $r = 1$ würde

$$r^A = r^\alpha, \ r^A = r^\gamma$$

ſeyn. In allen Fällen haben folglich die Differenzen

$$r^\alpha - r^A, \ r^A - r^\gamma$$

gleiche Vorzeichen, und das Product

$$(r^\alpha - r^A)(r^A - r^\gamma)$$

iſt alſo poſitiv, d. i. nach (3.)

$$r^A = M(r^\alpha, r^\gamma);$$

folglich nach (1.), weil r^α, r^γ offenbar Glieder der Reihe

$$r^a, r^{a'}, r^{a''}, r^{a'''}, \ldots\ldots$$

ſind, auch

$$r^A = M(r^a, r^{a'}, r^{a''}, r^{a'''}, \ldots) .$$

Daß dieſer Satz nicht gilt, wenn r negativ iſt, läßt ſich leicht an Beiſpielen zeigen. So iſt z. B.

$$4 = M(2, 7.)$$

Es iſt aber nicht

$$(-2)^4 = M\{(-2)^2, (-2)^7\} ,$$

d. i. nicht

$$2^4 = M(2^2, -2^7) ,$$

weil

$$2^4 > 2^2, \quad 2^4 > -2^7 ,$$

alſo 2^4 keine Mittelgröße zwiſchen 2^2 und -2^7 iſt. Die Größen a, a', a'', a'', a''', ... können aber beliebige poſitive oder negative Größen ſeyn.

8. Wenn a, a', a'', a''', ... poſitive Größen bezeichnen und

$$A = M(a, a', a''. a''', \ldots) ,$$

alſo auch poſitiv iſt; ſo iſt für jedes logarithmiſche Syſtem

$$\log A = M(\log a, \log a', \log a'', \log a''', \ldots\ldots)$$

Es bezeichne wieder α die kleinſte, γ die größte unter den Größen a, a', a'', a''', ...; ſo iſt nach der Vorausſetzung

$$A = M(\alpha, \gamma) ,$$

und es haben folglich nach dem Artikel Ungleich (10.) die beiden Differenzen

$$\log\alpha - \log A, \quad \log A - \log\gamma$$

jederzeit einerlei Vorzeichen, ſo daß alſo das Product

$$\{\log\alpha - \log A\}\{\log A - \log\gamma\}$$

jederzeit poſitiv, und folglich nach (3.)

$$\log A = M(\log\alpha, \log\gamma) ,$$

alſo nach (1.) auch

$$\log A = M(\log a, \log a', \log a'', \log a''', \ldots .)$$

iſt.

9. Wenn a, a', a'', a''', ... beliebige, dagegen b, b', b'', b''', ... ſämmtlich Größen mit demſelben Vorzeichen ſind, deren Anzahl in beiden Reihen $= n$ ſeyn mag; ſo iſt immer

$$\frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots .}{b + b' + b'' + b''' + \ldots .} = M\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''}, \ldots .\right).$$

Sey α die kleinſte, γ die größte unter den Größen

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''}, \ldots\ldots;$$

ſo ſind die Differenzen

$$\frac{a}{b} - \alpha, \frac{a'}{b'} - \alpha, \frac{a''}{b''} - \alpha, \frac{a'''}{b'''} - \alpha, \ldots\ldots;$$

$$\gamma - \frac{a}{b}, \gamma - \frac{a'}{b'}, \gamma - \frac{a''}{b''}, \gamma - \frac{a'''}{b'''}, \ldots\ldots$$

ſämmtlich poſitiv. Da nun nach der Vorausſetzung die Größen b, b', b'', b''', ... alle gleiche Vorzeichen haben; ſo haben auch die Producte

$$b\left(\frac{a}{b} - \alpha\right), b'\left(\frac{a'}{b'} - \alpha\right), b''\left(\frac{a''}{b''} - \alpha\right), b'''\left(\frac{a'''}{b'''} - \alpha\right), \ldots;$$

$$b\left(\gamma - \frac{a}{b}\right), b'\left(\gamma - \frac{a'}{b'}\right), b''\left(\gamma - \frac{a''}{b''}\right), b'''\left(\gamma - \frac{a'''}{b'''}\right), \ldots$$

ſämmtlich gleiche Vorzeichen. Alſo haben auch die dieſen Producten gleichen Differenzen

$$a - \alpha b, a' - \alpha b', a'' - \alpha b'', a''' - \alpha b''', \ldots\ldots,$$

$$b\gamma - a, b'\gamma - a', b''\gamma - a'', b'''\gamma - a''', \ldots\ldots;$$

folglich auch die Summen

$$a + a' + a'' + a''' + \ldots - \alpha(b + b' + b'' + b''' + \ldots),$$

$$\gamma(b + b' + b'' + b''' + \ldots) - (a + a' + a'' + a''' + \ldots);$$

alſo auch die Quotienten

$$\frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots}{b + b' + b'' + b''' + \ldots} - \alpha, \ \gamma - \frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots}{b + b' + b'' + b''' + \ldots},$$

oder

$$\alpha - \frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots}{b + b' + b'' + b''' + \ldots}, \ \frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots}{b + b' + b'' + b''' + \ldots} - \gamma$$

gleiche Vorzeichen, und das Product

$$\left\{\alpha - \frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots}{b + b' + b'' + b''' + \ldots}\right\}\left\{\frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots}{b + b' + b'' + b''' + \ldots} - \gamma\right\}$$

iſt daher ſtets poſitiv. Alſo iſt nach (3.)

$$\frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots}{b + b' + b'' + b''' + \ldots} = M(\alpha, \gamma);$$

folglich nach (1.) auch

$$\frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots}{b + b' + b'' + b''' + \ldots} = M\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''}, \ldots\right).$$

10. Für $b = b' = b'' = b''' = \ldots = 1$ ergiebt ſich aus dem vorigen Satze

$$\frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots}{n} = M(a, a', a'', a''', \ldots),$$

in welcher Gleichung die bekannte Regel für das ſogenannte arithmetiſche Mittel zwiſchen mehrern Größen enthalten iſt.

Sind die Brüche

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''}, \ldots..$$

ſämmtlich einander gleich; ſo fällt jede Mittelgröße zwiſchen ihnen mit ihnen ſelbſt zuſammen, und es iſt folglich nach (9.) in dieſem Falle

$$\frac{a+a'+a''+a'''+\ldots.}{b+b'+b''+b'''+\ldots.}=\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\frac{a'''}{b'''}=\ldots.$$

11. Sind $\varrho, \varrho', \varrho'', \varrho'''$, ... Größen von einerlei Vorzeichen; ſo haben, wenn, wie vorher, b, b', b'', b''', ... Größen von einerlei Vorzeichen ſind, auch die Producte

$$b\varrho,\ b'\varrho',\ b''\varrho'',\ b'''\varrho''',\ \ldots..$$

ſämmtlich einerlei Vorzeichen, und es iſt folglich nach (9.)

$$\frac{a\varrho+a'\varrho'+a''\varrho''+a'''\varrho'''+\ldots.}{b\varrho+b'\varrho'+b''\varrho''+b'''\varrho'''+\ldots.}=M\left(\frac{a\varrho}{b\varrho}, \frac{a'\varrho'}{b'\varrho'}, \frac{a''\varrho''}{b''\varrho''}, \frac{a'''\varrho'''}{b'''\varrho'''}, \ldots.\right),$$

d. i.

$$\frac{a\varrho+a'\varrho'+a''\varrho''+a'''\varrho'''+\ldots.}{b\varrho+b'\varrho'+b''\varrho''+b'''\varrho'''+\ldots.}=M\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''}, \ldots.\right).$$

Für $b=b'=b''=b'''=\ldots.=1$ iſt

$$\frac{a\varrho+a'\varrho'+a''\varrho''+a'''\varrho'''+\ldots.}{\varrho+\varrho'+\varrho''+\varrho'''+\ldots.}=M(a, a', a'', a'''\ldots.);$$

oder

$$a\varrho+a'\varrho'+a''\varrho''+a'''\varrho'''+\ldots.=(\varrho+\varrho'+\varrho''+\varrho'''+\ldots)M(a, a', a'', a''', \ldots.),$$

ſo daß alſo, wenn a, a', a'', a''', ... beliebige, dagegen $\varrho, \varrho', \varrho'', \varrho'''$, ... Größen von einerlei Vorzeichen ſind, das Aggregat

$$a\varrho+a'\varrho'+a''\varrho''+a'''\varrho'''+\ldots.$$

jederzeit erhalten wird, wenn man die Summe

$$\varrho+\varrho'+\varrho''+\varrho'''+\ldots.$$

in eine gewiſſe Mittelgröße zwiſchen a, a', a'', a''', ... multiplicirt.

12. Seyen a, a', a'', a''', ... und b, b', b'', b''', ... zwei Reihen poſitiver Größen, und in jeder die Anzahl der Glieder dieſelbe; ſo iſt

$$(aa'a''a'''\ldots.)^{\frac{1}{b+b'+b''+b'''+\ldots}}=M(\sqrt[b]{a}, \sqrt[b']{a'}, \sqrt[b'']{a''}, \sqrt[b''']{a'''}, \ldots).$$

Man ſetze $b+b'+b''+b'''+\ldots.=m$; ſo ſind die Logarithmen der Größen

$$\sqrt[m]{aa'a''a'''\ldots}, \sqrt[b]{a}, \sqrt[b']{a'}, \sqrt[b'']{a''}, \sqrt[b''']{a'''}, \ldots..$$

reſpective

$$\frac{\log a + \log a' + \log a'' + \log a''' + \ldots.}{b + b' + b'' + b''' + \ldots}$$

und

$$\frac{\log a}{b}, \frac{\log a'}{b'}, \frac{\log a''}{b''}, \frac{\log a'''}{b'''}, \ldots.,$$

und nach (9.) iſt

$$\frac{\log a + \log a' + \log a'' + \log a''' + \ldots.}{b + b' + b'' + b''' + \ldots}$$

$$= M\left(\frac{\log a}{b}, \frac{\log a'}{b'}, \frac{\log a''}{b''}, \frac{\log a'''}{b'''}, \ldots.\right).$$

Geht man nun von den Logarithmen zu den Zahlen über, welches nach (7.) offenbar verſtattet iſt; ſo erhält man auf der Stelle die zu beweiſende Gleichung.

13. Für $b = b' = b'' = b''' \ldots = 1$ erhält man, wenn die Anzahl dieſer Größen durch n bezeichnet wird, aus dem vorigen Satze

$$\sqrt[n]{aa'a''a'''} = M(a, a', a'', a''', \ldots.).$$

Die Wurzelgröße auf der linken Seite des Gleichheitszeichens nennt man das geometriſche Mittel zwiſchen den n Größen $a, a', a'', a''' \ldots.$

Sind die Wurzelgrößen

$$\sqrt[b]{a}, \sqrt[b']{a'}, \sqrt[b'']{a''}, \sqrt[b''']{a'''}, \ldots.$$

alle einander gleich; ſo folgt aus (12.) auf der Stelle

$$(aa'a''a''' \ldots.)^{\frac{1}{b+b'+b''+b'''+\ldots}} = \sqrt[b]{a} = \sqrt[b']{a'} = \sqrt[b'']{a''} = \ldots.$$

oder

$$\sqrt[m]{aa'a''a''' \ldots} = \sqrt[b]{a} = \sqrt[b']{a'} = \sqrt[b'']{a''} = \sqrt[b''']{a'''} = \ldots.,$$

wo immer

$$m = b + b' + b'' + b''' + \ldots.$$

iſt.

14. Wenn die Brüche

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''}, \ldots.$$

alle einander gleich ſind; ſo iſt immer

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{a'''}{b'''} = \ldots = \pm \frac{\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2 + \ldots}}{\sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2 + b'''^2 + \ldots}},$$

indem man das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem die gegebenen Brüche ſämmtlich poſitiv oder ſämmtlich negativ ſind.

Nach der Vorausſetzung iſt nämlich

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a'^2}{b'^2} = \frac{a''^2}{b''^2} = \frac{a'''^2}{b'''^2} = \ldots\ldots;$$

und folglich nach (10.)

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a'^2}{b'^2} = \frac{a''^2}{b''^2} = \frac{a'''^2}{b'''^2} = \ldots\ldots = \frac{a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2 + \ldots\ldots}{b^2 + b'^2 + b''^2 + b'''^2 + \ldots\ldots},$$

woraus der zu beweiſende Satz auf der Stelle durch Ausziehung der Quadratwurzel auf beiden Seiten folgt.

In dem Artikel Ungleich (22.) iſt bewieſen worden, daß das geometriſche Mittel zwiſchen mehrern poſitiven Größen jederzeit kleiner als das arithmetiſche Mittel zwiſchen dieſen Größen iſt.

Mör nennt Werneburg in ſeiner Teliosadik (ſ. dieſen Artikel) das, was ſonſt gewöhnlich Eilf heißt.

N.

Neiliſche Parabel, ſ. Parabeln höherer Art und Cubiſche Parabel.

Nonius, ſ. Theilung (19.).

P.

Parallelentheorieen von Keſaer (Wien. 1778.), Schulz (Königsberg. 1784. 86.), Duvrier (Leipzig. 1808.), Crelle (Berl. 1816.), Müller (Nürnb. 1819.), Küſter (Hamm. 1821.), Guntz (Grätz. 1815.), Wahl (Jenae. 1823.), Jacobi (Jenae. 1824.), Hegenberg (Berlin. 1825.), Taurinus (Cöln, 1825.), Heßling (Halle. 1818.), C. R. Müller (Marb. 1822.), Huber (Baſel. 1823.).

Partikuläre Auflöſungen der Differentialgleichungen, ſ. Einhüllende Curven und Flächen (7.) und (14.) i. d. Z.

Partikuläre Integrale, ſ. Einhüllende Curven und Flächen (7.) und (14.) i. d. Z.

Periodiſche Functionen. Wenn $\varphi(x)$ eine beliebige Function von x iſt; ſo wollen wir Ausdrücke von der Form $\varphi(\varphi(x))$, $\varphi(\varphi(\varphi(x)))$, $\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(x))))$, $\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(x)))))$, u. ſ. w., deren Bedeutung leicht erhellen wird, der Kürze wegen durch $\varphi^2(x)$, $\varphi^3(x)$, $\varphi^4(x)$, $\varphi^5(x)$, u. ſ. w. bezeichnen, woraus auch erſichtlich iſt, was im Allgemeinen $\varphi^n(x)$ bezeichnet. Wenn nun die Function $\varphi(x)$ ſo beſchaffen iſt, daß für irgend ein n und natürlich für jedes beliebige x

$$\varphi^n(x) = \varphi(x)$$

iſt; ſo heißt die Function $\varphi(x)$ eine periodiſche Function. Da aber

$$\varphi^n(x) = \varphi(\varphi^{n-1}(x))$$

iſt; ſo iſt

$$\varphi(\varphi^{n-1}(x)) = \varphi(x)$$

und folglich

$$\varphi^{n-1}(x) = x\,.$$

Daher wird die Function $\varphi(x)$ offenbar auch dann jederzeit eine periodiſche Function ſeyn, wenn für irgend ein n

$$\varphi^n(x) = x$$

iſt. Functionen, für welche $\varphi^2(x) = x$ iſt, ſind z. B. folgende aus einer Abhandlung von Babbage in den **Philosophical Transactions. 1815. p. 411.** entlehnte Functionen:

$$a - x,\ \frac{x}{ax - 1},\ \frac{b - x}{1 - ax}\,.$$

Eine allgemeine Regel zur Erfindung periodiſcher Functionen hat Clauſen in **Crelles Journal. B. IV. S. 280.** gegeben. Sey nämlich $y = f(x)$ eine beliebige Function von x und α ein Werth der nten Wurzel aus der Einheit oder $\alpha^n = 1$. Nun betrachte man $f(\alpha x)$ als eine Function von $f(x)$ oder y und ſetze zu dem Ende

$$f(\alpha x) = \varphi\{f(x)\} = \varphi(y)\,;$$

ſo iſt

$$\begin{aligned}
\varphi^2(y) &= \varphi\{f(\alpha x)\} = f(\alpha^2 x)\,,\\
\varphi^3(y) &= \varphi\{f(\alpha^2 x)\} = f(\alpha^3 x)\,,\\
\varphi^4(y) &= \varphi\{f(\alpha^3 x)\} = f(\alpha^4 x)\,,\\
\varphi^5(y) &= \varphi\{f(\alpha^4 x)\} = f(\alpha^5 x)\,,\\
&\text{u. ſ. w.} \qquad \text{u. ſ. w.}\\
\varphi^n(y) &= \varphi\{f(\alpha^{n-1} x)\} = f(\alpha^n x)\,,
\end{aligned}$$

und folglich, weil nach der Vorausſetzung $\alpha^n = 1$ iſt,

$$\varphi^n(y) = f(x) = y\,.$$

Alſo iſt $\varphi^n(y)$ eine periodiſche Function.

Um dies durch ein ganz leichtes Beiſpiel zu erläutern, wollen wir

$$y = f(x) = \frac{a + bx}{\alpha + \beta x}$$

und $\alpha = -1$, wo alſo $\alpha^2 = 1$ iſt, ſetzen; ſo iſt

$$f(\alpha x) = f(-x) = \frac{a - bx}{\alpha - \beta x}\,.$$

Aus der Gleichung

$$y = \frac{a + bx}{\alpha + \beta x}$$

folgt nun

$$x = \frac{a - \alpha y}{\beta y - b},$$

und es iſt alſo

$$f(\alpha x) = \varphi(y) = \frac{a - \frac{b(a-\alpha y)}{\beta y - b}}{\alpha - \frac{\beta(a-\alpha y)}{\beta y - b}},$$

oder

$$\varphi(y) = \frac{(a\beta + \alpha b)y - 2ab}{2\alpha\beta y - \alpha b - \beta a},$$

und man wird leicht finden, daß dieſe Function die Eigenſchaft hat, daß $\varphi^2(y) = y$ iſt, ſo daß alſo dieſelbe eine periodiſche Function iſt. Um dies nur an einem ſpeciellen Falle zu erläutern, wollen wir $a=3$, $b=1$, $\alpha=2$, $\beta=1$ ſetzen. Dies giebt

$$\varphi(y) = \frac{5y-6}{4y-5},$$

und in dieſem Falle iſt

$$\varphi^2(y) = \frac{5.\frac{5y-6}{4y-5} - 6}{4.\frac{5y-6}{4y-5} - 5} = \frac{25y - 30 - 24y + 30}{20y - 24 - 20y + 25},$$

d. i.

$$\varphi^2(y) = \frac{y}{1} = y,$$

wie es ſeyn ſoll.

Pol und Polare, ſ. den Artikel Verwandtſchaft der Collineation u. ſ. w. (1.) i. d. Z.

Potenzebene zweier Kugeln iſt daſſelbe, was im Artikel Anwendung der Analyſis auf die Geometrie (11.) i. d. Z. Radicalebene zweier Kugeln genannt worden iſt.

Potenzenlinie zweier Kreiſe oder dreier Kugeln iſt daſſelbe, was im Artikel Anwendung der Analyſis auf die Geometrie (8.) und (11.) i. d. Z. Radical-Axe zweier Kreiſe oder dreier Kugeln genannt worden iſt.

Probabilitäten-Rechnung, ſ. Wahrſcheinlichkeitsrechnung.

Product. Die Summe der am Ende dieſes Artikels angeführten merkwürdigen Reihe ſ. m. im Artikel Elliptiſche Functionen (57.) i. d. Z.

Pyramide. Eine ſehr gute Schrift über die dreieckige Pyramide iſt: K. W. Feuerbachs Grundriß zu analytiſchen

Unterſuchungen der dreieckigen Pyramide. Nürnb. 1827. Auch ſ. m. **J. H. T. Müller Disquisitiones de Tetraedro. Numburgi.** 1831. und Straszniɔki: das geradlinige Dreieck und die dreiſeitige Pyramide nach allen Analogien dargeſtellt. Wien. 1827. Mittheilungen aus dieſen Schriften geſtattet hier leider der Raum nicht.

Pythagoriſcher Lehrſatz. Der pythagor. Lehrſatz mit zwei und dreißig theils bekannten, theils neuen Beweiſen von J. J. J. Hoffmann. Mainz. 1819. Nachträge zu dieſer Schrift von J. W. Müller Nürnb. 1819.

Q.

Quadratur. Zwei, natürlich bloß näherungsweiſe richtige Conſtructionen des Kreis-Umfangs, von denen die eine bis zur ſechſten, die andere bis zur achten Decimalſtelle mit dem Calcul übereinſtimmt, hat Specht in **Crelles Journal. B. III. S.** 83. 405. geliefert. Die erſte dieſer beiden Conſtructionen wollen wir, als die einfachere, hier mittheilen. Man zeichne ſich einen rechten Winkel und nehme auf einem Schenkel deſſelben **AB** (Fig. 34.) dem Radius, auf dem andern Schenkel **AC** dem Durchmeſſer des gegebenen Kreiſes gleich. Hierauf mache man **CD = DE = EF** gleich dem fünften Theile des Radius, ziehe **BD** und **BF**, nehme **AN = BD** und ziehe durch **N** mit **BF** die Parallele **NK**; ſo iſt **BK** der Umfang, Δ**ABK** der Flächeninhalt des gegebenen Kreiſes, bis zur ſechſten Decimalſtelle genau. Um dies zu beweiſen ſetze man den Radius **AB = 1**, den Durchmeſſer **AC = 2**; alſo **AD** $= 2\frac{1}{5}$, **AF** $= 2\frac{3}{5}$. Folglich iſt

$$BD^2 = 1 + \left(\frac{11}{5}\right)^2 = 1 + \frac{121}{25} = \frac{146}{25},\ BD = \tfrac{1}{5}\sqrt{146}\,.$$

Aber

$$AB : AN = AF : AK\ ,$$

d. i., weil **AN = BD** iſt,

$$AB : BD = AF : AK\ ,$$

und folglich

$$1 : \tfrac{1}{5}\sqrt{146} = \frac{13}{5} : AK\,.$$

Daher iſt

$$AK = \frac{13\sqrt{146}}{25} = \sqrt{39{,}4784} = 2.3{,}1415919531\ ,$$

Weil nun bekanntlich $\pi = 3{,}1415926535$ iſt; ſo ſieht man, daß **AK** den Umfang, Δ**ABK** den Inhalt des Kreiſes bis zur ſechſten Decimalſtelle genau darſtellt.

Bemerkt kann hierbei noch werden, daß

$$\frac{7}{0^7} + \frac{13\sqrt{146}}{50} = \left\{ \begin{array}{r} 3{,}1415919531 \\ +\,0{,}0000007 \end{array} \right\} = 3{,}1415926531$$

iſt, und der Ausdruck

$$\frac{7}{10^7} + \frac{13\sqrt{146}}{50}$$

alſo erſt in der zehnten Decimalſtelle von der Zahl π abweicht.

R.

Reciprocität. Ueber die Verwandtſchaft der Reciprocität ſ. m. den Artikel Verwandtſchaft der Collineation u. ſ. w. i. d. Z. Ueber den Satz von der Reciprocität in der Zahlenlehre ſ. m. den Artikel Zahl IV.

Rectification. Ueber die Rectification der Ellipſe und Hyperbel ſ. m. vorzüglich auch den Artikel Elliptiſche Functionen (9. XII. XIV. XV.) i. d. Z. und über die Rectification der Ellipſe außerdem noch hauptſächlich den Artikel Integration durch Annäherung (6.) i. d. Z.

S.

Stetige Functionen. Sey $y = f(x)$ eine Function von x, und a, b ſeyen zwei beſtimmte Werthe von x. Wenn nun für jeden zwiſchen a und b liegenden Werth von x die in Rede ſtehende Function einen endlichen völlig beſtimmten Werth hat, und einer unendlich kleinen Veränderung von x jederzeit auch eine unendlich kleine Veränderung der Function entſpricht; ſo ſagt man, daß die Function *zwiſchen den Gränzen $x = a$ und $x = b$ ſtetig ſey*. Auch ſagt man, daß die Function $y = f(x)$ *in der Nähe des beſtimmten Werths α von x ſtetig ſey*, wenn dieſelbe zwiſchen zwei, den Werth α zwiſchen ſich enthaltenden Gränzen ſtetig iſt, wie nahe dieſe Gränzen auch ſich ſelbſt und dem Werthe α kommen mögen. Findet dies aber in Bezug auf den Werth α von x nicht Statt; ſo ſagt man, daß die Function für $x = \alpha$ *discontinuirlich* werde, oder daß bei $x = \alpha$ eine *Unterbrechung der Stetigkeit* der Function Statt finde. Die Functionen $a \pm x$, A^x, $\sin x$, $\cos x$ ſind z. B. zwiſchen den Gränzen $x = -\infty$ und $x = +\infty$ ſtetig. Die Function $\frac{a}{x}$ iſt ſowohl zwiſchen den Gränzen $x = -\infty$ und $x = 0$, als auch zwiſchen den Gränzen $x = 0$ und $x = +\infty$ ſtetig; bei $x = 0$ findet aber eine Unterbrechung der Stetigkeit dieſer Function Statt. Die Functionen $\mathrm{Arc}\sin x$ und $\mathrm{Arc}\cos x$ ſind zwiſchen den Gränzen $x = -1$ und $x = +1$ ſtetig. Die Function $l\,x$ iſt zwiſchen den Gränzen $x = 0$ und $x = +\infty$ ſtetig. Für

die Function tangx findet bei $x = \pm \frac{1}{2}(2n+1)\pi$, wenn n eine ganze Zahl bezeichnet, jederzeit eine Unterbrechung der Stetigkeit Statt.

Ueber discontinuirliche Functionen ſ. m. zwei leſenswerthe Abhandlungen von Libri in Crelles Journal. B. X. S. 303. Auch vergl. m. B. VI. S. 67.

Die obigen Begriffe auf Functionen mit mehrern veränderlichen Größen auszudehnen, wird keine Schwierigkeit haben.

Sturms Satz von den Gleichungen enthält ein Kriterium, durch welches man immer ſicher beurtheilen kann, wie viele reelle Wurzeln einer algebraiſchen Gleichung zwiſchen zwei beliebigen gegebenen Gränzen liegen müſſen, da im Gegentheile das berühmte im Artikel Gleichung (64. VIII.) bewieſene Fourierſche Theorem ein Kriterium enthält, durch welches man beurtheilen kann, wie viele reelle Wurzeln einer algebraiſchen Gleichung zwiſchen zwei beliebigen gegebenen Gränzen liegen können. Sturm hat ſeinen Satz am 23. Mai 1829 in der Pariſer Akademie der Wiſſenſchaften vorgetragen, und ſpäterhin im eilften Bande des Bulletin des sciences math., phys. et chim. von Feruſſac S. 419., jedoch ohne Beweis, mitgetheilt. Einen Beweis gab zuerſt v. Ettingshauſen im ſiebenten Bande der Zeitſchrift für Mathematik und Phyſik S. 444., und dann auch Crelle im dreizehnten Bande ſeines Journals. Den letzten Beweis werden wir dem Weſentlichen nach hier mittheilen.

1. Nach dem Artikel Gleichung (58. IV.) i. d. Z. ſind wir berechtigt anzunehmen, daß die gegebene Gleichung

$$1.\quad f(x) = 0,$$

wo f(x) eine ganze rationale algebraiſche Function des nten Grades bezeichnen ſoll, bloß ungleiche Wurzeln hat.

Die erſte derivirte Function von f(x) wollen wir im Folgenden durch $f_1(x)$ bezeichnen, ſo daß alſo

$$2.\quad f'(x) = f_1(x)$$

iſt, und wollen nun eine Reihe von Größen auf folgende Art bilden. Man dividire f(x) durch $f_1(x)$, und bezeichne den Quotienten durch q_1, den Reſt, negativ genommen, durch $f_2(x)$; hierauf dividire man $f_1(x)$ durch $f_2(x)$, und bezeichne den Quotienten durch q_2, den Reſt, negativ genommen, durch $f_3(x)$; eben ſo dividire man $f_2(x)$ durch $f_3(x)$, bezeichne den Quotienten durch q_3, den Reſt, negativ genommen, durch $f_4(x)$, und ſetze dieſes Verfahren überhaupt bis zu dem negativ genommenen Reſte $f_n(x)$ fort; ſo erhält man die folgende Reihe von Gleichungen:

$$3. \begin{cases} f(x) = q_1 f_1(x) - f_2(x), \\ f_1(x) = q_2 f_2(x) - f_3(x), \\ f_2(x) = q_3 f_3(x) - f_4(x), \\ f_3(x) = q_4 f_4(x) - f_5(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n-2}(x) = q_{n-1} f_{n-1}(x) - f_n(x), \end{cases}$$

und wird ſich nun leicht von den folgenden Eigenſchaften der Größen

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots\ f_n(x)$$

überzeugen.

I. $f_n(x)$ iſt jederzeit eine conſtante Größe.

Da nämlich nach der Vorausſetzung $f(x)$ vom nten, und nach der aus dem Artikel Gleichung (47.) i. d. Z. bekannten Methode, die derivirten Functionen einer ganzen rationalen algebraiſchen Function zu entwickeln, $f_1(x)$ vom $(n-1)$ſten Grade iſt; ſo ergiebt ſich aus der Natur der Diviſion auf der Stelle, daß die Functionen

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots\ f_{n-1}(x),\ f_n(x)$$

nach der Ordnung im Allgemeinen vom

nten, $(n-1)$ſten, $(n-2)$ten, ... 1ſten, 0ten

Grade ſind, und folglich $f_n(x)$, wie behauptet wurde, jederzeit eine conſtante Größe iſt.

II. Keines der Größenpaare

$$f(x) \text{ und } f_1(x),$$
$$f_1(x) \text{ und } f_2(x),$$
$$f_2(x) \text{ und } f_3(x),$$
$$\ldots\ldots$$
$$f_{n-1}(x) \text{ und } f_n(x)$$

verſchwindet für denſelben Werth von x.

Wäre nämlich für $x = \alpha$ zugleich

$$f(\alpha) = 0 \text{ und } f_1(\alpha) = 0,$$

d. i.

$$f(\alpha) = 0 \text{ und } f'(\alpha) = 0;$$

ſo hätte nach dem Artikel Gleichung (58. III.) i. d. Z. die Gleichung $f(x) = 0$ mindeſtens zwei einander gleiche Wurzeln, welches gegen die Vorausſetzung iſt. Daher können $f(x)$ und $f_1(x)$ für keinen Werth von x zugleich verſchwinden.

Wäre ferner für $x = \alpha$ zugleich

$$f_1(\alpha) = 0 \text{ und } f_2(\alpha) = 0;$$

ſo wäre nach dem Artikel Gleichung (15.) i. d. Z. $x - \alpha$ ein gemeinſchaftlicher Factor von $f_1(x)$ und $f_2(x)$; alſo, wegen der Gleichung

$$f(x) = q_1 f_1(x) - f_2(x),$$

auch ein Factor von $f(x)$, und folglich zugleich

$$f(\alpha) = 0, \quad f_1(\alpha) = 0,$$

welches gegen das vorher Bewieſene ſtreitet. Daher können $f_1(x)$ und $f_2(x)$ für keinen Werth von x zugleich verſchwinden.

Wäre ferner für $x = \alpha$ zugleich

$$f_2(\alpha) = 0 \text{ und } f_3(\alpha) = 0;$$

ſo wäre nach dem angeführten Saꜩe aus dem Artikel Gleichung wieder $x - \alpha$ ein gemeinſchaftlicher Factor von $f_2(x)$ und $f_3(x)$; wegen der Gleichung

$$f_1(x) = q_2 f_2(x) - f_3(x)$$

auch ein Factor von $f_1(x)$, und folglich zugleich

$$f_1(\alpha) = 0, \quad f_2(\alpha) = 0,$$

welches wieder gegen das vorher Bewieſene ſtreitet, ſo daß alſo auch $f_2(x)$ und $f_3(x)$ für keinen Werth von x zugleich verſchwinden können, und nun auch erhellen wird, wie man auf dieſe Art immer weiter gehen kann.

III. Wenn irgend ein Glied $f_k(x)$ der Reihe

$$f(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots f_n(x),$$

welches weder das erſte, noch das conſtante leꜩte Glied dieſer Reihe iſt, für den reellen Werth a von x verſchwindet; ſo verſchwindet keines der beiden Glieder $f_{k-1}(x)$ und $f_{k+1}(x)$ für $x = a$, und $f_{k-1}(a)$ und $f_{k+1}(a)$ haben jederzeit entgegengeſeꜩte Vorzeichen.

Wäre $f_{k-1}(a) = 0$, ſo wäre zugleich

$$f_{k-1}(a) = 0 \text{ und } f_k(a) = 0,$$

welches nach **II.** nie der Fall ſeyn kann. Eben ſo wenig kann $f_{k+1}(a) = 0$ ſeyn, weil ſonſt zugleich

$$f_k(a) = 0 \text{ und } f_{k+1}(a) = 0$$

wäre, welches wieder gegen das in **II.** Bewieſene ſtreitet. Nun iſt aber nach (3.) für jedes x

$$f_{k-1}(x) = q_k f_k(x) - f_{k+1}(x),$$

und folglich auch

$$f_{k-1}(a) = (q_k) f_k(a) - f_{k+1}(a),$$

wenn (q_k) den Werth der Function q_k für $x = a$ bezeichnet. Weil nun $f_k(a) = 0$ iſt; ſo iſt

$$f_{k-1}(a) = -f_{k+1}(a),$$

und $f_{k-1}(a)$ und $f_{k+1}(a)$ haben alſo jederzeit entgegengeſeꜩte Vorzeichen.

IV. Keine der Größen

$$f(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots f_n(x)$$

kann identiſch, d. h. für jeden beliebigen Werth von x, Null ſeyn.

Wäre für jeden beliebigen Werth von x

$$f_k(x) = 0;$$

ſo wäre, wegen der Gleichung

$$f_{k-2}(x) = q_{k-1}f_{k-1}(x) - f_k(x),$$

für jeden beliebigen Werth von x

$$f_{k-2}(x) = q_{k-1}f_{k-1}(x),$$

oder $f_{k-2}(x)$ wäre für jedes beliebige x durch $f_{k-1}(x)$ ohne Reſt theilbar. Weil nun ferner

$$f_{k-3}(x) = q_{k-2}f_{k-2}(x) - f_{k-1}(x)$$

iſt; ſo wäre für jedes x

$$f_{k-3}(x) = (q_{k-2}q_{k-1} - 1)f_{k-1}(x)$$

und folglich auch $f_{k-3}(x)$ für jedes x durch $f_{k-1}(x)$ ohne Reſt theilbar. Auf dieſe Art weiter fortſchreitend, findet man endlich, daß $f_{k-1}(x)$ ſowohl in $f_1(x)$, als auch in $f(x)$, aufgehen müßte, und daß alſo $f(x)$ und $f_1(x)$, oder $f(x)$ und $f'(x)$, für irgend einen gewiſſen Werth von x zugleich verſchwinden würden, die Gleichung $f(x) = 0$ folglich nach dem Artikel Gleichung (58. **III.**) i. d. Z. nothwendig gleiche Wurzeln haben müßte, welches gegen die Vorausſetzung ſtreitet.

2. Im Folgenden ſoll i immer eine unendlich kleine poſitive Größe bezeichnen, und die Reihe der Vorzeichen der Größen

$$f(a),\ f_1(a),\ f_2(a),\ f_3(a),\ \ldots\ f_n(a)$$

ſoll der Kürze wegen durch $\{a\}$ bezeichnet werden. Verſchwindet ein Glied der Reihe

$$f(a),\ f_1(a),\ f_2(a),\ f_3(a),\ \ldots\ f_n(a);$$

ſo ſoll das fehlende Glied der Zeichenreihe $\{a\}$ jederzeit durch $\pm$ ausgefüllt werden, ſo daß man beliebig das obere oder das untere Zeichen nehmen kann. Auch bemerken wir hier ein für alle Mal, daß alle Größen, die wir im Folgenden betrachten werden, reelle Größen ſeyn ſollen. Dies vorausgeſetzt, laſſen ſich nun die folgenden Sätze beweiſen.

I. Wenn $f_k(\alpha)$ nicht $= 0$ iſt; ſo iſt weder $f_k(\alpha - i)$, noch $f_k(\alpha + i)$, $= 0$, und dieſe beiden Größen haben mit $f_k(\alpha)$ jederzeit einerlei Vorzeichen. Auch wird man immer annehmen können, daß die Function $f_k(x)$ überhaupt zwiſchen $x = \alpha - i$ und $x = \alpha + i$ ihr Zeichen nicht ändert.

Dieſer Satz erhellet auf der Stelle ohne weitern Beweis, wenn man nur bedenkt, daß i eine unendlich kleine poſitive Größe bezeichnet, die alſo, weil jede ganze rationale algebraiſche Function ſich ſtetig verändert, wenn man die veränderliche Größe, von welcher ſie abhängt, ſich ſtetig verändern läßt, auch immer ſo klein gedacht werden kann, daß, wenn $f_k(\alpha)$ nicht $= 0$ iſt, auch

keine der Größen $f_k(\alpha - i)$ und $f_k(\alpha + i) = 0$ iſt, und jede dieſer beiden Größen mit $f_k(\alpha)$ gleiches Vorzeichen hat.

II. Wenn $f(\alpha)$ nicht $= 0$ iſt; ſo iſt in jeder der drei Zeichenreihen

$$\{\alpha - i\},\ \{\alpha\},\ \{\alpha + i\}$$

eine gleiche Anzahl von Zeichenwechſeln enthalten.

Verſchwindet kein Glied der Reihe

$$f(\alpha),\ f_1(\alpha),\ f_2(\alpha),\ f_3(\alpha),\ \ldots\ f_n(\alpha);$$

ſo folgt der Satz unmittelbar aus **I.** Iſt aber im Allgemeinen

$$f_k(\alpha) = 0,$$

wo nach der Vorausſetzung k nicht $= 0$ iſt; ſo haben nach (**1. III.**) die beiden Größen $f_{k-1}(\alpha)$ und $f_{k+1}(\alpha)$ entgegengeſetzte Vorzeichen, und keine dieſer beiden Größen iſt $= 0$. Alſo iſt nach **I.** keine der beiden Größen $f_{k-1}(\alpha - i)$, $f_{k-1}(\alpha + i) = 0$, und jede dieſer beiden Größen hat mit $f_{k-1}(\alpha)$ gleiches Vorzeichen, ſo wie auch ganz auf dieſelbe Art keine der beiden Größen $f_{k+1}(\alpha - i)$, $f_{k+1}(\alpha + i) = 0$ iſt, und jede dieſer beiden Größen mit $f_{k+1}(\alpha)$ einerlei Vorzeichen hat. Hieraus ergiebt ſich nun, daß in Bezug auf die den Gliedern

$$f_{k-1}(\alpha - i),\ f_k(\alpha - i),\ f_{k+1}(\alpha - i);$$
$$f_{k-1}(\alpha),\ f_k(\alpha),\ f_{k+1}(\alpha);$$
$$f_{k-1}(\alpha + i),\ f_k(\alpha + i),\ f_{k+1}(\alpha + i)$$

entſprechenden Glieder der Zeichenreihen

$$\{\alpha - i\},\ \{\alpha\},\ \{\alpha + i\}$$

bloß die folgenden Fälle Statt finden können, wobei wir die Zeichen, durch welche das fehlende Glied der Zeichenreihe $\{\alpha\}$ ausgefüllt worden iſt, durch Einſchließung in Parentheſen unterſchieden haben:

$$\begin{array}{cccc}
\pm\ \pm\ \mp & \pm\ \mp\ \mp & \pm\ \pm\ \mp & \pm\ \mp\ \mp \\
\pm(\pm)\mp & \pm(\pm)\mp & \pm(\pm)\mp & \pm(\pm)\mp \\
\pm\ \pm\ \mp & \pm\ \mp\ \mp & \pm\ \mp\ \mp & \pm\ \pm\ \mp \\
 & & & \\
\pm\ \pm\ \mp & \pm\ \mp\ \mp & \pm\ \pm\ \mp & \pm\ \mp\ \mp \\
\pm(\mp)\mp & \pm(\mp)\mp & \pm(\mp)\mp & \pm(\mp)\mp \\
\pm\ \pm\ \mp & \pm\ \mp\ \mp & \pm\ \mp\ \mp & \pm\ \pm\ \mp.
\end{array}$$

Ueberblickt man nun dieſe Zeichenfolgen genauer; ſo überzeugt man ſich auf der Stelle, daß vom erſten bis zum dritten Zeichen in jeder Zeichenreihe ein Zeichenwechſel, und nicht mehr, Statt findet, woraus ſich ſehr leicht ergiebt, daß, ſo viele Glieder der Reihe

$$f(\alpha),\ f_1(\alpha),\ f_2(\alpha),\ f_3(\alpha),\ \ldots\ f_n(\alpha)$$

auch verſchwinden mögen, doch jederzeit die drei Zeichenreihen

$$\{\alpha-i\},\ \{\alpha\},\ \{\alpha+i\}$$

eine gleiche Anzahl von Zeichenwechſeln enthalten werden, wenn nur, wie vorausgeſetzt wurde, $f(\alpha)$ nicht $=0$ iſt, und nach I. folglich die drei Größen

$$f(\alpha-i),\ f(\alpha),\ f(\alpha+i),$$

deren keine nach **I.** $=0$ iſt, gleiche Vorzeichen haben.

III. Wenn die Function $f(x)$ für keinen Werth von x von $x=a$ bis $x=b$, wobei wir annehmen, daß $a<b$ ſey, verſchwindet; ſo enthalten die beiden Zeichenreihen $\{a\}$ und $\{b\}$ jederzeit eine gleiche Anzahl von Zeichenwechſeln.

Von der Richtigkeit dieſes Satzes überzeugt man ſich auf der Stelle mittelſt des in **II.** bewieſenen Satzes, wenn man ſich nur vorſtellt, daß die Größe x von $x=a$ bis $x=b$ ſtetig wächſt.

IV. Wenn $f(\alpha)=0$ iſt; ſo hat die Zeichenreihe $\{\alpha+i\}$ jederzeit einen Zeichenwechſel weniger wie die Zeichenreihe $\{\alpha-i\}$.

Weil $f(\alpha)=0$ iſt, ſo kann $f_1(\alpha)$, d. i. $f'(\alpha)$, nicht $=0$ ſeyn, weil ſonſt die Gleichung $f(x)=0$ nothwendig gleiche Wurzeln haben müßte, welches gegen die Vorausſetzung ſtreitet. Alſo haben nach **II.** die den Reihen

$$f_1(\alpha-i),\ f_2(\alpha-i),\ f_3(\alpha-i),\ \ldots\ f_n(\alpha-i)$$

und

$$f_1(\alpha+i),\ f_2(\alpha+i),\ f_3(\alpha+i),\ \ldots\ f_n(\alpha+i)$$

entſprechenden Zeichenreihen, welche wir der Kürze wegen durch $[\alpha-i]$ und $[\alpha+i]$ bezeichnen wollen, eine gleiche Anzahl von Zeichenwechſeln. Da $f_1(\alpha)$ nicht $=0$ iſt; ſo iſt nach **I.** auch keine der Größen $f_1(\alpha-i)$ und $f_1(\alpha+i)=0$. Nach dem im Artikel Gleichung (57. I.) i. d. Z. bewieſenen Satze iſt aber

$$f(\alpha-i)=f(\alpha)-if'(\alpha-\varrho i),$$
$$f(\alpha+i)=f(\alpha)+if'(\alpha+\varrho' i),$$

wo ϱ, ϱ' zwei die Einheit nicht überſteigende poſitive Größen bezeichnen. Weil nun

$$f'(\alpha-\varrho i)=f_1(\alpha-\varrho i),\quad f'(\alpha+\varrho' i)=f_1(\alpha+\varrho' i)$$

und $f(\alpha)=0$ iſt; ſo iſt

$$f(\alpha-i)=-if_1(\alpha-\varrho i),\quad f(\alpha+i)=if_1(\alpha+\varrho' i);$$

und es hat alſo jederzeit $f(\alpha-i)$ mit $f_1(\alpha-\varrho i)$ entgegengeſetztes, $f(\alpha+i)$ mit $f_1(\alpha+\varrho' i)$ einerlei Vorzeichen. Da aber ϱ und ϱ' poſitive die Einheit nicht überſteigende Größen ſind; ſo

hat nach I. ſowohl $f_1(\alpha-\varrho i)$ mit $f_1(\alpha-i)$, als auch $f_1(\alpha+\varrho' i)$ mit $f_1(\alpha+i)$ einerlei Vorzeichen, und es hat folglich auch jederzeit $f(\alpha-i)$ mit $f_1(\alpha-i)$ entgegengeſetztes, $f(\alpha+i)$ mit $f_1(\alpha+i)$ einerlei Vorzeichen. Daher bilden die beiden erſten Glieder der Zeichenreihe $\{\alpha-i\}$ immer einen Zeichenwechſel, die beiden erſten Glieder der Zeichenreihe $\{\alpha+i\}$ dagegen eine Zeichenfolge, ſo daß alſo, weil nach dem Obigen die beiden Zeichenreihen $[\alpha-i]$ und $[\alpha+i]$ eine gleiche Anzahl von Zeichenwechſeln enthalten, die Zeichenreihe $\{\alpha+i\}$ jederzeit einen Zeichenwechſel weniger wie die Zeichenreihe $\{\alpha-i\}$ hat, wie bewieſen werden ſollte.

V. **Zwiſchen den Gränzen $x=a$ und $x=b$, welche nicht ſelbſt Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ ſeyn ſollen, liegen jederzeit eben ſo viele reelle Wurzeln dieſer Gleichung, als die Zahl der Zeichenwechſel der Zeichenreihe $\{b\}$, vorausgeſetzt daß $b>a$ iſt, gegen die Zahl der Zeichenwechſel der Zeichenreihe $\{a\}$ Einheiten weniger enthält.**

Man denke ſich, daß x von $x=a$ bis $x=b$ ſtetig wachſe; ſo geht nach dem in IV. bewieſenen Satze für jede zwiſchen a und b liegende reelle Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ ein, aber auch nur **ein** Zeichenwechſel der Zeichenreihe $\{a\}$ verloren, woraus ſich der zu beweiſende Satz unmittelbar ergiebt.

Dies iſt der wichtige von **Sturm** gefundene Satz, und enthält alſo, wie ſchon im Eingange bemerkt wurde, offenbar ein Kriterium, durch welches man immer ſicher beurtheilen kann, wie viele reelle Wurzeln einer Gleichung zwiſchen zwei beliebigen gegebenen Gränzen liegen **müſſen**, wobei freilich immer die Bildung der Größen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... $f_n(x)$ aus $f(x)$ nach der gegebenen Anweiſung erfordert wird.

3. Ueber dieſen Satz ſind nun aber noch die folgenden Bemerkungen zu machen.

I. Wenn $f(a)=0$, dagegen $f(b)$ nicht $=0$ iſt; ſo wollen wir die Anzahl der Wechſel in der Reihe $[a]$ durch ω, die Anzahl der Wechſel in der Reihe $\{b\}$ dagegen durch ω' bezeichnen. Da man nun jedes fehlende Glied der Reihe $[a]$ durch ein beliebiges Zeichen ausfüllen kann; ſo wird man ſich i offenbar immer ſo klein angenommen denken können, daß die Reihe $[a-i]$ ganz aus denſelben Zeichen beſteht, wie die Reihe $[a]$, und daß folglich die Anzahl der Wechſel in der Reihe $[a-i]$ auch $=\omega$ iſt. Aus (2. IV.) geht aber ganz unzweideutig hervor, daß die beiden Zeichenreihen $[a-i]$ und $\{a+i\}$ jederzeit eine gleiche Anzahl von Zeichenwechſeln enthalten, ſo daß alſo die Anzahl der Zeichenwechſel in der Reihe $\{a+i\}$ auch $=\omega$ iſt. Nach (2. V.) iſt nun die Anzahl der zwiſchen $a+i$ und b liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ der Differenz $\omega-\omega'$ gleich; alſo iſt natürlich auch die Anzahl der zwiſchen a und b liegenden reellen

Wurzeln dieſer Gleichung im vorliegenden Falle $= \omega - \omega'$, wobei die Wurzel a nicht mit gezählt iſt.

II. Wenn $f(a)$ nicht $= 0$, dagegen $f(b) = 0$ iſt; ſo ſey die Anzahl der in der Reihe {a} enthaltenen Zeichenwechſel $= \omega$, die Anzahl der in der Reihe [b] enthaltenen Zeichenwechſel $= \omega'$. In dieſem Falle überzeugt man ſich ganz auf dieſelbe Art wie vorher, daß die Anzahl der in der Reihe {b + i} enthaltenen Zeichenwechſel $= \omega'$, und folglich nach (2. V.) die Anzahl der zwiſchen a und $b + i$ enthaltenen reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung $= \omega - \omega'$ iſt. Daher iſt jetzt die Anzahl der zwiſchen a und b enthaltenen reellen Wurzeln, wobei die Wurzel b nicht mit gezählt wird, $= \omega - \omega' - 1$. Nur wenn man die Wurzel b ſelbſt mitzählen wollte, würde die Anzahl der zwiſchen a und b enthaltenen reellen Wurzeln in dieſem Falle auch $= \omega - \omega'$ ſeyn.

III. Wenn $f(a) = 0$ und $f(b) = 0$ iſt, ſoll die Anzahl der in den Zeichenreihen [a] und [b] enthaltenen Zeichenwechſel reſpective durch ω und ω' bezeichnet werden. In dieſem Falle iſt die Anzahl der in der Reihe {a + i} enthaltenen Zeichenwechſel $= \omega$, die Anzahl der in der Reihe {b + i} enthaltenen Zeichenwechſel $= \omega'$, und folglich die Anzahl der zwiſchen $a + i$ und $b + i$ enthaltenen reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ nach (2. V.) $= \omega - \omega'$. Alſo iſt die Anzahl der zwiſchen a und b enthaltenen reellen Wurzeln, wobei a und b nicht mit gezählt werden, $= \omega - \omega' - 1$.

IV. Wir haben oben immer angenommen, daß jedes fehlende Glied der beliebigen Zeichenreihe {α} durch ± ausgefüllt worden ſey. Indeß iſt dies, wie man leicht überſieht, nicht unbedingt nöthig. Iſt nämlich überhaupt $f_k(\alpha) = 0$; ſo haben nach (1. III.) $f_{k-1}(\alpha)$ und $f_{k+1}(\alpha)$ jederzeit entgegengeſetzte Vorzeichen. Füllt man nun das dem Gliede $f_k(\alpha)$ entſprechende Glied der Zeichenreihe {α} durch ± aus; ſo bilden die den Gliedern $f_{k-1}(\alpha)$, $f_k(\alpha)$, $f_{k+1}(\alpha)$ entſprechenden Glieder der Zeichenreihe {α} entweder die Folge

$$\pm \quad \pm \quad \mp$$

oder die Folge

$$\pm \quad \mp \quad \mp$$

und geben alſo in jedem Falle *einen* Zeichenwechſel. Läßt man aber in der Zeichenreihe {α} das dem Gliede $f_k(\alpha)$ entſprechende Glied ganz weg; ſo geben die den Gliedern $f_{k-1}(\alpha)$ und $f_{k+1}(\alpha)$ entſprechenden Glieder $\pm \mp$ der Zeichenreihe {α} auch jederzeit *einen* Zeichenwechſel, und die Zeichenreihe {α} enthält alſo, wenn man jedes fehlende Glied ganz wegläßt, offenbar jederzeit eben ſo viele Zeichenwechſel, als wenn man jedes fehlende Glied durch ± ausfüllt. Daher bleiben alle obigen Sätze völlig richtig, wenn man die Zeichenreihen ſo bildet, daß man jedes in denſelben fehlende Glied ganz wegläßt, und durch kein Zeichen ergänzt, welches allerdings die Anwendung dieſer Sätze erleichtert.

4. Wenn man die Reihe der Vorzeichen derjenigen Glieder allein, die in den Größen $f(\alpha)$, $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, ... $f_n(\alpha)$ die höchſte Potenz von α enthalten, durch (α) bezeichnet; ſo iſt die Zahl der reellen Wurzeln, welche die Gleichung $f(x) = 0$ überhaupt nothwendig haben muß, der Differenz zwiſchen den Zahlen der Zeichenwechſel in den Reihen $(-\infty)$ und $(+\infty)$ gleich. Die Zahl der negativen reellen Wurzeln iſt gleich der Differenz zwiſchen den Zahlen der Zeichenwechſel in den Reihen $(-\infty)$ und $\{0\}$, und die Zahl der poſitiven reellen Wurzeln iſt gleich der Differenz zwiſchen den Zahlen der Zeichenwechſel in den Reihen $\{0\}$ und $(+\infty)$.

Dieſer Satz iſt eine unmittelbare Folge aus dem Vorhergehenden, wovon man ſich auf der Stelle überzeugt, wenn man nur bedenkt, daß offenbar ſowohl die Reihen $(-\infty)$ und $\{-\infty\}$, als auch die Reihen $(+\infty)$ und $\{+\infty\}$ identiſch ſeyn müſſen.

Einige andere Bemerkungen ſ. m. noch in Crelles oben angeführtem Aufſatze.

T.

Taylors Lehrſatz. Cauchy hat neuerlich in ſeinen trefflichen **Leçons sur le calcul différentiel. Paris. 1829.**, welche als eine neue Ausgabe ſeines im Jahre 1823 erſchienenen **Resumé des leçons sur le calcul infinitésimal**, deſſen im Artikel Differentialrechnung i. d. Z. mit gebührendem Lobe gedacht worden iſt, zu betrachten ſind, einen Beweis des Taylorſchen Lehrſatzes in ſeiner weiteſten Ausdehnung gegeben, welcher ſich von dem a. a. O. geführten Beweiſe in mehreren weſentlichen Punkten unterſcheidet, und in Bezug auf Einfachheit und Strenge uns nichts mehr zu wünſchen übrig zu laſſen ſcheint. Mögen es daher die Schönheit des Beweiſes und die hohe Wichtigkeit des betreffenden Satzes entſchuldigen, wenn wir beiden hier noch den Raum einiger Blätter gönnen.

1. Die reelle Function $y = f(x)$ der einen unabhängigen veränderlichen Größe x ſey in der Nähe eines beſtimmten Werths der unabhängigen veränderlichen Größe, welchen wir aber hier der Einfachheit wegen durch x ſelbſt bezeichnen wollen, ſtetig, und der entſprechende Werth $f'(x)$ des erſten Differentialquotienten der gegebenen Function ſey eine endliche beſtimmte Größe, aber nicht $= 0$. Läßt man nun die unabhängige veränderliche Größe ſich von x an ſtetig verändern; ſo wird

I. wenn $f'(x)$ poſitiv iſt, die gegebene Function von $f(x)$ an zu- oder abnehmen, wenn reſpective die

unabhängige veränderliche Größe von x an zu- oder abnimmt. Wenn aber

II. f'(x) negativ iſt; ſo wird die gegebene Function von f(x) an zu- oder abnehmen, wenn reſpective die unabhängige veränderliche Größe von x an ab- oder zunimmt.

Die der beliebigen Aenderung Δx von x entſprechende Aenderung von f(x) ſey Δy. Nach den Principien der Differentialrechnung iſt f'(x) die Gränze, welcher $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ſich, und zwar bis zu jedem beliebigen Grade, nähert, wenn Δx ſich der Null nähert. Für der Null unendlich nahe kommende Δx haben alſo $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und f'(x) offenbar gleiche Vorzeichen. Iſt nun f'(x) poſitiv, ſo iſt für der Null unendlich nahe kommende Δx auch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ poſitiv, d. h. Δx und Δy haben gleiche Vorzeichen, oder x und f(x) nehmen gleichzeitig zu und ab. Iſt aber f'(x) negativ, ſo iſt für der Null unendlich nahe kommende Δx auch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ negativ, d. h. Δx und Δy haben ungleiche Vorzeichen, und f(x) nimmt alſo ab oder zu, wenn reſpective x zu- oder abnimmt.

2. Wenn eine zwiſchen den Gränzen $x=a$, $x=b$ ſtetige Function ihr Zeichen niemals ändert; ſo kann ſie zwiſchen dieſen Gränzen auch nirgends verſchwinden, weil eine für einen gewiſſen Werth von x verſchwindende ſtetige Function bei dieſem Werthe jederzeit vom Poſitiven zum Negativen oder vom Negativen zum Poſitiven übergeht. Umgekehrt entſpricht auch jeder Aenderung des Zeichens einer ſtetigen Function ein Durchgang derſelben durch Null. Dies vorausgeſetzt, kann man aus dem in (1.) bewieſenen Satze die folgenden wichtigen Folgerungen ziehen:

I. Wir wollen annehmen, daß $b > a$ iſt, und daß die Function $y = f(x)$ ſowohl, als auch ihr erſter Differentialquotient, zwiſchen den Gränzen $x=a$, $x=b$ ſtetig iſt, folglich auch für jeden zwiſchen dieſen Gränzen liegenden Werth von x einen endlichen beſtimmten Werth hat. Iſt nun f'(x) von $x=a$ bis $x=b$ ſtets poſitiv, ſo wird nach dem in (1.) bewieſenen Satze $y=f(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ ſtets wachſen; iſt dagegen f'(x) von $x=a$ bis $x=b$ ſtets negativ, ſo wird $y=$ (x) von $x=a$ bis $x=b$ ſtets abnehmen.

II. Ferner wollen wir annehmen, daß $b < a$ iſt, und daß die Function $y=f(x)$ ſowohl, als auch ihr erſter Differentialquotient, zwiſchen den Gränzen $x=a$, $x=b$ ſtetig iſt, und folglich auch für jedes x zwiſchen dieſen Gränzen einen endlichen beſtimmten Werth hat. Iſt dann f'(x) von $x=a$ bis $x=b$ ſtets poſitiv, ſo wird nach (1.) $y=f(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ ſtets abnehmen; iſt aber f'(x) von $x=a$ bis $x=b$ ſtets ne-

gativ, ſo wird nach (1.) $y = f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ ſtets zunehmen.

III. Wie alſo auch die Gränzen a, b beſchaffen ſeyn mögen; ſo wird, wenn $y = f(x)$ und $f'(x)$ zwiſchen dieſen Gränzen ſtetig ſind, und $f'(x)$ zwiſchen denſelben ſein Zeichen nicht ändert, die Function $y = f(x)$ zwiſchen dieſen Gränzen immer entweder ſtets wachſen oder ſtets abnehmen. Ein Uebergang dieſer Function vom Wachſen zum Abnehmen oder vom Abnehmen zum Wachſen kann nur dann Statt finden, wenn $f'(x)$ zwiſchen den in Rede ſtehenden Gränzen ſein Zeichen ändert, alſo auch irgendwo zwiſchen denſelben verſchwindet. Zugleich erhellet auch, daß einem fortwährenden Wachſen oder fortwährenden Abnehmen der Function $y = f(x)$ zwiſchen den in Rede ſtehenden Gränzen jederzeit entgegengeſetzte, aber ſich zwiſchen dieſen Gränzen immer gleich bleibende, Vorzeichen von $f'(x)$ entſprechen.

3. **Seyen $f(x)$ und $F(x)$ zwei reelle Functionen, welche für $x = a$ beide verſchwinden, und, ſo wie $f'(x)$ und $F'(x)$, zwiſchen $x = a$, $x = b$ ſtetig ſind. Aendert nun $F'(x)$ zwiſchen dieſen Gränzen ſein Zeichen nicht; ſo iſt, wenn A und B den kleinſten und größten Werth von**

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

zwiſchen $x = a$, $x = b$ bezeichnen, jederzeit

$$\frac{f(b)}{F(b)}$$

zwiſchen A und B enthalten.

Wir wollen durch i eine beliebig oder unendlich kleine poſitive Größe, die nur nicht $= 0$ iſt, bezeichnen, und ſetzen

$$A - i = A', \quad B + i = B'.$$

Nach der Vorausſetzung bezeichnen A und B den kleinſten und größten Werth von

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

zwiſchen $x = a$, $x = b$. Alſo iſt für jeden Werth von x zwiſchen dieſen Gränzen offenbar

$$\frac{f'(x)}{F'(x)} - A' > 0, \quad \frac{f'(x)}{F'(x)} - B' < 0.$$

Nach der Vorausſetzung ändert ferner $F'(x)$ zwiſchen den in Rede ſtehenden Gränzen ſein Zeichen nicht, und kann alſo zwiſchen dieſen Gränzen, außer etwa für die Gränzwerthe a, b ſelbſt, nie verſchwinden. Setzen wir indeß für's Erſte den zuletzt erwähnten Fall bei Seite, ſo iſt $F'(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ entweder ſtets > 0 oder ſtets < 0. Alſo iſt auch von $x = a$ bis $x = b$ das eine der beiden Producte

$$F'(x)\left\{\frac{f'(x)}{F'(x)} - A'\right\},\ F'(x)\left\{\frac{f'(x)}{F'(x)} - B'\right\},$$

d. i. die eine der beiden Größen

$$f'(x) - A'F'(x),\ f'(x) - B'F'(x)$$

ſtets >0, die andere ſtets <0, wobei es übrigens unbeſtimmt bleibt, für welche dieſer beiden Größen das Eine, und für welche das Andere Statt findet. Dieſe beiden Größen ſind aber reſpective die Differentialquotienten der Functionen

$$f(x) - A'F(x),\ f(x) - B'F(x)\,.$$

Nach dem ſo eben Bewieſenen iſt alſo der Differentialquotient der einen dieſer beiden Functionen von $x=a$ bis $x=b$ ſtets >0, der Differentialquotient der andern dagegen zwiſchen dieſen Gränzen ſtets <0. Daher wird nach (2.) die eine dieſer beiden Functionen von $x=a$ bis $x=b$ ſtets wachſen, die andere dagegen von $x=a$ bis $x=b$ ſtets abnehmen. Wir haben hierbei angenommen, daß auch an den Gränzen des Intervalls a, b die derivirte Function $F'(x)$ nicht verſchwinde. Wäre dies aber auch der Fall, ſo würde alles Obige doch für das Intervall $x=a+i$, $x=b-i$ Statt finden, wie klein man auch die poſitive Größe i nähme. Wegen der vorausgeſetzten Stetigkeit der Functionen zwiſchen den in Rede ſtehenden Gränzen wird alſo das Obige offenbar auch dann noch gelten, wenn die obige Vorausſetzung nicht erfüllt iſt. Es wird alſo jederzeit die eine der beiden Functionen

$$f(x) - A'F(x),\ f(x) - B'F(x)$$

von $x=a$ bis $x=b$ ſtets wachſen, die andere dagegen ſtets abnehmen. Weil nun aber nach der Vorausſetzung

$$f(a) = 0,\ F(a) = 0$$

iſt; ſo iſt auch

$$f(a) - A'F(a) = 0,\ f(a) - B'F(a) = 0\,.$$

Alſo wird offenbar die eine der beiden Größen

$$f(b) - A'F(b),\ f(b) - B'F(b)$$

jederzeit >0, die andere dagegen <0 ſeyn. Dividirt man nun mit $F(b)$, ſo iſt auch jederzeit die eine der beiden Größen

$$\frac{f(b)}{F(b)} - A',\ \frac{f(b)}{F(b)} - B'$$

>0, die andere dagegen <0. Weil $A'<B'$ iſt; ſo iſt klar, daß

$$\frac{f(b)}{F(b)} - A' > 0,\ \frac{f(b)}{F(b)} - B' < 0\,,$$

oder

$$\frac{f(b)}{F(b)} > A',\ \frac{f(b)}{F(b)} < B'$$

iſt. Nach dem Obigen iſt

$$A' = A - i, \; B' = B + i,$$

wo die poſitive Größe i beliebig klein genommen werden kann; nur darf man dieſelbe nicht = 0 ſelbſt ſetzen. Deshalb kann man aus dem Vorhergehenden auch nicht unmittelbar ſchließen, daß

$$\frac{f(b)}{F(b)} > A, \; \frac{f(b)}{F(b)} < B$$

iſt. Gehen wir nun aber einmal wieder auf das Obige zurück, ſo finden wir, daß die eine der beiden Größen

$$f(x) - A'F(x), \; f(x) - B'F(x)$$

von $x = a$ bis $x = b$ ſtets wächſt, die andere dagegen ſtets abnimmt, und wollen der Einfachheit wegen jetzt annehmen, daß die erſte dieſer beiden Größen die zwiſchen den angegebenen Gränzen ſtets wachſende, die zweite dagegen die zwiſchen dieſen Gränzen ſtets abnehmende Größe ſey. Ferner iſt für $x = a$ ſowohl $f(a)$, als auch $F(a) = 0$; folglich

$$f(a) - A'F(a) = 0, \; f(a) - B'F(a) = 0,$$

und natürlich auch

$$f(a) - AF(a) = 0.$$

Sollte nun die Größe

$$f(x) - AF(x)$$

zwiſchen den Gränzen $x = a$ und $x = b$ nicht auch ſtets wachſen; ſo wäre dies, weil A und A′, alſo auch

$$f(x) - AF(x) \text{ und } f(x) - A'F(x),$$

ſich beliebig nahe an einander anſchließen laſſen und überdies für $x = a$ die letztern Größen wirklich einander gleich, nämlich beide = 0 ſind, offenbar nur in dem einzigen Falle denkbar, wenn der Werth der Function

$$f(x) - AF(x)$$

ſich zwiſchen den Gränzen $x = a$ und $x = b$ gar nicht änderte, alſo immer = 0 wäre. Noch deutlicher wird dies, wenn man ſich die Functionen

$$f(x) - AF(x) \text{ und } f(x) - A'F(x)$$

zwiſchen den Gränzen $x = a$ und $x = b$ durch zwei Curven dargeſtellt denkt, die, weil dieſe Functionen für $x = a$ beide = 0 ſind, beide aus einem Punkte der angenommenen Abſciſſenaxe ausgehen. Sollte nun die erſte Function zwiſchen den in Rede ſtehenden Gränzen nicht eben ſo wie die zweite ſtets wachſen; ſo wäre dies offenbar nur in dem einen Falle möglich, wenn die, die erſte Function darſtellende Curve die Abſciſſenaxe ſelbſt wäre, wo man ſich denn die Curve, welche die zweite Function darſtellt, unendlich nahe an der Abſciſſenaxe hinlaufend zu denken hätte, wie etwa zwei gerade Linien, die ſich unter einem unendlich kleinen Winkel ſchneiden. Sollte alſo die Function

$$f(x) - AF(x)$$

von $x = a$ bis $x = b$ nicht ſtets wachſen, ſo müßte für jedes x von $x = a$ bis $x = b$

$$f(x) - AF(x) = 0$$

ſeyn, und dieſe Function ſich alſo in dieſem Intervall gar nicht verändern. Alſo müßte in dieſem Falle auch für jedes x von $x = a$ bis $x = b$ offenbar die derivirte Function

$$f'(x) - AF'(x) = 0,$$

d. i. für jedes x von $x = a$ bis $x = b$

$$\frac{f'(x)}{F'(x)} = A,$$

dieſer Bruch alſo in dem in Rede ſtehenden Intervall eine conſtante Größe, folglich natürlich auch $A = B$ ſeyn. Ganz auf dieſelbe Art würde man haben ſchließen können, wenn man angenommen hätte, daß

$$f(x) - A'F(x)$$

die in dem Intervall $x = a$, $x = b$ fortwährend abnehmende Größe wäre, und ganz dieſelbe Schlußweiſe würde auch auf die zweite Größe

$$f(x) - B'F(x)$$

anwendbar ſeyn. Iſt alſo A nicht $= B$, ſo wird immer die eine der beiden Größen

$$f(x) - AF(x), \quad f(x) - BF(x)$$

von $x = a$ bis $x = b$ ſtets abnehmen, die andere dagegen zwiſchen dieſen Gränzen fortwährend wachſen. Wie vorher iſt nun wieder

$$f(a) - AF(a) = 0, \quad f(a) - BF(a) = 0.$$

Alſo muß immer die eine der beiden Größen

$$f(b) - AF(b), \quad f(b) - BF(b)$$

> 0, die andere dagegen < 0 ſeyn. Dividirt man dieſe beiden Größen mit $F(b)$, ſo muß alſo auch immer die eine der beiden Größen

$$\frac{f(b)}{F(b)} - A, \quad \frac{f(b)}{F(b)} - B$$

> 0, die andere dagegen < 0 ſeyn, wo nun wieder, weil

$$\left\{\frac{f(b)}{F(b)} - A\right\} - \left\{\frac{f(b)}{F(b)} - B\right\} = B - A,$$

und, da A und B nicht einander gleich ſind, $B - A > 0$ iſt, auf der Stelle erhellet, daß

$$\frac{f(b)}{F(b)} - A > 0, \quad \frac{f(b)}{F(b)} - B < 0,$$

oder

$$\frac{f(b)}{F(b)} > A, \quad \frac{f(b)}{F(b)} < B$$

iſt.

Iſt aber $A = B$, ſo kann zwiſchen

$$A' = A - i,\ B' = B + i.$$

wo man ſich wieder i unendlich klein genommen denken muß, offenbar nur A oder das ihm gleiche B liegen. Weil nun nach dem Obigen

$$\frac{f(b)}{F(b)} > A',\ \frac{f(b)}{F(b)} < B'$$

iſt; ſo iſt in dieſem Falle

$$\frac{f(b)}{F(b)} = A = B.$$

In allen Fällen kann man aber ſagen, daß

$$\frac{f(b)}{F(b)}$$

zwiſchen A und B enthalten iſt.

Da A und B reſpective der kleinſte und größte Werth von

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

zwiſchen $x = a$, $x = b$ ſind; ſo iſt klar, daß, wenn $A = B$ iſt, dieſe Function jederzeit in dem in Rede ſtehenden Intervall durchgängig denſelben Werth behält, oder, wie man auch ſagen kann, in dieſem Intervall conſtant iſt.

4. Nach den Vorausſetzungen des vorigen Satzes iſt

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

eine zwiſchen den Gränzen $x = a$, $x = b$ ſtetige Function. Daher kann man ſich dieſelbe zwiſchen dieſen Gränzen auf bekannte Weiſe durch eine ſtetige Curve dargeſtellt denken. Weil nun nach (3.), wenn A, B ihre vorige Bedeutung behalten, die Größe

$$\frac{f(b)}{F(b)}$$

jederzeit zwiſchen A und B enthalten iſt; ſo iſt klar, daß es unter den Werthen der Function

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

von $x = a$ bis $x = b$ immer einen der Größe

$$\frac{f(b)}{F(b)}$$

gleichen Werth geben muß, ſo daß alſo, wenn wir den entſprechenden Werth von x durch ξ bezeichnen,

$$\frac{f(b)}{F(b)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

iſt. In dem Falle, wo A und B ungleich ſind, iſt nach dem Vorhergehenden

$$\frac{f(b)}{F(b)} > A, \frac{f(b)}{F(b)} < B,$$

ſo daß alſo in dieſem Falle ξ offenbar jederzeit größer wie der kleinere, kleiner wie der größere der beiden Gränzwerthe **a, b** iſt. In dem Falle, wo $A = B$ iſt, hat nach (3.) die Function

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

in dem Intervall $x = a$, $x = b$ lauter einander gleiche Werthe, ſo daß man alſo in dieſem Falle für ξ jeden beliebigen zwiſchen **a** und **b** liegenden Werth, alſo auch immer ξ größer wie der kleinere, kleiner wie der größere der beiden Gränzwerthe **a, b** nehmen kann. Demnach können wir annehmen, daß in allen Fällen ξ größer wie der kleinere, kleiner wie der größere der beiden Gränzwerthe **a, b** iſt.

5. Sind nun $f(x)$, $F(x)$ und $f'(x)$, $F'(x)$ zwiſchen den Gränzen $x = a$, $x = a + i$, wo **i** eine beliebig große poſitive oder negative Größe bezeichnen ſoll, ſtetig, und ändert $F'(x)$ zwiſchen dieſen Gränzen ſein Zeichen nicht; ſo folgt aus dem in (4.) Bewieſenen unmittelbar, daß, wenn die Functionen $f(x)$ und $F(x)$ für $x = a$ beide verſchwinden, jederzeit

$$\frac{f(a+i)}{F(a+i)} = \frac{f'(a+i_1)}{F'(a+i_1)}$$

iſt, wo i_1 eine Größe bezeichnet, welche mit **i** gleiches Vorzeichen, aber einen kleinern numeriſchen oder abſoluten Werth, wie **i** hat. Eine mehrfache ſucceſſive Anwendung dieſes Satzes führt dann weiter zu dem folgenden in jeder Beziehung überaus wichtigen Theorem:

Wenn die Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x), \ldots f^{(n-1)}(x);$$
$$F(x),\ F'(x),\ F''(x), \ldots F^{(n-1)}(x)$$

für $x=a$ ſämmtlich verſchwinden, und, ſo wie auch die Functionen $f^{(n)}(x)$, $F^{(n)}(x)$, zwiſchen den Gränzen $x = a$, $x = a + i$ ſtetig ſind, keine der Functionen

$$F'(x),\ F''(x),\ F'''(x), \ldots F^{(n)}(x)$$

aber zwiſchen dieſen Gränzen ihr Zeichen ändert; ſo iſt immer

$$\frac{f(a+i)}{F(a+i)} = \frac{f^{(n)}(a+i_n)}{F^{(n)}(a+i_n)},$$

wo i_n eine Größe bezeichnet, die mit **i** gleiches Vorzeichen, aber einen kleinern abſoluten oder numeriſchen Werth wie **i** hat.

Nach (4.) iſt nämlich unter den gemachten Vorausſetzungen

$$\frac{f(a+i)}{F(a+i)} = \frac{f'(a+i_1)}{F'(a+i_1)},$$
$$\frac{f'(a+i_1)}{F'(a+i_1)} = \frac{f''(a+i_2)}{F''(a+i_2)},$$
$$\frac{f''(a+i_2)}{F''(a+i_2)} = \frac{f'''(a+i_3)}{F'''(a+i_3)},$$
u. ſ. w. u. ſ. w.
$$\frac{f^{(n-1)}(a+i_{n-1})}{F^{(n-1)}(a+i_{n-1})} = \frac{f^{(n)}(a+i_n)}{F^{(n)}(a+i_n)},$$

wo die Größen $i, i_1, i_2, \ldots i_n$ ſämmtlich einerlei Vorzeichen haben, die numeriſchen Werthe dieſer Größen aber eine fortwährend abnehmende Reihe bilden. Daß hieraus der zu beweiſende Satz auf der Stelle folgt, bedarf keiner weitern Erläuterung.

Weil i_n mit i gleiches Vorzeichen hat, der abſolute Werth von i_n aber kleiner wie der abſolute Werth von i iſt; ſo kann man $i_n = \varrho i$ ſetzen, wo ϱ eine poſitive Größe bezeichnet, die kleiner als die Einheit iſt. Unter den Vorausſetzungen unſers obigen Satzes iſt alſo immer

$$\frac{f(a+i)}{F(a+i)} = \frac{f^{(n)}(a+\varrho i)}{F^{(n)}(a+\varrho i)}.$$

6. Wir wollen jetzt $a = 0$ und $F(x) = x^n$, wo n eine poſitive ganze Zahl bezeichnet, ſetzen, und nun unterſuchen, ob die für $F(x)$ geſetzte Function den Bedingungen, unter welchen allein der vorher bewieſene Lehrſatz gültig iſt, genügt. Durch Differentiation erhält man

$$F(x) = x^n,$$
$$F'(x) = nx^{n-1},$$
$$F''(x) = (n-1)nx^{n-2},$$
$$F'''(x) = (n-2)(n-1)nx^{n-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F^{(n-1)}(x) = 2.3.4.5\ldots\ldots nx,$$
$$F^{(n)}(x) = 1.2.3.4\ldots\ldots n.$$

Für $x = 0$ verſchwinden alſo offenbar

$$F(x),\ F'(x),\ F''(x),\ \ldots F^{(n-1)}(x).$$

Auch ſind

$$F(x),\ F'(x),\ F''(x),\ \ldots F^{(n-1)}(x),\ F^{(n)}(x)$$

zwiſchen den Gränzen $x = 0$, $x = i$ ſtetig, und endlich ändert offenbar keine der Functionen

$$F'(x),\ F''(x),\ F'''(x),\ \ldots F^{(n)}(x)$$

zwiſchen dieſen Gränzen ihr Zeichen. Daher genügt die Function $F(x) = x^n$ offenbar allen Bedingungen des in (5.) bewieſenen allgemeinen Lehrſatzes, und wir erhalten nun ferner folgenden wichtigen Satz:

Wenn die Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots\ f^{(n-1)}(x)$$

für $x=0$ ſämmtlich verſchwinden, und, ſo wie die Function $f^{(n)}(x)$, zwiſchen den Gränzen $x=0$, $x=i$ ſtetig ſind; ſo iſt immer

$$f(i) = \frac{i^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(\varrho i)\,,$$

wo ϱ eine poſitive Größe bezeichnet, die kleiner als die Einheit iſt.

Uebrigens kann man dieſen Satz auch auf folgende Art ausſprechen:

Wenn die Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots\ f^{(n-1)}(x)$$

für $x=0$ ſämmtlich verſchwinden, und, ſo wie die Function $f^{(n)}(x)$, zwiſchen den Gränzen $x=0$, $x=x$ ſtetig ſind; ſo iſt immer

$$f(x) = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(\varrho x)\,,$$

wo ϱ ein poſitiver ächter Bruch iſt.

7. Wir wollen nun annehmen, daß die Functionen

$$\varphi(x),\ \varphi'(x),\ \varphi''(x),\ \varphi'''(x),\ \ldots,\ \varphi^{(n)}(x)$$

zwiſchen den Gränzen $x=0$, $x=x$ ſtetig ſind, alſo auch für alle Werthe von x zwiſchen dieſen Gränzen endliche beſtimmte Werthe haben, und ſetzen nun

$$f(x) = \varphi(x) - \varphi(0) - \frac{x}{1}\varphi'(0) - \frac{x^2}{1.2}\varphi''(0) - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots - \frac{x^{n-1}}{1.2.3..(n-1)}\varphi^{(n-1)}(0)\,;$$

ſo erhalten wir durch Differentiation:

$$f'(x) = \varphi'(x) - \varphi'(0) - \frac{x}{1}\varphi''(0) - \frac{x^2}{1.2}\varphi'''(0) - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots - \frac{x^{n-2}}{1.2.3..(n-2)}\varphi^{(n-1)}(0)\,,$$

$$f''(x) = \varphi''(x) - \varphi''(0) - \frac{x}{1}\varphi'''(0) - \frac{x^2}{1.2}\varphi^{\mathrm{IV}}(0) - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots - \frac{x^{n-3}}{1.2.3..(n-3)}\varphi^{(n-1)}(0)\,,$$

$$f'''(x) = \varphi'''(x) - \varphi'''(0) - \frac{x}{1}\varphi^{\mathrm{IV}}(0) - \frac{x^2}{1.2}\varphi^{\mathrm{V}}(0) - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots - \frac{x^{n-4}}{1.2.3..(n-4)}\varphi^{(n-1)}(0)\,,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

$$f^{(n-1)}(x) = \varphi^{(n-1)}(x) - \varphi^{(n-1)}(0),$$
$$f^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x).$$

Die Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots\ f^{(n-1)}(x)$$

verſchwinden alſo ſämmtlich für $x = 0$, und ſind, ſo wie $f^{(n)}(x)$, wegen der oben gemachten Vorausſetzungen zwiſchen $x = 0$, $x = x$ offenbar ſtetig, ſo daß alſo die Function $f(x)$ und ihre obigen derivirten Functionen augenſcheinlich den Bedingungen des in (6.) bewieſenen Satzes vollſtändig genügen. Daher iſt nach (6.)

$$f(x) = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(\varrho x).$$

Aber nach dem Obigen $f^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x)$; folglich auch

$$f^{(n)}(\varrho x) = \varphi^{(n)}(\varrho x),$$

und daher, wenn man für $f(x)$ ſeinen obigen Ausdruck ſetzt,

$$\varphi(x) - \varphi(0) - \frac{x}{1}\varphi'(0) - \frac{x^2}{1.2}\varphi''(0) - \ldots\ldots$$
$$\ldots - \frac{x^{n-1}}{1\ldots(n-1)}\varphi^{(n-1)}(0) = \frac{x^n}{1\ldots n}\varphi^{(n)}(\varrho x);$$

alſo

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{x}{1}\varphi'(0) + \frac{x^2}{1.2}\varphi''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}\varphi'''(0) + \ldots\ldots$$
$$\ldots + \frac{x^{n-1}}{1\ldots(n-1)}\varphi^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{1\ldots n}\varphi^{(n)}(\varrho x),$$

oder, wenn wir wieder $f(x)$ für $\varphi(x)$ ſchreiben,

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0) + \ldots\ldots$$
$$\ldots + \frac{x^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{1\ldots n}f^{(n)}(\varrho x),$$

unter der Vorausſetzung, daß

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots\ f^{(n)}(x)$$

zwiſchen den Gränzen $x = 0$, $x = x$ ſtetig ſind. ϱ iſt immer poſitiv und < 1.

8. Sey jetzt $x = a + z$ und

$$f(x) = F(z);$$

ſo iſt, weil

$$\frac{\partial x}{\partial z} = 1$$

iſt, nach bekannten Sätzen der Differentialrechnung

$$F(z) = f(x),$$
$$F'(z) = f'(x)\frac{\partial x}{\partial z} = f'(x),$$

$$F''(z) = f''(x)\frac{\partial x}{\partial z} = f''(x),$$

$$F'''(z) = f''(x)\frac{\partial x}{\partial z} = f'''(x)$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

$$F^{(n)}(z) = f^{(n)}(x)\frac{\partial x}{\partial z} = f^{(n)}(x).$$

Seyen nun

$$F(z),\ F'(z),\ F''(z),\ F'''(z),\ \ldots\ F^{(n)}(z)$$

von $z = 0$ bis $z = z$ ſtetig; ſo iſt nach (7.)

$$F(z) = F(0) + \frac{z}{1}F'(0) + \frac{z^2}{1.2}F''(0) + \frac{z^3}{1.2.3}F'''(0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{z^{n-1}}{1\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(z) + \frac{z^n}{1\ldots n}F^{(n)}(\varrho z).$$

Für $z = 0$ iſt $x = a$, für $z = z$ iſt $x = x$; auch iſt $z = x - a$. Setzt man ϱz für z, ſo erhält x den Werth $a + \varrho z$, d. i. $a + \varrho(x - a)$. Hieraus ergiebt ſich nun mittelſt des Obigen auf der Stelle folgender Satz:

Wenn die Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots\ f^{(n)}(x)$$

zwiſchen den Gränzen $x = a$, $x = x$ ſtetig ſind; ſo iſt immer

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{1\ldots n}f^{(n)}(a + \varrho(x-a)).$$

Setzen wir $x - a = i$, ſo iſt $x = a + i$, und es iſt folglich, wenn

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots\ f^{(n)}(x)$$

zwiſchen den Gränzen $x = a$, $x = a + i$ ſtetig ſind,

$$f(a+i) = f(a) + \frac{i}{1}f'(a) + \frac{i^2}{1.2}f''(a) + \frac{i^3}{1.2.3}f'''(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{i^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a) + \frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(a + \varrho i).$$

Setzt man x für a, ſo kann man dieſen Satz auch auf folgende Art ausdrücken:

Wenn

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots\ f^{(n)}(x)$$

zwiſchen den Gränzen $x = x$, $x = x + i$, d. i. von x bis $x + i$ ſtetig ſind; ſo iſt

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i}{1}f'(x) + \frac{i^2}{1.2}f''(x) + \frac{i^3}{1.2.3}f'''(x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{i^{(n-1)}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x) + \frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(x + \varrho i).$$

9. Man ſetze jetzt

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(a) + \varphi(a).$$

Differentiirt man dieſe Gleichung nach a, ſo erhält man:

$$0 = \frac{(x-a)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f^{(n)}(a) + \varphi'(a).$$

$$\varphi'(a) = -\frac{(x-a)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f^{(n)}(a).$$

Auch erhält man leicht, wenn man a = x ſetzt,

$$\varphi(x) = 0.$$

Nach (8.) iſt nun, wenn man nur φ für f ſchreibt, und n = 1 ſetzt:

$$\varphi(x) = \varphi(a) + (x-a)\varphi'(a + \varrho(x-\alpha)),$$

d. i., weil $\varphi(x) = 0$ iſt,

$$\varphi(a) = -(x-a)\varphi'(a + \varrho(x-a)).$$

Weil aber

$$\varphi'(a) = -\frac{(x-a)^{n-1}}{1\ldots\ldots(n-1)} f^{(n)}(a)$$

iſt; ſo iſt

$$\varphi'(\alpha + \varrho(x-a)) = -\frac{\{x-a-\varrho(x-a)\}^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f^{(n)}(a + \varrho(x-a))$$

$$= -\frac{(1-\varrho)^{n-1}(x-a)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f^{(n)}(a + \varrho(x-a)).$$

Folglich iſt

$$\varphi(a) = \frac{(1-\varrho)^{n-1}(x-a)^n}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n)}(a + \varrho(x-a)),$$

und daher auch immer

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(a) + \frac{(1-\varrho)^{n-1}(x-a)^n}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n)}(a + \varrho(x-a)).$$

Für x − a = i, x = a + i erhält man hieraus

$$f(a+i) = f(a) + \frac{i}{1} f'(a) + \frac{i^2}{1.2} f''(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{i^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(a) + \frac{(1-\varrho)^{n-1} i^n}{1\ldots(n-1)} f^{(n)}(a + \varrho i),$$

oder, wenn wir x für a ſetzen,

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i}{1} f'(x) + \frac{i^2}{1.2} f''(x) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{i^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x) + \frac{(1-\varrho)^{n-1} i^n}{1\ldots(n-1)} f^{(n)}(x + \varrho i).$$

Für $x = 0$ wird

$$f(i) = f(0) + \frac{i}{1} f'(0) + \frac{i^2}{1.2} f''(0) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{i^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(0) + \frac{(1-\varrho)^{n-1} i^n}{1\ldots(n-1)} f_{(n)}(\varrho i),$$

oder, wenn man x für i ſetzt,

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{x^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(0) + \frac{(1-\varrho)^{n-1} x^n}{1\ldots(n-1)} f^{(n)}(\varrho x).$$

Im Artikel Differentialrechnung (37.) i. d. Z. iſt eine ganz andere Ableitung dieſer Formeln gegeben worden.

10. Wenn nun eine der Größen

$$\frac{x^n}{1\ldots.n} f^{(n)}(\varrho x) \text{ oder } \frac{(1-\varrho)^{n-1} x^n}{1\ldots(n-1)} f^{(n)}(\varrho x)$$

ſich der Null immer mehr und mehr nähert, wenn n wächſt, und derſelben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n groß genug nimmt, alſo, wie man dies auch kurz ausdrücken kann, für $n = \infty$ verſchwindet; ſo iſt jederzeit nach dem Vorhergehenden

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \ldots.$$

Dieſe Reihe nennt man bekanntlich die Maclaurinſche Reihe, wobei man nur nicht zu vergeſſen hat, daß $f(x)$ nebſt ſeinen ſämmtlichen Differentialquotienten zwiſchen den Gränzen $x = 0$, $x = x$ ſtetig ſeyn muß. Ueber die Maclaurinſche Reihe ſ. m. auch einen Aufſatz von C. G. J. Jacobi in Crelles Journal. B. XII. S. 263.

Eben ſo iſt, wenn eine der Größen

$$\frac{i^n}{1\ldots.n} f^{(n)}(x + \varrho i) \text{ oder } \frac{(1-\varrho)^{n-1} i^n}{1\ldots.(n-1)} f^{(n)}(x + \varrho i)$$

für $n = \infty$ verſchwindet, und $f(x)$ nebſt ſeinen ſämmtlichen Differentialquotienten zwiſchen den Gränzen $x = x$, $x = x + i$ ſtetig iſt, jederzeit

$$f(x + i) = f(x) + \frac{i}{1} f'(x) + \frac{i^2}{1.2} f''(x) + \frac{i^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots,$$

welches bekanntlich der Taylorſche Lehrſatz iſt.

11. Wir machen hierbei nun noch die folgende Bemerkung.

Wenn $m < n$ und > 1 iſt, ſo iſt auch

$$m(m-1) < n(m-1),$$

woraus ſich ferner leicht

$$n < m(n - m + 1)$$

ergibt.

Iſt nun zuerſt $n = 2\mu$, ſo iſt

$$2\mu = 1.2\mu,$$
$$2\mu < 2(2\mu - 1)$$
$$2\mu < 3(2\mu - 2)$$
$$2\mu < 4(2\mu - 3)$$
$$\ldots\ldots$$
$$2\mu < (\mu - 1)(\mu + 2)$$
$$2\mu < \mu(\mu + 1).$$

Alſo iſt, wenn nur $\mu > 1$ iſt,

$$(2\mu)^\mu < 1.2.3.4\ldots.2\mu.$$

Iſt alſo n eine gerade Zahl, die größer als 2 iſt, ſo iſt

$$n^{\frac{n}{2}} < 1.2.3\ldots n.$$

Für $n = 2$ iſt offenbar

$$2^{\frac{2}{2}} = 1.2.$$

Iſt ferner $n = 2\mu + 1$, ſo iſt

$$2\mu + 1 = 1(2\mu + 1)$$
$$2\mu + 1 < 2.2\mu$$
$$2\mu + 1 < 3(2\mu - 1)$$
$$2\mu + 1 < 4(2\mu - 2)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$2\mu + 1 < (\mu - 1)(\mu + 3)$$
$$2\mu + 1 < \mu(\mu + 2).$$

Alſo iſt

$$(2\mu + 1)^\mu \overline{\overline{<}} 1\ldots\mu(\mu + 2)\ldots(2\mu + 1)$$

und folglich

$$(2\mu + 1)^\mu(\mu + 1) \overline{\overline{<}} 1.2.3\ldots.(2\mu + 1).$$

Iſt aber $\mu > 0$, ſo iſt

$$2\mu + 1 < (\mu + 1)^2,$$

d. i.

$$(2\mu + 1)^{\frac{1}{2}} < \mu + 1.$$

Alſo iſt für $\mu > 0$ jederzeit

$$(2\mu + 1)^\mu.(2\mu + 1)^{\frac{1}{2}} < 1.2.3\ldots(2\mu + 1)$$

d. i.

$$(2\mu + 1)^{\frac{2\mu + 1}{2}} < 1.2.3\ldots(2\mu + 1).$$

Für jedes ungerade n, welches > 1 iſt, iſt folglich

$$n^{\frac{n}{2}} < 1.2.3\ldots n.$$

Daher iſt für jedes n, welches > 2 iſt,

$$n^{\frac{n}{2}} < 1.2.3 \ldots n.$$

Für $n = 1$ und $n = 2$ iſt

$$1^{\frac{1}{2}} = 1, \; 2^{\frac{2}{2}} = 1.2.$$

Für $n > 2$ iſt folglich immer

$$\frac{x^n}{1.2.3..n} < \frac{x^n}{n^{\frac{n}{2}}},$$

d. i.

$$\frac{x^n}{1.2.3 \ldots n} < \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Für $\sqrt{n} > x$, $n > x^2$ nähert ſich, wenn n wächſt, der Bruch

$$\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n$$

immer mehr und mehr der Null und kann derſelben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n groß genug nimmt. Für $n = \infty$ verſchwindet alſo ſowohl dieſer Bruch, als auch um ſo mehr der Bruch

$$\frac{x^n}{1.2.3 \ldots n}.$$

Wenn nun $f^{(n)}(\varrho x)$ nur, indem n wächſt, einen gewiſſen beſtimmten endlichen Werth nicht überſteigt; ſo verſchwindet offenbar

$$\frac{x^n}{1 \ldots . n} f^{(n)}(\varrho x)$$

für $n = \infty$, und es iſt folglich unter dieſer Vorausſetzung jederzeit nach (10.)

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \ldots .$$

Eben ſo iſt, wenn

$$f^{(n)}(x + \varrho i)$$

einen gewiſſen endlichen beſtimmten Werth nie überſteigt, wie groß man auch n werden laſſen mag, nach (10.) jederzeit

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i}{1} f'(x) + \frac{i^2}{1.2} f''(x) + \frac{i^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots,$$

wenn nur auch die übrigen wegen der Stetigkeit der Functionen in (10.) zum Grunde gelegten Bedingungen erfüllt ſind.

Anwendungen von dieſen wichtigen Sätzen zu machen unterlaſſen wir hier, da deren im Artikel Differentialrechnung i. d. Z. ſchon eine große Anzahl vorgekommen iſt, die auch hier benutzt werden können. Eben ſo begnügen wir uns, wegen des Taylorſchen Lehrſatzes für Functionen mit mehreren unabhängigen veränderlichen Größen auf die in dem genannten Artikel (48.) gege-

bene Darſtellung zu verweiſen, da eine weſentliche Abkürzung derſelben uns nicht möglich zu ſeyn ſcheint, und ſie ſich unmittelbar an das Vorhergehende ohne alle Schwierigkeit anknüpfen läßt, ganz auf dieſelbe Art, wie a. a. O. geſchehen iſt. Der oben gegebene in vieler Beziehung einfachere Beweis des Taylorſchen Satzes für Functionen mit einer veränderlichen Größe ſchien uns zu wichtig zu ſeyn, als daß wir demſelben hier nicht eine Stelle einräumen zu müſſen geglaubt hätten. Leider wird in den Lehrbüchern der Differentialrechnung immer noch zu oft die ſo wichtige Entwickelung des ſogenannten Reſtes der Taylor'ſchen Reihe völlig vernachläſſigt, ein Verfahren, welches auf keine Weiſe gerechtfertigt werden kann, da es mit einem ſtrengen Vortrage ganz unvereinbar iſt.

Trigonometrie. Allgemeine Beweiſe der Grundformeln der ebenen und ſphäriſchen Trigonometrie ſ. m. im Art. Coordinaten (13. 14.) i. d. Z. Einen geometriſchen Beweis der in (21.) bewieſenen merkwürdigen Formel $d^2 = r(r - 2r')$ ſ. m. im Art. Dreieck (19.) i. d. Z. Den in (76.) gegebenen Formeln iſt noch die Formel

$$\sin c = \frac{\text{tang}\, b}{\text{tang}\, \beta}$$

beizufügen, welche c unmittelbar aus b und β giebt. Den Formeln in (133.) iſt noch die Formel $\partial c = \sin a \sin b\, \partial\gamma$, den Formeln in (134.) die Formel $\partial\gamma = \sin a \sin \beta\, \partial c$ beizufügen.

Es iſt dem Verfaſſer dieſer Zuſätze wohl erlaubt, der Literatur der ſphäroidiſchen Trigonometrie jetzt ſein eigenes ausführliches Werk über dieſen Gegenſtand: **Sphäroidische Trigonometrie von J. A. Grunert. Berl. 1833. 4.** beizufügen. In dieſem Werke iſt vorzüglich auch auf die wichtigen Unterſuchungen Rückſicht genommen, mit welchen Gauß in der trefflichen Abhandlung: **Disquisitiones generales circa superficies curvas. Gott. 1828.** die Wiſſenſchaft bereichert hat. Nachzutragen ſind auch noch: Hülfstafeln zur Berechnung der Längen- und Breitenunterſchiede aus gemeſſenen Meridian- und Perpendikel-Abſtänden von J. Oltmanns. **Berl. 1826.**

U.

Ultra-elliptiſche Functionen, ſ. Elliptiſche Functionen (59.).

Umhüllungscurven und Umhüllungsflächen, ſ. Einhüllende Curven und Flächen (1.) und (11.) i. d. Z.

V.

Vernier, ſ. Theilung (19.).

Verwandtſchaft der Collineation, Affinität, Aehnlichkeit, Congruenz, Gleichheit und Reciprocität.

I. Allgemeine Vorbereitung.

1. Wir wollen uns zwei beliebige Syſteme von Punkten denken, deren jedes jedoch für ſich in einer Ebene liegen ſoll. Die Coordinaten der Punkte in dem einen Syſteme, in Bezug auf zwei beliebige recht- oder ſchiefwinklige Coordinatenaxen, ſollen im Allgemeinen durch x, y, die Coordinaten der Punkte in dem andern Syſteme, ebenfalls in Bezug auf zwei beliebige recht- oder ſchiefwinklige Coordinatenaxen, dagegen im Allgemeinen durch x_1, y_1 bezeichnet werden. Dieſe beiden Syſteme von Punkten wollen wir uns aber nicht als ganz unabhängig von einander, ſondern vielmehr in einer gewiſſen gegenſeitigen Abhängigkeit denken. Suchen wir nun dieſe gegenſeitige Abhängigkeit der beiden Syſteme im Allgemeinen analytiſch auszudrücken, und denken uns dabei immer die Coordinaten eines der Punkte in beiden Syſtemen als gegeben; ſo finden wir auf der Stelle, daß in dieſer Beziehung im Allgemeinen nur zwei Fälle Statt finden können, indem nämlich zwiſchen den vier Größen $x, y; x_1, y_1$ entweder bloß eine oder zwei Gleichungen gegeben ſeyn können, durch welche eben die gegenſeitige Abhängigkeit der beiden Syſteme analytiſch ausgedrückt wird.

Um nun zunächſt den erſten dieſer beiden Fälle etwas näher zu beleuchten; ſo wollen wir annehmen, daß zwiſchen den vier Größen $x, y; x_1, y_1$ überhaupt die Gleichung

$$1.\quad F(x, y, x_1, y_1) = 0$$

gegeben ſey. Da in dieſem Falle zwiſchen den vier Größen, x, y, x_1, y_1, von denen immer entweder x, y oder x_1, y_1 als gegeben betrachtet werden, bloß eine Gleichung gegeben iſt; ſo iſt klar, daß aus den beiden als gegeben betrachteten Größen die beiden andern nicht beſtimmt werden können, und man alſo in dieſem Falle auch nicht ſagen kann, daß einem beſtimmten Punkte des einen Syſtems ein beſtimmter Punkt des andern Syſtems entſpreche. Denkt man ſich aber in der obigen Gleichung z. B. x, y als gegeben oder conſtant; ſo enthält dieſelbe bloß noch die beiden veränderlichen Größen x_1, y_1, und ſtellt alſo bekanntlich eine beſtimmte ſtetige Folge von Punkten des zweiten Syſtems oder, was daſſelbe iſt, eine beſtimmte ganz in der Ebene des zweiten Syſtems liegende Curve dar. Denkt man ſich umgekehrt x_1, y_1 als conſtant oder gegeben; ſo ſtellt die obige Gleichung eine ganz beſtimmte ſtetige Folge von Punkten des erſten Syſtems, d. h. eine beſtimmte ganz in der Ebene des erſten Syſtems liegende Curve dar, und man ſieht alſo, daß in dem Falle, wo zwiſchen den vier Größen $x, y; x_1, y_1$ nur eine Gleichung gegeben iſt, jederzeit jedem Punkte eines jeden der beiden Syſteme eine beſtimmte

ſtetige Folge von Punkten des andern Syſtems, oder eine beſtimmte ganz in der Ebene des andern Syſtems liegende Curve entſpricht.

Wenn aber zwiſchen den vier Größen $x, y; x_1, y_1$ zwei Gleichungen, die wir im Allgemeinen durch

$$2. \quad F(x, y, x_1, y_1) = 0, \quad \Phi(x, y, x_1, y_1) = 0$$

bezeichnen wollen, gegeben ſind; ſo können offenbar aus den beiden als gegeben betrachteten Größen x, y oder x_1, y_1 die beiden andern, nämlich reſpective x_1, y_1 oder x, y, jederzeit beſtimmt werden, und es entſpricht alſo in dieſem Falle jedem beſtimmten Punkte eines jeden der beiden Syſteme immer ein beſtimmter Punkt des andern Syſtems.

Im Allgemeinen kann man zwei ebene Syſteme von Punkten, zwiſchen deren Coordinaten x, y, x_1, y_1 entweder zwei oder eine Gleichung gegeben ſind, mit einander verwandt oder verwandte ebene Syſteme nennen. Die Verwandtſchaft, wo zwiſchen $x, y; x_1, y_1$ zwei Gleichungen gegeben ſind, iſt offenbar als die nähere zu betrachten, und ſoll im Folgenden die erſte Art der Verwandtſchaft ebener Syſteme genannt werden. Dagegen ſoll die entferntere Verwandtſchaft, wo zwiſchen $x, y; x_1, y_1$ nur eine Gleichung gegeben iſt, die zweite Art der Verwandtſchaft ebener Syſteme genannt werden. Bei der erſten Art der Verwandtſchaft ebener Syſteme entſpricht jedem beſtimmten Punkte des einen Syſtems ein beſtimmter Punkt des andern Syſtems, und zwei ſolche Punkte der beiden Syſteme ſollen daher im Folgenden auch einander entſprechende Punkte genannt werden. Bei der zweiten Art der Verwandtſchaft ebener Syſteme entſpricht dagegen jedem Punkte des einen Syſtems eine beſtimmte ſtetige Folge von Punkten des andern Syſtems, oder eine ganz in der Ebene des andern Syſtems liegende Curve. Jeder Punkt des einen Syſtems, und die bei der zweiten Art der Verwandtſchaft ebener Syſteme demſelben entſprechende ſtetige Folge von Punkten des andern Syſtems, ſollen in Beziehung auf einander bei dieſer Art der Verwandtſchaft ebener Syſteme Pol und Polare von einander genannt werden.

2. Die Ausdehnung der vorhergehenden allgemeinen Betrachtungen auf Syſteme von Punkten im Raume iſt keiner Schwierigkeit unterworfen. Sollen nämlich zwei ſolche Syſteme in einer gewiſſen Verbindung mit einander ſtehen; ſo können zwiſchen den Coordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 der Punkte in beiden Syſtemen offenbar bloß entweder eine, oder zwei oder drei Gleichungen gegeben ſeyn. Iſt nun zwiſchen den ſechs Größen $x, y, z; x_1, y_1, z_1$ die eine Gleichung

$$3. \quad F(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

gegeben; ſo entſpricht jedem beſtimmten Punkte des einen Syſtems offenbar eine beſtimmte ſtetige Folge in einer gewiſſen krum-

men Fläche liegender Punkte des andern Syſtems. Sind dagegen zwiſchen den ſechs Größen $x, y, z; x_1, y_1, z_1$ die zwei Gleichungen

4. $F(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \Phi(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$

gegeben; ſo entſpricht jedem Punkte des einen Syſtems eine beſtimmte ſtetige Folge in einer gewiſſen doppelt gekrümmten Curve liegender Punkte des andern Syſtems. Sind aber zwiſchen den ſechs Größen $x, y, z; x_1, y_1, z_1$ die drei Gleichungen

5. $F(x,y,z,x_1,y_1,z_1)=0, \Phi(x,y,z,x_1,y_1,z_1)=0, \Psi(x,y,z,x_1,y_1,z_1)=0$

gegeben; ſo entſpricht jedem beſtimmten Punkte des einen Syſtems ein beſtimmter Punkt des andern Syſtems. Hieraus ſieht man alſo, daß, wenn man die Sache aus dieſem Geſichtspunkte betrachtet, zwiſchen zwei Syſtemen von Punkten im Raume drei Arten der Verwandtſchaft Statt finden können, die man, analog mit dem Vorhergehenden, jenachdem zwiſchen den ſechs allgemeinen Coordinaten drei, zwei oder eine Gleichung gegeben ſind, wieder reſpective die erſte, zweite, dritte Art der Verwandtſchaft räumlicher Syſteme von Punkten nennen könnte.

3. Es iſt hier nicht der Ort, die vorhergehenden allgemeinen Betrachtungen weiter zu verfolgen und weiter auszuführen. Daß aber unter jeder der oben näher charakteriſirten Hauptarten der Verwandtſchaft ſowohl ebener als auch räumlicher Syſteme von Punkten wieder eine unendliche Menge einzelner verſchiedener Verwandtſchaften als Nebenarten enthalten ſind, verſteht ſich von ſelbſt, da ja die zwiſchen den Coordinaten $x, y; x_1, y_1$ oder $x, y, z; x_1, y_1, z_1$ gegebenen Gleichungen nach unendlich vielen verſchiedenen Geſetzen gebildet ſeyn können. In neueſter Zeit ſind vorzüglich zwei beſonders merkwürdige und an wichtigen Folgerungen reiche Fälle dieſer unendlich vielen Verwandtſchaften, die nach den obigen ganz allgemeinen Begriffen zwiſchen zwei Syſtemen von Punkten Statt finden können, von den Geomtern hervorgehoben und einer ſorgfältigen Unterſuchung gewürdigt worden. Indem wir im Folgenden einige der wichtigſten Reſultate dieſer in vieler Beziehung ausgezeichneten Unterſuchung mittheilen, ſind wir jedoch durch die Beſchränktheit des Raumes genöthigt, uns dabei auf ebene Syſteme zu beſchränken.

4. Die erſte Art der beiden in Rede ſtehenden Verwandtſchaften heißt die Verwandtſchaft der Collineation, und iſt als ein beſonderer Fall der erſten der beiden Hauptarten der Verwandtſchaft, welche nach dem Obigen zwiſchen zwei ebenen Syſtemen von Punkten überhaupt bloß Statt finden können, zu betrachten. Wenn nämlich zwei nach der erſten Hauptart der Verwandtſchaft ebener Syſteme von Punkten verwandte Syſteme ſo beſchaffen ſind, daß, wenn man ſich eine Folge in gerader Linie liegender Punkte des einen Syſtems denkt, jederzeit auch die dieſen Punkten entſprechenden Punkte des andern Syſtems in gerader Linie liegen; ſo

ſagt man, daß die beiden Syſteme einander collinear verwandt ſeyen, oder daß zwiſchen denſelben Collineations-Verwandtſchaft oder Verwandtſchaft der Collineation Statt finde.

Um die Form der allgemeinen Gleichungen

$$6.\quad F(x, y, x_1, y_1) = 0, \quad \Phi(x, y, x_1, y_1) = 0$$

im Falle der Collineations-Verwandtſchaft zu beſtimmen, denke man ſich eine Folge in gerader Linie liegender Punkte des erſten Syſtems, und

$$7.\quad Ay + Bx + C = 0$$

ſey die Gleichung dieſer geraden Linie. Mittelſt der beiden Gleichungen 6. zwiſchen x, y; x_1, y_1 kann man x und y bloß als Functionen von x_1 und y_1 darſtellen, und kann alſo

$$8.\quad y = f(x_1, y_1), \quad x = \varphi(x_1, y_1)$$

ſetzen. Führt man dies in die Gleichung (7.) ein; ſo ergiebt ſich

$$9.\quad Af(x_1, y_1) + B\varphi(x_1, y_1) + C = 0.$$

Da nun dieſe Gleichung nach dem Begriffe der Collinations-Verwandtſchaft eine gerade Linie darſtellen muß; ſo können die Functionen $f(x_1\ y_1)$ und $\varphi(x_1, y_1)$, wie auf der Stelle in die Augen fällt, bloß von der allgemeinen Form

$$10.\quad f(x_1, y_1) = \frac{ay_1 + bx_1 + c}{a''y_1 + b''x_1 + c''},$$

$$\varphi(x_1, y_1) = \frac{a'y_1 + b'x_1 + c'}{a''y_1 + b''x_1 + c''}$$

ſeyn, und es iſt folglich nach (8.) auch

$$11.\quad y = \frac{ay_1 + bx_1 + c}{a''y_1 + b''x_1 + c''}, \quad x = \frac{a'y_1 + b'x_1 + c'}{a''y_1 + b''x_1 + c''}.$$

Beſtimmt man mittelſt dieſer beiden Gleichungen y_1, x_1 durch y, x; ſo erhält man zwei Ausdrücke ganz von derſelben Form wie die vorhergehenden, nämlich

$$12.\quad y_1 = \frac{\alpha y + \beta x + \gamma}{\alpha''y + \beta''x + \gamma''}, \quad x_1 = \frac{\alpha'y + \beta'x + \gamma'}{\alpha''y + \beta''x + \gamma''},$$

wenn man

$$12^*.\quad \begin{cases} \alpha = b'c'' - b''c', & \beta = b''c - bc'', & \gamma = bc' - b'c; \\ \alpha' = c'a'' - c''a', & \beta' = c''a - ca'', & \gamma' = ca' - c'a; \\ \alpha'' = a'b'' - a''b', & \beta'' = a''b - ab'', & \gamma'' = ab' - a'b \end{cases}$$

ſetzt. Hieraus ſieht man, daß die Verwandtſchaft der Collineation zwiſchen zwei ebenen Syſtemen immer gegenſeitig Statt findet, wie es nach dem allgemeinen Begriffe dieſer Art der Verwandtſchaft auch ſeyn muß.

Nach dieſen allgemeinen Betrachtungen ſcheint es, daß die allgemeinen Fundamental-Gleichungen (11.) der Collineations-Verwandtſchaft von neun Conſtanten abhängen. Da aber die in Rede ſtehenden Gleichungen ſich leicht auf die Form

$$y = \frac{\frac{a}{c''}y_1 + \frac{b}{c''}x_1 + \frac{c}{c''}}{\frac{a''}{c''}y_1 + \frac{b''}{c''}x_1 + 1}, \quad x = \frac{\frac{a'}{c''}y_1 + \frac{b'}{c''}x_1 + \frac{c'}{c''}}{\frac{a''}{c''}y_1 + \frac{b''}{c''}x_1 + 1},$$

oder, wenn man nun wieder a, b, c, a′, b′, c′, a″, b″ für die Brüche

$$\frac{a}{c''}, \frac{b}{c''}, \frac{c}{c''}, \frac{a'}{c''}, \frac{b'}{c''}, \frac{c'}{c''}, \frac{a''}{c''}, \frac{b''}{c''}$$

ſchreibt, auf die Form

$$13. \quad y = \frac{ay_1 + bx_1 + c}{a''y_1 + b''x_1 + 1}, \quad x = \frac{a'y_1 + b'x_1 + c'}{a''y_1 + b''x_1 + 1}$$

bringen laſſen; ſo iſt klar, daß die Zahl der Conſtanten, welche in den allgemeinen Fundamental-Gleichungen der Collineations-Verwandtſchaft, die man der Kürze wegen die Collineations-Gleichungen nennen kann, nothwendig vorkommen müſſen, ſich auf acht reducirt. Entwickelt man aus den Gleichungen (13.) die Größen y_1, x_1; ſo erhält man für dieſelben die Formeln

$$14. \quad y_1 = \frac{\alpha y + \beta x + \gamma}{\alpha''y + \beta''x + \gamma''}, \quad x_1 = \frac{\alpha'y + \beta'x + \gamma'}{\alpha''y + \beta''x + \gamma''},$$

wo nach (12*.) nun aber offenbar

$$15. \begin{cases} \alpha = b' - b''c', & \beta = b''c - b, & \gamma = bc' - b'c; \\ \alpha' = c'a'' - a', & \beta' = a - ca'', & \gamma' = ca' - c'a; \\ \alpha'' = a'b'' - a''b', & \beta'' = a''b - ab'', & \gamma'' = ab' - a'b \end{cases}$$

geſetzt werden muß. Will man endlich auch y_1, x_1 unter der Form

$$16. \quad y_1 = \frac{\alpha y + \beta x + \gamma}{\alpha''y + \beta''x + 1}, \quad x_1 = \frac{\alpha'y + \beta'x + \gamma'}{\alpha''y + \beta''x + 1}$$

darſtellen; ſo muß man augenſcheinlich

$$17. \begin{cases} \alpha = \frac{b' - b''c'}{ab' - a'b}, & \beta = \frac{b''c - b}{ab' - a'b}, & \gamma = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}; \\ \alpha' = \frac{c'a'' - a'}{ab' - a'b}, & \beta' = \frac{a - ca''}{ab' - a'b}, & \gamma' = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}; \\ \alpha'' = \frac{a'b'' - a''b'}{ab' - a'b}, & \beta'' = \frac{a''b - ab''}{ab' - a'b} \end{cases}$$

ſetzen.

Bei allgemeinen analytiſchen Rechnungen wird es häufig zweckmäßig ſeyn, ſich der Fundamental-Gleichungen in ihrer allgemeinſten Geſtalt (11.) und (12.) zu bedienen.

5. Ein beſonderer Fall der zweiten der beiden Hauptarten der Verwandtſchaft, welche zwiſchen zwei ebenen Syſtemen nach dem Obigen im Allgemeinen bloß Statt finden können, iſt die in vieler Beziehung überaus wichtige Verwandtſchaft der Reciprocität. Sind nämlich in zwei nach der zweiten Hauptart der Verwandtſchaft ebener Syſteme verwandten Syſtemen alle Pola-

ren (1.) gerade Linien; ſo nennt man die beiden ebenen Syſteme reciproke Syſteme oder ſagt, daß zwiſchen denſelben Verwandtſchaft der Reciprocität oder Reciprocitäts-Verwandtſchaft Statt finde.

Die allgemeine Form der Fundamental-Gleichung

$$18.\quad F(x, y, x_1, y_1) = 0$$

der Reciprocitäts-Verwandtſchaft findet man ſehr leicht, wenn man überlegt, daß dieſelbe nach dem obigen allgemeinen Begriffe dieſer Art der Verwandtſchaft nothwendig ſowohl in Bezug auf x_1, y_1, als auch in Bezug auf x, y, vom erſten Grade oder linear ſeyn muß. Denkt man ſich alſo die obige allgemeine Gleichung zuerſt nach x_1 und y_1 entwickelt oder geordnet; ſo muß dieſe Entwickelung nothwendig auf eine Gleichung von der Form

$$f(x, y) \cdot y_1 + \varphi(x, y) \cdot x_1 + \psi(x, y) = 0$$

führen. Da nun aber dieſe Gleichung auch in Beziehung auf x und y linear ſeyn muß; ſo können die Functionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ offenbar bloß von der folgenden allgemeinen Form ſeyn:

$$f(x, y) = ay + bx + c,\ \varphi(x, y) = a'y + b'x + c',\ \psi(x, y) = a''y + bx'' + c'',$$

und man erhält alſo nach gehöriger Subſtitution die, neun Conſtanten enthaltende allgemeine Fundamental-Gleichung

$$19.\quad (ay + bx + c)y_1 + (a'y + b'x + c')x_1 + a''y + b''x + c'' = 0$$

oder

$$20.\quad (ay_1 + a'x_1 + a'')y + (by_1 + b'x_1 + b'')x + cy_1 + c'x_1 + c'' = 0$$

der Reciprocitäts-Verwandtſchaft. Obgleich dieſe Gleichungen neun Conſtanten enthalten; ſo ſieht man doch auf der Stelle, daß ſich dieſelben auch jederzeit auf die allgemeine Form

$$21.\quad (ay + bx + c)y_1 + (a'y + b'x + c')x_1 + a''y + b''x + 1 = 0$$

und

$$22.\quad (ay_1 + a'x_1 + a'')y + (by_1 + b'x_1 + b'')x + cy_1 + c'x_1 + 1 = 0$$

bringen laſſen, unter welcher ſie nun bloß acht Conſtanten enthalten.

Jede der beiden hier charakteriſirten Verwandtſchaften ebener Syſteme wollen wir nun einer nähern Unterſuchung würdigen, indem wir mit der Collineations-Verwandtſchaft anfangen.

II. Von der Collineation.

6. Wir beginnen mit der Bemerkung, daß zwei einem dritten collinear verwandte Syſteme jederzeit ſelbſt collinear verwandt ſind, wie auf folgende Art leicht bewieſen werden kann. Wir wollen die Coordinaten in den drei Syſtemen durch x, y; x_1, y_1 und X, Y bezeichnen, und wollen annehmen, daß ſowohl zwiſchen dem erſten und dritten, als auch zwiſchen dem zweiten

und dritten Syſteme Collineations-Verwandtſchaft Statt finde; ſo iſt nach den allgemeinen Collineations-Gleichungen

$$Y = \frac{ay + bx + c}{a''y + b''x + c''},\quad X = \frac{a'y + b'x + c'}{a''y + b''x + c''}$$

und

$$Y = \frac{\alpha y_1 + \beta x_1 + \gamma}{\alpha'' y_1 + \beta'' x_1 + \gamma''},\quad X = \frac{\alpha' y_1 + \beta' x_1 + \gamma'}{\alpha'' y_1 + \beta'' x_1 + \gamma''};$$

alſo

$$\frac{ay + bx + c}{a''y + b''x + c''} = \frac{\alpha y_1 + \beta x_1 + \gamma}{\alpha'' y_1 + \beta'' x_1 + \gamma''},$$

$$\frac{a'y + b'x + c'}{a''y + b''x + c''} = \frac{\alpha' y_1 + \beta' x_1 + \gamma'}{\alpha'' y_1 + \beta'' x_1 + \gamma''}.$$

Mittelſt dieſer Gleichungen kann man x_1 und y_1 durch x, y ausdrücken, und wird, wenn man die Rechnung ausführt, für x_1 und y_1 zwei Ausdrücke von der allgemeinen Form

$$y_1 = \frac{Ay + Bx + C}{A''y + B''x + C''},\quad x_1 = \frac{A'y + B'x + C'}{A''y + B''x + C''}$$

erhalten, woraus das zu Beweiſende unmittelbar folgt.

7. Die allgemeinen Collineations-Gleichungen ſeyen jetzt wieder

$$23.\quad y = \frac{ay_1 + bx_1 + c}{a''y_1 + b''x_1 + c''},\quad x = \frac{a'y_1 + b'x_1 + c'}{a''y_1 + b''x_1 + c''}.$$

In dem einen Syſteme wollen wir uns nun zwei beliebige Punkte $x'y'$ und $x''y''$, und zwei beliebige gerade Linien, deren Gleichungen

$$24.\quad Ay + Bx + 1 = 0,\ A'y + B'x + 1 = 0$$

ſeyn mögen, denken. Die den Punkten $x'y'$ und $x''y''$ entſprechenden Punkte in dem andern Syſteme ſeyen reſpective $x'_1 y'_1$ und $x''_1 y''_1$. Die den geraden Linien (24.) entſprechenden geraden Linien in dem andern Syſteme werden, wie ſich aus (23.) auf der Stelle ergiebt, durch die beiden Gleichungen

$$25.\quad \begin{cases}(Aa + Ba' + a'')y_1 + (Ab + Bb' + b'')x_1 + Ac + Bc' + c'' = 0,\\ (A'a + B'a' + a'')y_1 + (A'b + B'b' + b'')x_1 + A'c + A'c' + c'' = 0\end{cases}$$

charakteriſirt. Die von dem Punkte $x'y'$ auf die beiden Linien (24.) gefällten Perpendikel ſeyen p und q; die von dem Punkte $x''y''$ auf dieſelben geraden Linien gefällten Perpendikel ſeyen p' und q'; die von dem Punkte $x'_1 y'_1$ auf die geraden Linien (25.) gefällten Perpendikel ſeyen p_1 und q; die von dem Punkte $x''_1 y''_1$ auf dieſelben geraden Linien gefällten Perpendikel ſeyen p'_1 und q'_1.

Nach dem Artikel Linie und Ebene (26*.) i. d. Z. iſt unter Vorausſetzung rechtwinkliger Coordinaten:

$$p^2 = \frac{(Ay' + Bx' + 1)^2}{A^2 + B^2},\quad q^2 = \frac{(A'y' + B'x' + 1)^2}{A'^2 + B'^2};$$

$$p'^2 = \frac{(Ay'' + Bx'' + 1)^2}{A^2 + B^2},\quad q'^2 = \frac{(A'y'' + B'x'' + 1)}{A'^2 + B'^2};$$

und eben ſo

$$p_1^2 = \frac{\{(Aa + Ba' + a'')y'_1 + (Ab + Bb' + b'')x'_1 + Ac + Bc' + c''\}^2}{(Aa + Ba' + a'')^2 + (Ab + Bb' + b'')^2},$$

$$q_1^2 = \frac{\{(A'a + B'a' + a'')y'_1 + (A'b + B'b' + b'')x'_1 + A'c + B'c' + c''\}^2}{(A'a + B'a' + a'')^2 + (A'b + B'b' + b'')^2};$$

$$p_1'^2 = \frac{\{(Aa + Ba' + a'')y''_1 + (Ab + Bb' + b'')x''_1 + Ac + Bc' + c''\}^2}{(Aa + Ba' + a'')^2 + (Ab + Bb' + b'')^2},$$

$$q_1'^2 = \frac{\{(A'a + B'a' + a'')y''_1 + (A'b + B'b' + b'')x''_1 + A'c + B'c' + c''\}^2}{(A'a + B'a' + a'')^2 + (A'b + B'b' + b'')^2};$$

oder

$$p_1^2 = \frac{\{A(ay'_1 + bx'_1 + c) + B(a'y'_1 + b'x'_1 + c') + a''y'_1 + b''x'_1 + c''\}^2}{(Aa + Ba' + a'')^2 + (Ab + Bb' + b'')^2},$$

$$q_1^2 = \frac{\{A'(ay'_1 + bx'_1 + c) + B'(a'y'_1 + b'x'_1 + c') + a''y'_1 + b''x'_1 + c''\}^2}{(A'a + B'a' + a'')^2 + (A'b + B'b' + b'')^2};$$

$$p_1'^2 = \frac{\{A(ay''_1 + bx''_1 + c) + B(a'y''_1 + b'x''_1 + c') + a''y''_1 + b''x''_1 + c''\}^2}{(Aa + Ba' + a'')^2 + (Ab + Bb' + b'')^2},$$

$$q_1'^2 = \frac{\{A'(ay''_1 + bx''_1 + c) + B'(a'y''_1 + b'x''_1 + c') + a''y''_1 + b''x''_1 + c''\}^2}{(A'a + B'a' + a'')^2 + (A'b + B'b' + b'')^2}.$$

Weil nun aber ſowohl $x'y'$ und $x'_1y'_1$, als auch $x''y''$ und $x''_1y''_1$ correſpondirende Punkte in beiden Syſtemen ſind; ſo iſt nach (23.)

$$ay'_1 + bx'_1 + c = (a''y'_1 + b''x'_1 + c'')y',$$
$$a'y'_1 + b'x'_1 + c' = (a''y'_1 + b''x'_1 + c'')x';$$
$$ay''_1 + bx''_1 + c = (a''y''_1 + b''x''_1 + c'')y'',$$
$$a'y''_1 + b'x''_1 + c' = (a''y''_1 + b''x''_1 + c'')x'';$$

folglich nach gehöriger Subſtitution

$$p_1^2 = \frac{(Ay' + Bx' + 1)^2(a''y'_1 + b''x'_1 + c'')^2}{(Aa + Ba' + a'')^2 + (Ab + Bb' + b'')^2},$$

$$q_1^2 = \frac{(A'y' + B'x' + 1)^2(a''y'_1 + b''x'_1 + c'')^2}{(A'a + B'a' + a'')^2 + (A'b + B'b' + b'')^2};$$

$$p_1'^2 = \frac{(Ay'' + Bx'' + 1)^2(a''y''_1 + b''x''_1 + c'')^2}{(Aa + Ba' + a'')^2 + (Ab + Bb' + b'')^2},$$

$$q_1'^2 = \frac{(A'y'' + B'x'' + 1)^2(a''y''_1 + b''x''_1 + c'')^2}{(A'a + B'a' + a'')^2 + (A'b + B'b' + b'')^2}.$$

Man ſieht hieraus, daß die Ausdrücke für p^2, q^2, p'^2, q'^2 und p_1^2, q_1^2, $p_1'^2$, $q_1'^2$ im Allgemeinen folgende Form haben:

$$p^2 = \frac{M}{N},\quad q^2 = \frac{M'}{N'};\quad p'^2 = \frac{L}{N},\quad q'^2 = \frac{L'}{N'};$$

$$p_1^2 = \frac{MP}{Q},\quad q_1^2 = \frac{M'P}{Q'};\quad p_1'^2 = \frac{LP'}{Q},\quad q_1'^2 = \frac{L'P'}{Q'}.$$

Alſo iſt

$$\frac{p^2}{p'^2} = \frac{M}{L}, \quad \frac{q^2}{q'^2} = \frac{M'}{L'};$$

$$\frac{p_1^2}{p_1'^2} = \frac{MP}{LP'}, \quad \frac{q_1^2}{q_1'^2} = \frac{M'P}{L'P'};$$

folglich

$$\frac{p_1^2}{p_1'^2} = \frac{p^2}{p'^2}\cdot\frac{P}{P'}, \quad \frac{q_1^2}{q_1'^2} = \frac{q^2}{q'^2}\cdot\frac{P}{P'},$$

und daher

$$\frac{p^2}{p'^2} : \frac{p_1^2}{p_1'^2} = \frac{q^2}{q'^2} : \frac{q_1^2}{q_1'^2},$$

oder

$$26. \quad \frac{p}{p'} : \frac{p_1}{p'_1} = \frac{q}{q'} : \frac{q_1}{q'_1}.$$

Nennt man jetzt, um dieſe Proportion anſchaulicher darzuſtellen, die in dem einen Syſteme angenommenen Punkte **A, B**, die in demſelben Syſteme angenommenen geraden Linien **a, b**, die entſprechenden Punkte und Linien in dem andern Syſteme aber **A', B'** und **a', b'**, und bezeichnet die von **A** auf **a** und **b**, von **B** auf **a** und **b**, von **A'** auf **a'** und **b'**, von **B'** auf **a'** und **b'** gefällten Perpendikel nach der Reihe durch **Aa, Ab, Ba, Bb, A'a', A'b', B'a', B'b'**; ſo iſt

$$p = Aa, \; q = Ab; \; p' = Ba, \; q' = Bb;$$

$$p_1 = A'a', \; q_1 = A'b'; \; p'_1 = B'a', \; q'_1 = B'b';$$

und folglich nach (26.)

$$27. \quad \frac{Aa}{Ba} : \frac{A'a'}{B'a'} = \frac{Ab}{Bb} : \frac{A'b'}{B'b'},$$

$$28. \quad \frac{Aa}{Ba} : \frac{Ab}{Bb} = \frac{A'a'}{B'a'} : \frac{A'b'}{B'b'},$$

$$29. \quad \frac{Aa}{Ab} : \frac{Ba}{Bb'} = \frac{A'a'}{A'b'} : \frac{B'a'}{B'b'}.$$

Dies führt alſo auf folgenden Lehrſatz:

Wenn man von zwei beliebigen Punkten **A, B** auf zwei beliebige gerade Linien **a, b** die Perpendikel **Aa, Ab** und **Ba, Bb** fällt, und wenn man ferner in einem collinearen Syſteme von den den Punkten **A, B** entſprechenden Punkten **A', B'** auf die den Linien **a, b** entſprechenden Linien **a', b'** die Perpendikel **A'a', A'b'** und **B'a', B'b'** fällt; ſo iſt immer

$$\frac{Aa}{Ab} : \frac{Ba}{Bb} = \frac{A'a'}{A'b'} : \frac{B'a'}{B'b'},$$

$$\frac{Aa}{Ba} : \frac{Ab}{Bb} = \frac{A'a'}{B'a'} : \frac{A'b'}{B'b'}.$$

Man kann dieſen Satz aber noch allgemeiner ausdrücken. Zieht

man nämlich durch die Punkte A, B zwei gegen die Linie a unter gleichen Winkeln geneigte Linien $A\alpha$, $B\alpha$, und eben ſo zwei gegen die Linien b unter gleichen Winkeln geneigte Linien $A\beta$, $B\beta$, ferner durch die Punkte A', B' zwei gegen die Linie a' unter gleichen Winkeln geneigte Linien $A'\alpha'$, $B'\alpha'$, und eben ſo zwei gegen die Linie b' unter gleichen Winkeln geneigte Linien $A'\beta'$, $B'\beta'$; ſo iſt offenbar

$$\frac{Aa}{Ba}=\frac{A\alpha}{B\alpha},\ \frac{Ab}{Bb}=\frac{A\beta}{B\beta},\ \frac{A'a'}{B'a'}=\frac{A'\alpha'}{B'\alpha'},\ \frac{A'b'}{B'b'}=\frac{A'\beta'}{B'\beta'}.$$

Alſo iſt nach dem Vorhergehenden auch immer

$$30.\quad \frac{A\alpha}{B\alpha}:\frac{A\beta}{B\beta}=\frac{A'\alpha'}{B'\alpha'}:\frac{A'\beta'}{B'\beta'},$$

$$31.\quad \frac{A\alpha}{A\beta}:\frac{B\alpha}{B\beta}=\frac{A'\alpha'}{A'\beta'}:\frac{B'\alpha'}{B'\beta'}.$$

8. Wir wollen uns nun wieder zwei beliebige Punkte $x'y'$, $x''y''$ und eine beliebige gerade Linie, deren Gleichung

$$32.\quad Ay+Bx+1=0$$

iſt, denken. Die den Punkten $x'y'$, $x''y''$ entſprechenden Punkte des collinearen Syſtems ſeyen $x'_1y'_1$, $x''_1y''_1$; die Gleichung der der Linie (32.) entſprechenden geraden Linie iſt

$$33.\quad (Aa+Ba'+a'')y_1+(Ab+Bb'+b'')x_1+Ac+Bc'+c''=0.$$

Denken wir uns nun von den Punkten $x'y'$, $x''y''$ auf die Linie (32.) die Perpendikel p, p', von den Punkten $x'_1y'_1$, $x''_1y''_1$ auf die Linie (33.) die Perpendikel p_1, p'_1 gefällt; ſo iſt unter Vorausſetzung rechtwinkliger Coordinaten

$$p^2=\frac{(Ay'+Bx'+1)^2}{A^2+B^2},\ p'^2=\frac{(Ay''+Bx''+1)^2}{A^2+B^2};$$

$$p_1^2=\frac{\{(Aa+Ba'+a'')y'_1+(Ab+Bb'+b'')x'_1+Ac+Bc'+c''\}^2}{(Aa+Ba'+a'')^2+(Ab+Bb'+b'')^2},$$

$$p_1'^2=\frac{\{(Aa+Ba'+a'')y''_1+(Ab+Bb'+b'')x''_1+Ac+Bc'+c''\}^2}{(Aa+Ba'+a'')^2+(Ab+Bb'+b'')^2}.$$

Weil aber zwiſchen den beiden Syſtemen Collineations-Verwandtſchaft Statt findet, ſo iſt

$$ay'_1+bx'_1+c=(a''y'_1+b''x'_1+c'')y',$$
$$a'y'_1+b'x'_1+c'=(a''y'_1+b''x'_1+c'')x';$$

$$ay''_1+bx''_1+c=(a''y''_1+b''x''_1+c'')y'',$$
$$a'y''_1+b'x''_1+c'=(a''y''_1+b''x''_1+c'')x'';$$

und folglich, wie leicht erhellen wird,

$$p_1^2=\frac{(Ay'+Bx'+1)^2(a''y'_1+b''x'_1+c'')^2}{(Aa+Ba'+a'')^2+(Ab+Bb'+b'')^2},$$

$$p_1'^2=\frac{(Ay''+Bx''+1)^2(a''y''_1+b''x''_1+c'')^2}{(Aa+Ba'+a'')^2+(Ab+Bb'+b'')^2}.$$

Alſo iſt

$$\frac{p_1^2}{p_1'^2} = \frac{(Ay' + Bx' + 1)^2}{(Ay'' + Bx'' + 1)^2} \cdot \left\{\frac{a''y'_1 + b''x'_1 + c''}{a''y''_1 + b''x''_1 + c''}\right\}^2,$$

d. i., wie aus dem Vorhergehenden erhellet,

$$34. \quad \frac{p_1^2}{p_1'^2} = \frac{p^2}{p'^2} \cdot \left\{\frac{a''y'_1 + b''x'_1 + c''}{a''y''_1 + b''x''_1 + c''}\right\}^2.$$

Für $a'' = 0$, $b'' = 0$ geht dieſe Gleichung in

$$35. \quad \frac{p_1^2}{p_1'^2} = \frac{p^2}{p'^2}, \quad \frac{p}{p'} = \frac{p_1}{p'_1},$$

oder in die Proportion

$$36. \quad p : p' = p_1 : p'_1$$

über.

In dem zuletzt betrachteten Falle haben die Collineations-Gleichungen offenbar die allgemeine Form

$$37. \quad y = ay_1 + bx_1 + c, \quad x = a'y_1 + b'x_1 + c',$$

wobei wir nur größerer Deutlichkeit wegen bemerken, daß die jetzigen a, b, c, a', b', c' mit den vorhergehenden a, b, c, a', b', c' nicht nothwendig einerlei ſind. Man nennt dieſe beſondere Art der Collineations-Verwandtſchaft Affinität, und kann alſo auch die allgemeinen Gleichungen (37.) zweckmäßig mit dem Namen der Affinitäts-Gleichungen belegen. Zugleich iſt in der Proportion (36.) eine merkwürdige und wichtige Eigenſchaft ſolcher Syſteme enthalten, zwiſchen denen Affinitäts-Verwandtſchaft Statt findet. Dieſe Eigenſchaft iſt in dem folgenden Satze ausgeſprochen:

Wenn man von zwei beliebigen Punkten **A, B** auf eine beliebige gerade Linie a die Perpendikel **Aa, Ba,** und in einem affinen Syſteme von den den Punkten **A, B** entſprechenden Punkten **A′, B′** auf die der Linie a entſprechende Linie a′ die Perpendikel **A′a′, B′a′** fällt; ſo iſt immer

$$38. \quad Aa : Ba = A'a' : B'a'.$$

Ueberdies iſt leicht erſichtlich, daß auch dieſes Theorem, ſo wie das in (7.) bewieſene Theorem, allgemeiner gemacht werden kann. Zieht man nämlich von den Punkten **A, B** an die Linie a zwei gegen dieſelbe unter gleichen Winkeln geneigte Linien $A\alpha$, $B\alpha$, und eben ſo von den Punkten **A′, B′** an die Linie a′ zwei unter gleichen Winkeln gegen dieſelbe geneigte Linien $A'\alpha'$, $B'\alpha'$; ſo iſt offenbar

$$\frac{Aa}{Ba} = \frac{A\alpha}{B\alpha}, \quad \frac{A'a'}{B'a'} = \frac{A'\alpha'}{B'\alpha'},$$

und folglich nach (38.)

$$39. \quad A\alpha : B\alpha = A'\alpha' : B'\alpha'.$$

Eine andere Eigenſchaft affiner Syſteme iſt folgende.

In zwei affinen Syſtemen ſind gerade Linien des einen Syſtems, welche parallelen geraden Linien des andern Syſtems entſprechen, jederzeit einander ſelbſt parallel.

Sind nämlich

$$y + Ax + B = 0, \quad y + Ax + C = 0$$

die Gleichungen zweier einander parallelen geraden Linien des einen Syſtems; ſo ſind

$$ay_1 + bx_1 + c + A(a'y_1 + b'x_1 + c') + B = 0,$$
$$ay_1 + bx_1 + c + A(a'y_1 + b'x_1 + c') + C = 0,$$

d. i.

$$(a + Aa')y_1 + (b + Ab')x_1 + c + Ac' + B = 0,$$
$$(a + Aa')y_1 + (b + Ab')x_1 + c + Ac' + C = 0,$$

oder

$$y_1 + \frac{b + Ab'}{a + Aa'}x_1 + \frac{c + Ac' + B}{a + Aa'} = 0,$$
$$y_1 + \frac{b + Ab'}{a + Aa'}x_1 + \frac{c + Ac' + C}{a + Aa'} = 0$$

die Gleichungen der entſprechenden Graden des andern Syſtems, und aus der Form dieſer Gleichungen erhellet auf der Stelle, daß auch dieſe beiden Geraden einander parallel ſind.

9. Aus den vorher bewieſenen Eigenſchaften collinearer und affiner Syſteme laſſen ſich mehrere andere merkwürdige Eigenſchaften ſolcher Syſteme herleiten, worüber wir hier nur Folgendes bemerken.

In Fig. 35. ſeyen A, B, C, D, E und A', B', C', D', E' fünf beliebige einander entſprechende Punkte zweier collinearen Syſteme; ſo ſind, wie aus dem allgemeinen Begriffe der Collineations-Verwandtſchaft auf der Stelle folgt, CD und C'D', CE und C'E', einander entſprechende gerade Linien in beiden Syſtemen. Bezeichnet man nun die von A auf CD und CE gefällten Perpendikel durch Aa, Ab; die von B auf CD und CE gefällten Perpendikel durch Ba, Bb; die von A' auf C'D' und C'E' gefällten Perpendikel durch A'a', A'b'; die von B' auf C'D' und C'E' gefällten Perpendikel durch B'a', B'b'; ſo iſt nach (28.)

$$\frac{Aa}{Ba} : \frac{Ab}{Bb} = \frac{A'a'}{B'a'} : \frac{A'b'}{B'b'},$$

und folglich auch

$$\frac{Aa.CD}{Ba.CD} : \frac{Ab.CE}{Bb.CE} = \frac{A'a'.C'D'}{B'a'.C'D'} : \frac{A'b'.C'E'}{B'b'.C'E'},$$

d. i. immer

$$40. \quad \frac{\Delta ACD}{\Delta BCD} : \frac{\Delta ACE}{\Delta BCE} = \frac{\Delta A'C'D'}{\Delta B'C'D'} : \frac{\Delta A'C'E'}{\Delta B'C'E'},$$

welches ebenfalls eine ſehr merkwürdige zwiſchen den Flächentheilen collinearer Syſteme jederzeit Statt findende Proportion iſt.

Sind ferner in derſelben Figur A, B, C, D und A', B', C', D' vier einander entſprechende Punkte in zwei affinen Syſtemen; ſo ſind CD und C'D' zwei einander entſprechende gerade Linien, und es iſt folglich, wenn wir die von A und B auf CD gefällten Perpendikel durch Aa und Ba, die von A' und B' auf C'D' gefällten Perpendikel durch A'a' und B'a' bezeichnen, nach (38.)

$$Aa : Ba = A'a' : B'a' ;$$

alſo auch

$$Aa . CD : Ba . CD = A'a' . C'D' : B'a' . C'D' ,$$

d. i.

$$41. \quad \Delta ACD : \Delta BCD = \Delta A'C'D' : \Delta B'C'D' ,$$

oder

$$42. \quad \Delta ACD : \Delta A'C'D' = \Delta BCD : \Delta B'C'D' .$$

Uebrigens iſt nun ferner auch leicht einzuſehen, daß in zwei affinen Syſtemen nicht bloß zwei Dreiecke, die eine Seite gemein haben, ſondern je zwei Dreiecke, und folglich auch jede zwei geradlinigen Figuren in dem einen Syſteme ſich eben ſo zu einander verhalten, wie die ihnen entſprechenden Figuren in dem andern Syſteme.

Es ſeyen jetzt A, B, C, D (Fig. 36.) vier in gerader Linie liegende Punkte eines Syſtems, und A', B', C', D' die denſelben entſprechenden, alſo auch in gerader Linie liegenden, Punkte eines collinearen Syſtems. Denkt man ſich nun durch B, C zwei beliebige gerade Linien EF, GH, und durch B', C' die denſelben entſprechenden Linien E'F', G'H' gezogen; ſo iſt nach (30.), weil AB, DB als gegen EF; AC, DC als gegen GH; A'B', D'B' als gegen E'F'; A'C', D'C' als gegen G'H' unter gleichen Winkeln geneigte Linien zu betrachten ſind,

$$43. \quad \frac{AB}{BD} : \frac{AC}{CD} = \frac{A'B'}{B'D'} : \frac{A'C'}{C'D'} ,$$

welches ebenfalls eine ſehr merkwürdige Proportion iſt, die in zwei collinearen Syſtemen immer für vier in gerader Linie liegende Punkte des einen und die vier denſelben entſprechenden Punkte des andern Syſtems Statt findet.

Sind ferner A, B, C (Fig. 37.) drei beliebige in gerader Linie liegende Punkte eines Syſtems, und A', B', C' die denſelben entſprechenden, alſo auch in gerader Linie liegenden, Punkte eines dem erſtern affinen Syſtems; ſo denke man ſich durch B die beliebige gerade Linie DE und durch B' die derſelben entſprechende gerade Linie D'E' gezogen. Dann folgt aus (39.) durch ein ganz ähnliches Raiſonnement wie vorher, daß immer

$$44. \quad AB : BC = A'B' : B'C'$$

iſt, und man ſieht alſo, daß in affinen Syſtemen einander entſprechende gerade Linien durch ſich entſprechende Punkte jederzeit in gleichen Verhältniſſen getheilt werden.

10. Mittelſt der oben bewieſenen Sätze laſſen ſich nun auch leicht die folgenden Aufgaben auflöſen.

I. Es ſeyen vier in gerader Linie liegende Punkte A, B, C, D (Fig. 38.) eines Syſtems, und drei den Punkten A, B, C entſprechende Punkte A′, B′, C′ eines collinearen Syſtems gegeben; man ſoll den dem Punkte D des erſtern Syſtems entſprechenden Punkt des letztern Syſtems finden.

Daß die drei gegebenen Punkte A′, B′, C′ in einer geraden Linie liegen müſſen, und daß auch der geſuchte Punkt mit dieſen drei Punkten in einer geraden Linie liegen muß, folgt aus dem allgemeinen Begriffe der Collineations-Verwandtſchaft unmittelbar. Man lege durch den Punkt A′ eine beliebige gerade Linie, nehme auf derſelben $A'B'' = AB$, $A'C'' = AC$, $A'D'' = AD$, ziehe die Linien $B'B''$, $C'C''$, welche, verlängert, ſich in O ſchneiden mögen; ziehe hierauf OD'', und verlängere dieſe Linie bis zu ihrem Durchſchnittspunkte D′ mit der Linie $A'C'$, ſo iſt D′ der geſuchte Punkt.

Um dies zu beweiſen, ziehe man durch den Punkt D″ mit $B'B''$ und $C'C''$ die Parallelen $D''E'$, $D''F'$; ſo iſt

$$\frac{A'B''}{B''D''} = \frac{A'B'}{B'E'},\quad \frac{A'C''}{C''D''} = \frac{A'C'}{C'F'}.$$

Ferner iſt

$$\frac{B'E'}{B'D'} = \frac{D''O}{D'O},\quad \frac{C'F'}{C'D'} = \frac{D''O}{D'O},$$

und folglich

$$\frac{A'B''}{B''D''}\cdot\frac{D''O}{D'O} = \frac{A'B'}{B'E'}\cdot\frac{B'E'}{B'D'} = \frac{A'B'}{B'D'},$$

$$\frac{A'C''}{C''D''}\cdot\frac{D''O}{D'O} = \frac{A'C'}{C'F'}\cdot\frac{C'F'}{C'D'} = \frac{A'C'}{C'D'}.$$

Alſo iſt offenbar

$$\frac{A'B''}{B''D''}:\frac{A'C''}{C''D''} = \frac{A'B'}{B'D'}:\frac{A'C'}{C'D'},$$

d. i. nach der Conſtruction

$$\frac{AB}{BD}:\frac{AC}{CD} = \frac{A'B'}{B'D'}:\frac{A'C'}{C'D'}.$$

Daher iſt nach (43.) D′ der geſuchte Punkt, wie bewieſen werden ſollte.

II. Es ſind fünf Punkte A, B, C, D, E (Fig. 39.) eines Syſtems, von denen nicht drei in gerader Linie liegen, und vier den Punkten A, B, C, D entſprechende

Punkte A′, B′, C′, D′ eines collinearen Syſtems gegeben; man ſoll den dem Punkte E des erſtern Syſtems entſprechenden Punkt des letztern Syſtems finden.

Aus den gegebenen Punkten A, B, C, D und A′, B′, C′, D′ beſchreibe man die vollſtändigen Vierecke ABMCND und A′B′M′C′N′D′; ſo ſind M, M′ und N, N′ einander entſprechende Punkte der beiden Syſteme, weil ſie Durchſchnitte einander entſprechender gerader Linien ſind. Nun ziehe man ME, NE, und beſtimme die Durchſchnittspunkte P, Q. Dann beſtimme man auf A′N′ und A′M′ nach der vorigen Aufgabe I. die den Punkten P, Q entſprechenden Punkte P′, Q′ und ziehe die Linien M′P′, N′Q′; ſo iſt deren Durchſchnittspunkt E′ offenbar der geſuchte dem Punkte E entſprechende Punkt.

III. Es ſind drei in gerader Linie liegende Punkte A, B, C (Fig. 40.) und zwei den Punkten A, B entſprechende Punkte A′, B′ eines affinen Syſtems gegeben; man ſoll den dem Punkte C des erſtern Syſtems entſprechenden Punkt des letztern Syſtems finden.

Zuvörderſt iſt klar, daß der geſuchte Punkt mit A′ und B′ in einer geraden Linie liegen muß. Zieht man nun dieſe gerade Linie, und beſtimmt auf derſelben den Punkt C′ ſo, daß

$$AB : BC = A'B' : B'C'$$

iſt; ſo iſt nach (44.) C′ der geſuchte Punkt.

IV. Es ſind vier Punkte A, B, C, D (Fig. 42.) eines Syſtems, von denen nicht drei in einer geraden Linie liegen, und drei den Punkten A′, B′, C′ entſprechende Punkte eines affinen Syſtems gegeben; man ſoll den dem Punkt D des erſtern Syſtems entſprechenden Punkt des letztern Syſtems, finden.

Man beſtimme den Durchſchnittspunkt P der Linien AB, CD, ſo wie den Durchſchnittspunkt Q der Linien AC, BD. Nun beſtimme man nach III. auf der Linie A′B′ den dem Punkte P entſprechenden Punkt P′, auf A′C′ den dem Punkte Q entſprechenden Punkt Q′, und ziehe die Linien P′C′, B′Q′; ſo wird deren Durchſchnittspunkt D′ offenbar der geſuchte dem Punkte D enſprechende Punkt ſeyn.

11. Die allgemeinen Collineations-Gleichungen

$$y = \frac{ay_1 + bx_1 + c}{a''y_1 + b''x_1 + 1}, \quad x = \frac{a'y_1 + b'x_1 + c'}{a''y_1 + b''x_1 + 1}$$

laſſen ſich durch eine ſchickliche Coordinaten-Verwandlung vereinfachen, wobei wir jedoch der Einfachheit wegen die Coordinaten rechtwinklig annehmen wollen. Man verändere zuerſt bloß die Anfangspunkte der Coordinaten, indem man die einander entſprechenden Axen

einander parallel annimmt, und ſetze alſo zu dem Ende, wenn y', x' und y'_1, x'_1 die Coordinaten der neuen Anfangspunkte bezeichnen, nach dem Artikel Coordinaten (4.) für y, x und y_1, x'_1 reſpective $y'+y$, $x'+x$ und y'_1+y_1, x'_1+x_1. Dadurch erhält man

$$y'+y=\frac{ay_1+bx_1+ay'_1+bx'_1+c}{a''y_1+b''x_1+a''y'_1+b''x'_1+1},$$

$$x'+x=\frac{a'y_1+b'x_1+a'y'_1+b'x_1+c'}{a''y_1+b''x_1+a''y'_1+b''x'_1+1}.$$

Wählt man nun aber zu den beiden neuen Anfangspunkten $x'y'$ und $x'_1y'_1$ zwei einander entſprechende Punkte der beiden Syſteme; ſo iſt

$$y'=\frac{ay'_1+bx'_1+c}{a''y'_1+b''x'_1+1},\quad x'=\frac{a'y'_1+b'x'_1+c'}{a''y'_1+b''x'_1+1},$$

und folglich

$$y=\frac{\{(ab''-a''b)x'_1+a-a''c\}y_1+\{(a''b-ab'')y'_1+b-b''c\}x_1}{(a''y'_1+b''x'_1+1)(a''y_1+b''x_1+a''y'_1+b''x'_1+1)},$$

$$x=\frac{\{(a'b''-a''b')x'_1+a'-a''c'\}y_1+\{(a''b'-a'b'')y'_1+b'-b''c'\}x_1}{(a''y'_1+b''x'_1+1)(a''y_1+b''x_1+a''y'_1+b''x'_1+1)},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$ab''-a''b=\alpha,\quad a-a''c=\beta,\quad b-b''c=-\gamma;$$

$$a'b''-a''b'=\alpha',\quad a'-a''c'=\beta',\quad b'-b''c'=-\gamma';$$

$$a''y'_1+b''x'_1+1=\Theta$$

ſetzen,

$$y=\frac{(\alpha x'_1+\beta)y_1-(\alpha y'_1+\gamma)x_1}{\Theta(a''y_1+b''x_1+\Theta)},\quad x=\frac{(\alpha'x'_1+\beta')y_1-(\alpha'y'_1+\gamma')x_1}{\Theta(a''y_1+b''x_1+\Theta)}.$$

Nun wollen wir, ohne den Coordinatenwinkel zu ändern, die Lage der Axen der x_1, y_1 ändern, und müſſen alſo nach dem Artikel Coordinaten (27. 4.) i. d. Z. für x_1 und y_1 reſpective

$$x_1\cos\varphi-y_1\sin\varphi \text{ und } x_1\sin\varphi+y_1\cos\varphi$$

ſetzen. Dies giebt

$$y=\frac{\{(\alpha x'_1+\beta)\cos\varphi+(\alpha y'_1+\gamma)\sin\varphi\}y_1+\{(\alpha x'_1+\beta)\sin\varphi-(\alpha y'_1+\gamma)\cos\varphi\}x_1}{\Theta\{(a''\cos\varphi-b''\sin\varphi)y_1+(a''\sin\varphi+b''\cos\varphi)x_1+\Theta\}},$$

$$y=\frac{\{(\alpha'x'_1+\beta')\cos\varphi+(\alpha'y'_1+\gamma')\sin\varphi\}y_1+\{(\alpha'x'_1+\beta')\sin\varphi-(\alpha'y'_1+\gamma')\cos\varphi\}x_1}{\Theta\{(a''\cos\varphi-b''\sin\varphi)y_1+(a''\sin\varphi+b''\cos\varphi)x_1+\Theta\}}.$$

Die Größen x'_1, y'_1, φ, welche beliebig gewählt werden können, wollen wir nun ſo beſtimmen, daß ſie den drei folgenden Gleichungen genügen:

$$(\alpha x'_1+\beta)\sin\varphi-(\alpha y'_1+\gamma)\cos\varphi=0,$$

$$(\alpha'x'_1+\beta')\cos\varphi+(\alpha'y'_1+\gamma')\sin\varphi=0,$$

$$(\alpha x'_1+\beta)\cos\varphi+(\alpha y'_1+\gamma)\sin\varphi=(\alpha'x_1+\beta')\sin\varphi-(\alpha'y'_1+\gamma')\cos\varphi.$$

Daß dieſe Beſtimmung im Allgemeinen immer möglich iſt, läßt ſich auf folgende Art zeigen. Man ſetze der Kürze wegen

$$\alpha x'_1 + \beta = A,\ \alpha y'_1 + \gamma = B,\ \alpha' x'_1 + \beta' = A',\ \alpha' y'_1 + \gamma' = B';$$

ſo werden die drei zu erfüllenden Gleichungen:

$$A \sin\varphi - B \cos\varphi = 0,\quad A' \cos\varphi + B' \sin\varphi = 0,$$
$$A \cos\varphi + B \sin\varphi = A' \sin\varphi - B' \cos\varphi,$$

oder

$$A \operatorname{tang}\varphi = B,\ B' \operatorname{tang}\varphi = -A',\ A + B' = (A' - B) \operatorname{tang}\varphi;$$

alſo, wenn man die erſte und zweite Gleichung addirt, und dann $\operatorname{tang}\varphi$ mittelſt der dritten Gleichung eliminirt,

$$(A + B')^2 = -(A' - B)^2,$$

oder

$$(A + B')^2 + (A' - B)^2 = 0,$$

woraus auf der Stelle

$$A' - B = 0,\ A + B' = 0$$

folgt. Dieſe beiden Gleichungen enthalten bloß x'_1, y'_1, und ſind in Bezug auf dieſe Größen vom erſten Grade, geben alſo für x'_1 und y'_1 immer reelle Werthe, für jede dieſer Größen aber auch immer nur einen Werth. Hat man x'_1, y'_1; ſo ergiebt ſich $\operatorname{tang}\varphi$ aus jedem der folgenden Ausdrücke:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{B}{A} = -\frac{A'}{B'} = \frac{A + B'}{A' - B},$$

und man erhält alſo auch für $\operatorname{tang}\varphi$ immer einen, aber auch nur einen, reellen Werth. Alſo hat φ immer zwei reelle Werthe, die um 180° von einander verſchieden ſind. Für dieſe beſtimmten Werthe von x'_1, y'_1, φ nehmen die Collineations-Gleichungen die folgende ſehr einfache Geſtalt an:

$$45.\quad y = \frac{\alpha y_1}{ay_1 + bx_1 + 1},\quad x = \frac{\alpha x_1}{ay_1 + bx_1 + 1},$$

wo α, a, b nicht mit den früher eben ſo bezeichneten Quantitäten einerlei ſind. Der geraden Linie des einen Syſtems, deren Gleichung

$$Ay + Bx + C = 0$$

iſt, entſpricht die gerade Linie des andern Syſtems, deren Gleichung

$$(A\alpha + Ca)y_1 + (B\alpha + Cb)x_1 + C = 0$$

iſt. Den geraden Linien

$$y = 0 \text{ und } x = 0$$

entſprechen alſo jetzt die geraden Linien

$$y_1 = 0 \text{ und } x_1 = 0,$$

d. h. der Axe der x entſpricht die Axe der x_1, der Axe der y entſpricht die Axe der y_1. Auch iſt klar, daß die Anfangspunkte der beiden Coordinatenſyſteme jetzt einander enſprechende Punkte ſind.

Iſt

$$Ay + Bx = 0$$

die Gleichung einer durch den Anfang der Coordinaten gehenden geraden Linie des einen Syſtems; ſo iſt nach dem Vorhergehenden

$$A\alpha y_1 + B a x_1 = 0\,,$$

d. i.

$$Ay_1 + Bx_1 = 0$$

die Gleichung der entſprechenden geraden Linie des andern Syſtems, und dieſe Linie geht alſo durch den Anfang der Coordinaten des andern Syſtems, und iſt gegen die Axe der x_1 unter demſelben Winkel geneigt, wie die erſtere Linie gegen die Axe der x.

Nach dem Obigen iſt auch, wenn x, y und x_1, y_1 die Coordinaten zweier einander entſprechenden Punkte ſind, immer

$$x : y = x_1 : y_1\,.$$

Denkt man ſich die beiden Syſteme ſo auf einander gelegt, daß die Anfangspunkte der Coordinaten zuſammenfallen, und überdies die Axe der x auf die Axe der x_1, die Axe der y auf die Axe der y_1 fällt; ſo fallen alle durch den, jetzt gemeinſchaftlichen, Anfang der Coordinaten gezogene einander entſprechende gerade Linien auf einander, und jede zwei einander entſprechende Punkte der beiden Syſteme liegen mit dem gemeinſchaftlichen Anfange der Coordinaten in einer geraden Linie. Alles dies iſt eine unmittelbare Folge aus dem Vorhergehenden.

Die vorher beſtimmten Anfangspunkte der neuen Coordinatenſyſteme nennt man die Collineatiospunkte oder Collineationscentra, und zwar heißt der Anfangspunkt der x_1, y_1 das Collineationscentrum des Syſtems, welchem die Coordinaten x, y, der Anfangspunkt der x, y dagegen das Collineationscentrum des Syſtems, welchem die Coordinaten x_1, y_1 entſprechen. Die Collineations-Gleichungen werden, wie aus dem Vorhergehenden erhellet, immer die einfache Form

$$y = \frac{\alpha y_1}{ay_1 + bx_1 + 1},\quad x = \frac{\alpha x_1}{ay_1 + bx_1 + 1}$$

haben, wenn man die Collineationscentra der beiden Syſteme als Anfangspunkte der Coordinaten, und ſowohl als Axen der x und x_1, als auch als Axen der y und y_1, zwei einander entſprechende durch die Collineationscentra gehende gerade Linien annimmt. Zwei collineare Syſteme, die ſo auf einander gelegt ſind, daß ihre beiden Collineationscentra und jede zwei durch die Collineationscentra gehende einander entſprechende gerade Linien auf einander fallen, ſollen collinear liegend genannt werden.

Die Coordinaten aller einander entſprechenden Punkte, welche in zwei collinearen und collinear liegenden Syſtemen auf einander fallen, müſſen offenbar den beiden Gleichungen

$$y = \frac{\alpha y}{ay + bx + 1},\quad x = \frac{\alpha x}{ay + bx + 1}$$

oder

$$(ay + bx + 1 - \alpha)y = 0,\ (ay + bx + 1 - \alpha)x = 0$$

genügen. Dieſe beiden Gleichungen werden ſowohl erfüllt durch $x = 0$, $y = 0$, d. h. durch das gemeinſchaftliche Collineations-centrum, als auch durch

$$46.\quad ay + bx + 1 - \alpha = 0,$$

welches offenbar die Gleichung einer geraden Linie iſt, die wir im Folgenden die Collineationsaxe nennen wollen, und deren Lage durch die vorſtehende Gleichung offenbar vollkommen beſtimmt iſt.

Die Gleichungen zweier einander entſprechenden geraden Linien ſind nach dem Obigen im Allgemeinen

$$Ay + Bx + C = 0,$$
$$(A\alpha + Ca)y_1 + (B\alpha + Cb)x_1 + C = 0.$$

Sind nun die beiden Syſteme collinear liegend; ſo hat man für die Coordinaten der Durchſchnittspunkte aller einander entſprechenden Linien offenbar die beiden Gleichungen

$$Ay + Bx + C = 0,$$
$$(A\alpha + Ca)y + (B\alpha + Cb)x + C = 0.$$

Die letztere Gleichung läßt ſich auf die Form

$$(Ay + Bx)\alpha + C(ay + bx + 1) = 0,$$

oder auf die Form

$$(Ay + Bx + C)\alpha + C(ay + bx + 1 - \alpha) = 0$$

bringen. Vermöge der erſten Gleichung hat man alſo für die Coordinaten des Durchſchnittspunktes jeder zwei einander entſprechenden Linien die Gleichung

$$C(ay + bx + 1 - \alpha) = 0,$$

oder

$$ay + bx + 1 - \alpha = 0,$$

welche mit der Gleichung der Collineationsaxe identiſch iſt, ſo daß alſo der Durchſchnittspunkt jeder zwei einander entſprechenden Linien auf der Collineationsaxe liegt.

Es ſeyen jetzt

$$Ay + Bx + C = 0,\ Ay + Bx + C' = 0$$

die Gleichungen zweier einander parallelen geraden Linien in dem Syſteme, welchem die Coordinaten x, y entſprechen; ſo ſind nach dem Vorhergehenden

$$(A\alpha + Ca)y_1 + (B\alpha + Cb)x_1 + C = 0,$$
$$(A\alpha + C'a)y_1 + (B\alpha + C'b)x_1 + C' = 0,$$

oder

$$\alpha(Ay_1 + Bx_1) + C(ay_1 + bx_1 + 1) = 0,$$
$$\alpha(Ay_1 + Bx_1) + C'(ay_1 + bx_1 + 1) = 0$$

die Gleichungen der den beiden in Rede ſtehenden Linien entſprechenden geraden Linien. Der Durchſchnittspunkt dieſer beiden ge-

raden Linien iſt offenbar mit dem Durchſchnittspunkte der beiden geraden Linien, deren Gleichungen

$$Ay_1 + Bx_1 = 0, \quad ay_1 + bx_1 + 1 = 0$$

ſind, einerlei. Die letztere gerade Linie iſt, wenn man ſich die beiden Syſteme collinear liegend denkt, der Collineationsaxe parallel, und man ſieht alſo, daß in zwei collinearen und collinear liegenden Syſtemen der geometriſche Ort der Durchſchnittspunkte aller derjenigen geraden Linien in dem einen Syſteme, welche parallelen geraden Linien im andern Syſteme entſprechen, eine der Collineationsaxe parallele durch die Gleichung

$$47. \quad ay_1 + bx_1 + 1 = 0$$

dargeſtellte gerade Linie iſt. Dieſe gerade Linie nennt man die Gegenaxe im Syſteme x_1y_1. Die Gleichung

$$Ay_1 + Bx_1 = 0$$

gehört, wenn wir die Syſteme immer als collinear liegend betrachten, einer durch das Collineationscentrum gehenden geraden Linie an, welche den beiden durch die Gleichungen

$$Ay + Bx + C = 0, \quad Ay + Bx + C' = 0$$

dargeſtellten parallelen Linien parallel iſt.

Aus den Gleichungen

$$y = \frac{\alpha y_1}{ay_1 + bx_1 + 1}, \quad x = \frac{\alpha x_1}{ay_1 + bx_1 + 1}$$

folgt

$$ay + bx - \alpha = -\frac{\alpha}{ay_1 + bx_1 + 1}.$$

Alſo iſt

$$(ay + bx - \alpha)y_1 = -\frac{\alpha y_1}{ay_1 + bx_1 + 1} = -y.$$

$$(ay + bx - \alpha)x_1 = -\frac{\alpha x_1}{ay_1 + bx_1 + 1} = -x,$$

und folglich

$$48. \quad y_1 = -\frac{y}{ay + bx - \alpha}, \quad x_1 = -\frac{x}{ay + bx - \alpha}.$$

Bringt man dieſe Gleichungen auf die Form

$$y_1 = \frac{\frac{1}{\alpha}y}{-\frac{a}{\alpha}y - \frac{b}{\alpha}x + 1}, \quad x_1 = \frac{\frac{1}{\alpha}x}{-\frac{a}{\alpha}y - \frac{b}{\alpha}x + 1};$$

ſo ſieht man, daß die Gleichung der Gegenaxe im Syſteme xy die Gleichung

$$-\frac{a}{\alpha}y - \frac{b}{\alpha}x + 1 = 0,$$

oder

$$49.\quad ay + bx - \alpha = 0$$

iſt.

Seyen jetzt $x'y'$ und $x'_1 y'_1$ zwei einander entſprechende Punkte der beiden Syſteme; das von dem Punkte $x'y'$ auf die Gegenaxe im Syſteme xy gefällte Perpendikel ſey $= p$, das von dem Punkte $x'_1 y'_1$ auf die Gegenaxe im Syſteme $x_1 y_1$ gefällte Perpendikel ſey dagegen $= p_1$. Nach bekannten Formeln der analytiſchen Geometrie iſt

$$p^2 = \frac{(ay' + bx' - \alpha)^2}{a^2 + b^2},\ p_1^2 = \frac{(ay'_1 + bx'_1 + 1)^2}{a^2 + b^2}.$$

Nun iſt aber, weil $x'y'$ und $x'_1 y'_1$ einander entſprechende Punkte ſind,

$$y' = \frac{\alpha y'_1}{ay'_1 + bx'_1 + 1},\ x' = \frac{\alpha x'_1}{ay'_1 + bx'_1 + 1}.$$

Alſo iſt

$$ay' + bx' - \alpha = \frac{-\alpha}{ay'_1 + bx'_1 + 1},$$

und folglich

$$p^2 = \frac{\alpha^2}{(a^2 + b^2)(ay'_1 + bx'_1 + 1)^2}.$$

Alſo iſt

$$p^2 p_1^2 = \frac{\alpha^2}{(a^2 + b^2)^2},$$

oder

$$50.\quad pp_1 = \pm \frac{\alpha}{a^2 + b^2},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem α poſitiv oder negativ iſt. Man ſieht hieraus, daß das Product pp_1 für jede zwei collineare Syſteme eine conſtante Größe iſt.

12. I. In affinen Syſtemen werden, wie in (9.) gezeigt worden iſt, einander entſprechende gerade Linien durch ſich entſprechende Punkte in gleichem Verhältniß getheilt. Wenn nun aber **A, B** zwei beliebige Punkte des einen, **A', B'** die denſelben entſprechenden Punkte des andern Syſtems, und die beiden Syſteme ſo beſchaffen ſind, daß der Exponent des Verhältniſſes **AB** : **A'B'** eine conſtante Größe iſt, wie man auch die Lage der beiden Punkte **A, B** und der ihnen entſprechenden Punkte verändern mag; ſo heißen die beiden Syſteme einander ähnlich. Es geht hieraus hervor, daß die Aehnlichkeit, nach dem eben aufgeſtellten Begriffe, ein beſonderer Fall der Affinität iſt, und daß alſo für den Fall der Aehnlichkeit zwiſchen den conſtanten Coefficienten a, b, c, a', b', c' der Affinitäts-Gleichungen

$$y = ay_1 + bx_1 + c,\quad x = a'y_1 + b'x_1 + c'$$

gewiſſe Relationen werden Statt finden müſſen, die wir jetzt auf-

ſuchen wollen. Bezeichnen wir zu dem Ende die Coordinaten der Punkte A, B und A', B' durch x', y'; x'', y'' und x'_1, y'_1; x''_1, y''_1; ſo iſt, wenn α und α_1 die Coordinatenwinkel der beiden Syſteme ſind, nach dem Artikel Coordinaten (12.) i. d. Z.

$$AB^2 = (x'-x'')^2 + 2(x'-x'')(y'-y'')\cos\alpha + (y'-y'')^2,$$
$$A'B'^2 = (x'_1-x''_1)^2 + 2(x'_1-x''_1)(y'_1-y''_1)\cos\alpha_1 + (y'_1-y''_1)^2.$$

Weil nun aber

$$y' = ay'_1 + bx'_1 + c,\quad x' = a'y'_1 + b'x'_1 + c';$$
$$y'' = ay''_1 + bx''_1 + c,\quad x'' = a'y''_1 + b'x''_1 + c'$$

iſt; ſo iſt

$$\begin{aligned} AB^2 = & \{a'(y'_1 - y''_1) + b'(x'_1 - x''_1)\}^2 \\ & + 2\{a'(y'_1-y''_1) + b'(x'_1-x''_1)\}\{a(y'_1-y''_1) + b(x'_1-x''_1)\}\cos\alpha \\ & + \{a(y'_1-y''_1) + b(x'_1-x''_1)\}^2 \\ = & (a^2 + 2aa'\cos\alpha + a'^2)(y'_1-y''_1)^2 \\ & + 2\{ab + (ab'+a'b)\cos\alpha + a'b'\}(y'_1-y''_1)(x'_1-x''_1) \\ & + (b^2 + 2bb'\cos\alpha + b'^2)(x'_1-x''_1)^2. \end{aligned}$$

Da nun für alle Werthe von x'_1, y'_1; x''_1, y''_1, wenn q eine an ſich unbeſtimmte, jedoch conſtante Größe bezeichnet,

$$AB = q \,.\, A'B' \text{ oder } AB^2 = q^2 \,.\, A'B'^2$$

ſeyn ſoll; ſo muß offenbar

$$a^2 + 2aa'\cos\alpha + a'^2 = q^2,$$
$$b^2 + 2bb'\cos\alpha + b'^2 = q^2,$$
$$ab + (ab' + a'b)\cos\alpha + a'b' = q^2\cos\alpha_1$$

ſeyn. Eliminirt man q^2 aus dieſen drei Gleichungen; ſo erhält man die beiden Gleichungen:

$$51.\quad \begin{cases} a^2 + 2aa'\cos\alpha + a'^2 = b^2 + 2bb'\cos\alpha + b'^2, \\ ab + (ab' + a'b)\cos\alpha + a'b' = (a^2 + 2aa'\cos\alpha + a'^2)\cos\alpha_1, \end{cases}$$

und dies ſind die geſuchten Relationen zwiſchen den conſtanten Coefficienten der Affinitäts-Gleichungen im Falle der Aehnlichkeit. Sind beide Coordinatenſyſteme rechtwinklig und folglich $\alpha = \alpha_1 = 90°$; ſo gehen die beiden obigen Gleichungen in folgende über:

$$52.\quad a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2,\ ab + a'b' = 0.$$

Aus dieſen beiden Gleichungen folgt leicht:

$$53.\quad a = \pm b',\ a' = \mp b,$$

wo die obern und untern Zeichen ſich auf einander beziehen.

II. Wenn in zwei ähnlichen Syſtemen die vorher durch q bezeichnete an ſich unbeſtimmte, jedoch conſtante Größe den beſtimmten Werth ± 1 hat; ſo heißen die beiden Syſteme einander congruent. Für dieſen beſondern Fall der Aehnlichkeit werden die drei vorhergehenden Bedingungsgleichungen:

$$53.\quad \begin{cases} a^2 + 2aa'\cos\alpha + a'^2 = 1\,, \\ b^2 + 2bb'\cos\alpha + b'^2 = 1\,, \\ ab + (ab' + a'b)\cos\alpha + a'b' = \cos\alpha_1\,, \end{cases}$$

und, wenn $\alpha = \alpha_1 = 90^\circ$ iſt:

$$54.\quad a^2 + a'^2 = 1,\ b^2 + b'^2 = 1,\ ab + a'b' = 0\,.$$

Bemerkt zu werden verdient noch, daß dieſen drei Gleichungen jederzeit genügt wird, wenn man, indem γ einen beliebigen Winkel bezeichnet, $a = \cos\gamma$, $b = \sin\gamma$, $a' = \pm \sin\gamma$, $b' = \mp \cos\gamma$ ſetzt.

III. Es iſt nun endlich noch ein beſonderer Fall der Affinität zu betrachten. In (9.) iſt nämlich gezeigt worden, daß, wenn F und F_1 die Flächenräume zweier geradlinigen Figuren bezeichnen, deren Spitzen einander entſprechende, übrigens beliebige Punkte zweier affinen Syſteme ſind, für dieſe beiden Syſteme der Exponent des Verhältniſſes $F:F_1$ eine conſtante Größe iſt. Iſt nun der Exponent dieſes conſtanten Verhältniſſes die Einheit; ſo nennt Möbius in ſeinem trefflichen barycentriſchen Calcul S. 213. die beiden Syſteme einander gleich, wobei aber ſogleich in die Augen fallen wird, daß dieſer Begriff der Gleichheit zweier Syſteme oder Figuren ein weit engerer als der gewöhnliche Begriff der Gleichheit iſt, indem man nach dieſem zwei Figuren ſchon dann einander gleich nennt, wenn die ſie begränzenden Linien gleiche Flächenräume einſchließen, nach dem von Möbius aufgeſtellten engern Begriffe aber auch noch Gleichheit in allen einzelnen Theilen der beiden Figuren erfordert wird.

13. Um nur eine Anwendung der im Obigen gegebenen allgemeinen Theorie der Collineations-Verwandtſchaft mitzutheilen, wollen wir uns einmal zwei Dreiecke ABC, $A'B'C'$ denken, die eine ſolche Lage haben, daß die Verbindungslinien AA', BB', CC' ihrer Spitzen in einem Punkte O zuſammentreffen. Nehmen wir nun den Punkt O als Anfangspunkt eines beliebigen Coordinatenſyſtems an, und bezeichnen die Coordinaten der Punkte A, B, C und A', B', C' in Bezug auf dieſes eine Coordinatenſyſtem durch x', y'; x'', y''; x''', y''' und x'_1, y'_1; x''_1, y''_1; x'''_1, y'''_1, ſo iſt

$$\frac{y'}{y'_1} = \frac{x'}{x'_1},\quad \frac{y''}{y''_1} = \frac{x''}{x''_1},\quad \frac{y'''}{y'''_1} = \frac{x'''}{x'''_1}.$$

Beſtimmt man nun, welches offenbar immer möglich iſt, die drei Größen α, a, b ſo, daß dieſelben den drei folgenden Gleichungen genügen

$$y' = \frac{\alpha y'_1}{ay'_1 + bx'_1 + 1},\quad y'' = \frac{\alpha y''_1}{ay''_1 + bx''_1 + 1},\quad y''' = \frac{\alpha y'''_1}{ay'''_1 + bx'''_1 + 1};$$

ſo iſt offenbar immer auch

$$x' = \frac{\alpha x'_1}{ay'_1 + bx'_1 + 1},\quad x'' = \frac{\alpha x''_1}{ay''_1 + bx''_1 + 1},\quad x''' = \frac{\alpha x'''_1}{ay'''_1 + bx'''_1 + 1};$$

und es erhellet alſo aus dem Obigen, daß die beiden Dreiecke **ABC** und **A′B′C′** als zwei collineare und collinear liegende Syſteme betrachtet werden können, deren gemeinſchaftliches Collineationscentrum der Punkt **O** iſt, ſo daß alſo auf dieſe beiden Dreiecke alle die Sätze angewandt werden können, welche oben von collinearen und collinear liegenden Syſtemen überhaupt bewieſen worden ſind. Da nun der Durchſchnittspunkt jeder zwei einander entſprechenden geraden Linien in zwei collinearen und collinear liegenden Syſtemen nach dem Obigen auf der Collineationsaxe liegt; ſo ergiebt ſich auf der Stelle das folgende überaus merkwürdige Theorem:

Wenn zwei Dreiecke ABC, A′B′C′ eine ſolche Lage haben, daß die Verbindungslinien AA′, BB′, CC′ der Spitzen dieſer beiden Dreiecke ſich in einem Punkte O ſchneiden; ſo liegen die drei Durchſchnittspunkte der Seiten BC und B′C′, AC und A′C′, AB und A′B′ jederzeit in einer und derſelben geraden Linie.

Bemerkenswerth iſt es, daß dieſer Satz auch dann noch gilt, wenn die beiden Dreiecke **ABC**, **A′B′C′** nicht in einer Ebene, ſondern beliebig im Raume liegen, wie durch das folgende ſehr einfache Raiſonnement, ohne die Theorie der Collineations-Verwandtſchaft bewieſen werden kann. Die beiden ſich in dem Punkte **O** ſchneidenden geraden Linien **AA′**, **BB′** liegen in einer Ebene. In dieſer Ebene liegen alſo die vier Punkte **A**, **A′**, **B**, **B′**, und folglich auch die beiden geraden Linien **AB** und **A′B′**, welche ſich alſo im Allgemeinen in einem gewiſſen Punkte ſchneiden werden, den wir durch γ bezeichnen wollen. Eben ſo werden ſich **AC** und **A′C′** in einem gewiſſen Punkte β, **BC** und **B′C′** in einem gewiſſen Punkte α ſchneiden. Weil nun die drei Punkte α, β, γ auf den drei Seiten des Dreiecks **ABC** liegen; ſo liegen ſie jederzeit alle drei in der Ebene dieſes Dreiecks. Ganz eben ſo liegen aber die drei Punkte α, β, γ auch in der Ebene des Dreiecks **A′B′C′**, und können alſo nur in der gemeinſchaftlichen Durchſchnittslinie der Ebenen der beiden Dreiecke **ABC**, **A′B′C′** liegen, ſo daß alſo die in Rede ſtehenden drei Punkte jederzeit in einer und derſelben geraden Linie liegen, wie bewieſen werden ſollte.

Uebrigens kann man aus dem vorher bewieſenen Satze auch noch leicht den folgenden ſehr merkwürdigen Satz herleiten:

Wenn zwei Vierecke ABA′B′, CDC′D′ (Fig. 41.) auf eine ſolche Weiſe in und um einander beſchrieben ſind, daß ihre vier Diagonalen AA′, BB′, CC′, DD′ ſich in einem Punkte ſchneiden; ſo liegen die vier Durchſchnittspunkte ihrer Gegenſeiten jederzeit in einer geraden Linie.

Man betrachte die beiden Dreiecke **ABC**, **A′B′C′**; ſo findet man, daß die Verbindungslinien **AA′**, **BB′**, **CC′** der Spitzen der-

ſelben ſich in einem Punkte, nämlich in dem Punkte O, ſchneiden. Deshalb muß nach dem vorher bewieſenen Satze der Durchſchnittspunkt der Seiten AB, A'B' mit den Durchſchnittspunkten der Seiten AC, A'C' und BC, B'C', oder CD, C'D' und CD', C'D, in einer geraden Linie liegen. Betrachtet man ferner die Dreiecke AB'D, A'BD'; ſo findet man, daß die Verbindungslinien AA', BB', DD' der Spitzen derſelben ſich in einem Punkte, nämlich in dem Punkte O, ſchneiden. Deshalb muß nach dem vorher bewieſenen Satze der Durchſchnittspunkt der Seiten AB', A'B mit den Durchſchnittspunkten der Seiten AD, A'D' und BD', B'D, oder CD, C'D' und CD', C'D, in einer geraden Linie liegen. Hieraus und aus dem vorher Bewieſenen ergiebt ſich aber auf der Stelle die Richtigkeit des zu beweiſenden Satzes.

III. Von der Reciprocität.

14. Die Gleichung der Reciprocität iſt nach (21.)

$$55.\quad (ay+bx+c)y_1+(a'y+b'x+c')x_1+a''y+b''x+1=0$$

oder

$$56.\quad (ay_1+a'x_1+a'')y+(by_1+b'x_1+b'')x+cy_1+c'x_1+1=0\,.$$

Die Gleichung (55.) iſt die Gleichung der Polare des Punktes xy als Pol, die Gleichung (56) iſt die Gleichung der Polare des Punktes x_1y_1 als Pol. Um alſo umgekehrt die Coordinaten x_1, y_1 des Pols einer geraden Linie, deren Gleichung

$$Ay+Bx+1=0$$

iſt, als Polare zu finden, muß man x_1, y_1 aus den beiden Gleichungen

$$57.\quad \frac{ay_1+a'x_1+a''}{cy_1+c'x_1+1}=A,\quad \frac{by_1+b'x_1+b''}{cy_1+c'x_1+1}=B$$

beſtimmen; und um eben ſo die Coordinaten x, y des Pols einer geraden Linie, deren Gleichung

$$A_1y_1+B_1x_1+1=0$$

iſt, als Polare zu finden, muß man x, y aus den beiden Gleichungen

$$58.\quad \frac{ay+bx+c}{a''y+b''x+1}=A_1,\quad \frac{a'y+b'x+c'}{a''y+b''x+1}=B_1$$

beſtimmen.

Der Durchſchnittspunkt der Polaren zweier Punkte $x'y'$ und $x''y''$ iſt immer der Pol der dieſe beiden Punkte verbindenden geraden Linie, und dieſe gerade Linie alſo die Polare jenes Durchſchnittspunktes. Die Gleichungen der Polaren der Punkte $x'y'$ und $x''y''$ ſind nämlich nach (55.)

$$(ay'+bx'+c)y_1+(a'y'+b'x'+c')x_1+a''y'+b''x'+1=0$$

und

$$(ay'' + bx'' + c)y_1 + (a'y'' + b'x'' + c')x_1 + a''y'' + b''x'' + 1 = 0.$$

Sind nun α_1, β_1 die Coordinaten des Durchſchnittspunktes dieſer beiden Linien; ſo iſt

$$(ay' + bx' + c)\beta_1 + (a'y' + b'x' + c')\alpha_1 + a''y' + b''x' + 1 = 0\,,$$
$$(ay'' + bx'' + c)\beta_1 + (a'y'' + b'x'' + c')\alpha_1 + a''y'' + b''x'' + 1 = 0,$$

oder

$$(a\beta_1 + a'\alpha_1 + a'')y' + (b\beta_1 + b'\alpha_1 + b'')x' + c\beta_1 + c'\alpha_1 + 1 = 0\,,$$
$$(a\beta_1 + a'\alpha_1 + a'')y'' + (b\beta_1 + b'\alpha_1 + b'')x'' + c\beta_1 + c'\alpha_1 + 1 = 0,$$

woraus ſogleich erhellet, daß

$$(a\beta_1 + a'\alpha_1 + a'')y + (\beta_1 + b'\alpha_1 + b'')x + c\beta_1 + c'\alpha_1 + 1 = 0$$

die Gleichung der durch die Punkte x', y', $x'' y''$ beſtimmten geraden Linie iſt. Da nun aber dieſe Gleichung nach (56.) die Gleichung der Polare des Punktes $\alpha_1 \beta_1$ iſt; ſo erhellet die Richtigkeit der oben ausgeſprochenen Behauptung.

15. Als Hauptlehrſatz der ganzen Theorie der Reciprocität iſt das folgende Theorem zu betrachten:

Die Polaren von drei oder mehrern in gerader Linie liegenden Punkten ſchneiden ſich jederzeit in einem und demſelben Punkte, dem Pole jener geraden Linie; die Pole von drei oder mehrern ſich in einem und demſelben Punkte ſchneidenden geraden Linien liegen jederzeit in einer und derſelben geraden Linie, der Polaren jenes Punktes.

I. Drei in der geraden Linie

$$Ay + Bx + 1 = 0$$

liegende Punkte ſeyen $x'y'$, $x''y''$, $x''' y'''$; ſo iſt

$$Ay' + Bx' + 1 = 0\,,$$
$$Ay'' + Bx'' + 1 = 0\,,$$
$$Ay''' + Bx''' + 1 = 0\,,$$

und folglich, wie man aus dieſen Gleichungen leicht findet,

$$A = -\frac{x' - x''}{x'y'' - x''y'}, \quad B = \frac{y' - y''}{x'y'' - x''y'}\,;$$
$$A = -\frac{x' - x'''}{x'y''' - x'''y'}, \quad B = \frac{y' - y'''}{x'y''' - x'''y'}\,.$$

Die Gleichungen der Polaren der drei Punkte $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$ ſind:

$$(ay' + bx' + c)y_1 + (a'y' + b'x' + c')x_1 + a''y' + b''x' + 1 = 0,$$
$$(ay'' + bx'' + c)y_1 + (a'y'' + b'x'' + c')x_1 + a''y'' + b''x'' + 1 = 0,$$
$$(ay''' + bx''' + c)y_1 + (a'y''' + b'x''' + c')x_1 + a''y''' + b''x''' + 1 = 0.$$

Die Coordinaten des Durchſchnittspunktes der erſten und zweiten Polare wollen wir durch x_1, y_1, die Coordinaten des

Durchſchnittspunktes der erſten und dritten Polaren dagegen durch (x_1), (y_1) bezeichnen. Beſtimmt man nun die Coordinaten dieſer Durchſchnittspunkte; ſo erhält man nach leichter Rechnung:

$$x_1 = -\frac{(ab''-a''b)(x'y''-x''y')+(a''c-a)(y'-y'')+(b\,c-b)(x-x'')}{(ab'-a'b)(x'y''-x''y')+(a'c-ac')(y'-y'')+(b'c-bc')(x'-x'')},$$

$$y_1 = \frac{(a'b''-a''b')(x'y''-x''y')+(a''c'-a')(y'-y'')+(b''c'-b')(x'-x'')}{(ab'-a'b)(x'y''-x''y')+(a'c-ac')(y'-y'')+(b'c-bc')(x'-x'')};$$

und eben ſo

$$(x_1) = -\frac{(ab''-a''b)(x'y'''-x'''y')+(a''c-a)(y'-y''')+(b'c-b)(x'-x''')}{(ab'-a'b)(x'y'''-x'''y')+(a'c-ac')(y'-y''')+(b'c-bc')(x'-x''')},$$

$$(y_1) = \frac{(a'b''-a''b')(x'y''-x'''y')+(a''c'-a')(y'-y''')+(b''c'-b')(x'-x''')}{(ab'-a'b)(x'y'''-x'''y')+(a'c-ac')(y'-y''')+(b'c-bc')(x'-x''')}.$$

Dividirt man nun Zähler und Nenner der beiden erſten Brüche durch $x'y''-x''y'$, Zähler und Nenner der beiden letzten Brüche durch $x'y'''-x'''y'$; ſo erhält man nach dem Vorhergehenden:

$$x_1 = -\frac{ab''-a''b+(a''c-a)B-(b''c-b)A}{ab'-a'b+(a'c-ac')B-(b'c-bc')A},$$

$$y_1 = \frac{a'b''-a''b'+(a''c'-a')B-(b''c'-b')A}{ab'-a'b+(a'c-ac')B-(b'c-bc')A};$$

und

$$(x_1) = -\frac{ab''-a''b+(a''c-a)B-(b''c-b)A}{ab'-a'b+(a'c-ac')B-(b'c-bc')A},$$

$$(y_1) = \frac{a'b''-a''b'+(a''c'-a')B-(b''c'-b')A}{ab'-a'b+(a'c-ac')B-(b'c-bc')A}.$$

Alſo iſt $x_1=(x_1)$, $y_1=(y_1)$, und die drei Polaren der in gerader Linie liegenden Punkte $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$ ſchneiden ſich folglich in einem und demſelben Punkte, deſſen Coordinaten

$$x_1 = -\frac{ab''-a''b+(a''c-a)B-(b''c-b)A}{ab'-a'b+(a'c-ac')B-(b'c-bc')A},$$

$$y_1 = \frac{a'b''-a''b'+(a''c'-a')B-(b''c'-b')A}{ab'-a'b+(a'c-ac')B-(b'c-bc')A}$$

ſind. Aus eben dieſen Formeln erhält man:

$$ay_1+a'x_1+a'' = \frac{\{a(b'-b''c')-a'(b-b''c)+a''(bc'-b'c)\}A}{ab'-a'b+(a'c-ac')B-(b'c-bc')A},$$

$$by_1+b'x_1+b'' = \frac{\{a(b'-b''c')-a'(b-b''c)+a''(bc'-b'c)\}B}{ab'-a'b+(a'c-ac')B-(b'c-bc')A},$$

$$cy_1+c'x_1+1 = \frac{a(b'-b''c')-a'(b-b''c)+a''(bc'-b'c)}{ab'-a'b+(a'c-ac')B-(b'c-bc')A},$$

ſo daß alſo

$$\frac{ay_1+a'x_1+a''}{cy_1+c'x_1+1}=A,\quad \frac{by_1+b'x_1+b''}{cy_1+c'x_1+1}=B,$$

und nach (57.) der gemeinſchaftliche Durchſchnittspunkt der drei Polaren der Punkte $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$ folglich der Pol der Linie

$$Ay + Bx + 1 = 0,$$

in welcher die drei genannten Punkte liegen, iſt.

II. Seyen ferner

$$A'y + B'x + 1 = 0,$$
$$A''y + B''x + 1 = 0,$$
$$A'''y + B'''x + 1 = 0$$

die Gleichungen dreier ſich in einem Punkte, deſſen Coordinaten wir durch α, β bezeichnen wollen, ſchneidenden geraden Linien; ſo iſt

$$A'\beta + B'\alpha + 1 = 0,$$
$$A''\beta + B''\alpha + 1 = 0,$$
$$A'''\beta + B'''\alpha + 1 = 0.$$

Die Pole der drei in Rede ſtehenden geraden Linien ſeyen x'_1, y'_1; $x''_1\, y''_1$; $x'''_1\, y_1'''$; ſo iſt nach (57.)

$$\frac{ay'_1 + a'x'_1 + a''}{cy'_1 + c'x'_1 + 1} = A', \quad \frac{by'_1 + b'x'_1 + b''}{cy'_1 + c'x'_1 + 1} = B';$$
$$\frac{ay''_1 + a'x''_1 + a''}{cy''_1 + c'x''_1 + 1} = A'', \quad \frac{by''_1 + b'x''_1 + b''}{cy''_1 + c'x''_1 + 1} = B'';$$
$$\frac{ay'''_1 + a'x'''_1 + a''}{cy'''_1 + c'x'''_1 + 1} = A''', \quad \frac{by'''_1 + b'x''_1 + b''}{cy'''_1 + c'x'''_1 + 1} = B''';$$

und folglich

$$(ay'_1 + a'x'_1 + a'')\beta + (by'_1 + b'x'_1 + b'')\alpha + cy'_1 + c'x'_1 + 1 = 0,$$
$$(ay''_1 + a'x''_1 + a'')\beta + (by''_1 + b'x''_1 + b'')\alpha + cy''_1 + c'x''_1 + 1 = 0$$
$$(ay'''_1 + a'x'''_1 + a'')\beta + (by'''_1 + b'x'''_1 + b'')\alpha + cy'''_1 + c'x'''_1 + 1 = 0,$$

oder

$$(a\beta + b\alpha + c)y'_1 + (a'\beta + b'\alpha + c')x'_1 + a''\beta + b''\alpha + 1 = 0,$$
$$(a\beta + b\alpha + c)y''_1 + (a'\beta + b'\alpha + c')x''_1 + a''\beta + b''\alpha + 1 = 0,$$
$$(a\beta + b\alpha + c)y'''_1 + (a'\beta + b'\alpha + c')x'''_1 + a''\beta + b''\alpha + 1 = 0.$$

Alſo liegen die drei Pole $x'_1 y'$; $x''_1 y''_1$; $x'''_1 y'''_1$, offenbar in einer geraden Linie, deren Gleichung

$$(a\beta + b\alpha + c)y_1 + (a'\beta + b'\alpha + c')x_1 + a''\beta + b''\alpha + 1 = 0$$

iſt, und dieſe gerade Linie iſt offenbar die Polare des Punktes $\alpha\beta$, d. h. des gemeinſchaftlichen Durchſchnittspunktes der drei durch die Gleichungen

$$A'y + B'x + 1 = 0,$$
$$A''y + B''x + 1 = 0,$$
$$A'''y + B'''x + 1 = 0$$

gegebenen geraden Linien.

Zu bemerken iſt, daß man das hier bewieſene Theorem auch auf folgenden Ausdruck bringen kann:

Bewegt ſich ein Punkt auf einer geraden Linie, ſo dreht ſich ſeine Polare um einen feſten Punkt, den Pol jener Geraden; und dreht ſich umgekehrt

eine gerade Linie um einen feſten Punkt, ſo beſchreibt ihr Pol eine gerade Linie, die Polare des feſten Punktes.

16. Sey jetzt

$$y = \alpha x + \beta \text{ oder } y - \alpha x - \beta = 0$$

die Gleichung irgend einer geraden Linie im Syſteme der xy; ſo hat man, wenn x_1, y_1 die Coordinaten des Pols dieſer geraden Linie bezeichnen, nach (57.) die beiden Gleichungen

$$\frac{ay_1 + a'x_1 + a''}{cy_1 + c'x_1 + 1} = -\frac{1}{\beta}, \quad \frac{by_1 + b'x_1 + b''}{cy_1 + c'x_1 + 1} = \frac{\alpha}{\beta},$$

und folglich

$$\beta = -\frac{cy_1 + c'x_1 + 1}{ay_1 + a'x_1 + a''}, \quad \beta = \alpha . \frac{cy_1 + c'x_1 + 1}{by_1 + b'x_1 + b''}.$$

Setzt man dieſe beiden Ausdrücke von β einander gleich; ſo erhält man zwiſchen x_1 und y_1 die Gleichung

$$59. \quad \alpha(ay_1 + a'x_1 + a'') + by_1 + b'x_1 + b'' = 0.$$

Da dieſe Gleichung zwiſchen x_1 und y_1 von der Größe β ganz unabhängig iſt, ſondern bloß die Größe α enthält; ſo iſt klar, daß die Pole aller der durch die Gleichung $y = \alpha x + \beta$ dargeſtellten geraden Linie parallelen geraden Linien in einer und derſelben geraden Linie liegen, deren Gleichung die Gleichung (59.) iſt.

Iſt

$$y_1 = \alpha_1 x_1 + \beta_1 \text{ oder } y_1 - \alpha_1 x_1 - \beta_1 = 0$$

die Gleichung irgend einer geraden Linie im Syſteme $x_1 y_1$; ſo hat man zwiſchen den Coordinaten x, y des Pols dieſer geraden Linie nach (58.) die Gleichungen

$$\frac{ay + bx + c}{a''y + b''x + 1} = -\frac{1}{\beta_1}, \quad \frac{a'y + b'x + c'}{a''y + b''x + 1} = \frac{\alpha_1}{\beta_1},$$

aus denen

$$\beta_1 = -\frac{a''y + b''x + 1}{ay + bx + c}, \quad \beta_1 = \alpha_1 . \frac{a''y + b''x + 1}{a'y + b'x + c'};$$

alſo

$$60. \quad \alpha_1(ay + bx + c) + a'y + b'x + c' = 0$$

folgt. In der durch letztere Gleichung dargeſtellten geraden Linie liegen die Pole aller der durch die Gleichung $y_1 = \alpha_1 x_1 + \beta_1$ dargeſtellten geraden Linie parallelen geraden Linien.

Die gerade Linie, welche die Pole $x_1 y_1$ aller einer beſtimmten Richtung parallelen geraden Linien des Syſtems xy enthält, heißt der dieſer Richtung zugehörige oder conjugirte Durchmeſſer des Syſtems $x_1 y_1$, und eben ſo heißt die gerade Linie, welche die Pole xy aller einer beſtimmten Richtung parallelen geraden Linien des Syſtems $x_1 y_1$ enthält, der dieſer

Richtung zugehörige oder conjugirte Durchmeſſer des Syſtems xy. Nach (59.) iſt die Gleichung des, der durch die Gleichung

$$y = \alpha x + \beta$$

dargeſtellten Richtung conjugirten Durchmeſſers

$$61.\quad \alpha(ay_1 + a'x_1 + a'') + by_1 + b'x_1 + b'' = 0,$$

und eben ſo iſt nach (60.) die Gleichung des, der durch die Gleichung

$$y_1 = \alpha_1 x_1 + \beta_1$$

dargeſtellten Richtung conjugirten Durchmeſſers

$$62.\quad \alpha_1(ay + bx + c) + a'y + b'x + c' = 0.$$

Alle conjugirte Durchmeſſer eines und deſſelben Syſtems ſchneiden ſich in einem Punkte oder ſind einander parallel, wie auf folgende Art gezeigt werden kann.

Die Gleichungen zweier beliebigen conjugirten Durchmeſſer des Syſtems $x_1 y_1$ ſind nach (61.)

$$\alpha(ay_1 + a'x_1 + a'') + by_1 + b'x_1 + b'' = 0,$$
$$\alpha'(ay_1 + a'x_1 + a'') + by_1 + b'x_1 + b'' = 0.$$

Dieſe beiden Gleichungen ſind, was auch α und α' ſeyn mögen, erfüllt, wenn

$$ay_1 + a'x_1 + a'' = 0,\quad by_1 + b'x_1 + b'' = 0$$

iſt, und man erhält alſo, wenn man x_1 und y_1 aus dieſen beiden Gleichungen beſtimmt, die Coordinaten des Durchſchnittspunktes der beiden in Rede ſtehenden conjugirten Durchmeſſer. Durch Auflöſung der beiden obigen Gleichungen erhält man aber

$$x_1 = -\frac{ab'' - a''b}{ab' - a'b},\quad y_1 = \frac{a'b'' - a''b'}{ab' - a'b},$$

und ſieht alſo, daß die Coordinaten des Durchſchnittspunktes der beiden conjugirten Durchmeſſer von α und α' ganz unabhängig ſind, ſo daß ſich alſo offenbar alle conjugirte Durchmeſſer in einem Punkte ſchneiden. Nur wenn $ab' - a'b = 0$ oder $ab' = a'b$ iſt, giebt es gar keinen Durchſchnittspunkt der conjugirten Durchmeſſer, ſondern dieſelben ſind ſämmtlich unter einander parallel, wie auf folgende Art leicht erhellet. Bringt man nämlich die Gleichungen der beiden conjugirten Durchmeſſer auf die Form:

$$(\alpha a + b)y_1 + (\alpha a' + b')x_1 + \alpha a'' + b'' = 0,$$
$$(\alpha' a + b)y_1 + (\alpha' a' + b')x_1 + \alpha' a'' + b'' = 0;$$

ſo iſt klar, daß die beiden conjugirten Durchmeſſer einander parallel ſind, wenn

$$\frac{\alpha a' + b'}{\alpha a + b} = \frac{\alpha' a' + b'}{\alpha' a + b}$$

iſt. Dies iſt aber, unabhängig von ſpeciellen Werthen der Größen α und α', der Fall, wenn $ab' = a'b$ iſt. Aus vorſtehender Gleichung folgt nämlich

$$(\alpha' a + b)(\alpha a' + b') = (\alpha a + b)(\alpha' a' + b')$$

oder

$$\alpha\alpha' aa' + \alpha a' b + \alpha' ab' + bb' = \alpha\alpha' aa' + \alpha' a' b + \alpha ab' + bb',$$

oder

$$\alpha a' b + \alpha' ab' = \alpha ab' + \alpha' a' b,$$

d. i., wenn $ab' = a'b$ iſt,

$$(\alpha + \alpha') ab' = (\alpha + \alpha') ab',$$

oder

$$\alpha + \alpha' = \alpha + \alpha'.$$

Da dies nun eine identiſche Gleichung iſt, ſo folgt das zu Beweiſende unmittelbar.

Den Punkt, in welchem ſich alle conjugirte Diameter eines Syſtems, wenn es nämlich einen ſolchen Punkt giebt, ſchneiden, wollen wir den Mittelpunkt dieſes Syſtems nennen.

17. Wir wollen uns jetzt in dem Syſteme xy zwei beliebige Punkte $x'y'$, $x''y''$, in dem Syſteme $x_1\,y_1$ zwei beliebige Punkte $x'_1 y'_1$, $x_1'' y''_1$ denken. Die Gleichungen der Polaren dieſer vier Punkte ſeyen nach der Reihe

$$F(x', y', x_1, y_1) = 0, \quad F(x'', y'', x_1, y_1) = 0,$$
$$F(x, y, x'_1, y'_1) = 0, \quad F(x, y, x''_1, y_1'') = 0.$$

Ferner ſey

p das Perpendikel von $x'y'$ auf $F(x, y, x'_1, y'_1) = 0$,
q das Perpendikel von $x'y'$ auf $F(x, y, x''_1, y''_1) = 0$,
p' das Perpendikel von $x''y''$ auf $F(x, y, x'_1, y'_1) = 0$,
q' das Perpendikel von $x''y''$ auf $F(x, y, x''_1, y''_1) = 0$;

p_1 das Perpendikel von $x'_1 y'_1$ auf $F(x', y', x_1, y_1) = 0$,
q_1 das Perpendikel von $x'_1 y'_1$ auf $F(x'', y'', x_1, y_1) = 0$,
p'_1 das Perpendikel von $x''_1 y''_1$ auf $F(x', y', x_1, y_1) = 0$,
q'_1 das Perpendikel von $x''_1 y''_1$ auf $F(x'', y'', x_1, y_1) = 0$.

Setzen wir nun

$$ay' + bx' + c = A, \quad a'y' + b'x' + c' = B;$$
$$ay'' + bx'' + c = A', \quad a'y'' + b'x'' + c' = B';$$
$$ay'_1 + a'x'_1 + a'' = \mathfrak{A}, \quad by'_1 + b'x'_1 + b'' = \mathfrak{B};$$
$$ay''_1 + a'x''_1 + a'' = \mathfrak{A}', \quad by''_1 + b'x''_1 + b'' = \mathfrak{B}';$$

ſo iſt nach dem Artikel Linie und Ebene (26*.) i. d. Z.

$$p^2 = \frac{\{F(x', y', x'_1, y'_1)\}^2}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}, \quad p_1^2 = \frac{\{F(x', y', x'_1, y'_1)\}^2}{A^2 + B^2};$$

$$q^2 = \frac{\{F(x', y', x''_1, y''_1)\}^2}{\mathfrak{A}'^2 + \mathfrak{B}'^2}, \quad q_1^2 = \frac{\{F(x'', y'', x'_1, y'_1)\}^2}{A'^2 + B'^2}$$

$$p'^2 = \frac{\{F(x'', y'', x'_1, y'_1)\}^2}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2},\quad p'^2_1 = \frac{\{F(x', y', x''_1, y''_1)\}^2}{A^2 + B^2};$$

$$q'^2 = \frac{\{F(x'', y'', x''_1, y''_1)\}^2}{\mathfrak{A}'^2 + \mathfrak{B}'^2},\quad q'^2_1 = \frac{\{F(x'', y'', x''_1, y''_1)\}^2}{A'^2 + B'^2}.$$

Alſo iſt

$$\frac{p^2}{p'^2} = \left\{\frac{F(x', y'. x'_1, y'_1)}{F(x'', y'', x'_1, y'_1)}\right\}^2,\quad \frac{p_1^2}{p'^2_1} = \left\{\frac{F(x', y', x'_1, y'_1)}{F(x', y', x''_1, y''_1)}\right\}^2;$$

$$\frac{q^2}{q'^2} = \left\{\frac{F(x', y', x''_1, y''_1)}{F(x'', y'', x''_1, y''_1)}\right\}^2,\quad \frac{q_1^2}{q'^2_1} = \left\{\frac{F(x'', y'', x'_1, y'_1)}{F(x'', y'', x''_1, y''_1)}\right\}^2;$$

folglich

$$\frac{p^2}{p'^2}\cdot\frac{q_1^2}{q'^2_1} = \left\{\frac{F(x', y', x'_1, y'_1)}{F(x'', y'', x''_1, y''_1)}\right\}^2,\quad \frac{p_1^2}{p'^2_1}\cdot\frac{q^2}{q'^2} = \left\{\frac{F(x', y', x'_1, y'_1)}{F(x'', y'', x''_1, y''_1)}\right\}^2;$$

alſo

$$\frac{p^2}{p'^2}\cdot\frac{q_1^1}{q'^2_1} = \frac{p_1^2}{p'^2_1}\cdot\frac{q^2}{q'^2},$$

oder

$$\frac{p}{p'}\cdot\frac{q_1}{q'_1} = \frac{p_1}{p'_1}\cdot\frac{q}{q'},$$

oder

$$63.\quad \frac{p}{p'}:\frac{q}{q'} = \frac{p_1}{p'_1}:\frac{q_1}{q'_1},$$

oder

$$64.\quad \frac{p}{p'}:\frac{p_1}{p'_1} = \frac{q}{q'}:\frac{q_1}{q'_1}.$$

Bezeichnet man jetzt die Punkte $x'y'$, $x''y''$, $x'_1y'_1$, $x''_1y''_1$ durch A, B, A_1, B_1, ihre reſpektiven Polaren durch a, b, a_1, b_1, und die von A auf a_1 und b_1, von B auf a_1 und b_1, von A_1 auf a und b, von B_1 auf a und b gefällten Perpendikel durch Aa_1, Ab_1, Ba_1, Bb_1, A_1a, A_1b, B_1a, B_1b; ſo iſt

$$p = Aa_1,\ q = Ab_1,\ p' = Ba_1,\ q' = Bb_1;$$
$$p_1 = A_1a\ \ q_1 = A_1b,\ p'_1 = B_1a,\ q'_1 = B_1b;$$

folglich

$$65.\quad \frac{Aa_1}{Ba_1}:\frac{Ab_1}{Bb_1} = \frac{A_1a}{B_1a}:\frac{A_1b}{B_1b},$$

$$66.\quad \frac{Aa_1}{Ba_1}:\frac{A_1a}{B_1a} = \frac{Ab_1}{Bb_1}:\frac{A_1b}{B_1b}.$$

Daß dieſe Proportionen überhaupt gelten, wenn die beiden Linien Aa_1, Ba_1 die Linie a_1, die beiden Linien Ab_1, Bb_1 die Linie b_1, die beiden Linien A_1a, B_1a die Linie a, die beiden Linien A_1b, B_1b die Linie b unter gleichen Winkeln ſchneiden, erhellet nun leicht.

18. In Fig. 43. ſeyen jetzt **A, B, C, D** vier in gerader Linie liegende Punkte, und a′, b′, c′, d′ die Polaren dieſer Punkte, welche ſich alſo nach dem Obigen ſämmtlich in einem und demſelben Punkte **P′** ſchneiden. Ferner denke man ſich eine beliebige gerade Linie **MN**, welche die Linien a′, b′, c′, d′ in den Punkten **A′, B′, C′, D′** ſchneidet, und laſſe **P** den Pol dieſer geraden Linie ſeyn. Zieht man jetzt die Linien **PB, PC**; ſo iſt, weil **P** der Pol von **MN**, **B** der Pol von b′ iſt, **PB** die Polare b von **B′** und eben ſo PC die Polare c von C′. Betrachtet man nun, welches offenbar verſtattet iſt, **AB** und **BD** als zwei gegen b, **AC** und **CD** als zwei gegen c, **B′A′** und **C′A′** als zwei gegen a′, **B′D′** und **C′D′** als zwei gegen d′ unter gleichen Winkeln geneigte gerade Linien; ſo iſt nach (65.)

$$67.\quad \frac{AB}{BD}:\frac{AC}{CD}=\frac{A'B'}{A'C'}:\frac{B'D'}{C'D'}$$

oder

$$68.\quad \frac{AB}{BD}:\frac{AC}{CD}=\frac{A'B'}{B'D'}:\frac{A'C'}{C'D'},$$

eine Proportion, deren Uebereinſtimmung mit der Proportion (43.) unverkennbar iſt.

19. Jetzt kann man nun auch leicht die folgenden Aufgaben auflöſen.

I. Es ſind vier in gerader Linie liegende Punkte eines Syſtems und drei von den ihnen entſprechende Polaren des reciproken Syſtems gegeben; man ſoll die Polare des vierten der gegebenen Punkte conſtruiren.

Die vier in gerader Linie liegenden gegebenen Punkte ſeyen **A, B, C, D** (Fig. 44.), und a′, b′, c′ ſeyen die drei Polaren der Punkte **A, B, C**, die ſich alſo, weil dieſe drei Punkte in gerader Linie liegen, in einem Punkte **P′** ſchneiden müſſen. Um nun die Polare des vierten gegebenen Punktes **D** zu finden, ziehe man eine beliebige gerade Linie **MN**, welche die drei gegebenen Polaren in **A′, B′, C′** ſchneidet, und lege durch den Punkt **A′** noch eine zweite beliebige Linie, auf welcher man **A′B″ = AB, A′C″ = AC, A′D″ = AD** abſchneidet. Hierauf ziehe man die Linien **B′B″, C′C″**, welche ſich in **O** ſchneiden mögen, ziehe **OD″**, und verlängere dieſe Linie, bis die Linie **MN** von derſelben in **D′** geſchnitten wird. Die von **P′** nach **D′** gezogene Linie **P′D′** iſt nun die geſuchte Polare des Punktes **D**, wie auf folgende Art bewieſen werden kann.

Durch **D″** ziehe man mit **B′B″** und **C′C″** die Parallelen **D″E′** und **D″F′**; ſo iſt

$$\frac{A'B''}{B''D''}=\frac{A'B'}{B'E'},\quad \frac{A'C''}{C''D''}=\frac{A'C'}{C'F'}.$$

Ferner iſt

$$\frac{B'E'}{B'D'} = \frac{D''O}{D'O}, \quad \frac{C'F'}{C'D'} = \frac{D''O}{D'O}:$$

Alſo iſt

$$\frac{A'B''}{B''D''} \cdot \frac{D''O}{D'O} = \frac{A'B'}{B'E'} \cdot \frac{B'E'}{B'D'} = \frac{A'B'}{B'D'},$$

$$\frac{A'C''}{C''D''} \cdot \frac{D''O}{D'O} = \frac{A'C'}{C'F'} \cdot \frac{C'F'}{C'D'} = \frac{A'C'}{C'D'},$$

und folglich

$$\frac{A'B''}{B''D''} : \frac{A'C''}{C''D''} = \frac{A'B'}{B'D'} : \frac{A'C'}{C'D'},$$

d. i. nach der Conſtruction

$$\frac{AB}{BD} : \frac{AC}{CD} = \frac{A'B'}{B'D'} : \frac{A'C'}{C'D'},$$

woraus das zu Beweiſende unmittelbar nach (68.) folgt.

II. Wenn vier ſich in einem Punkte ſchneidende gerade Linien und drei von den ihnen entſprechenden Polen des reciproken Syſtems gegeben ſind, den Pol der vierten gegebenen Linie durch Conſtruction zu finden.

In **Fig. 44.** ſeyen a′ b′, c′, d′ die vier gegebenen Linien, welche ſich nach der Vorausſetzung ſämmtlich in einem Punkte, hier in dem Punkte **P′**, ſchneiden. **A, B, C** ſeyen die drei gegebenen Punkte, welche, da die drei geraden Linien, deren Pole ſie ſind, ſich in einem Punkte ſchneiden, in gerader Linie liegen müſſen. Um nun den Pol der vierten gegebenen Linie zu finden, ziehe man eine gerade Linie **MN**, welche die vier gegebenen Linien in **A′, B′, C′, D′** ſchneidet, lege durch **A′** eine zweite gerade Linie, und nehme auf derſelben $A'B'' = AB$, $A'C'' = AC$. Hierauf ziehe man die Linien **B′B″, C′C″**, welche ſich in **O** ſchneiden mögen, und verbinde **O** mit **D′** durch eine gerade Linie, welche die Linie **A′C″** in **D″** ſchneiden mag. Verlängert man nun die Linie **AC** über **C** hinaus und macht $CD = C''D''$; ſo iſt **D** der Pol der vierten gegebenen Linie d′, wofür der Beweis ganz eben ſo wie bei der vorhergehenden Aufgabe geführt werden kann.

III. Es ſind vier Pole **A, B, C, D** eines Syſtems, von denen nicht drei in gerader Linie liegen, und ihre vier Polaren a′, b′ c′, d′ in einem reciproken Syſteme, von denen alſo auch nicht drei ſich in einem Punkte ſchneiden, gegeben. Man ſoll **1.** zu einem fünften gegebenen Punkte **E** des erſten Syſtems die Polare e′ im reciproken, und **2.** zu einer fünften gegebenen Polare e′ im reciproken Syſteme den Pol **E** im erſten Syſteme durch Conſtruction finden.

Man ziehe die Linien AB, CD (Fig. 45.), die ſich in M, die Linien AD, BC, die ſich in N ſchneiden mögen, und verbinde die Durchſchnittspunkte A′, C′ von a′, b′ und c′ d′ durch die Linie A′C′, die Durchſchnittspunkte B′, D′ von b′, c′ und a′, d′ durch die Linie B′D′; ſo iſt, wie leicht erhellen wird, M der Pol von A′C′, N der Pol von B′D′.

1. Man ziehe, um die erſte der beiden Aufgaben aufzulöſen, NE und ME, und beſtimme die Durchſchnittspunkte P und Q mit den Linien a und d. Nun beſtimme man nach I. mittelſt der vier in gerader Linie liegenden Punkte A, B, M, P und der Polaren a′, b′, A′C′ der drei erſten dieſer vier Punkte die Polare von P, und eben ſo mittelſt der vier in gerader Linie liegenden Punkte A, D, N, Q und der Polaren a′, d′, B′D′ der drei erſten dieſer Punkte die Polare von Q. Wird nun B′D′ von der Polare des Punktes P in P′, A′C′ von der Polare des Punktes Q in Q′ geſchnitten; ſo iſt P′ der Pol von NP, Q′ der Pol von MQ. Verbindet man alſo P′ und Q′ durch die gerade Linie P′ Q′; ſo iſt dieſe gerade Linie die Polare des Durchſchnittspunktes der Linien NP und MQ, d. i. die geſuchte Polare des fünften gegebenen Punktes E.

2. Um die zweite Aufgabe aufzulöſen, beſtimme man die Durchſchnittspunkte A′, B′, C′, D′ der gegebenen Linien a′, b′; b′, c′; c′, d′; a′, d′, ſo wie auch die Durchſchnittspunkte P′, Q′ der Linien B′D′, A′ C′ mit der fünften gegebenen Linie e′. Auch beſtimme man die Durchſchnittspunkte M und N der Linien AB, CD und BC, AD; ſo iſt M der Pol von A′C′, N der Pol von B′D′. Mittelſt der vier in einem Punkte A′ zuſammentreffenden Linien A′D′, A′B′, A′C′, A′P′ und der Pole A, B, M der drei erſten dieſer vier Linien beſtimme man nach II. den Pol P von A′B′, und eben ſo beſtimme man mittelſt der vier in dem Punkte D′ zuſammentreffenden Linien A′D′, C′D′, B′D′, D′Q′ und der Pole A, D, N der drei erſten dieſer vier Linien nach II. den Pol Q von D′Q′. Dann iſt offenbar PN die Polare von P′, QM die Polare von Q′, folglich der Durchſchnittspunkt E von PN und QM der Pol von P′Q′, d. i. der geſuchte Pol der fünften gegebenen Linie e′.

Mittelſt dieſer beiden Aufgaben kann man zu jedem Syſteme das reciproke Syſtem conſtruiren, wenn nur entweder vier Punkte oder vier gerade Linien des reciproken Syſtems gegeben ſind, welche vier beſtimmten geraden Linien oder vier beſtimmten Punkten des gegebenen Syſtems entſprechen ſollen. Daß dieſe Data nöthig ſind, wenn das zu einem gegebenen Syſteme gehörende reciproke Syſtem vollkommen beſtimmt ſeyn ſoll, erhellet auf der Stelle daraus, weil die Fundamentalgleichung der Reciprocitäts-Verwandtſchaft acht willkührliche Conſtanten enthält.

20. Wir wollen jetzt annehmen, daß beide Coordinatenſyſteme rechtwinklig ſeyen, und wollen für x und y ganz allgemein reſpective

$$\alpha + x\cos\varphi - y\sin\varphi \text{ und } \beta + x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

ſetzen, wobei der Artikel Coordinaten (27. 4.) i. d. Z. zu vergleichen iſt. Durch dieſe Subſtitution wird die Fundamentalgleichung der Reciprocität:

$$\{(a\cos\varphi - b\sin\varphi)y + (a\sin\varphi + b\cos\varphi)x + a\beta + b\alpha + c\}y_1$$
$$+\{a'\cos\varphi - b'\sin\varphi)y + (a'\sin\varphi + b'\cos\varphi)x + a'\beta + b'\alpha + c'\}x_1$$
$$+(a''\cos\varphi - b''\sin\varphi)y + (a''\sin\varphi + b''\cos\varphi)x + a''\beta + b''\alpha + 1 = 0.$$

Nun denke man ſich die willkührlichen Größen α, β, φ ſo beſtimmt, daß

$$a\sin\varphi + b\cos\varphi = a'\cos\varphi - b'\sin\varphi,$$
$$a\beta + b\alpha + c = a''\cos\varphi - b''\sin\varphi,$$
$$a'\beta + b'\alpha + c' = a''\sin\varphi + b''\cos\varphi$$

iſt, welches offenbar immer möglich iſt, da aus der erſten Gleichung

$$\tan\varphi = \frac{a' - b}{a + b'}$$

folgt, und, wenn φ beſtimmt und eine reelle Größe iſt, mittelſt der zweiten und dritten Gleichung auch für α und β immer reelle Werthe gefunden werden, da dieſe beiden Gleichungen in Bezug auf α und β vom erſten Grade ſind. Setzen wir nun, für die auf die obige Weiſe beſtimmten Werthe von α, β, φ,

$$a\cos\varphi - b\sin\varphi = A,\ \alpha'\sin\varphi + b'\cos\varphi = C,\ a''\beta + b''\alpha + 1 = F;$$
$$a\sin\varphi + b\cos\varphi = a'\cos\varphi - b'\sin\varphi = B,$$
$$a\beta + b\alpha + c = a''\cos\varphi - b''\sin\varphi = D,$$
$$a'\beta + b'\alpha + c' = a''\sin\varphi + b''\cos\varphi = E;$$

ſo erhält die Fundamentalgleichung der Reciprocität folgende Form:

69. $(Ay + Bx + D)y_1 + (By + Cx + E)x_1 + Dy + Ex + F = 0$

oder

70. $(Ay_1 + Bx_1 + D)y + (By_1 + Cx_1 + E)x + Dy_1 + Ex_1 + F = 0.$

Denkt man ſich nun beide Syſteme auf das ſo eben näher beſtimmte Coordinatenſyſtem der xy bezogen, ſo daß alſo jetzt die $x_1 y_1$ zu demſelben Coordinatenſyſteme gehören, wie die xy, und nimmt nun in der Ebene der beiden Syſteme einen beliebigen Punkt an, deſſen Coordinaten p, q ſeyn mögen; ſo iſt, wenn man dieſen Punkt als zu dem Syſteme der xy gehörend betrachtet, die Gleichung der Polare deſſelben nach (69.)

$$(Aq + Bp + D)y_1 + (Bq + Cp + E)x_1 + Dq + Ep + F = 0.$$

Betrachtet man aber den Punkt pq als zu dem Syſteme der $x_1 y_1$ gehörend, ſo iſt nach (70.)

$$(Aq + Bp + D)y + (Bq + Cp + E)x + Dq + Ep + F = 0$$

die Gleichung ſeiner Polare. Da nun aber die beiden Coordina-

tenſyſteme nicht von einander verſchieden ſind, ſo iſt klar, daß die beiden vorhergehenden Gleichungen einer und derſelben geraden Linie angehören, und daß alſo jetzt, wenn alle obigen Vorausſetzungen erfüllt ſind, einem beliebigen Punkte pq in der gemeinſchaftlichen Ebene beider Syſteme ein und dieſelbe Polare entſpricht, man mag den in Rede ſtehenden Punkt als zu dem einen, oder als zu dem andern Syſteme gehörend betrachten. Man muß folglich, wie aus dem Obigen hervorgeht, wenn dies bei zwei beliebigen reciproken Syſtemen der Fall ſeyn ſoll, dieſelben immer auf eine beſtimmte Art auf einander legen, und die Art und Weiſe, wie dieſes Aufeinanderlegen bewirkt werden muß, ergiebt ſich ebenfalls aus den obigen Beſtimmungen.

21. Das in (15.) bewieſene Theorem iſt vorzüglich deshalb ſo überaus wichtig, weil ſich mittelſt deſſelben aus jedem geometriſchen Satze, der keine Größenbeſtimmung enthält, auf die leichteſte Weiſe ein anderer Satz ableiten läßt, wie wir an dem folgenden ſehr inſtructiven Beiſpiele zeigen wollen.

Zuerſt beweiſen wir folgenden Lehrſatz:

Durch die drei in gerader Linie liegenden Punkte A, B, C (Fig. 46.) ziehe man drei ganz beliebige gerade Linien Aa, Bb, Cc, welche ſich in den drei Punkten A′, B′, C′ ſchneiden mögen. Verbindet man nun zwei von dieſen Punkten, z. B. B′ und C′, mit den beiden gegebenen Punkten B und C durch die geraden Linien BB′, CC′, welche ſich in O ſchneiden, und zieht dann die Linie A′O; ſo ſchneidet dieſe Linie die Linie ABC immer in demſelben beſtimmten Punkte P, wie auch die drei von A, B, C ausgehenden geraden Linien Aa, Bb, Cc gezogen ſeyn mögen.

Man nehme ABC als Abſciſſen-, Aa als Ordinatenaxe an, und bezeichne die Abſciſſen von B und C durch x′ und x″, die Ordinaten von B′ und C′ durch y′ und y″; ſo ſind, wie leicht erhellen wird, die Gleichungen der Linien BB′, CC′, BC′, CB′ nach der Reihe:

$$\frac{y}{y'}+\frac{x}{x'}=1,\quad \frac{y}{y''}+\frac{x}{x''}=1,\quad \frac{y}{y''}+\frac{x}{x'}=1,\quad \frac{y}{y'}+\frac{x}{x''}=1.$$

Sowohl die Summe der erſten und zweiten, als auch die Summe der dritten und vierten Gleichung iſt

$$\left(\frac{1}{y'}+\frac{1}{y''}\right)y+\left(\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}\right)x=2\,.$$

Die Coordinaten des Punktes O müſſen die erſte und zweite der vier obigen Gleichungen, alſo auch die Summe dieſer beiden Gleichungen, d. i. die fünfte Gleichung, befriedigen. Die Coordinaten des Punktes A′ müſſen die dritte und vierte der vier obigen Gleichungen, alſo auch die Summe dieſer beiden Gleichungen,

d. i. die fünfte Gleichung, befriedigen. Folglich wird die fünfte Gleichung ſowohl von den Coordinaten des Punktes O, als auch von den Coordinaten des Punktes A′ befriedigt, und iſt alſo die Gleichung der durch die beiden in Rede ſtehenden Punkte gehenden geraden Linie A′O oder A′P. Um nun die Abſciſſe des Punktes P zu finden, muß man in der fünften Gleichung, da ABC die Abſciſſenaxe iſt, offenbar $y = 0$ ſetzen. Dadurch erhält man

$$x = \frac{2x'x''}{x' + x''},$$

ein Ausdruck, der bloß von den Abſciſſen der Punkte B, C, d. i. von der Lage dieſer Punkte gegen den Punkt A, abhängt, von den Coordinaten der Punkte B′, C′ und dem Coordinatenwinkel ganz unabhängig iſt. Dies führt unmittelbar zu dem zu beweiſenden Satze.

Conſtruirt man nun zu der Figur, auf welche der vorhergehende Lehrſatz führt, die reciproke Figur; ſo entſprechen den drei in gerader Linie liegenden Punkten A, B, C drei ſich in einem Punkte ſchneidende gerade Linien als Polaren. Dieſe geraden Linien wollen wir durch α, β, γ, ihren gemeinſchaftlichen Durchſchnittspunkt durch $(\alpha\beta\gamma)$ bezeichnen. Den drei durch A, B, C beliebig gezogenen geraden Linien Aa, Bb, Cc entſprechen drei auf den Linien α, β, γ beliebig angenommene Punkte als Pole. Dieſe drei Pole wollen wir durch $(\alpha\beta')$, $(\beta\gamma')$, $(\gamma\alpha')$ bezeichnen. Den drei Durchſchnittspunkten A′, B′, C′ der Linien Aa, Bb, Cc entſprechen die drei Verbindungslinien von $(\alpha\beta')$, $(\beta\gamma')$, $(\gamma\alpha')$, die wir durch α', β', γ' bezeichnen wollen, als Polaren. Den Verbindungslinien von B und B′, C und C′ entſprechen die Durchſchnittspunkte von β und β', γ und γ', die wir durch $(\beta\beta')$, $(\gamma\gamma')$ bezeichnen wollen, als Pole. Der Verbindungslinie A′O des dritten Durchſchnittspunktes A′ und des Durchſchnittes O von BB′ und CC′ entſpricht der Durchſchnittspunkt $(\alpha'\omega)$ von α' und der Verbindungslinie ω von $(\beta\beta')$ und $(\gamma\gamma')$. Dem Punkte P der geraden Linie ABC, in welchem ABC von A′O geſchnitten wird, entſpricht eine gerade Linie π, die durch den Punkt $(\alpha\beta\gamma)$ geht, und auf welcher der Punkt $(\alpha'\omega)$ liegt. Da nun der Punkt P ein beſtimmter iſt, wie auch die drei durch A, B, C gezogenen Linien Aa, Bb, Cc liegen mögen; ſo iſt auch die gerade Linie π eine beſtimmte, wie auch die Punkte $(\alpha\beta')$, $(\beta\gamma')$, $(\gamma\alpha')$ auf α, β, γ angenommen ſeyn mögen. Betrachten wir nun bloß die reciproke Figur, ſo haben wir drei ſich in einem Punkte $(\alpha\beta\gamma)$ ſchneidende gerade Linien α, β, γ; auf jeder derſelben einen beliebig angenommenen Punkt $(\alpha\beta')$, $(\beta\gamma')$, $(\gamma\alpha')$; die drei Verbindungslinien α', β', γ' dieſer Punkte; die Durchſchnittspunkte $(\beta\beta')$, $(\gamma\gamma')$ von β und β', γ und γ'; die Verbindungslinie ω von $(\beta\beta')$ und $(\gamma\gamma')$; den Durchſchnittspunkt $(\alpha'\omega)$ von α' und ω; die gerade Linie π, welche

den Punkt $(\alpha'\omega)$ enthält und durch den Punkt $(\alpha\beta\gamma)$ geht. Der geometriſche Ort des Punktes $(\alpha'\omega)$ iſt daher eine gerade Linie, die durch den Punkt $(\alpha\beta\gamma)$ geht, wie auch die Punkte $(\alpha\beta')$, $(\beta\gamma')$, $(\gamma\alpha')$ auf α, β, γ angenommen werden mögen. Dies giebt folgenden Lehrſatz:

Wenn zwei feſte gerade Linien **Aa, Ad** (Fig. 46.) gegeben ſind, und man durch einen Punkt **A'** zwei beliebige gerade Linien **A'B, A'C** zieht und die Durchſchnittspunkte **B, B'** und **C, C'** durch gerade Linien verbindet; ſo iſt der geometriſche Ort des Durchſchnittspunktes **O** dieſer Verbindungslinien eine gerade Linie, die durch den Punkt **A** geht, wie auch der Punkt **A'** auf der Verbindungslinie **AA'** angenommen werden mag.

Wir haben dieſes ſehr inſtructive Beiſpiel der Ableitung eines geometriſchen Satzes aus einem andern keine Größenbeſtimmungen enthaltenden Satze mittelſt des Princips der Reciprocität aus der trefflichen Sammlung von Aufgaben und Lehrſätzen aus der analytiſchen Geometrie von L. J. Magnus. Berlin. 1833. S. 69. entlehnt, und bemerken nun nur noch, daß es, um eine ſolche Ableitung eines Satzes aus einem andern zu machen, keineswegs unbedingt nöthig iſt, ſich die reciproke Figur vollſtändig conſtruirt zu denken, ſondern daß es jederzeit hinreicht, wenn man in dem vorgelegten Satze überall gerade Linien für Punkte, Punkte für gerade Linien Zuſammentreffen in einem Punkte für Liegen in gerader Linie und Liegen in gerader Linie für Zuſammentreffen in einem Punkte ſetzt, um auf der Stelle den abzuleitenden Satz zu erhalten. Die neuern Geometer pflegen ſolche aus einander abgeleitete Sätze einander gegenüber zu ſtellen, wie folgendes Beiſpiel, deſſen erſter Satz in (13.) mittelſt der allgemeinen Theorie der Collineations-Verwandtſchaft bewieſen worden iſt, zeigt:

Wenn die drei Verbindungslinien der Spitzen zweier Dreiecke ſich in einem Punkte ſchneiden; ſo liegen die drei Durchſchnittspunkte der dieſen Spitzen gegenüberliegenden Seiten in gerader Linie.	Wenn die drei Durchſchnittspunkte der Seiten zweier Dreiecke in gerader Linie liegen; ſo ſchneiden ſich die Verbindungslinien der dieſen Seiten gegenüberliegenden Spitzen in einem Punkte.

22. Die Natur dieſes Werkes geſtattet es uns nicht, die vorhergehende Theorie der Collineation und Reciprocität auf Figuren im Raume auszudehnen, und ihre Anwendung in der Theorie der krummen Linien und krummen Flächen zu zeigen. Wir bemerken daher nur noch, daß die Collineations-Verwandtſchaft

nebſt den als beſondere Fälle derſelben erſcheinenden geometriſchen Verwandtſchaften, wovon ausführlich die Rede geweſen iſt, zuerſt von dem ſcharfſinnigen Möbius in ſeinem ſchon in (12. **III.**) erwähnten trefflichen barycentriſchen Calcul in die Geometrie eingeführt, und als eine Quelle ſehr vieler merkwürdiger Folgerungen nachgewieſen worden iſt. Die Einführung der Reciprocität (théorie des polaires reciproques) als allgemeines geometriſches Princip in die Geometrie verdankt man Poncelet, worüber vorzüglich eine Abhandlung in den Annales de Mathém. **T. VIII.** p. 201., eine Abhandlung in Crelles Journ. **B. IV. S. 1.**, und der Traité des proprietés projectives des figures (Paris. 1822.) von Poncelet nachzuſehen ſind. In der ſchönen in den Annales de Mathém. **T. XVI.** p. 209. abgedruckten Abhandlung: Considerations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue hat Gergonne darauf aufmerkſam gemacht und an Beiſpielen nachgewieſen, daß, mit Ausnahme einiger wenigen an ſich ſymmetriſchen Sätze, wie z. B. des Euler'ſchen Theorems von den Polyedern und ſeines analogen von den Polygonen, alle geometriſchen Sätze, die keine metriſchen oder Größen-Beſtimmungen enthalten, doppelt ſeyen, „c'est — à-dire que, dans la géométrie plane, à chaque théorème il en repond toujours nécessairement un autre qui s'en déduit en y échangeant simplement entre eux les deux mots *points* et *droites*; tandis que, dans la géométrie de l'espace, ce sont les mots *points* et *plans* qu'il faut échanger entre eux pour passer d'un théorème à son corrélatif.“ Wie nahe dieſes Gergonneſche Princip der Dualität oder des Dualismus mit der théorie des polaires réciproques von Poncelet zuſammenſtimmt, überſieht man leicht, und es hat ſich daher über die Erfindung dieſer geometriſchen Principe zwiſchen den beiden genannten ausgezeichneten Geometern auch ein Streit erhoben, welcher mit ziemlicher Heftigkeit geführt worden iſt, wie man aus den Annales de Mathém. **T. XVIII.** p. 125. und dem Bulletin universel des sciences von Féruſſac (Bulletin des sc. math. Août 1827. p. 109.) erſehen kann. Am conſequenteſten findet ſich der in Rede ſtehende merkwürdige geometriſche Dualismus in dem trefflichen Werke von Steiner: Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Thl. I. Berlin 1832. durchgeführt. Ein beſonderes Verdienſt hat ſich auch Magnus ſowohl durch weitere Ausbildung, als auch durch die in dem ſchon oben erwähnten Werke gelieferte ſehr zweckmäßige und lichtvolle Darſtellung der merkwürdigen Theorie der Collineation und Reciprocität erworben, weshalb wir auch dieſer Darſtellung in gegenwärtigem Artikel vorzugsweiſe gefolgt ſind. Endlich ſ. m. auch noch System der analytischen Geometrie, auf neue Betrachtungsweisen gegründet, von J. Plücker. Berl. 1835. S. 48.

Vielecksſchnitts-Verhältniß (ratio sectionalis polygonica) nennt Möbius in ſeinem Barycentriſchen Calcul (Leipzig. 1827.) ein Verhältniß, welches aus den Verhältniſſen, nach welchen bei einem ebenen oder nicht in einer Ebene liegenden Vielecke jede Seite, — den Anfangs- und Endpunkt derſelben zum End- und Anfangspunkte der anliegenden Seiten genommen, — von einem beliebigen dritten in der Seite ſelbſt oder in ihrer Verlängerung liegenden Punkte geſchnitten wird, zuſammengeſetzt iſt. Möbius hat von ſolchen Verhältniſſen a. a. O. S. 299. mehrere merkwürdige Sätze bewieſen.

Vollſtändige Auflöſungen der Differentialgleichungen, ſ. Einhüllende Curven und Flächen (7.) und (14.) i. d. Z.

Vollſtändige Integrale, ſ. Einhüllende Curven und Flächen (7.) und (14.) i. d. Z.

W.

Wahrſcheinlichkeitsrechnung. Die Methode der kleinſten Quadrate ausführlich zu ſtudiren dient am beſten eine treffliche Abhandlung von Encke im Berliner aſtronomiſchen Jahrbuche vom Jahre 1835 an.

Wendungscurve, ſ. Einhüllende Curven und Flächen (11.) und Evolution (4.) i. d. Z.

Z.

Zerlegung der gebrochenen Functionen, ſ. Function I. i. d. Z.

Nachtrag zum Artikel Gleichung.

Ueber Fouriers Methode der geordneten Diviſion.

1. Fourier hat den bei der Aufloͤſung der Zahlengleichungen noͤthigen, oft nicht ohne ziemliche Weitlaͤufigkeit ausfuͤhrbaren numeriſchen Calcul durch eine beſondere Methode der gemeinen Diviſion (division ordonnée) ſehr erleichtert, welche auch ſchon im Artikel Gleichung (87.) im Allgemeinen erwaͤhnt worden iſt. Um indeß bei der Aufloͤſung der numeriſchen Gleichungen ſo wenig wie moͤglich zu wuͤnſchen uͤbrig zu laſſen, ſoll dieſe in vielfacher Beziehung Beachtung verdienende Methode nebſt ihrem Beweiſe, den Fourier zu geben gaͤnzlich unterlaſſen hat, und einigen zu ihrer naͤhern Beſtimmung uns noͤthig ſcheinenden Bemerkungen hier nachgetragen werden.

2. Die Baſis des zum Grunde liegenden Zahlenſyſtems ſoll im Folgenden immer durch x bezeichnet werden, und kann jede beliebige poſitive ganze Zahl ſeyn, welche groͤßer als die Einheit iſt. Bezeichnen dann

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ a_k$$

beliebige poſitive ganze Zahlen, die ſaͤmmtlich kleiner als x ſind; ſo kann, wenn n eine beliebige poſitive oder negative ganze Zahl bezeichnet, jede nach dem Zahlenſyſteme, deſſen Grundzahl x iſt, geſchriebene ganze Zahl, oder auch jeder ſogenannte Syſtemsbruch durch den allgemeinen Ausdruck

$$ax^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots + a_k x^{n-k}$$

dargeſtellt werden.

Hiernaͤchſt gehen wir nun zu dem folgenden fuͤr unſere fernere Unterſuchung ſehr wichtigen Satze uͤber.

3. Wenn A eine ganz beliebige poſitive ganze Zahl iſt, dagegen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ a_k$$

poſitive ganze Zahlen bezeichnen, die ſaͤmmtlich kleiner als x ſind, und

$$N = Ax^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots + a_k x^{n-k},$$

wo n jede beliebige poſitive oder negative ganze Zahl bezeichnen kann, geſetzt wird; ſo iſt jederzeit

$$N < (A + 1)x^n.$$

Weil nach der Vorausſetzung die poſitiven ganzen Zahlen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_k$$

ſämmtlich kleiner wie die poſitive ganze Zahl x, die immer größer als die Einheit angenommen wird, ſind; ſo iſt offenbar

$$N \overline{\overline{<}} Ax^n + (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x^{n-k})$$

oder

$$N \overline{\overline{<}} Ax^n + (x-1)x^{n-k}(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{k-1}),$$

d. i. nach der bekannten Summation der geometriſchen Progreſſionen

$$N \overline{\overline{<}} Ax^n + (x-1)x^{n-k} . \frac{x^k-1}{x-1}$$

oder

$$N \overline{\overline{<}} Ax^n + x^{n-k}(x^k - 1),$$

d. i.

$$N \overline{\overline{<}} (A + 1)x^n - x^{n-k},$$

und folglich offenbar immer

$$N < (A + 1)x^n,$$

wie bewieſen werden ſollte.

4. Wenn A und A′ zwei ganz beliebige poſitive ganze Zahlen, dagegen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_k$$

poſitive ganze Zahlen, die ſämmtlich kleiner als x ſind, bezeichnen, und A′ > A iſt; ſo iſt für jedes poſitive oder negative ganze n

$$A'x^n > Ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \ldots + a_kx^{n-k}.$$

Setzen wir der Abkürzung wegen

$$N = Ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \ldots + a_kx^{n-k};$$

ſo iſt nach 3.

$$N < (A + 1)x^n.$$

Weil aber A und A′ poſitive ganze Zahlen ſind, und A′ > A iſt; ſo iſt offenbar

$$A' \overline{\overline{>}} A + 1,$$

und folglich

$$A'x^n \overline{\overline{>}} (A + 1)x^n.$$

Alſo iſt nach dem Vorhergehenden

$$A'x^n > N,$$

d. i.

$$A'x^n > Ax^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots + a_k x^{n-k},$$

wie bewieſen werden ſollte.

5. Wenn A und B zwei Zahlen von der Form

$$A = ax^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_k x^{n-k},$$

$$B = \alpha x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots + \alpha_i x^{n-i}$$

ſind, wo

$$a, a_1, a_2, a_3, \ldots a_k;$$

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_i$$

lauter poſitive ganze Zahlen, und

$$a, a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$$

ſämmtlich kleiner als x ſeyn ſollen, auch angenommen wird, daß α nicht $= 0$ iſt; ſo iſt immer

$$Bx > A.$$

Weil man ſich nämlich A unter der Form

$$A = 0.x^{n+1} + ax^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_k x^{n-k}$$

dargeſtellt denken kann, und nach der Vorausſetzung $\alpha > 0$ iſt; ſo iſt nach 4.

$$\alpha x^{n+1} > A.$$

Weil nun ferner

$$Bx = \alpha x^{n+1} + \alpha_1 x^n + \alpha_2 x^{n-1} + \ldots + \alpha_i x^{n-i+1}$$

iſt; ſo iſt natürlich um ſo mehr

$$Bx > A,$$

wie bewieſen werden ſollte.

6. Fourier ſondert bei ſeiner Diviſionsmethode vom Diviſor und Dividendus immer einige der höchſten Ziffern dieſer Zahlen in ihrer natürlichen Folge ab, und bezeichnet dies ganz zweckmäßig und einfach dadurch, daß er über die abgeſonderten Ziffern einen Horizontalſtrich macht. Die durch die vom Diviſor und Dividendus abgeſonderten Ziffern dargeſtellten Zahlen nennt Fourier diviseur designé und dividende designé. Wir werden dieſe Zahlen im Folgenden den überſtrichenen Diviſor und Dividendus nennen. Beim Ueberſtreichen befolgt Fourier die Regel, daß er, nachdem er eine beliebige Anzahl von Ziffern des Diviſors überſtrichen hat, jederzeit entweder eben ſo viele Ziffern des Dividendus oder eine mehr überſtreicht, jenachdem nämlich die Zahl, welche durch eine der Anzahl der Ziffern des überſtrichenen Diviſors gleiche Anzahl höchſter Ziffern des Dividendus dargeſtellt wird, nicht kleiner, oder kleiner wie der überſtrichene Diviſor iſt. Durch dieſe Regel erreicht man den Zweck, daß, wenn man mit dem überſtrichenen Diviſor in den

überſtrichenen Dividendus dividirt, der Quotient jederzeit kleiner als die Grundzahl x, oder eine einziffrige Zahl iſt, d. h. eigentlich, daß die größte in dem Bruche, deſſen Zähler der überſtrichene Dividendus, der Nenner der überſtrichene Diviſor iſt, enthaltene ganze Zahl jederzeit kleiner als die Baſis x, oder eine einziffrige Zahl iſt, welches ſich auf folgende Art leicht ſtreng beweiſen läßt.

Bezeichnen c und a den nach der von Fourier gegebenen Regel überſtrichenen Diviſor und Dividendus; ſo haben c und a entweder gleich viele Ziffern, oder a hat eine Ziffer mehr als c. Haben nun zuerſt c und a gleich viele Ziffern; ſo iſt nach 5.

$$cx > a\,,$$

und die größte in dem Bruche $\frac{a}{c}$ enthaltene ganze Zahl iſt folglich offenbar kleiner als x. Hat aber a eine Ziffer mehr wie c, ſo denke man ſich a unter der Form

$$a = \alpha x + \alpha_1$$

dargeſtellt. Weil nun nach der von Fourier gegebenen Regel des Ueberſtreichens dem überſtrichenen Dividendus nur dann eine Ziffer mehr wie dem überſtrichenen Diviſor gegeben wird, wenn die Zahl α, welche eben ſo viele Ziffern wie c enthält, kleiner als c iſt; ſo iſt nach dem in 4. bewieſenen Satze in dieſem Falle wieder

$$cx > a$$

und die größte in dem Bruche $\frac{a}{c}$ enthaltene ganze Zahl alſo auch jetzt offenbar kleiner wie die Baſis x des zum Grunde gelegten Zahlenſyſtems, d. i. eine einziffrige Zahl.

Iſt nun auch die Anwendung der von Fourier gegebenen Regel des Ueberſtreichens nicht gerade unbedingt nöthig; ſo wollen wir im Folgenden doch, weil ſie allerdings zur Vereinfachung der Rechnung beiträgt, von derſelben jederzeit Gebrauch machen.

7. Dies vorausgeſetzt, mag nun überhaupt

$$\Delta = cx^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + c_3 x^{n-3} + \ldots\ldots$$

der gegebene Diviſor,

$$D = ax^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + a_3 x^{m-3} + \ldots\ldots$$

der gegebene Dividendus ſeyn; der überſtrichene Diviſor ſoll c, der überſtrichene Dividendus ſoll a ſeyn, wobei wir vorausſetzen, daß man bei dem Ueberſtreichen die in 6. gegebene Regel befolgt habe.

Um D durch Δ zu dividiren, hat man auf folgende Art zu verfahren.

I. Man nehme die größte in dem Bruche $\frac{a}{c}$ enthaltene ganze Zahl k, welche nach 6. kleiner als x oder eine einziffrige Zahl iſt; ſo läßt ſich zuerſt leicht zeigen, daß die höchſte oder erſte Ziffer des geſuchten Quotienten nicht größer als k ſeyn kann.

Weil nämlich k die größte in dem Bruche $\frac{a}{c}$ enthaltene ganze Zahl iſt; ſo iſt

$$c(k+1) > a$$

und folglich nach 4.

$$c(k+1)x^m > D\,.$$

Das höchſte Glied des Products

$$\Delta(k+1)x^{m-n}$$

iſt aber die Größe $c(k+1)x^m$. Alſo iſt offenbar

$$\Delta(k+1)x^{m-n} > D\,,$$

und das höchſte oder erſte Glied des geſuchten Quotienten kann folglich nicht

$$(k+1)x^{m-n}\,,$$

ſondern höchſtens

$$kx^{m-n}\,,$$

die erſte Ziffer des geſuchten Quotienten alſo höchſtens k ſeyn.

Wenn nun

$$a - ck \geqq k$$

iſt; ſo iſt k jederzeit die richtige erſte Ziffer des geſuchten Quotienten, wie auf folgende Art gezeigt werden kann.

Nach dem in 3. bewieſenen Satze iſt

$$\Delta < (c+1)x^n$$

und folglich

$$\Delta kx^{m-n} < (c+1)kx^m\,.$$

Weil aber nach der Vorausſetzung

$$a - ck \geqq k$$

iſt; ſo iſt

$$a \geqq (c+1)k\,.$$

Alſo iſt

$$\Delta kx^{m-n} < ax^m,$$

und folglich offenbar um ſo mehr

$$\Delta kx^{m-n} < D$$

oder

$$D - \Delta kx^{m-n} > 0\,,$$

ſo daß alſo die erſte Ziffer k des geſuchten Quotienten nicht zu groß iſt.

Weil alſo k nach dem Vorhergehenden weder zu klein, noch zu groß iſt; ſo iſt k unter der gemachten Vorausſetzung die richtige höchſte oder erſte Ziffer des geſuchten Quotienten.

II. Unter der Vorausſetzung, daß

$$a - ck \overline{\overline{>}} k$$

iſt, ziehe man nun das Product $\varDelta k x^{m-n}$ von D ab; ſo erhält man, wenn der Kürze wegen

$$(a - ck)x + a_1 - c_1 k = \Theta_1$$

geſetzt wird, als Reſt die Größe

$$\begin{aligned} D_1 = \Theta_1 x^{m-1} &+ (a_2 - c_2 k)x^{m-2} \\ &+ (a_3 - c_3 k)x^{m-3} \\ &+ (a_4 - c_4 k)x^{m-4} \\ &+ \ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

wo nun zuerſt zu bemerken iſt, daß immer

$$\Theta_1 > 0$$

iſt.

Da nämlich

$$a - ck \overline{\overline{>}} k$$

und $x > c_1$ iſt; ſo iſt

$$(a - ck)x > c_1 k$$

und folglich um ſo mehr

$$(a - ck)x + a_1 > c_1 k$$

oder

$$(a - ck)x + a_1 - c_1 k > 0,$$

d. i.

$$\Theta_1 > 0,$$

wie behauptet wurde.

Um nun die zweite Ziffer des geſuchten Quotienten zu finden, nehme man die größte in dem Bruche $\frac{\Theta_1}{c}$ enthaltene ganze Zahl k_1; ſo läßt ſich zuerſt leicht zeigen, daß k_1 jederzeit eine einziffrige Zahl iſt.

Da nämlich k die größte in $\frac{a}{c}$ enthaltene ganze Zahl iſt; ſo iſt

$$c(k+1) > a,$$

und folglich nach dem im 4. bewieſenen Satze

$$c(k+1)x > ax + a_1$$

alſo um ſo mehr

$$c(k+1)x + c_1 k > ax + a_1;$$

folglich

$$cx > (a - ck)x + a_1 - c_1 k,$$

oder

$$cx > \Theta_1 ,$$

und daher die größte in $\frac{\Theta_1}{c}$ enthaltene ganze Zahl natürlich kleiner als x, oder eine einziffrige Zahl.

Ferner läßt ſich zeigen, daß die zweite Ziffer des geſuchten Quotienten nicht größer als k_1 ſeyn kann.

Weil nämlich k_1 die größte in $\frac{\Theta_1}{c}$ enthaltene ganze Zahl iſt; ſo iſt

$$c(k_1 + 1) > \Theta_1$$

und folglich nach 4.

$$c(k_1 + 1)x^{m-1} > \Theta_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + a_3 x^{m-3} + \ldots ;$$

alſo offenbar um ſo mehr

$$c(k_1 + 1)x^{m-1} > D_1$$

und folglich offenbar auch

$$\Delta(k_1 + 1)x^{m-n-1} > D_1 ,$$

ſo daß alſo die zweite Ziffer des geſuchten Quotienten nicht $k_1 + 1$, ſondern höchſtens k_1 ſeyn kann.

Wenn nun

$$\Theta_1 - ck_1 \overline{\overline{>}} k + k_1$$

iſt; ſo läßt ſich behaupten, daß k_1 die richtige zweite Ziffer des geſuchten Quotienten iſt.

Nach 3. iſt nämlich

$$\Delta < (c + 1)x^n$$

und folglich

$$\Delta k_1 x^{m-n-1} < (c + 1)k_1 x^{m-1} .$$

Nach 3. iſt aber auch

$$(c + 1)k_1 x^{m-1} + (c_2 x^{m-2} + c_3 x^{m-3} + c_4 x^{m-4} + \ldots)k$$
$$< (c + 1)k_1 x^{m-1} + (c_2 + 1)k x^{m-2} ,$$

oder, weil $c_2 < x$ iſt,

$$(c + 1)k_1 x^{m-1} + (c_2 x^{m-2} + c_3 x^{m-3} + c_4 x^{m-4} + \ldots)k$$
$$< \{k + (c + 1)k_1\} x^{m-1} .$$

Weil nun nach der Vorausſetzung

$$\Theta_1 - ck_1 \overline{\overline{>}} k + k_1$$

und folglich

$$\Theta_1 \overline{\overline{>}} k + (c + 1)k_1$$

iſt; ſo iſt

$$(c + 1)k_1 x^{m-1} + (c_2 x^{m-2} + c_3 x^{m-3} + c_4 x^{m-4} + \ldots)k$$
$$< \Theta_1 x^{m-1} ,$$

und folglich um ſo mehr

$$(c + 1)k_1 x^{m-1} + (c_2 x^{m-2} + c_3 x^{m-3} + c_4 x^{m-4} + \ldots)k$$
$$< \Theta_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + a_3 x^{m-3} + a_4 x^{m-4} + \ldots ,$$

oder

$$\begin{aligned}(c+1)k_1 x^{m-1} < \Theta_1 x^{m-1} &+ (a_2 - c_2 k)x^{m-2} \\ &+ (a_3 - c_3 k)x^{m-3} \\ &+ (a_4 - c_4 k)x^{m-4} \\ &+ \ldots\ldots,\end{aligned}$$

d. i.

$$(c+1)k_1 x^{m-1} < D_1 ,$$

und nach dem Obigen folglich um ſo mehr

$$\Delta k_1 x^{m-n-1} < D_1 .$$

Daher iſt unter der gemachten Vorausſetzung k_1 nicht zu groß, und k_1 iſt alſo, weil es nach dem Obigen auch nicht zu klein iſt, die richtige zweite Ziffer des geſuchten Quotienten

III. Unter der Vorausſetzung, daß

$$\Theta_1 - ck_1 \geqq k + k_1$$

iſt, ziehe man jetzt das Product

$$\Delta k_1 x^{m-n-1}$$

von D_1 ab; ſo erhält man, indem man der Kürze wegen

$$(\Theta_1 - ck_1)x + a_2 - c_2 k - c_1 k_1 = \Theta_2$$

ſetzt, als Reſt die Größe

$$\begin{aligned}D_2 = \Theta_2 x^{m-2} &+ (a_3 - c_3 k - c_2 k_1)x^{m-3} \\ &+ (a_4 - c_4 k - c_3 k_1)x^{m-4} \\ &+ (a_5 - c_5 k - c_4 k_1)x^{m-5} \\ &+ \ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

und es läßt ſich nun wieder beweiſen, daß

$$\Theta_2 > 0$$

iſt.

Da nämlich

$$\Theta_1 - ck_1 \geqq k + k_1$$

und $x > c_1$, $x > c_2$ iſt; ſo iſt

$$(\Theta_1 - ck_1)x > c_2 k + c_1 k_1 ,$$

alſo offenbar

$$(\Theta_1 - ck_1)x + a_2 - c_2 k - c_1 k_1 > 0 ,$$

d. i.

$$\Theta_2 > 0 .$$

Um nun die dritte Ziffer des geſuchten Quotienten zu finden, nehme man die größte in dem Bruche $\frac{\Theta_2}{c}$ enthaltene ganze Zahl k_2; ſo läßt ſich zuvörderſt wieder leicht zeigen, daß k_2 jederzeit kleiner als x iſt.

Da nämlich k_1 die größte in $\frac{\Theta_1}{c}$ enthaltene ganze Zahl iſt; ſo iſt

$$c(k_1 + 1) > \Theta_1$$

und folglich nach 4.

$$c(k_1 + 1)x > \Theta_1 x + a_2 .$$

Alſo iſt auch

$$cx > (\Theta_1 - ck_1)x + a_2$$

und folglich um ſo mehr

$$cx > (\Theta_1 - ck_1)x + a_2 - c_2 k - c_1 k_1 ,$$

d. i.

$$cx > \Theta_2 ,$$

wodurch die aufgeſtellte Behauptung offenbar gerechtfertigt iſt.

Ferner läßt ſich zeigen, daß die dritte Ziffer des geſuchten Quotienten nicht größer als k_2 ſeyn kann.

Da nämlich k_2 die größte in $\frac{\Theta_2}{c}$ enthaltene ganze Zahl iſt; ſo iſt

$$c(k_2 + 1) > \Theta_2$$

und folglich nach 4.

$$c(k_2 + 1)x^{m-2} > \Theta_2 x^{m-2} + a_3 x^{m-3} + a_4 x^{m-4} + \ldots\ldots$$

Alſo iſt offenbar um ſo mehr

$$c(k_2 + 1)x^{m-2} > D_2 ,$$

und folglich offenbar auch

$$\Delta(k_2 + 1)x^{m-n-2} > D_2 .$$

Daher kann die dritte Ziffer des geſuchten Quotienten nicht $k_2 + 1$, ſondern höchſtens k_2 ſeyn.

Wenn nun

$$\Theta_2 - ck_2 \overline{\overline{>}}\, k + k_1 + k_2$$

iſt; ſo iſt k_2 die richtige dritte Ziffer des geſuchten Quotienten.

Nach 3. iſt nämlich

$$\Delta < (c + 1)x^n$$

und folglich

$$\Delta k_2 x^{m-n-2} < (c+1)k_2 x^{m-2} .$$

Nun iſt aber nach 3. auch

$$\begin{aligned}(c+1)k_2 x^{m-2} &+ (c_3 x^{m-3} + c_4 x^{m-4} + c_5 x^{m-5} + \ldots.)k \\ &+ (c_2 x^{m-3} + c_3 x^{m-4} + c_4 x^{m-5} + \ldots.)k_1 \\ < (c+1)k_2 x^{m-2} &+ (c_3 + 1)kx^{m-3} + (c_2 + 1)k_1 x^{m-3} \\ &< \{k + k_1 + (c+1)k_2\}x^{m-2} ,\end{aligned}$$

weil $c_2 < x$, $c_3 < x$ iſt.

Nach der Vorausſetzung iſt aber

$$\Theta_2 \overline{\overline{>}} k + k_1 + (c+1) k_2 .$$

Folglich iſt

$$(c+1) k_2 x^{m-2} + (c_3 x^{m-3} + c_4 x^{m-4} + c_5 x^{m-5} + \ldots.) k$$
$$+ (c_2 x^{m-3} + c_3 x^{m-4} + c_4 x^{m-5} + \ldots.) k_1$$
$$< \Theta_2 x^{m-2} ;$$

alſo um ſo mehr

$$(c+1) k_2 x^{m-2} + (c_3 x^{m-3} + c_4 x^{m-4} + c_5 x^{m-5} + \ldots.) k$$
$$+ (c_2 x^{m-3} + c_3 x^{m-4} + c_4 x^{m-5} + \ldots.) k_1$$
$$< \Theta_2 x^{m-2} + a_3 x^{m-3} + a_4 x^{m-4} + a_5 x^{m-5} + \ldots..$$

und folglich

$$(c+1) k_2 x^{m-2} < \Theta_2 x^{m-2} + (a_3 - c_3 k - c_2 k_1) x^{m-3}$$
$$+ (a_4 - c_4 k - c_3 k_1) x^{m-4}$$
$$+ (a_5 - c_5 k - c_4 k_1) x^{m-5}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

d. i.

$$(c+1) k_2 x^{m-2} < D_2 .$$

Folglich iſt nach dem Obigen um ſo mehr

$$\Delta k_2 x^{m-n-2} < D_2 ,$$

und k_2 iſt alſo nicht zu groß, ſo daß alſo k_2, weil es nach dem Obigen auch nicht zu klein iſt, die richtige dritte Ziffer des geſuchten Quotienten iſt, wie behauptet wurde.

IV. Unter der Vorausſetzung, daß

$$\Theta_2 - ck_2 \overline{\overline{>}} k + k_1 + k_2$$

iſt, ziehe man nun das Product

$$\Delta k_2 x^{m-n-2}$$

von D_2 ab; ſo erhält man, wenn man der Kürze wegen

$$(\Theta_2 - ck_2) x + a_3 - c_3 k - c_2 k_1 - c_1 k_2 = \Theta_3$$

ſetzt, als Reſt die Größe

$$D_3 = \Theta_3 x^{m-3} + (a_4 - c_4 k - c_3 k_1 - c_2 k_2) x^{m-4}$$
$$+ (a_5 - c_5 k - c_4 k_1 - c_3 k_2) x^{m-5}$$
$$+ (a_6 - c_6 k - c_5 k_1 - c_4 k_2) x^{m-6}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

und kann nun wieder zunächſt behaupten, daß

$$\Theta_3 > 0$$

iſt.

Da nämlich

$$\Theta_2 - ck_2 \overline{\overline{>}} k + k_1 + k_2$$

und $x > c_1$, $x > c_2$, $x > c_3$ iſt; ſo iſt

$$(\Theta_2 - ck_2) x > c_3 k + c_2 k_1 + c_1 k_2 ,$$

alſo
$$(\Theta_2 - ck_2)x + a_3 - c_3 k - c_2 k_1 - c_1 k_2 > 0,$$
d. i.
$$\Theta_3 > 0,$$
wie behauptet wurde.

Um nun die vierte Ziffer des geſuchten Quotienten zu finden, nehme man die gröſste in dem Bruche $\frac{\Theta_3}{c}$ enthaltene ganze Zahl k_3. Dann läſst ſich wieder zuvörderſt behaupten, daſs k_3 jederzeit kleiner als x iſt.

Da nämlich k_2 die gröſste in $\frac{\Theta_2}{c}$ enthaltene ganze Zahl iſt; ſo iſt
$$c(k_2 + 1) > \Theta_2,$$
und folglich nach 4.
$$c(k_2 + 1)x > \Theta_2 x + a_3.$$
Alſo iſt auch
$$cx > (\Theta_2 - ck_2)x + a_3$$
und folglich um ſo mehr
$$cx > (\Theta_2 - ck_2)x + a_3 - c_3 k - c_2 k_1 - c_1 k_2,$$
d. i.
$$cx > \Theta_3,$$
woraus die Richtigkeit der aufgeſtellten Behauptung auf der Stelle erhellet.

Ferner läſst ſich zeigen, daſs die vierte Ziffer des geſuchten Quotienten nicht gröſser als k_3 ſeyn kann.

Da nämlich k_3 die gröſste in $\frac{\Theta_3}{c}$ enthaltene ganze Zahl iſt; ſo iſt
$$c(k_3 + 1) > \Theta_3,$$
und folglich nach 4.
$$c(k_3 + 1)x^{m-3} > \Theta_3 x^{m-3} + a_4 x^{m-4} + a_5 x^{m-5} + \ldots,$$
alſo offenbar um ſo mehr
$$c(k_3 + 1)x^{m-3} > D_3,$$
und folglich offenbar auch
$$\Delta(k_3 + 1)x^{m-n-3} > D_3.$$
Daher kann die vierte Ziffer des geſuchten Quotienten nicht $k_3 + 1$, ſondern höchſtens k_3 ſeyn.

Wenn nun
$$\Theta_3 - ck_3 \overline{\overline{>}} k + k_1 + k_2 + k_3$$
iſt; ſo iſt k_3 jederzeit die richtige vierte Ziffer des geſuchten Quotienten, wie auf folgende Art gezeigt werden kann.

Nach 3. iſt

$$\Delta < (c+1)x^n$$

und folglich

$$\Delta k_3 x^{m-n-3} < (c+1) k_3 x^{m-3} .$$

Nach 3. iſt aber auch

$$\begin{aligned}(c+1) k_3 x^{m-3} &+ (c_4 x^{m-4} + c_5 x^{m-5} + c_6 x^{m-6} + \ldots) k \\ &+ (c_3 x^{m-4} + c_4 x^{m-5} + c_5 x^{m-6} + \ldots) k_1 \\ &+ (c_2 x^{m-4} + c_3 x^{m-5} + c_4 x^{m-6} + \ldots) k_2 \\ < (c+1) k_3 x^{m-3} + (c_4+1) k x^{m-4} &+ (c_3+1) k_1 x^{m-4} + (c_2+1) k_2 x^{m-4} \\ < \{k + k_1 + k_2 + (c+1) k_3\} x^{m-3} ,\end{aligned}$$

weil $c_2 < x$, $c_3 < x$, $c_4 < x$ iſt.

Nach der Vorausſetzung iſt aber

$$\Theta_3 \overline{\overline{>}} k + k_1 + k_2 + (c+1) k_3 .$$

Alſo iſt

$$\begin{aligned}(c+1) k_3 x^{m-3} &+ (c_4 x^{m-4} + c_5 x^{m-5} + c_6 x^{m-6} + \ldots) k \\ &+ (c_3 x^{m-4} + c_4 x^{m-5} + c_5 x^{m-6} + \ldots) k_1 \\ &+ (c_2 x^{m-4} + c_3 x^{m-5} + c_4 x^{m-6} + \ldots) k_2 \\ &< \Theta_3 x^{m-3}\end{aligned}$$

und folglich um ſo mehr

$$\begin{aligned}(c+1) k_3 x^{m-3} &+ (c_4 x^{m-4} + c_5 x^{m-5} + c_6 x^{m-6} + \ldots) k \\ &+ (c_3 x^{m-4} + c_4 x^{m-5} + c_5 x^{m-6} + \ldots) k_1 \\ &+ (c_2 x^{m-4} + c_3 x^{m-5} + c_4 x^{m-6} + \ldots) k_2 \\ < \Theta_3 x^{m-3} &+ a_4 x^{m-4} + a_5 x^{m-5} + a_6 x^{m-6} + \ldots ,\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}(c+1) k_3 x^{m-3} < \Theta_3 x^{m-3} &+ (a_4 - c_4 k - c_3 k_1 - c_2 k_2) x^{m-4} \\ &+ (a_5 - c_5 k - c_4 k_1 - c_3 k_2) x^{m-5} \\ &+ (a_6 - c_6 k - c_5 k_1 - c_4 k_2) x^{m-6} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots ,\end{aligned}$$

d. i.

$$(c+1) k_3 x^{m-3} < D_3 ,$$

und folglich um ſo mehr nach dem Obigen

$$\Delta k_3 x^{m-n-3} < D_3 ,$$

ſo daß alſo k_3 nicht zu groß, und folglich, weil es nach dem Obigen auch nicht zu klein iſt, die richtige vierte Ziffer des geſuchten Quotienten iſt.

V. Wie ſich die vorhergehenden Betrachtungen weiter fortſetzen laſſen, liegt ſchon jetzt deutlich vor Augen. Im Allgemeinen ziehen wir aber aus denſelben das folgende Reſultat.

Wenn k die größte in dem Bruche

$$\frac{a}{c} .$$

enthaltene ganze Zahl bezeichnet, und wir

$$(a - ck)x + a_1 - c_1 k = \Theta_1$$

ſetzen; wenn dann wieder k_1 die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta_1}{c}$$

enthaltene ganze Zahl bezeichnet, und wir

$$(\Theta_1 - ck_1)x + a_2 - c_2 k - c_1 k_1 = \Theta_2$$

ſetzen; wenn dann ferner k_2 die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta_2}{c}$$

enthaltene ganze Zahl bezeichnet, und wir

$$(\Theta_2 - ck_2)x + a_3 - c_3 k - c_2 k_1 - c_1 k_2 = \Theta_3$$

ſetzen; wenn dann ferner k_3 die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta_3}{c}$$

enthaltene ganze Zahl bezeichnet, und wir

$$(\Theta_3 - ck_3)x + a_4 - c_4 k - c_3 k_1 - c_2 k_2 - c_1 k_3 = \Theta_4$$

ſetzen, u. ſ. w.; wenn dann $k_{\mu-1}$ die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta_{\mu-1}}{c}$$

enthaltene ganze Zahl bezeichnet, und wir

$$(\Theta_{\mu-1} - ck_{\mu-1})x + a_\mu - c_\mu k - c_{\mu-1} k_1 - \ldots - c_1 k_{\mu-1} = \Theta_\mu$$

ſetzen; ſo ſind unter der Vorausſetzung, daß

$$a - ck \geqq k,$$

$$\Theta_1 - ck_1 \geqq k + k_1,$$

$$\Theta_2 - ck_2 \geqq k + k_1 + k_2,$$

$$\Theta_3 - ck_3 \geqq k + k_1 + k_2 + k_3$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

$$\Theta_{\mu-1} - ck_{\mu-1} \geqq k + k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{\mu-1}$$

iſt, die Größen

$$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4, \ldots \Theta_\mu$$

ſämmtlich > 0, und

$$k, k_1, k_2, k_3, \ldots k_{\mu-1}$$

ſind die richtigen μ erſten Ziffern des geſuchten Quotienten. Endlich erhellet auch aus dem Obigen, daß immer

$$cx > \Theta_\mu,$$

die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta_\mu}{c}$$

enthaltene ganze Zahl, welche wir durch k_μ bezeichnen wollen, folglich kleiner als x iſt, und daß die $(\mu+1)$te Ziffer des geſuchten Quotienten nicht größer als k_μ ſeyn kann.

VI. Hiernach kann man ſich nun bei der Entwickelung des Quotienten

$$\frac{\overline{D}}{\varDelta}$$

auf folgende Art verhalten.

Nachdem man eine beliebige Anzahl höchſter Ziffern des Diviſors überſtrichen, und den überſtrichenen Dividendus nach der oben gegebenen Regel beſtimmt hat, nehme man, wenn wieder c und a den überſtrichenen Diviſor und Dividendus bezeichnen, die größte in dem Bruche

$$\frac{a}{c}$$

enthaltene ganze Zahl k.

Hierauf bilde man das Product ck und ziehe daſſelbe von a ab; ſo iſt, wenn

$$a - ck \overline{\overline{>}} k$$

iſt, k die richtige erſte Ziffer des geſuchten Quotienten.

Unter der Vorausſetzung, daß die vorige Bedingung erfüllt iſt, ziehe man zu der Differenz

$$a - ck$$

die auf den überſtrichenen Dividendus a folgende Ziffer a_1 des Dividendus herunter; ſo erhält man die Größe

$$(a - ck)x + a_1 .$$

Dann bilde man ſich die Größe $c_1 k$ und ziehe dieſelbe von der vorhergehenden Größe ab; ſo erhält man die Größe

$$(a - ck)x + a_1 - c_1 k = \Theta_1 .$$

Nun nehme man die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta_1}{c}$$

enthaltene ganze Zahl k_1.

Dann bilde man das Product ck_1 und ziehe daſſelbe von Θ_1 ab; ſo iſt, wenn

$$\Theta_1 - ck_1 \overline{\overline{>}} k + k_1$$

iſt, k_1 die richtige zweite Ziffer des geſuchten Quotienten.

Unter der Vorausſetzung, daß die vorhergehende Bedingung erfüllt iſt, ziehe man nun zu der Differenz

$$\Theta_1 - ck_1$$

die auf a_1 folgende Ziffer a_2 des Dividendus herunter; ſo erhält man die Größe

$$(\Theta_1 - ck_1)x + a_2 .$$

Nun bilde man ſich die Größe

$$c_2 k + c_1 k_1$$

und ziehe dieſelbe von der vorhergehenden Größe ab; ſo erhält man die Größe

$$(\Theta_1 - ck_1)x + a_2 - c_2 k - c_1 k_1 = \Theta_2 .$$

Hierauf nehme man die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta_2}{c}$$

enthaltene ganze Zahl k_2, bilde das Product ck_2, und ziehe daſſelbe von der Größe Θ_2 ab; ſo iſt, wenn

$$\Theta_2 - ck_2 \overline{\overline{\gtrless}}\, k + k_1 + k_2$$

iſt, k_2 die richtige dritte Ziffer des geſuchten Quotienten.

Unter der Vorausſetzung, daß die vorhergehende Bedingung erfüllt iſt, ziehe man zu der Differenz

$$\Theta_2 - ck_2$$

die auf a_2 folgende Ziffer a_3 des Dividendus herunter; ſo erhält man die Größe

$$(\Theta_2 - ck_2)x + a_3 .$$

Nun bilde man die Größe

$$c_3 k + c_2 k_1 + c_1 k_2$$

und ziehe dieſelbe von der vorhergehenden Größe ab; ſo erhält man die Größe

$$(\Theta_2 - ck_2)x + a_3 - c_3 k - c_2 k_1 - c_1 k_2 = \Theta_3 .$$

Nimmt man dann wieder die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta_3}{c}$$

enthaltene ganze Zahl k_3, bildet das Product ck_3, zieht daſſelbe von Θ_3 ab, und findet, daß

$$\Theta_3 - ck_3 \overline{\overline{\gtrless}}\, k + k_1 + k_2 + k_3$$

iſt; ſo iſt k_3 die richtige vierte Ziffer des geſuchten Quotienten.

Unter der Vorausſetzung, daß die vorige Bedingung erfüllt iſt, zieht man ferner die auf a_3 folgende Ziffer a_4 des Dividendus zu der Differenz

$$\Theta_3 - ck_3$$

herunter, und findet dadurch die Größe

$$(\Theta_3 - ck_3)x + a_4 .$$

Dann bildet man die Größe

$$c_4 k + c_3 k_1 + c_2 k_2 + c_1 k_3 ,$$

zieht dieſelbe von der vorhergehenden Größe ab, und erhält dadurch die Größe

$$(\Theta_3 - ck_3)x + a_4 - c_4 k - c_3 k_1 - c_2 k_2 - c_1 k_3 = \Theta_4 .$$

Nimmt man dann wieder die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta_4}{c}$$

enthaltene ganze Zahl k_4, bildet das Product $c\overline{k_4}$, zieht daſſelbe von Θ_4 ab, und findet, daß

$$\Theta_4 - ck_4 \overline{\overline{>}}\, k + k_1 + k_2 + k_3 + k_4$$

iſt; ſo iſt k_4 die richtige fünfte Ziffer des geſuchten Quotienten.

Wie man auf dieſe Art immer weiter gehen kann, iſt klar. Nur aber darf man nicht aus den Augen verlieren, daß dieſe Methode überhaupt bloß ſo lange anwendbar iſt, ſo lange die Bedingungen

$$a - ck \overline{\overline{>}}\, k$$

$$\Theta_1 - ck_1 \overline{\overline{>}}\, k + k_1\,,$$

$$\Theta_2 - ck_2 \overline{\overline{>}}\, k + k_1 + k_2\,,$$

$$\Theta_3 - ck_3 \overline{\overline{>}}\, k + k_1 + k_2 + k_3\,,$$

$$\Theta_4 - ck_4 \overline{\overline{>}}\, k + k_1 + k_2 + k_3 + k_4\,,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

erfüllt ſind. Hören dieſe Bedingungen auf erfüllt zu ſeyn; ſo muß man ein anderes Verfahren eintreten laſſen, wovon ſpäter die Rede ſeyn wird.

Die Größten Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4, ... nennt Fourier den zweiten, dritten, vierten, fünften, u. ſ. w. verbeſſerten partiellen Dividendus.

Die Größen

$$c_1 k\,,$$

$$c_2 k + c_1 k_1\,;$$

$$c_3 k + c_2 k_1 + c_1 k_2\,,$$

$$c_4 k + c_3 k_1 + c_2 k_2 + c_1 k_3\,,$$

$$c_5 k + c_4 k_1 + c_3 k_2 + c_2 k_3 + c_1 k_4\,,$$

u. ſ. w.

bildet man ſehr leicht, indem man entweder in Gedanken oder auf einem beſondern Streifchen Papier die gefundenen Ziffern des Quotienten den auf den überſtrichenen Diviſor zunächſt folgenden Ziffern des Diviſors in umgekehrter Ordnung unterſetzt, die über einander ſtehenden Ziffern in einander multiplicirt, und die ſämmtlichen auf dieſe Weiſe erhaltenen Producte durch Addition mit einander vereinigt.

Das folgende Exempel wird die Regeln, welche man zu befolgen hat, in ein noch helleres Licht ſetzen.

$\overline{234}567898765 \mid \overline{12345}'6'7'8'9'8'73647 \mid 526315$
$\underline{1170}$
645 (64 > 5; 5 richtig)
$\underline{25 = 5.5}$
2ter part. verb. Divid. 620
468
1526 (152 > 5 + 2; 2 richtig)
$\underline{40 = 5.6 + 2.5}$
3ter part. verb. Divid. 1486
1404
827 (82 > 5 + 2 + 6; 6 richtig)
$\underline{77 = 5.7 + 2.6 + 6.5}$
4ter part. verb. Divid. 750
702
488 (48 > 5 + 2 + 6 + 3; 3 richtig)
$\underline{105 = 5.8 + 2.7 + 6.6 + 3.5}$
5ter part. verb. Divid. 383
234
1499 (149 > 5 + 2 + 6 + 3 + 1; 1 richtig)
$\underline{126 = 5.9 + 2.8 + 6.7 + 3.6 + 1.5}$
6ter part. verb. Divid. 1373
1170
203 (203 > 5 + 2 + 6 + 3 + 1 + 5; 5 richtig).

Auf dieſe Weiſe hat man alſo die ſechs erſten Ziffern des geſuchten Quotienten richtig gefunden. Wollte man weiter rechnen, ſo würden die vorigen Regeln nicht mehr anwendbar ſeyn. Wir werden ſpäter auf dieſes Exempel zurück kommen.

8. Jetzt kehren wir zuvörderſt wieder zu unſerer allgemeinen Darſtellung in 7. V. zurück und nehmen an, daß man durch das gewieſene Verfahren die erſten μ Ziffern

$$k, k_1, k_2, k_3, \dots k_{\mu-1}$$

des geſuchten Quotienten richtig gefunden habe. Dann iſt, für

$$(\Theta_{\mu-1} - ck_{\mu-1})x + a_\mu - c_\mu k - c_{\mu-1}k_1 - \dots - c_1 k_{\mu-1} = \Theta_\mu,$$

die Größe

$$\begin{aligned} D_\mu = \Theta_\mu x^{m-\mu} &+ (a_{\mu+1} - c_{\mu+1}k - c_\mu k_1 - c_{\mu-1}k_2 - \dots - c_2 k_{\mu-1})x^{m-\mu-1} \\ &+ (a_{\mu+2} - c_{\mu+2}k - c_{\mu+1}k_1 - c_\mu k_2 - \dots - c_3 k_{\mu-1})x^{m-\mu-2} \\ &+ (a_{\mu+3} - c_{\mu+3}k - c_{\mu+2}k_1 - c_{\mu+1}k_2 - \dots - c_4 k_{\mu-1})x^{m-\mu-3} \\ &+ \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

der vollſtändige Reſt, welcher zuletzt übrig bleibt, d. h. die Größe, welche bei der fernern Diviſion eigentlich der Dividendus iſt. Θ_μ iſt, wie wir aus 7. V. wiſſen, > 0.

Um nun die $(\mu + 1)$te Ziffer des geſuchten Quotienten zu finden, nehme man die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta_\mu}{c}$$

enthaltene ganze Zahl k_μ; ſo iſt, wie wir ebenfalls aus 7. V.

wiſſen, $k_\mu < x$, und die $(\mu+1)$te Ziffer des geſuchten Quotienten kann nicht größer als k_μ ſeyn.

Wäre dann ferner

$$\Theta_\mu - ck_\mu \overline{\overline{>}}\, k + k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_\mu\,;$$

ſo würde k_μ die richtige $(\mu+1)$te Ziffer des geſuchten Quotienten ſeyn.

Nehmen wir aber jetzt an, daß dieſe Bedingung nicht erfüllt und daß folglich

$$\Theta_\mu - ck_\mu < k + k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_\mu$$

ſey; ſo iſt es fraglich, ob k_μ nicht vielleicht zu groß iſt, und folglich vermindert werden muß.

In einem ſolchen Falle bildet man jederzeit die Größe

$$\Theta_{\mu+1}$$
$$= (\Theta_\mu - ck_\mu)x + a_{\mu+1} - c_{\mu+1}k - c_\mu k_1 - \ldots - c_1 k_\mu$$

und hat dann wieder zwei Fälle zu unterſcheiden, jenachdem $\Theta_{\mu+1} \overline{\overline{>}}\, 0$ oder $\Theta_{\mu+1} < 0$ iſt.

I. Wenn zuerſt

$$\Theta_{\mu+1} \overline{\overline{>}}\, 0$$

iſt; ſo iſt es unbeſtimmt, ob k_μ die richtige $(\mu+1)$te Ziffer des geſuchten Quotienten oder zu groß iſt, und man hat nun über dieſen Fall Folgendes zu bemerken.

Setzt man der Kürze wegen

$$\Theta_\mu x + a_{\mu+1} - c_{\mu+1}k - c_\mu k_1 - c_{\mu-1}k_2 - \ldots - c_2 k_{\mu-1} = \Theta'_\mu\,;$$

ſo erhellet zuvörderſt leicht, daß dieſe Größe ſtets poſitiv iſt.

Nach dem Obigen iſt nämlich

$$\begin{aligned} D_\mu = \Theta'_\mu x^{m-\mu-1} &+ (a_{\mu+2} - c_{\mu+2}k - \ldots - c_3 k_{\mu-1})x^{m-\mu-2} \\ &+ (a_{\mu+3} - c_{\mu+3}k - \ldots - c_4 k_{\mu-1})x^{m-\mu-3} \\ &+ (a_{\mu+4} - c_{\mu+4}k - \ldots - c_5 k_{\mu-1})x^{m-\mu-4} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Wäre nun Θ'_μ negativ, ſo wäre, weil nach 4.

$$x^{m-\mu-1} > a_{\mu+2}x^{m-\mu-2} + a_{\mu+3}x^{m-\mu-3} + a_{\mu+4}x^{m-\mu-4} + \ldots$$

iſt, auch

$$\Theta'_\mu x^{m-\mu-1} + a_{\mu+2}x^{m-\mu-2} + a_{\mu+3}x^{m-\mu-3} + a_{\mu+4}x^{m-\mu-4} + \ldots\ldots$$

und folglich auch D_μ negativ, da doch nach dem Obigen dieſe Größe offenbar poſitiv iſt. Alſo muß Θ'_μ poſitiv ſeyn, wie behauptet wurde.

Man nehme nun die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta'_\mu}{cx + c_1}$$

enthaltene ganze Zahl k'_μ; ſo läßt ſich zuerſt zeigen, daß dieſe Zahl jederzeit eine einziffrige Zahl oder kleiner als x iſt.

Weil nämlich die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta_\mu}{c}$$

enthaltene ganze Zahl k_μ eine einziffrige Zahl; ſo iſt

$$cx > \Theta_\mu$$

und folglich nach 4.

$$cx^2 + c_1 x > \Theta_\mu x + a_{\mu+1},$$

d. i.

$$(cx + c_1)x > \Theta_\mu x + a_{\mu+1}.$$

Alſo iſt offenbar um ſo mehr

$$(cx + c_1)x > \Theta'_\mu,$$

wodurch die aufgeſtellte Behauptung bewieſen iſt.

Ferner läßt ſich zeigen, daß die $(\mu + 1)$te Ziffer des geſuchten Quotienten nicht größer als k'_μ ſeyn kann.

Weil nämlich k'_μ die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta'_\mu}{cx + c_1}$$

enthaltene ganze Zahl iſt; ſo iſt

$$(cx + c_1)(k'_\mu + 1) > \Theta'_\mu$$

und folglich nach 4.

$$(cx + c_1)(k'_\mu + 1)x^{m-\mu-1}$$
$$> \Theta'_\mu x^{m-\mu-1} + a_{\mu+2}x^{m-\mu-2} + a_{\mu+3}x^{m-\mu-3} + \ldots\ldots$$

Alſo iſt offenbar um ſo mehr

$$(cx + c_1)(k'_\mu + 1)x^{m-\mu-1} > D_\mu,$$

und folglich offenbar auch

$$\Delta(k'_\mu + 1)x^{m-n-\mu} > D_\mu,$$

ſo daß alſo die $(\mu + 1)$te Ziffer des geſuchten Quotienten nicht $k'_\mu + 1$, ſondern höchſtens k'_μ ſeyn kann.

Wenn nun

$$\Theta'_\mu - (cx + c_1)k'_\mu \overline{\gtrless}\ k + k_1 + k_2 + \ldots + k_{\mu-1} + k'_\mu$$

iſt; ſo iſt jederzeit k'_μ die richtige $(\mu + 1)$te Ziffer des geſuchten Quotienten, wie auf folgende Art gezeigt werden kann.

Nach 3. iſt

$$\Delta < (cx + c_1 + 1)x^{n-1}$$

und folglich

$$\Delta k'_\mu x^{m-n-\mu} < (cx + c_1 + 1)k'_\mu x^{m-\mu-1}.$$

Nach 3. iſt aber auch

$$(cx + c_1 + 1)k'_\mu x^{m-\mu-1} + (c_{\mu+2}x^{m-\mu-2} + c_{\mu+3}x^{m-\mu-3} + \ldots)k$$
$$+ (c_{\mu+1}x^{m-\mu-2} + c_{\mu+2}x^{m-\mu-3} + \ldots)k_1$$
$$+ (c_\mu x^{m-\mu-2} + c_{\mu+1}x^{m-\mu-3} + \ldots)k_2$$
u. ſ. w.
$$+ (c_3 x^{m-\mu-2} + c_4 x^{m-\mu-3} + \ldots)k_{\mu-1}$$

$$< (cx + c_1 + 1) k'_\mu x^{m-\mu-1} + (c_{\mu+2} + 1) k x^{m-\mu-2} + (c_{\mu+1} + 1) k_1 x^{m-\mu-2} + (c_\mu + 1) k_2 x^{m-\mu-2} \text{ u. ſ. w. } + (c_3 + 1) k_{\mu-1} x^{m-\mu-2}$$

$$< \{k + k_1 + k_2 + \ldots + k_{\mu-1} + (cx + c_1 + 1) k'_\mu\} x^{m-\mu-1},$$

weil $c_3 < x$, $c_4 < x$, $c_5 < x$, ... $c_{\mu+2} < x$ iſt.

Nach der Vorausſetzung iſt aber

$$\Theta'_\mu \overline{\overline{>}} k + k_1 + k_2 + \ldots + \ldots + k_{\mu-1} + (cx + c_1 + 1) k'_\mu .$$

Alſo iſt die obige Größe kleiner als

$$\Theta'_\mu x^{m-\mu-1}$$

und folglich um ſo mehr kleiner als

$$\Theta'_\mu x^{m-\mu-1} + a_{\mu+2} x^{m-\mu-2} + a_{\mu+3} x^{m-\mu-3} + \ldots\ldots ,$$

oder

$$(cx + c_1 + 1) k'_\mu x^{m-\mu-1}$$

$$< \Theta'_\mu x^{m-\mu-1} + (a_{\mu+2} - c_{\mu+2} k - \ldots - c_3 k_{\mu-1}) x^{m-\mu-2} + (a_{\mu+3} - c_{\mu+3} k - \ldots - c_4 k_{\mu-1}) x^{m-\mu-3} + (a_{\mu+4} - c_{\mu+4} k - \ldots - c_5 k_{\mu-1}) x^{m-\mu-4} + \ldots\ldots$$

Alſo iſt offenbar nach dem Obigen

$$\Delta k'_\mu x^{m-n-\mu} < D_\mu ,$$

und k'_μ iſt folglich nicht zu groß, ſo daß alſo k'_μ, weil es nach dem Obigen auch nicht zu klein iſt, die richtige $(\mu + 1)$te Ziffer des geſuchten Quotienten iſt.

Daß man nun, indem man immer $cx + c_1$ als den überſtrichenen Diviſor betrachtet, die Rechnung nach dem in 7. gelehrten Verfahren, ſo lange ſich dieſes Verfahren anwenden läßt, weiter fortſetzen kann, erhellet von ſelbſt.

Wenn alſo

$$\Theta_\mu - ck_\mu < k + k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_\mu$$

und

$$\Theta_{\mu+1} \overline{\overline{>}} 0$$

iſt, zieht man zu der Zahl Θ_μ die Ziffer $a_{\mu+1}$ des gegebenen Dividendus herunter, überſtreicht noch die Ziffer c_1 des gegebenen Diviſors, zieht von der durch das Herunternehmen der Ziffer $a_{\mu+1}$ erhaltenen Zahl

$$\Theta_\mu x + a_{\mu+1}$$

die Größe

$$c_{\mu+1} k + c_\mu k_1 + c_{\mu-1} k_2 + \ldots\ldots + c_2 k_{\mu-1}$$

ab, und wendet nun, indem man immer $cx + c_1$ als den überſtrichenen Diviſor betrachtet, wieder das in 7. gelehrte Verfahren ſo lange an, wie ſich daſſelbe anwenden läßt.

Das folgende Beiſpiel wird dies deutlicher machen.

9753864579 | 246'8'3'5'7'9'24 | 253064
18
66 (6 > 2; 2 richtig)
14 = 2.7
2ter part. verb. Divid. 52
45
78 (7 = 2 + 5; 5 richtig)
45 = 2.5 + 5.7
3ter part. verb. Divid. 33
27
63 (6 < 2 + 5 + 3; 3 unſicher)
52 = 2.3 + 5.5 + 3.7
11

Da jetzt offenbar der vorher betrachtete Fall eingetreten iſt; ſo nehmen wir zu 33 die Ziffer 3 des Dividendus herunter, überſtreichen gleichzeitig noch die Ziffer 7 des Dividendus, und rechnen nun auf folgende Art weiter.

333
31 = 2.3 + 5.5
Neuer part. verb. Divid. . 302
291
115 (11 > 2 + 5 + 3; 3 richtig)
46 = 2.8 + 5.3 + 3.5
2ter part. verb. Divid. ... 69
0
697 (69 > 2 + 5 + 3 + 0; 0 richtig)
61 = 2.6 + 5.8 + 3.3 + 0.5
3ter part. verb. Divid. ... 636
582
549 (54 > 2 + 5 + 3 + 0 + 6; 6 richtig)
92 = 2.4 + 5.6 + 3.8 + 0.3 + 6.5
4ter part. verb. Divid. ... 457
388
69 (69 > 2 + 5 + 3 + 0 + 6 + 4; 4 richtig).

Im Vorhergehenden iſt die Bedingung

$$\Theta'_\mu - (cx + c_1)k'_\mu \geqq k + k_1 + k_2 + \ldots + k_{\mu-1} + k'_\mu$$

als erfüllt vorausgeſetzt worden.

Wäre aber dieſe Bedingung nicht erfüllt, und folglich

$$\Theta'_\mu - (cx + c_1)\,k'_\mu < k + k_1 + k_2 + \ldots k_{\mu-1} + k'_\mu\,;$$

ſo würde man wieder zunächſt die Größe

$$\Theta'_{\mu+1} = \{\Theta'_\mu - (cx + c_1)\}x + a_{\mu+2} - c_{\mu+2}\,k - \ldots - c_3\,k_{\mu-1} - c_2\,k'_\mu$$

bilden, und unterſuchen, ob $\Theta'_{\mu+1} \geqq 0$ oder $\Theta'_{\mu+1} < 0$ iſt.

Fände das Erſte Statt, ſo daß alſo

$$\Theta'_{\mu+1} \geqq 0$$

wäre; ſo würde man zu der Zahl Θ'_μ die Ziffer $a_{\mu+2}$ des Dividendus herunter nehmen, gleichzeitig noch die Ziffer c_2 des Diviſors überſtreichen, die Größe

$$c_{\mu+2}k + c_{\mu+1}k_1 + c_\mu k_2 + \ldots + c_3 k_{\mu-1}$$

bilden, und dieſelbe von

$$\Theta'_\mu x + a_{\mu+2}$$

abziehen. Hierauf würde man, indem die erhaltene Differenz

$$\Theta'_\mu x + a_{\mu+2} - c_{\mu+2}k - c_{\mu+1}k_1 - c_\mu k_2 - \ldots - c_3 k_{\mu-1} = \Theta''_\mu$$

geſetzt wird, die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta''_\mu}{cx^2 + c_1 x + c_2}$$

enthaltene ganze Zahl k''_μ nehmen, und dieſe Zahl würde dann, wenn

$$\Theta''_\mu - (cx^2 + c_1 x + c_2)k''_\mu \overline{\gtrless} k + k_1 + k_2 + \ldots k_{\mu-1} + k''_\mu$$

wäre, die richtige $(\mu + 1)$te Ziffer des geſuchten Quotienten ſeyn.

Dies noch weiter aus einander zu ſetzen, halten wir für unnöthig, weil alles Obige mit geringen Modificationen auch hier Anwendung findet.

Bemerken müſſen wir aber, daß die von uns hier gegebenen Vorſchriften von den Regeln, welche Fourier zu befolgen lehrt, einigermaßen abweichen. Fourier ſagt nämlich, wobei vorzüglich das auf pag. 192 der Analyse des équations gerechnete Exempel zu vergleichen iſt, daß, wenn

$$\Theta_\mu - ck_\mu < k + k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_\mu$$

und zugleich

$$\Theta_{\mu+1} \overline{\gtrless} 0$$

ſey, wo wie oben

$$\Theta_{\mu+1} = (\Theta_\mu - ck_\mu)x + a_{\mu+1} - c_{\mu+1}k - c_\mu k_1 - \ldots - c_1 k_\mu$$

iſt, k_μ nicht zu groß und folglich die richtige $(\mu + 1)$te Ziffer des geſuchten Quotienten ſey. Daß aber dieſes Princip, und folglich auch das von Fourier angegebene Verfahren, welches ohne das in Rede ſtehende Princip nicht beſtehen kann, nicht allgemein richtig iſt, läßt ſich, wie es uns ſcheint, an unendlich vielen Beiſpielen nachweiſen. Wir wählen dazu das folgende Exempel, welches wir ganz nach dem von Fourier a. a. O. aufgeſtellten Muſter rechnen werden.

$\overline{44}2037895 \mid \overline{3845}'6'589746 \mid 87$

352

$\overline{325}$ (32 > 8; 8 richtig)

$16 = 8.2$

$\overline{309}$

308

$\overline{16}$ (1 < 8 + 7; 7 unſicher)

$14 = 8.0 + 7.2$

$\overline{2}$ (weil ſich die Verbeſſerung anbringen läßt, ſo iſt 7 richtig).

Auf die letzte Art würde man nach Fourier, wenn wir anders ſeine Worte richtig verſtehen, ſchließen. Daß aber dieſer Schluß im vorliegenden Falle unrichtig iſt, erhellet auf der Stelle, weil

$$442037895.87 = 38457296865$$

und die zweite Ziffer 7 des geſuchten Quotienten alſo offenbar zu groß iſt.

Hiernach dürften alſo auch die von Drobiſch in ſeiner ſchon S. 569 angeführten Schrift gegebenen Regeln in mehrern Punkten einer Berichtigung bedürfen.

Nach den von uns oben gegebenen Regeln läßt ſich das vorhergehende Exempel nicht vollſtändig rechnen, weil dabei der Fall eintritt, den wir jetzt ſogleich betrachten werden.

II. Wenn nämlich, immer unter der Vorausſetzung, daß

$$\Theta_\mu - ck_\mu < k + k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_\mu$$

iſt,

$$\Theta_{\mu+1} < 0$$

iſt; ſo kann man jederzeit behaupten, daß die $(\mu+1)$te Ziffer des geſuchten Quotienten kleiner als k_μ, daß alſo k_μ zu groß iſt, und folglich vermindert werden muß.

Dies läßt ſich auf folgende Art beweiſen.

Es iſt

$$\begin{aligned}
&\Delta k_\mu x^{m-n-\mu} + (c_{\mu+1}k + c_\mu k_1 + \ldots + c_2 k_{\mu-1})x^{m-\mu-1}\\
&\quad + (c_{\mu+2}k + c_{\mu+1}k_1 + \ldots + c_3 k_{\mu-1})x^{m-\mu-2}\\
&\quad + (c_{\mu+3}k + c_{\mu+2}k_1 + \ldots + c_4 k_{\mu-1})x^{m-\mu-3}\\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&= ((cx+c_1)k_\mu + c_{\mu+1}k + c_\mu k_1 + \ldots + c_2 k_{\mu-1})x^{m-\mu-1}\\
&\quad + (c_{\mu+2}k + c_{\mu+1}k_1 + c_\mu k_2 + \ldots + c_2 k_\mu)x^{m-\mu-2}\\
&\quad + (c_{\mu+3}k + c_{\mu+2}k_1 + c_{\mu+1}k_2 + \ldots + c_3 k_\mu)x^{m-\mu-3}\\
&\quad + (c_{\mu+4}k + c_{\mu+3}k_1 + c_{\mu+2}k_2 + \ldots + c_4 k_\mu)x^{m-\mu-4}\\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

und nach der Vorausſetzung, weil $\Theta_{\mu+1} < 0$ iſt, iſt

$$\Theta_\mu x + a_{\mu+1} < (cx + c_1)k_\mu + c_{\mu+1}k + c_\mu k_1 + \ldots + c_2 k_{\mu-1}.$$

Alſo iſt nach 4.

$$\begin{aligned}
&\Delta k_\mu x^{m-n-\mu} + (c_{\mu+1}k + c_\mu k_1 + \ldots + c_2 k_{\mu-1})x^{m-\mu-1}\\
&\quad + (c_{\mu+2}k + c_{\mu+1}k_1 + \ldots + c_3 k_{\mu-1})x^{m-\mu-2}\\
&\quad + (c_{\mu+3}k + c_{\mu+2}k_1 + \ldots + c_4 k_{\mu-1})x^{m-\mu-3}\\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&> (\Theta_\mu x + a_{\mu+1})x^{m-\mu-1} + a_{\mu+2}x^{m-\mu-2} + a_{\mu+3}x^{m-\mu-3} + \ldots
\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
&\Theta_\mu x^{m-\mu} + (a_{\mu+1} - c_{\mu+1}k - c_\mu k_1 - \ldots - c_2 k_{\mu-1})x^{m-\mu-1}\\
&\quad + (a_{\mu+2} - c_{\mu+2}k - c_{\mu+1}k_1 - \ldots - c_3 k_{\mu-1})x^{m-\mu-2}\\
&\quad + (a_{\mu+3} - c_{\mu+3}k - c_{\mu+2}k_1 - \ldots - c_4 k_{\mu-1})x^{m-\mu-3}\\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad - \Delta k_\mu x^{m-n-\mu} < 0,
\end{aligned}$$

d. i.

$$D_\mu - \Delta k_\mu x^{m-n-1} < 0,$$

ſo daß alſo offenbar k_μ zu groß iſt, wie behauptet wurde.

Man könnte fragen, um wie viele Einheiten man in dieſem Falle k_μ vermindern müſſe, um die $(\mu + 1)$te Ziffer des geſuchten Quotienten zu erhalten. Fourier giebt die Regel, daß man k_μ um eine Einheit vermindern müſſe, und derſelben Anſicht ſcheint auch Drobiſch zu ſeyn. Fourier ſagt p. 189 ſeines oben angeführten Werks ausdrücklich: si elle (la correction) ne pouvait être faite on en conclurait que le chiffre écrit au quotient est trop fort: il faudrait donc le diminuer d'une unité. Wir wollen ſehen, ob und in wie weit dieſe Regel richtig iſt.

Daß dieſelbe zuvörderſt nicht allgemein gültig iſt, läßt ſich leicht an Beiſpielen zeigen. Wir wählen dazu folgendes.

$$\begin{array}{l|l|l} \overline{2}9989 & \overline{11}3'1256 & 5 \\ & \underline{10} & \\ & \overline{1}3\ (1 < 5;\ 5\ \text{unſicher}) & \\ & \underline{45} = 5.9 & \end{array}$$

Da alſo in dieſem Falle die Größe 13 — 45 negativ iſt; ſo iſt, wie vorher im Allgemeinen ſtreng bewieſen worden iſt, 5 zu groß, und müßte alſo, um die richtige erſte Ziffer des geſuchten Quotienten zu finden, nach Fourier um eine Einheit vermindert werden, wodurch man alſo 4 als die richtige erſte Ziffer des geſuchten Quotienten erhalten würde. Daß aber 4 im vorliegenden Falle noch zu groß iſt, erhellet auf der Stelle, weil

$$29989 . 4 = 119956$$

iſt.

Weil es intereſſant und für die möglichſte Abkürzung der Rechnung nicht ohne Wichtigkeit iſt, die Bedingung zu kennen, welche erfüllt ſeyn muß, wenn man ſoll behaupten können, daß $k_\mu - 1$ die richtige $(\mu + 1)$te Ziffer des geſuchten Quotienten iſt; ſo wollen wir dieſe Bedingung hier noch entwickeln, welches auf folgende Art leicht geſchehen kann.

Nach dem Obigen würde bekanntlich $k_\mu - 1$ die richtige $(\mu + 1)$te Ziffer des geſuchten Quotienten ſeyn, wenn

$$\Theta_\mu - c(k_\mu - 1) \overline{\overline{>}} k + k_1 + k_2 + \ldots + k_{\mu-1} + (k_\mu - 1)$$

wäre.

Wäre nun

$$\Theta_\mu - c(k_\mu - 1) < k + k_1 + k_2 + \ldots + k_{\mu-1} + (k_\mu - 1);$$

ſo wäre

$$\Theta_\mu < k + k_1 + k_2 + \ldots + k_{\mu-1} + (c + 1)(k_\mu - 1).$$

Weil aber k_μ die größte in

$$\frac{\Theta_\mu}{c}$$

enthaltene ganze Zahl iſt; ſo iſt

$$ck_\mu \overline{\overline{<}} \Theta_\mu,$$

und alſo

$$ck_\mu < k + k_1 + k_2 + \ldots + k_{\mu-1} + (c+1)(k_\mu - 1)],$$

woraus leicht

$$0 < k + k_1 + k_2 + \ldots + k_\mu - c - 1$$

oder

$$k + k_1 + k_2 + \ldots + k_\mu > c + 1$$

folgt.

Wenn alſo

$$\Theta_\mu - c(k_\mu - 1) < k + k_1 + k_2 + \ldots + k_{\mu-1} + (k_\mu - 1)$$

iſt; ſo iſt jederzeit

$$k + k_1 + k_2 + \ldots + k_\mu > c + 1,$$

und ſo lange folglich

$$k + k_1 + k_2 + \ldots + k_\mu$$

nicht größer als $c + 1$ iſt, iſt jederzeit

$$\Theta_\mu - c(k_\mu - 1) \overline{\overline{>}} k + k_1 + k_2 + k_{\mu-1} + (k_\mu - 1),$$

alſo $k_\mu - 1$ die richtige $(\mu + 1)$te Ziffer des geſuchten Quotienten.

Hieraus geht hervor, daß die von Fourier gegebene Regel deſto länger bei der Ausführung der Rechnung anwendbar ſeyn wird, je größer der überſtrichene Diviſor iſt. Bei dem p. 191 ſeines Werks von Fourier gerechneten Exempel, wo der Fall, mit dem wir uns jetzt beſchäftigen, vorkommt, iſt der überſtrichene Diviſor 234, und man wird ſich alſo nach dem, was wir vorher geſehen haben, nicht wundern, daß bei dieſem Exempel die von Fourier gegebene Regel anwendbar iſt.

Im Allgemeinen läßt ſich aber nach unſerer Meinung bloß die Regel geben, daß man k_μ ſo lange nach und nach um ganze Einheiten vermindern muß, bis ſich die Rechnung entweder nach den oben in I., oder den in 7. gegebenen Regeln ungehindert weiter führen läßt.

Wir kehren jetzt wieder zu dem in 7. gerechneten Exempel zurück, indem wir daſſelbe nun nach der vorher gefundenen Regel weiter fortführen wollen, wobei wir übrigens bemerken, daß dieſes Exempel mit dem vorher erwähnten, von Fourier gegebenen Exempel einerlei iſt.

234567898765 | 12345'6'7'8'9'8'7'3647 | 52631589
1170 7
645 (64 > 5; 5 richtig)
25 = 5.5
2ter part. verb. Divid. 620
468
1526 (152 > 5 + 2; 2 richtig)
40 = 5.6 + 2.5
3ter part. verb. Divid. 1486
1404
827 (82 > 5 + 2 + 6; 6 richtig)
77 = 5.7 + 2.6 + 6.5
4ter part. verb. Divid. 750
702
488 (48 > 5 + 2 + 6 + 3; 3 richtig)
105 = 5.8 + 2.7 + 6.6 + 3.5
5ter part. verb. Divid. 383
234
1499 (149 > 5 + 2 + 6 + 3 + 1; 1 richtig)
126 = 5.9 + 2.8 + 3.6 + 1.5)
6ter part. verb. Divid. 1373
1170
2038 (203 > 5 + 2 + 6 + 3 + 1 + 5; 5 richtig)
158 = 5.8 + 2.9 + 6.8 + 3.7 + 1.6 + 5.5
7ter part. verb. Divid. 1880
1872
87 (8 < 5 + 2 + 3 + 1 + 5 + 8; 8 unſicher)
206 (8 iſt zu groß)

1638 (für 8 iſt 7 geſchrieben.)
2427 (242 > 5 + 2 + 6 + 3 + 1 + 5 + 7; 7 richtig)
201 = 5.7 + 2.8 + 6.9 + 3.8 + 1.7 + 5.6 + 7.5
8ter part. verb. Divid. 2226
2106
120 (120 > 5 + 2 + 6 + 3 + 1 + 5 + 7 + 9; 9 richtig)

Nach dem im Obigen gegebenen Regeln wird man nun gewiß die ſogenannte geordnete Diviſion in allen Fällen mit Sicherheit auszuführen im Stande ſeyn. In der Art, wie man die Diviſion gewöhnlich ausführt, indem man nämlich gleich vom Anfange an mit allen Ziffern des Diviſors in den Dividendus eingeht, iſt unſtreitig ein großer Aufwand zweckloſer Rechnung enthalten, weil auf der Stelle erhellet, daß zur Beſtimmung der erſten Ziffer des Quotienten ſchon die Berückſichtigung nur weniger Anfangsziffern des Diviſors ausreicht, und daß nur allmälig die dieſen Anfangsziffern folgenden Ziffern des Diviſors auf die Richtigkeit der Ziffern des Quotienten Einfluß haben werden, ſo daß alſo vergebliche Mühe aufgewandt wird, wenn man die Ziffern des Diviſors früher in die Rechnung einführt, als ſie auf die Ziffern des Quotienten Einfluß haben. Dieſen Uebel-

ſtand zu vermeiden iſt, wie man leicht überſehen wird, der Hauptzweck der von Fourier gegebenen Regeln der geordneten Diviſion, indem bei derſelben die Ziffern des Diviſors in der That nur nach und nach, überhaupt nur erſt dann in die Rechnung eingeführt werden, wenn ſie auf die Ziffern des Quotienten Einfluß haben. Wie ſehr aber dieſe Diviſionsmethode geeignet iſt, die bei der Auflöſung der Zahlengleichungen vorkommenden numeriſchen Rechnungen zu erleichtern und abzukürzen: davon wird man ſich bei einer nähern Anſicht des Artikels Gleichung ſogleich überzeugen.

Bayerische Staatsbibliothek München

Druckfehler.

S. 25. Z. 10. v. u. ſt. des zweiten Kommas ſ. m. ein Semicolon.
— — — 15. v. u. ſt. z ſ. m. y.
— 250. — 7. v. u. ſt. s'^2 ſ. m. $\partial s'^2$.
— 343. — 14. v. u. hinter können ſchalte man die Worte zerlegen läßt ein.
— 456. — 4. v. u. ſt. α_3 ſ. m. a_3.
— 700. — 20. ſt. n'est ſ. m. n est.
— 713. — 10. ſt. 326. ſ. m. 336.
— 716. — 4. hinter Größe ſchalte man das Wort bezeichnen ein.
— 737. — 7. ſt. x für z ſ. m. z für x.
— — — 10. hinter Größen ſchalte man x, y ein.
— 738. — 16. v. u. ſt. $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ ſ. m. $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$.
— — — 15. v. u. ſt. $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ ſ. m. $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$.
— 752. — 5. v. u. ſt. $\frac{\partial^2 y}{\partial x_2}$ ſ. m. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.
— 760. — 11. ſt. wichtigen ſ. m. wichtige.
— 825. — 11. ſt. ſie ſ. m. ſich.
— 912. — 12. v. u. ſt. 54 ſ. m. 54*.

Die beiden zu Fig. 42. auf Taf. IV. gehörenden Theile ſind durch einen Haken zu verbinden.

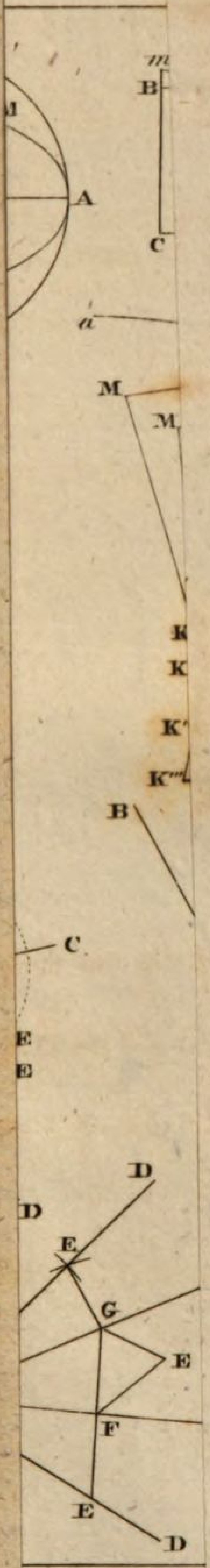
In Fig. 43. auf Taf. IV. ſind an die Linien PB und PC die Buchſtaben b und c zu ſchreiben.

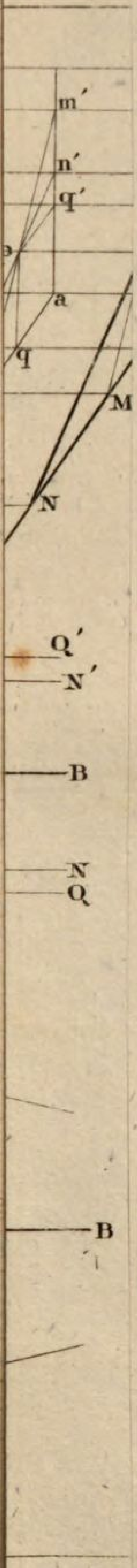
In Fig. 45. auf Taf. IV. iſt der Durchſchnittspunkt von MQ und NP durch E zu bezeichnen.

Einige nachträgliche Berichtigungen zum erſten Theile.

S. 92. Z. 8. ſt. Krümmung ſ. m. Berührung.
— 306. — 9. v. u. ſt. cos x ſ. m. cos Θ.
— 337. — 13. v. u. ſt. α ſ. m. a.
— 686. — 5. v. u. ſt. $(x, y)\partial y$ ſ. m. $\varphi(x, y)\partial y$.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

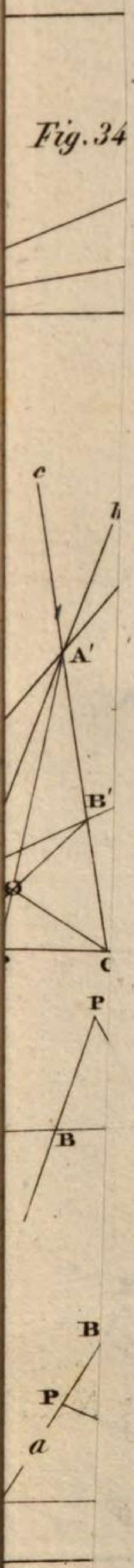

m
B
M
A
C
a
M
M
K
K
K'
K'''
B
C
E
E
D
D
E
G
E
F
E
D



m′
n′
q′
a
q
M
N
Q′
N′
B
N
Q
B

g. 3

Fig.34



Schi

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Klügel, Georg Simon, / Mollweide, Karl Brandan, / Grunert, Johann August,

Mathematisches Wörterbuch oder Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik mit den nöthigen Beweisen und literarischen Nachrichten begleitet ; in alphabetischer Ordnung
Bd.: [6],2

Leipzig 1836

Math.u. 90 m-6,2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594032-2